Trzy ciała, trzy geometrie, trzy równania

Marcin Sroka

WMiI
Uniwersytet Jagielloński

2 czerwca 2022

Trzy ciała

Twierdzenie (Frobenius 1878)

Jedyne skończenie wymiarowe, rzeczywiste, łączne algebry z dzieleniem to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *oraz* $\mathbb{H}$.

Trzy ciała

Twierdzenie (Frobenius 1878)

Jedyne skończenie wymiarowe, rzeczywiste, łączne algebry z dzieleniem to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *oraz* $\mathbb{H}$.

Twierdzenie (Hurwitz !1898)

Jedyne skończenie wymiarowe, unormowane algebry z dzieleniem to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ *oraz* $\mathbb{O}$.

Trzy geometrie

Twierdzenie (Berger '55)

Niech (M, g) będzie zwartą, jednospójną, niesymetryczną i nieredukowalną rozmaitością Riemannowską wymiaru n. Holonomia koneksji Levi-Civity ∇^{LC} jest izomorficzna z jedną spośród grup:

Twierdzenie (Berger '55)

Niech (M, g) będzie zwartą, jednospójną, niesymetryczną i nieredukowalną rozmaitością Riemannowską wymiaru n. Holonomia koneksji Levi-Civity ∇^{LC} jest izomorficzna z jedną spośród grup:

- $SO(n)$ - ***geometria rzeczywista***

Trzy geometrie

Twierdzenie (Berger '55)

Niech (M, g) będzie zwartą, jednospójną, niesymetryczną i nieredukowalną rozmaitością Riemannowską wymiaru n. Holonomia koneksji Levi-Civity ∇^{LC} jest izomorficzna z jedną spośród grup:

- $SO(n)$ - ***geometria rzeczywista***
- $\left.\begin{matrix} U(\frac{n}{2}) \\ SU(\frac{n}{2}) \end{matrix}\right\}$ - ***geometria zespolona***

Trzy geometrie

Twierdzenie (Berger '55)

Niech (M, g) będzie zwartą, jednospójną, niesymetryczną i nieredukowalną rozmaitością Riemannowską wymiaru n. Holonomia koneksji Levi-Civity ∇^{LC} jest izomorficzna z jedną spośród grup:

- $SO(n)$ - ***geometria rzeczywista***
- $\left.\begin{array}{l} U(\frac{n}{2}) \\ SU(\frac{n}{2}) \end{array}\right\}$ - ***geometria zespolona***
- $\left.\begin{array}{l} Sp(\frac{n}{4}) \\ Sp(\frac{n}{4}) \cdot Sp(1) \end{array}\right\}$ - ***geometria kwaternionowa***

Trzy geometrie

Twierdzenie (Berger '55)

Niech (M, g) będzie zwartą, jednospójną, niesymetryczną i nieredukowalną rozmaitością Riemannowską wymiaru n. Holonomia koneksji Levi-Civity ∇^{LC} jest izomorficzna z jedną spośród grup:

- $SO(n)$ - ***geometria rzeczywista***
- $\left.\begin{array}{l} U(\frac{n}{2}) \\ SU(\frac{n}{2}) \end{array}\right\}$ - ***geometria zespolona***
- $\left.\begin{array}{l} Sp(\frac{n}{4}) \\ Sp(\frac{n}{4}) \cdot Sp(1) \end{array}\right\}$ - ***geometria kwaternionowa***
- $\left.\begin{array}{l} G_2 \\ Spin(7) \end{array}\right\}$ - ***"exceptional geometry"***

Trzy geometrie

Twierdzenie (Berger '55)

Niech (M, g) będzie zwartą, jednospójną, niesymetryczną i nieredukowalną rozmaitością Riemannowską wymiaru n. Holonomia koneksji Levi-Civity ∇^{LC} jest izomorficzna z jedną spośród grup:

- $SO(n)$ - ***geometria rzeczywista***
- $\left.\begin{matrix} U(\frac{n}{2}) \\ SU(\frac{n}{2}) \end{matrix}\right\}$ - ***geometria zespolona***
- $\left.\begin{matrix} Sp(\frac{n}{4}) \\ Sp(\frac{n}{4}) \cdot Sp(1) \end{matrix}\right\}$ - ***geometria kwaternionowa***
- $\left.\begin{matrix} G_2 \\ Spin(7) \end{matrix}\right\}$ - ***"exceptional geometry"***

