

# Skończone rezolwenty wolne i systemy pierwiastków

Jerzy Weyman

Uniwersytet Jagielloński

3 czerwca 2022



- $R = K[x_1, \dots, x_n]$  jest pierścieniem wielomianów,  $K = \mathbf{C}$  liczby zespolone,
- $I$  - ideał jednorodny w  $R$ ,

- $R = K[x_1, \dots, x_n]$  jest pierścieniem wielomianów,  $K = \mathbf{C}$  liczby zespolone,
- $I$  - ideał jednorodny w  $R$ ,
- Twierdzenie Hilberta o Syzygiach (1890):
- $R/I$  (lub dowolny  $R$ -moduł  $M$ ) ma minimalną rezolwentę wolną długości  $c \leq n$ ,
- 

$$\mathcal{F}_\bullet : 0 \rightarrow F_c \xrightarrow{d_c} F_{c-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 = R$$

- $F_i$  są  $R$ -modułami wolnymi rangi  $f_i$ ,  $r_i := \text{rank } d_i$ ,
- $(f_0, f_1, \dots, f_c)$  is **jest formatem**  $\mathcal{F}_\bullet$ .

- $R = K[x_1, \dots, x_n]$  jest pierścieniem wielomianów,  $K = \mathbf{C}$  liczby zespolone,
- $I$  - ideał jednorodny w  $R$ ,
- Twierdzenie Hilberta o Syzygiach (1890):
- $R/I$  (lub dowolny  $R$ -moduł  $M$ ) ma minimalną rezolwentę wolną długości  $c \leq n$ ,
- 

$$\mathcal{F}_\bullet : 0 \rightarrow F_c \xrightarrow{d_c} F_{c-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 = R$$

- $F_i$  są  $R$ -modułami wolnymi rangi  $f_i$ ,  $r_i := \text{rank } d_i$ ,
- $(f_0, f_1, \dots, f_c)$  is **jest formatem**  $\mathcal{F}_\bullet$ .
- tutaj  $f_i = r_i + r_{i+1}$  jest rangą  $F_i$ .

- $R = K[x_1, \dots, x_n]$  jest pierścieniem wielomianów,  $K = \mathbf{C}$  liczby zespolone,
- $I$  - ideał jednorodny w  $R$ ,
- Twierdzenie Hilberta o Syzygiach (1890):
- $R/I$  (lub dowolny  $R$ -moduł  $M$ ) ma minimalną rezolwentę wolną długości  $c \leq n$ ,
- 

$$\mathcal{F}_\bullet : 0 \rightarrow F_c \xrightarrow{d_c} F_{c-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 = R$$

- $F_i$  są  $R$ -modułami wolnymi rangi  $f_i$ ,  $r_i := \text{rank } d_i$ ,
- $(f_0, f_1, \dots, f_c)$  is **jest formatem**  $\mathcal{F}_\bullet$ .
- tutaj  $f_i = r_i + r_{i+1}$  jest rangą  $F_i$ .

- $I$  jest **ideałem doskonałym** gdy
- $c = pd_R(R/I) = \text{codim } I$ ,
- gdzie  $\text{codim } I$  jest kowymiarem rozmaitości zdefiniowanej przez znikanie wielomianów z  $I$ ,

- $I$  jest **ideałem doskonałym** gdy
- $c = pd_R(R/I) = \text{codim } I$ ,
- gdzie  $\text{codim } I$  jest kowymiarem rozmaitości zdefiniowanej przez znikanie wielomianów z  $I$ ,
- lub, równoważnie,  $R/I$  jest Cohena-Macaulaya.



- $I$  jest **ideałem doskonałym** gdy
- $c = pd_R(R/I) = \text{codim } I$ ,
- gdzie  $\text{codim } I$  jest kowymiarem rozmaitości zdefiniowanej przez znikanie wielomianów z  $I$ ,
- lub, równoważnie,  $R/I$  jest Cohena-Macaulaya.

