Grafy kwantowe

Mateusz Wasilewski

IM PAN

2 czerwca 2022

Ogólny plan

Mechanika klasyczna a kwantowa

Klasyczna przestrzeń fazowa

Współrzędne: położenie i pęd $\rightsquigarrow$ interesujące wielkości to funkcje tych dwóch zmiennych.

Mechanika klasyczna a kwantowa

Klasyczna przestrzeń fazowa

Współrzędne: położenie i pęd $\rightsquigarrow$ interesujące wielkości to funkcje tych dwóch zmiennych.

Heisenberg

Współrzędne: operatory położenia i pędu p i q.

Mechanika klasyczna a kwantowa

Klasyczna przestrzeń fazowa

Współrzędne: położenie i pęd $\rightsquigarrow$ interesujące wielkości to funkcje tych dwóch zmiennych.

Heisenberg

Współrzędne: operatory położenia i pędu p i q.
Zasada nieoznaczoności Heiseberga: $[p, q] = i\hbar \rightsquigarrow$ współrzędne na kwantowej przestrzeni fazowej nie komutują.

Mechanika klasyczna a kwantowa

Klasyczna przestrzeń fazowa

Współrzędne: położenie i pęd $\rightsquigarrow$ interesujące wielkości to funkcje tych dwóch zmiennych.

Heisenberg

Współrzędne: operatory położenia i pędu p i q.
Zasada nieoznaczoności Heiseberga: $[p, q] = i\hbar$ $\rightsquigarrow$ współrzędne na kwantowej przestrzeni fazowej nie komutują.

Algebra funkcji wielomianowych jest nieprzemienna. Jakie obiekty dopuszczamy?

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?
Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?
Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?
Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?
Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?
Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?
Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

- B(H);

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?
Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

- B(H);
- $M_n \simeq B(\mathbb{C}^n)$;

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?
Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

- B(H);
- $M_n \simeq B(\mathbb{C}^n)$;
- $C(X) \subset \mathrm{B}(L^2(X, \mu))$, gdzie X jest zwarta.

Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta.
Wszystkie?
Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

- B(H);
- $\boxed{M_n \simeq B(\mathbb{C}^n)}$;
- $C(X) \subset \mathrm{B}(L^2(X,\mu))$, gdzie X jest zwarta.

Jak zdefiniować klasyczne pojęcia topologii/geometrii w tym kontekście?

Słownik

Zwarta przestrzeń X	C^*-algebra $C(X)$
X – skończona	$C(X)$ – skończenie wymiarowa
Miara probabilistyczna μ	dodatni funkcjonał φ taki, że $\varphi(\mathbb{1}) = 1$
funkcja ciągła $f : X \to Y$	$*$-homomorfizm $\Phi : C(Y) \to C(X)$
domknięty podzbiór $Y \subset X$	domknięty ideał $I := \{f \in C(X) : f_{\mid Y} = 0\}$
produkt kartezjański $X \times Y$	iloczyn tensorowy $C(X) \otimes C(Y)$
topologiczna K-teoria	topologiczna K-teoria :)
mnożenie $m : X \times X \to X$	komnożenie $\Delta : C(X) \to C(X) \otimes C(X)$
graf (V, E)	?

Czym właściwie są grafy?

Graf (V, E) to skończony zbiór wierzchołków V i zbiór krawędzi $E \subset V \times V$.

Czym właściwie są grafy?

Graf (V, E) to skończony zbiór wierzchołków V i zbiór krawędzi $E \subset V \times V$. V zastąpimy algebrą macierzową M_n (lub ogólniej – sumą prostą takich algebr), natomiast $\mathbb{1}_E$ będzie idempotentem w $M_n \otimes M_n$.

Czym właściwie są grafy?

Graf (V, E) to skończony zbiór wierzchołków V i zbiór krawędzi $E \subset V \times V$. V zastąpimy algebrą macierzową M_n (lub ogólniej – sumą prostą takich algebr), natomiast $\mathbb{1}_E$ będzie idempotentem w $M_n \otimes M_n$.