Trzy równania

Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$, szukamy wypukłego $u \in C^\infty(\Omega)$ takiego, że

$$MA_{\mathbb{R}}(u) := \det Hess(u, \mathbb{R}) = e^f$$

gdzie $Hess(u, \mathbb{R}) = (u_{ij})_{i,j}$ dla $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Trzy równania

Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$, szukamy wypukłego $u \in C^\infty(\Omega)$ takiego, że

$$MA_{\mathbb{R}}(u) := \det Hess(u, \mathbb{R}) = e^f$$

gdzie $Hess(u, \mathbb{R}) = (u_{ij})_{i,j}$ dla $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.
Dla (M, g) zamkniętej rozmaitości Riemannowskiej

$$\det\left(g + (\nabla^{LC})^2 \phi\right) = e^f.$$

Trzy równania

Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$, szukamy plurisubharmonicznego $u \in C^\infty(\Omega)$ takiego, że

$$MA_{\mathbb{C}}(u) := \det Hess(u, \mathbb{C}) = f$$

gdzie

$$\mathbb{C}^n \ni (z_i)_i = (x_i + \mathrm{i} y_i)_i$$
$$\frac{\partial u}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y_i}\right), \ \frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)$$

$Hess(u, \mathbb{C}) = (u_{i\bar{j}})_{i,j}$ dla $u_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}$.

Trzy równania

Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$, szukamy plurisubharmonicznego $u \in C^\infty(\Omega)$ takiego, że

$$MA_{\mathbb{C}}(u) := \det Hess(u, \mathbb{C}) = f$$

gdzie

$$\mathbb{C}^n \ni (z_i)_i = (x_i + \mathrm{i} y_i)_i$$
$$\frac{\partial u}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y_i}\right), \ \frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)$$

$Hess(u, \mathbb{C}) = (u_{i\bar{j}})_{i,j}$ dla $u_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}$.
Dla (M, I, g) zamkniętej rozmaitości hermitowskiej

$$(\omega + \mathrm{i}\partial\overline{\partial}\phi)^n = e^f \omega^n$$

Trzy równania

Kwaternionowe równanie Monge'a-Ampère'a

Niech $\Omega \subset \mathbb{H}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$, szukamy q-plurisubharmonicznego $u \in C^\infty(\Omega)$ takiego, że

$$MA_{\mathbb{H}}(u) := \det Hess(u, \mathbb{H}) = f$$

gdzie

$$\begin{gathered} \mathbb{H}^n \ni (q_i)_i = (a_i + \mathfrak{i} b_i + \mathfrak{j} c_i + \mathfrak{k} d_i)_i \\ \frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial a_i} - \mathfrak{i}\frac{\partial u}{\partial b_i} - \mathfrak{j}\frac{\partial u}{\partial c_i} - \mathfrak{k}\frac{\partial u}{\partial d_i}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial \overline{q_j}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial a_i} + \frac{\partial u}{\partial b_i}\mathfrak{i} + \frac{\partial u}{\partial c_i}\mathfrak{j} + \frac{\partial u}{\partial d_i}\mathfrak{k}\right) \end{gathered}$$

$Hess(u, \mathbb{H}) = (u_{i\bar{j}})_{i,j}$ dla $u_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial \overline{q_j}}$.

Definicja

(M, I, J, K) nazywamy hiperzespoloną jeśli trzy struktury zespolone I, J oraz K spełniają

$$IJK = -id_{TM}.$$

Metrykę Riemannowską g na M nazywamy hiperhermitowską jeśli

$$g(\cdot I, \cdot I) = g(\cdot J, \cdot J) = g(\cdot K, \cdot K) = g.$$

Primer o rozmaitościach hiperzespolonych

Definicja

(M, I, J, K) nazywamy hiperzespoloną jeśli trzy struktury zespolone I, J oraz K spełniają

$$IJK = -id_{TM}.$$

Metrykę Riemannowską g na M nazywamy hiperhermitowską jeśli

$$g(\cdot I, \cdot I) = g(\cdot J, \cdot J) = g(\cdot K, \cdot K) = g.$$

Przykład

*(M, I, J, K, g) nazywamy HiperKählerowską (**HK**) jeśli*

$$d\omega_I = d\omega_J = d\omega_K = 0$$

gdzie $\omega_L = g(\cdot L, \cdot)$.