## Wypadek $c = 2$ : twierdzenie Hilberta-Burcha

- Dla  $c = 2$  mówimy o formacie  $(1, n, n - 1)$ , t.j.

$$0 \rightarrow R^{n-1} \xrightarrow{d_2} R^n \xrightarrow{d_1} R \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

## Wypadek $c = 2$ : twierdzenie Hilberta-Burcha

- Dla  $c = 2$  mówimy o formacie  $(1, n, n - 1)$ , t.j.

$$0 \rightarrow R^{n-1} \xrightarrow{d_2} R^n \xrightarrow{d_1} R \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

- $d_1 = (x_1, \dots, x_n)$  jest wektorem,  $d_2 = (y_{i,j})$ ,  $n \times (n - 1)$  macierzą,

## Wypadek $c = 2$ : twierdzenie Hilberta-Burcha

- Dla  $c = 2$  mówimy o formacie  $(1, n, n - 1)$ , t.j.

$$0 \rightarrow R^{n-1} \xrightarrow{d_2} R^n \xrightarrow{d_1} R \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

- $d_1 = (x_1, \dots, x_n)$  jest wektorem,  $d_2 = (y_{i,j})$ ,  $n \times (n - 1)$  macierzą,

### Twierdzenie Hilberta-Burcha (1890/1968)

Ideał  $I$  jest wyznacznikowy, t.j.  $x_i = (-1)^{i+1} \Delta_i$  gdzie  $\Delta_i$  jest minorem macierzy  $d_2$  z opuszczonym  $i$ -tym wierszem.

## Wypadek $c = 2$ : twierdzenie Hilberta-Burcha

- Dla  $c = 2$  mówimy o formacie  $(1, n, n - 1)$ , t.j.

$$0 \rightarrow R^{n-1} \xrightarrow{d_2} R^n \xrightarrow{d_1} R \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

- $d_1 = (x_1, \dots, x_n)$  jest wektorem,  $d_2 = (y_{i,j})$ ,  $n \times (n - 1)$  macierzą,

### Twierdzenie Hilberta-Burcha (1890/1968)

Ideał  $I$  jest wyznacznikowy, t.j.  $x_i = (-1)^{i+1} \Delta_i$  gdzie  $\Delta_i$  jest minorem macierzy  $d_2$  z opuszczonym  $i$ -tym wierszem.

- istnieje rezolwenta uniwersalna (generyczna), gdy weźmiemy  $n \times (n - 1)$  zmiennych  $Y_{i,j}$ , pierścień  $R_{gen} = K[Y_{i,j}]$  i rezolwentę ideału generowanego przez  $(n - 1) \times (n - 1)$  minory macierzy  $(Y_{i,j})$ .

## Wypadek $c = 2$ : twierdzenie Hilberta-Burcha

- Dla  $c = 2$  mówimy o formacie  $(1, n, n - 1)$ , t.j.

$$0 \rightarrow R^{n-1} \xrightarrow{d_2} R^n \xrightarrow{d_1} R \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

- $d_1 = (x_1, \dots, x_n)$  jest wektorem,  $d_2 = (y_{i,j})$ ,  $n \times (n - 1)$  macierzą,

### Twierdzenie Hilberta-Burcha (1890/1968)

Ideał  $I$  jest wyznacznikowy, t.j.  $x_i = (-1)^{i+1} \Delta_i$  gdzie  $\Delta_i$  jest minorem macierzy  $d_2$  z opuszczonym  $i$ -tym wierszem.

- istnieje rezolwenta uniwersalna (generyczna), gdy weźmiemy  $n \times (n - 1)$  zmiennych  $Y_{i,j}$ , pierścień  $R_{gen} = K[Y_{i,j}]$  i rezolwentę ideału generowanego przez  $(n - 1) \times (n - 1)$  minory macierzy  $(Y_{i,j})$ .
- Hochster (1975) udowodnił podobne twierdzenie dla formatów  $(r_1, r_1 + r_2, r_2)$ .

- Buchsbaum i Eisenbud udowodnili w 1975 tzw. pierwsze i drugie twierdzenia strukturalne, uogólniające twierdzenie Hilberta-Burcha,

- Buchsbaum i Eisenbud udowodnili w 1975 tzw. pierwsze i drugie twierdzenia strukturalne, uogólniające twierdzenie Hilberta-Burcha,
- te twierdzenia nie dają obiektu uniwersalnego,



- Buchsbaum i Eisenbud udowodnili w 1975 tzw. pierwsze i drugie twierdzenia strukturalne, uogólniające twierdzenie Hilberta-Burcha,
- te twierdzenia nie dają obiektu uniwersalnego,
- Bruns udowodnił ogólne twierdzenie o istnieniu obiektu "wersalnego", ale to twierdzenie nie daje konkretnej informacji i konstruowany obiekt nie jest ani wyznaczony jednoznacznie ani skończenie generowany.