W przypadku klasycznym (czyli $\mathbb{C}^n$ zamiast M_n) $\mathbb{1}_E$ jest automatycznie samosprzężony i my też będziemy to zakładać. To oznacza, że $P \in M_n \otimes M_n$ będzie rzutem ortogonalnym.

Czym właściwie są grafy?

Graf (V, E) to skończony zbiór wierzchołków V i zbiór krawędzi $E \subset V \times V$. V zastąpimy algebrą macierzową M_n (lub ogólniej – sumą prostą takich algebr), natomiast $\mathbb{1}_E$ będzie idempotentem w $M_n \otimes M_n$.

W przypadku klasycznym (czyli $\mathbb{C}^n$ zamiast M_n) $\mathbb{1}_E$ jest automatycznie samosprzężony i my też będziemy to zakładać. To oznacza, że $P \in M_n \otimes M_n$ będzie rzutem ortogonalnym.

Ta definicja jest dość naiwna i trudno się z nią pracuje, ale jest dobrym punktem wyjścia do dalszych rozważań.

Grafy kwantowe à la Weaver i Duan-Severini-Winter – systemy operatorowe

Każdy element $X \in M_n \otimes M_n$ zadaje odwzorowanie liniowe $T_X : M_n \to M_n$ przez mnożenie z lewej i prawej strony.

Grafy kwantowe à la Weaver i Duan-Severini-Winter – systemy operatorowe

Każdy element $X \in M_n \otimes M_n$ zadaje odwzorowanie liniowe $T_X : M_n \to M_n$ przez mnożenie z lewej i prawej strony. Jeśli $X = a \otimes b$, to $T_X(c) := acb^T$ – transpozycja jest potrzebna, żeby odwzorowanie $X \mapsto T_X$ miało dobre własności.

Grafy kwantowe à la Weaver i Duan-Severini-Winter – systemy operatorowe

Każdy element $X \in M_n \otimes M_n$ zadaje odwzorowanie liniowe $T_X : M_n \to M_n$ przez mnożenie z lewej i prawej strony. Jeśli $X = a \otimes b$, to $T_X(c) := acb^T$ – transpozycja jest potrzebna, żeby odwzorowanie $X \mapsto T_X$ miało dobre własności.

Jeśli $P \in M_n \otimes M_n$ jest rzutem, to odwzorowanie $T_P : M_n \to M_n$ jest projekcją, której obraz oznaczymy przez S.

Grafy kwantowe à la Weaver i Duan-Severini-Winter – systemy operatorowe

Każdy element $X \in M_n \otimes M_n$ zadaje odwzorowanie liniowe $T_X : M_n \to M_n$ przez mnożenie z lewej i prawej strony. Jeśli $X = a \otimes b$, to $T_X(c) := acb^T$ – transpozycja jest potrzebna, żeby odwzorowanie $X \mapsto T_X$ miało dobre własności.

Jeśli $P \in M_n \otimes M_n$ jest rzutem, to odwzorowanie $T_P : M_n \to M_n$ jest projekcją, której obraz oznaczymy przez S.

Klasyczne grafy

Grafowi (V, E) możemy przyporządkować podprzestrzeń $S := \operatorname{span}\{e_{ij} : i \simeq j \text{ lub } i = j\}$, w której zakodowane są wszystkie własności grafu.

Kwantowa macierz sąsiedztwa (Musto-Reutter-Verdon)

Choi-Jamiołkowski

Jeśli $A : M_n \to M_n$ jest odwzorowaniem liniowym, to można z nim stowarzyszyć tensor $P_A := \frac{1}{n}\sum_{i,j} A(e_{ij}) \otimes e_{ij}$. Można myśleć o P_A jako o macierzy odwzorowania A. Co więcej, A jest całkowicie dodatnie dokładnie wtedy, gdy P_A jest dodatnio określony jako element $M_n \otimes M_n \simeq M_{n^2}$.