Przestrzenie euklidesowe ze strukturą

Hermitowska

$$\begin{array}{rcr} & & (\mathbb{R}^{2n}, \mathrm{i}, g, \omega, h) \\ (\mathbb{C}^n, h) & & g = g(\cdot \mathrm{i}, \cdot \mathrm{i}) \\ & \longleftrightarrow & \\ h = dz_i \otimes d\bar{z}_i & & \omega = g(\cdot \mathrm{i}, \cdot) \\ & & h = g - \mathrm{i}\omega \end{array}$$

Hiperhermitowska

$$\begin{array}{rcr} & & (\mathbb{C}^{2n}, \mathrm{j}, \bar{h}, \Omega, H) \\ (\mathbb{H}^n, H) & & h = \bar{h}(\cdot \mathrm{j}, \cdot \mathrm{j}) \\ & \longleftrightarrow & \\ H = \text{"} d\bar{q}_i \otimes dq_i \text{"} & & \Omega = \bar{h}(\cdot \mathrm{j}, \cdot) \\ & & H = \bar{h} + \mathrm{j}\Omega \end{array}$$

HKT metryki

Fakt

Niech (M, I, J, K) *będzie hiperzespolona. Mamy bijekcję:*

$$g \text{ metryka hiperhermitowska}$$
$$\updownarrow$$
$$(2,0) \text{ forma } \Omega \text{ taka, że } \Omega(\cdot J, \cdot J) = \overline{\Omega} \text{ oraz } \Omega \geqslant 0.$$

Fakt

(M, I, J, K, g) *jest* **HK** *gdy*

$$d\Omega = 0.$$

HKT metryki

Fakt

Niech (M, I, J, K) *będzie hiperzespolona. Mamy bijekcję:*

$$g \text{ metryka hiperhermitowska}$$
$$\updownarrow$$
$$(2,0) \text{ forma } \Omega \text{ taka, że } \Omega(\cdot J, \cdot J) = \overline{\Omega} \text{ oraz } \Omega \geqslant 0.$$

Fakt

(M, I, J, K, g) *jest* **HK** *gdy*

$$d\Omega = 0.$$

Definicja

(M, I, J, K, g) *nazywamy HiperKählerowską z torsją (***HKT***) gdy*

$$\partial\Omega = 0.$$

Kwaternionowa hipoteza Calabiego

Hipoteza (Alesker & Verbitsky '08)

Niech (M, I, J, K, g) *będzie* **HKT** *rozmaitością, jeśli* $\mathcal{K}_I$ *jest trywialna, to dla każdej* $f \in C^\infty(M)$ *istnieje jedyna* ϕ *taka, że*

$$(\Omega + \partial\partial_J\phi)^n = e^f\Omega^n$$
$$\Omega + \partial\partial_J\phi > 0 \text{ i.e. ta forma odpowiada metryce}$$
$$sup_M\phi = 0 \text{ - normalizacja dla jedyności}$$

o ile $\int_M e^f\Omega^n \wedge \theta = \int_M \Omega^n \wedge \theta$ *dla anty-holomorficznej trywializacji* θ.

Kwaternionowa hipoteza Calabiego

Hipoteza (Alesker & Verbitsky '08 , optymistyczna)

Niech (M, I, J, K, g) *będzie* **HKT** *rozmaitością, jeśli* $\mathcal{K}_I$ *jest trywialna, to dla każdej* $f \in C^\infty(M)$ *istnieje jedyna* ϕ *taka, że*

$$(\Omega + \partial\partial_J\phi)^n = e^f\Omega^n$$

$$\Omega + \partial\partial_J\phi > 0 \text{ i.e. ta forma odpowiada metryce}$$

$$sup_M\phi = 0 \text{ - normalizacja dla jedyności}$$

o ile $\int_M e^f\Omega^n \wedge \theta = \int_M \Omega^n \wedge \theta$ *dla anty-holomorficznej trywializacji* θ*.*

Hipoteza (Alesker & Verbitsky '08)

Niech (M, I, J, K, g) *będzie* **HKT** *rozmaitością to dla każdej* $f \in C^\infty(M)$ *istnieje jedyna* ϕ *taka, że*

$$(\Omega + \partial\partial_J\phi)^n = e^f\Omega^n$$

$\Omega + \partial\partial_J\phi > 0$ *i.e. ta forma odpowiada metryce*

$sup_M\phi = 0$ *- normalizacja dla jedyności*

Kwaternionowa hipoteza Calabiego

Hipoteza (Alesker & Verbitsky '08 , rozsądna)