Pytanie:

Czy można twierdzenie Hilberta-Burcha uogólnić do  $c = 3$  ?

## Pytanie:

Czy można twierdzenie Hilberta-Burcha uogólnić do  $c = 3$  ?

- Dla  $c = 3$  mówimy o formacie  $(1, r_2 + 1, r_2 + r_3, r_3)$ ,

$$0 \rightarrow R^{r_3} \xrightarrow{d_3} R^{r_2+r_3} \xrightarrow{d_2} R^{r_2+1} \xrightarrow{d_1} R \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

## Pytanie:

Czy można twierdzenie Hilberta-Burcha uogólnić do  $c = 3$  ?

- Dla  $c = 3$  mówimy o formacie  $(1, r_2 + 1, r_2 + r_3, r_3)$ ,

$$0 \rightarrow R^{r_3} \xrightarrow{d_3} R^{r_2+r_3} \xrightarrow{d_2} R^{r_2+1} \xrightarrow{d_1} R \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

- traktujemy  $d_1 = (x_1, \dots, x_n)$  jako wektor,  $d_2 = (y_{i,j})$ ,  
 $d_3 = (z_{j,k})$  jako macierze,
- nasz kompleks to

$$\mathcal{F}_\bullet : 0 \rightarrow F_3 \xrightarrow{d_3} F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 = R$$

- dla jakich formatów istnieje obiekt uniwersalny ?

- Cały problem ma naturalną symetrię daną przez grupę  $GL(F_3) \times GL(F_2) \times GL(F_1) \times GL(F_0)$ ,

- Cały problem ma naturalną symetrię daną przez grupę  $GL(F_3) \times GL(F_2) \times GL(F_1) \times GL(F_0)$ ,
- Mamy trywialne relacje Koszula między generatorami  $(x_1, \dots, x_n)$ . Są one reprezentowane przez odwzorowanie

$$q_1 : \bigwedge^2 F_1 \rightarrow F_1.$$

- Cały problem ma naturalną symetrię daną przez grupę  $GL(F_3) \times GL(F_2) \times GL(F_1) \times GL(F_0)$ ,
- Mamy trywialne relacje Koszula między generatorami  $(x_1, \dots, x_n)$ . Są one reprezentowane przez odwzorowanie

$$q_1 : \bigwedge^2 F_1 \rightarrow F_1.$$

- to odwzorowanie musi się podnieść do

$$p_1 : \bigwedge^2 F_1 \rightarrow F_2.$$

- Cały problem ma naturalną symetrię daną przez grupę  $GL(F_3) \times GL(F_2) \times GL(F_1) \times GL(F_0)$ ,
- Mamy trywialne relacje Koszula między generatorami  $(x_1, \dots, x_n)$ . Są one reprezentowane przez odwzorowanie

$$q_1 : \bigwedge^2 F_1 \rightarrow F_1.$$

- to odwzorowanie musi się podnieść do

$$p_1 : \bigwedge^2 F_1 \rightarrow F_2.$$

- $p_1$  nie jest jedyne, jego niejednoznaczność jest reprezentowana przez odwzorowanie