Kwantowa macierz sąsiedztwa (Musto-Reutter-Verdon)

Choi-Jamiołkowski

Jeśli $A : M_n \to M_n$ jest odwzorowaniem liniowym, to można z nim stowarzyszyć tensor $P_A := \frac{1}{n}\sum_{i,j} A(e_{ij}) \otimes e_{ij}$. Można myśleć o P_A jako o macierzy odwzorowania A. Co więcej, A jest całkowicie dodatnie dokładnie wtedy, gdy P_A jest dodatnio określony jako element $M_n \otimes M_n \simeq M_{n^2}$.

P_A jest rzutem dokładnie wtedy, gdy $\frac{1}{n}\sum_k A(e_{ik})A(e_{kj}) = A(e_{ij})$.

Kwantowa macierz sąsiedztwa (Musto-Reutter-Verdon)

Choi-Jamiołkowski

Jeśli $A : M_n \to M_n$ jest odwzorowaniem liniowym, to można z nim stowarzyszyć tensor $P_A := \frac{1}{n}\sum_{i,j} A(e_{ij}) \otimes e_{ij}$. Można myśleć o P_A jako o macierzy odwzorowania A. Co więcej, A jest całkowicie dodatnie dokładnie wtedy, gdy P_A jest dodatnio określony jako element $M_n \otimes M_n \simeq M_{n^2}$.

P_A jest rzutem dokładnie wtedy, gdy $\frac{1}{n}\sum_k A(e_{ik})A(e_{kj}) = A(e_{ij})$.

A będzie naszą kwantową macierzą sąsiedztwa.

Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.

Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.

Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Gdy $P \in M_n$ jest rzutem ortogonalnym, to $(Ax)_{ij} := nP_{ij}x_{ij}$ jest kwantową macierzą sąsiedztwa.

Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Gdy $P \in M_n$ jest rzutem ortogonalnym, to $(Ax)_{ij} := nP_{ij}x_{ij}$ jest kwantową macierzą sąsiedztwa.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.

Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Gdy $P \in M_n$ jest rzutem ortogonalnym, to $(Ax)_{ij} := nP_{ij}x_{ij}$ jest kwantową macierzą sąsiedztwa.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.
- Stopnie wierzchołków $\rightsquigarrow$ macierz stopni $D := A\mathbb{1}$ (nie ma wierzchołków!). Jeśli U jest automorfizmem, to $UD = DU$.

Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Gdy $P \in M_n$ jest rzutem ortogonalnym, to $(Ax)_{ij} := nP_{ij}x_{ij}$ jest kwantową macierzą sąsiedztwa.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.
- Stopnie wierzchołków $\rightsquigarrow$ macierz stopni $D := A\mathbb{1}$ (nie ma wierzchołków!). Jeśli U jest automorfizmem, to $UD = DU$.
- Graf d-regularny $\rightsquigarrow$ $D = d\mathbb{1}$.

Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Gdy $P \in M_n$ jest rzutem ortogonalnym, to $(Ax)_{ij} := nP_{ij}x_{ij}$ jest kwantową macierzą sąsiedztwa.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.
- Stopnie wierzchołków $\rightsquigarrow$ macierz stopni $D := A\mathbb{1}$ (nie ma wierzchołków!). Jeśli U jest automorfizmem, to $UD = DU$.
- Graf d-regularny $\rightsquigarrow$ $D = d\mathbb{1}$.
- Laplasjan grafu $\rightsquigarrow$ kwantowy laplasjan $Lx := \frac{1}{2}(Dx + xD) - A(x)$ $\rightsquigarrow$ błądzenie losowe.

Grafy nieskierowane

W wielu przypadkach wolimy pracować z grafami nieskierowanymi.

Grafy nieskierowane

W wielu przypadkach wolimy pracować z grafami nieskierowanymi.

Podprzestrzeń $V \subset M_n$ jest **nieskierowanym** grafem kwantowym, jeśli $V = V^*$.

Grafy nieskierowane

W wielu przypadkach wolimy pracować z grafami nieskierowanymi.