Niech (M, I, J, K, g) *będzie* **HKT** *rozmaitością to dla każdej* $f \in C^{\infty}(M)$ *istnieje jedyna* ϕ *oraz* A *taka, że*

$$(\Omega + \partial\partial_J\phi)^n = Ae^f\Omega^n$$

$$\Omega + \partial\partial_J\phi > 0 \textit{ i.e. ta forma odpowiada metryce}$$

$$sup_M\phi = 0 \textit{ - normalizacja dla jedyności}$$

Kwaternionowa hipoteza Calabiego

Hipoteza (Alesker & Verbitsky '08 , rozsądna)

Niech (M, I, J, K, g) *będzie* **HKT** *rozmaitością to dla każdej* $f \in C^\infty(M)$ *istnieje jedyna* ϕ *oraz* A *taka, że*

$$(\Omega + \partial\partial_J\phi)^n = Ae^f\Omega^n$$

$\Omega + \partial\partial_J\phi > 0$ *i.e. ta forma odpowiada metryce*

$sup_M\phi = 0$ *- normalizacja dla jedyności*

Ogólnie, dla **hiperhermitowskiej** (M, I, J, K, g) chcemy badać rozwiązywalność

$$(\Omega + \partial\partial_J\phi)^n = e^f\Omega^n.$$

Strategia

Metoda ciągłości:

$$(\Omega + \partial\partial_J \phi_t)^n = (1-t)\Omega^n + te^f\Omega^n$$

dla $t \in [0,1]$.

C^0 ograniczenie $\longrightarrow$ C^1 ograniczenie $\longrightarrow$ C^2 ograniczenie $\longrightarrow$(twierdzenie Evansa-Krylova) $C^{2,\alpha}$ ograniczenie

C^0 ograniczenie

Twierdzenie (Alesker & Shelukhin '15, S. '19)

Niech (M, I, J, K, g) *będzie* **HKT** *rozmaitością,* $F \in C^\infty(M)$*.*
Istnieje stała C *taka, że dla dowolnego rozwiązania* ϕ *równania*

$$\begin{aligned}(\Omega + \partial\partial_J\phi)^n &= e^F\Omega^n \\ \Omega + \partial\partial_J\phi &\geqslant 0 \\ \sup_M \phi &= 0\end{aligned}$$

zachodzi ograniczenie $\| \phi \|_{L^\infty} \leqslant C$.

Stała C *zależy tylko od* (M, I, J, K, g), $\| e^F \|_{L^q}$ *dla* $q > 2n$ **(S.)**
(w szczególności, tylko od $\| e^F \|_{L^\infty}$ **(Alesker & Shelukhin)***).*

HKT z HK metryk

Twierdzenie (Dinew, S. '21)

Niech (M, I, J, K, g) *będzie zwartą* **HK** *rozmaitością,* $F \in C^{\infty}(M)$ *(odpowiednio znormalizowana). Istnieje jedyne rozwiązanie* ϕ *równania*

$$(\Omega + \partial\partial_J\phi)^n = e^F \Omega^n$$
$$\Omega + \partial\partial_J\phi \geqslant 0$$
$$\sup_M \phi = 0.$$

HKT z HK metryk

Twierdzenie (Dinew, S. '21)

Niech (M, I, J, K, g) *będzie zwartą* **HK** *rozmaitością,* $F \in C^\infty(M)$ *(odpowiednio znormalizowana). Istnieje jedyne rozwiązanie* ϕ *równania*

$$\begin{aligned} (\Omega + \partial\partial_J\phi)^n &= e^F\Omega^n \\ \Omega + \partial\partial_J\phi &\geqslant 0 \\ \sup_M \phi &= 0. \end{aligned}$$

Uwaga

Wystarczy wiedzieć, że (M, I, J, K) *jest* **HK** *typu.*

Twierdzenie (Dinew, S. '21)

Niech (M, I, J, K, g) będzie zwartą **HK** *rozmaitością, $F \in C^\infty(M)$ (odpowiednio znormalizowana). Istnieje jedyne rozwiązanie ϕ równania*

$$\begin{aligned}(\Omega + \partial\partial_J\phi)^n &= e^F\Omega^n\\ \Omega + \partial\partial_J\phi &\geqslant 0\\ \sup_M \phi &= 0.\end{aligned}$$

C^1 ograniczenie $\longrightarrow$ ograniczenie na $\partial\partial_J\phi$ $\longrightarrow$ C^2 ograniczenie

Dziękuję za uwagę!