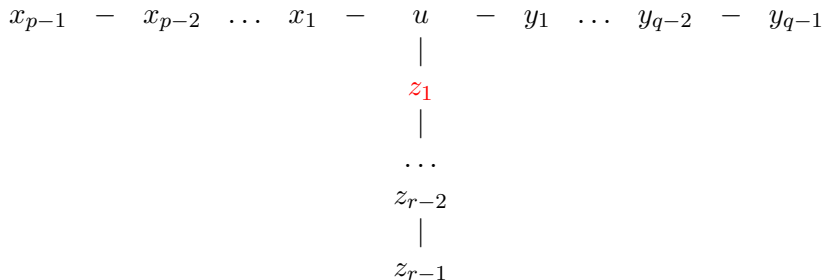
$$\bigwedge^2 F_1 \rightarrow F_3$$



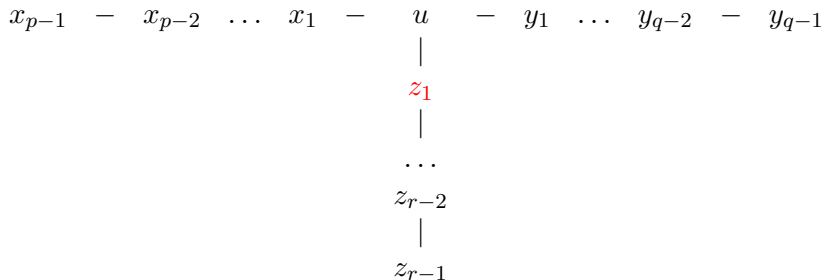


- Rozpatrzmy trójkę  $(p, q, r) = (r_1 + 1, r_2 - 1, r_3 + 1)$ ,

- Rozpatrzmy trójkę  $(p, q, r) = (r_1 + 1, r_2 - 1, r_3 + 1)$ ,
- Graf  $T_{p,q,r}$  to



- Rozpatrzmy trójkę  $(p, q, r) = (r_1 + 1, r_2 - 1, r_3 + 1)$ ,
- Graf  $T_{p,q,r}$  to



- wyróżnimy wierzchołek odpowiadający  $z_1$ ,

- Rozpatrzmy trójkę  $(p, q, r) = (r_1 + 1, r_2 - 1, r_3 + 1)$ ,
- Graf  $T_{p,q,r}$  to

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 x_{p-1} & - & x_{p-2} & \dots & x_1 & - & u & - & y_1 & \dots & y_{q-2} & - & y_{q-1} \\
 & & & & & & | & & & & & & & \\
 & & & & & & z_1 & & & & & & & \\
 & & & & & & | & & & & & & & \\
 & & & & & & \dots & & & & & & & \\
 & & & & & & z_{r-2} & & & & & & & \\
 & & & & & & | & & & & & & & \\
 & & & & & & z_{r-1} & & & & & & & 
 \end{array}$$

- wyróżnimy wierzchołek odpowiadający  $z_1$ ,
- Graf  $T_{p,q,r}$  z usuniętym wierzchołkiem  $z_1$  jest systemem pierwiastków odpowiadającym  $\underline{sl}(F_3) \times \underline{sl}(F_1)$ ,

- Podgraf na wierzchołkach  $z_2, \dots, z_{r-1}$  odpowiada modułowi  $F_3$ ,
- Podgraf na wierzchołkach  $x_1, \dots, x_{p-1}, u, y_1, \dots, y_{q-1}$  odpowiada modułowi  $F_1$ .
- dodatkowy wierzchołek  $z_1$  reprezentuje dodatkową ukrytą symetrię, widać ją jako niejednoznaczność  $F_3^* \otimes \bigwedge^2 F_1$  podniesienia relacji Koszula.

- Podgraf na wierzchołkach  $z_2, \dots, z_{r-1}$  odpowiada modułowi  $F_3$ ,
- Podgraf na wierzchołkach  $x_1, \dots, x_{p-1}, u, y_1, \dots, y_{q-1}$  odpowiada modułowi  $F_1$ .
- dodatkowy wierzchołek  $z_1$  reprezentuje dodatkową ukrytą symetrię, widać ją jako niejednoznaczność  $F_3^* \otimes \bigwedge^2 F_1$  podniesienia relacji Koszula.

- Gradacja względem niebieskiego wierzchołka

$$\underline{g}(E_7) = \underline{g}_{-2} \oplus \underline{g}_{-1} \oplus \underline{g}_0 \oplus \underline{g}_1 \oplus \underline{g}_2$$

$$\underline{g}_0 = \underline{sl}(7) \oplus \mathbf{C}, \underline{g}_1 = \bigwedge^3 \mathbf{C}^7, \underline{g}_2 = \bigwedge^6 \mathbf{C}^7,$$

- Gradacja względem czerwonego wierzchołka

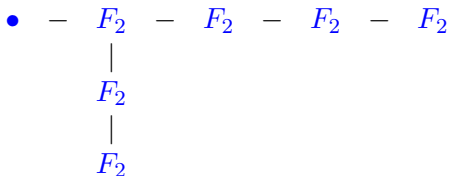
$$\underline{g}(E_7) = \underline{g}_{-3} \oplus \underline{g}_{-2} \oplus \underline{g}_{-1} \oplus \underline{g}_0 \oplus \underline{g}_1 \oplus \underline{g}_2 \oplus \underline{g}_3$$

$$\underline{g}_0 = \underline{sl}(2) \oplus \underline{sl}(6) \oplus \mathbf{C}, \underline{g}_1 = \mathbf{C}^2 \bigwedge^2 \mathbf{C}^6, \underline{g}_2 = \bigwedge^2 \mathbf{C}^2 \otimes \bigwedge^4 \mathbf{C}^6,$$