Podprzestrzeń $V \subset M_n$ jest **nieskierowanym** grafem kwantowym, jeśli $V = V^*$.
Czasem dodaje się warunek $\mathbb{1} \subset V$ (pętla w każdym wierzchołku).

Grafy nieskierowane

W wielu przypadkach wolimy pracować z grafami nieskierowanymi.

Podprzestrzeń $V \subset M_n$ jest **nieskierowanym** grafem kwantowym, jeśli $V = V^*$.
Czasem dodaje się warunek $\mathbb{1} \subset V$ (pętla w każdym wierzchołku).

Kwantowa macierz sąsiedztwa $A : M_n \to M_n$ jest nieskierowana, gdy jest symetryczna, czyli $\mathrm{Tr}(A(x)y) = \mathrm{Tr}(xA(y))$.

Przemienność

Poza klasyczną grupą automorfizmów, grafy kwantowe posiadają również **kwantową** grupę automorfizmów, opisaną w języku algebr Hopfa lub zwartych grup kwantowych.

Przemienność

Poza klasyczną grupą automorfizmów, grafy kwantowe posiadają również **kwantową** grupę automorfizmów, opisaną w języku algebr Hopfa lub zwartych grup kwantowych. Co ciekawe, może być ona nieskończona.

Przemienność

Poza klasyczną grupą automorfizmów, grafy kwantowe posiadają również **kwantową** grupę automorfizmów, opisaną w języku algebr Hopfa lub zwartych grup kwantowych. Co ciekawe, może być ona nieskończona.

Gdy macierz stopni ma jednokrotne wartości własne, to (kwantowa) grupa automorfizmów jest abelowa.

Przemienność

Poza klasyczną grupą automorfizmów, grafy kwantowe posiadają również **kwantową** grupę automorfizmów, opisaną w języku algebr Hopfa lub zwartych grup kwantowych. Co ciekawe, może być ona nieskończona.

Gdy macierz stopni ma jednokrotne wartości własne, to (kwantowa) grupa automorfizmów jest abelowa.

W przypadku kwantowym oznacza to, że jej „przestrzeń funkcji ciągłych" jest algebrą grupową.

Losowe grafy kwantowe

Ustalmy $0 \leqslant d \leqslant n^2-1$. Jeśli wylosujemy d macierzy Hermitowskich $X_1, \ldots, X_d$ rozmiaru $n \times n$, to $\mathrm{span}\{\mathbb{1}, X_1, \ldots, X_d\}$ będzie losowym systemem operatorowym.

Losowe grafy kwantowe

Ustalmy $0 \leqslant d \leqslant n^2 - 1$. Jeśli wylosujemy d macierzy Hermitowskich $X_1, \dots, X_d$ rozmiaru $n \times n$, to $\mathrm{span}\{\mathbb{1}, X_1, \dots, X_d\}$ będzie losowym systemem operatorowym.

Jeśli odpowiednio dobierzemy rozkład macierzy X_i, to metoda ta jest zgodna z losowaniem podprzestrzeni zgodnie z miarą Haara na odpowiedniej rozmaitości Grassmanna.

Trochę wyników na koniec

Twierdzenie (Chirvasitu-W.)

Jeśli $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to macierz stopni D ma prawie na pewno jednokrotne wartości własne.

Trochę wyników na koniec

Twierdzenie (Chirvasitu-W.)

Jeśli $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to macierz stopni D ma prawie na pewno jednokrotne wartości własne.

Wniosek (Chirvasitu-W.)

Gdy $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to grupa automorfizmów jest prawie na pewno przemienna.

Trochę wyników na koniec

Twierdzenie (Chirvasitu-W.)

Jeśli $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to macierz stopni D ma prawie na pewno jednokrotne wartości własne.

Wniosek (Chirvasitu-W.)

Gdy $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to grupa automorfizmów jest prawie na pewno przemienna.

Twierdzenie (Chirvasitu-W.)

Jeśli $2 \leqslant d \leqslant n^2 - 3$, to grupa automorfizmów jest prawie na pewno trywialna.

Dziękuję bardzo za uwagę!