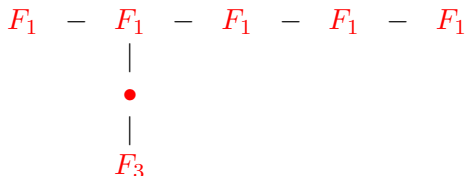
$$\underline{g}_3 = S_{2,1} \mathbf{C}^2 \otimes \bigwedge^6 \mathbf{C}^6.$$



- Gradacja względem niebieskiego wierzchołka



- Gradacja względem czerwonego wierzchołka



## Twierdzenie (JW, 2018)

- 1 Istnieje rezolwenta generyczna  $\mathcal{F}_{gen}(p, q, r)$  formatu  $(r_1, r_1 + r_2, r_2 + r_3, r_3)$  nad pierścieniem  $\hat{R}_{gen}(p, q, r)$  który ma strukturę reprezentacji algebry Liego  $\underline{g}(T_{p,q,r}) \times \underline{sl}(F_2) \times \underline{sl}(F_0)$ .
- 2 Pierścień  $\hat{R}_{gen}(p, q, r)$  jest skończenie generowany wtedy i tylko wtedy gdy graf  $T_{p,q,r}$  jest grafem Dynkina.

- w latach 1970-ych i 1980-ych D. Buchsbaum i D. Eisenbud organizowali w Brandeis University seminarium "Fellowship of the Ring"
- więc zgodnie z tradycją J.R.R. Tolkiena

One ring to rule them all,  
One ring to find them,  
one ring to bring them all  
and in the darkness bind them.

- wiele razy w matematyce występuje klasyfikacja przez grafy  $ADE$ , t.j. grafy  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,

- wiele razy w matematyce występuje klasyfikacja przez grafy  $ADE$ , t.j. grafy  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ ,
- Klasyfikacja Cartana-Killinga prostych algebr Liego nad  $\mathbf{C}$  (tu występują jeszcze  $B_n, C_n, F_4, G_2$ ),

- wiele razy w matematyce występuje klasyfikacja przez grafy  $ADE$ , t.j. grafy  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ ,
- Klasyfikacja Cartana-Killinga prostych algebr Liego nad  $\mathbf{C}$  (tu występują jeszcze  $B_n, C_n, F_4, G_2$ ),
- Grupy Kleina (podgrupy skończone  $SL(2, \mathbf{C})$ ),
- Kiełki funkcji holomorficznych modalności 0 (Arnold),
- Punkty z osobliwościami wymiernymi na powierzchniach algebraicznych (osobliwości Du Vala),

- wiele razy w matematyce występuje klasyfikacja przez grafy  $ADE$ , t.j. grafy  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ ,
- Klasyfikacja Cartana-Killinga prostych algebr Liego nad  $\mathbf{C}$  (tu występują jeszcze  $B_n, C_n, F_4, G_2$ ),
- Grupy Kleina (podgrupy skończone  $SL(2, \mathbf{C})$ ),
- Kiełki funkcji holomorficznych modalności 0 (Arnold),
- Punkty z osobliwościami wymiernymi na powierzchniach algebraicznych (osobliwości Du Vala),
- Reprezentacje kołczanów (Gabriel),

- wiele razy w matematyce występuje klasyfikacja przez grafy  $ADE$ , t.j. grafy  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ ,
- Klasyfikacja Cartana-Killinga prostych algebr Liego nad  $\mathbf{C}$  (tu występują jeszcze  $B_n, C_n, F_4, G_2$ ),
- Grupy Kleina (podgrupy skończone  $SL(2, \mathbf{C})$ ),
- Kiełki funkcji holomorficznych modalności 0 (Arnold),
- Punkty z osobliwościami wymiernymi na powierzchniach algebraicznych (osobliwości Du Vala),
- Reprezentacje kołczanów (Gabriel),
- Algebry klastrowe (Fomin-Zelevinsky).



- Jeśli  $\Gamma$  jest grafem na  $n$  wierzchołkach, bez wielokrotnych krawędzi,

- Jeśli  $\Gamma$  jest grafem na  $n$  wierzchołkach, bez wielokrotnych krawędzi,
- wprowadzamy formę kwadratową,

$$Q_{\Gamma}(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \sum_{i-j} x_i x_j,$$

- Jeśli  $\Gamma$  jest grafem na  $n$  wierzchołkach, bez wielokrotnych krawędzi,
- wprowadzamy formę kwadratową,

$$Q_{\Gamma}(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \sum_{i-j} x_i x_j,$$

- forma  $Q_{\Gamma}$  jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy  $\Gamma$  jest grafem Dynkina typu ADE.

- konkluzja: formaty dla których  $T_{p,q,r}$  jest grafem Dynkina typu  $ADE$  są specjalne,
- Czy ideały doskonałe kowymiaru 3 z rezolwentami w formatach Dynkina mają związek z odpowiednimi algebrami Liego (grupami reduktywnymi) ?

- konkluzja: formaty dla których  $T_{p,q,r}$  jest grafem Dynkina typu  $ADE$  są specjalne,
- Czy ideały doskonałe kowymiaru 3 z rezolwentami w formatach Dynkina mają związek z odpowiednimi algebrami Liego (grupami reduktywnymi) ?
- $A_n$ :  $(1, 3, n, n - 2)$ , ale dla ideałów doskonałych widzimy tylko  $(1, 3, 3, 1)$ , więc mamy tylko przecięcia zupełne,

- konkluzja: formaty dla których  $T_{p,q,r}$  jest grafem Dynkina typu  $ADE$  są specjalne,
- Czy ideały doskonałe kowymiaru 3 z rezolwentami w formatach Dynkina mają związek z odpowiednimi algebrami Liego (grupami reduktywnymi) ?
- $A_n$ :  $(1, 3, n, n - 2)$ , ale dla ideałów doskonałych widzimy tylko  $(1, 3, 3, 1)$ , więc mamy tylko przecięcia zupełne,
- $D_n$ : mamy formaty  $(1, n, n, 1)$  i  $(1, 4, n, n - 3)$ ,

- konkluzja: formaty dla których  $T_{p,q,r}$  jest grafem Dynkina typu  $ADE$  są specjalne,
- Czy ideały doskonałe kowymiaru 3 z rezolwentami w formatach Dynkina mają związek z odpowiednimi algebrami Liego (grupami reduktywnymi) ?
- $A_n$ :  $(1, 3, n, n - 2)$ , ale dla ideałów doskonałych widzimy tylko  $(1, 3, 3, 1)$ , więc mamy tylko przecięcia zupełne,
- $D_n$ : mamy formaty  $(1, n, n, 1)$  i  $(1, 4, n, n - 3)$ ,
- dla  $(1, n, n, 1)$  mamy

## Twierdzenie (Buchsbaum-Eisenbud, 1976)

- Rezolwenta minimalna formatu  $(1, n, n, 1)$  istnieje tylko gdy  $n = 2m + 1$  jest nieparzyste,
- Istnieje rezolwenta uniwersalna formatu  $(1, 2m + 1, 2m + 1, 1)$ . Macierz  $d_2$  jest skośno symetryczną macierzą zmiennych, ideał  $I$  jest generowany przez  $(2m) \times (2m)$  Pfaffiany podmacierzy  $d_2$  (opuszczamy ten sam wiersz i kolumnę).

- jaki jest związek twierdzenia Buchsbauma-Eisenbuda z grupą ortogonalną ?
- co z formatami typu  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ?



- jaki jest związek twierdzenia Buchsbauma-Eisenbuda z grupą ortogonalną ?
- co z formatami typu  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ?
- $E_6$ :  $(1, 5, 6, 2)$ ,
- $E_7$ :  $(1, 6, 7, 2)$  i  $(1, 5, 7, 3)$ ,
- $E_8$ :  $(1, 7, 8, 2)$  i  $(1, 5, 8, 4)$ .

- jaki jest związek twierdzenia Buchsbauma-Eisenbuda z grupą ortogonalną ?
- co z formatami typu  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ?
- $E_6$ :  $(1, 5, 6, 2)$ ,
- $E_7$ :  $(1, 6, 7, 2)$  i  $(1, 5, 7, 3)$ ,
- $E_8$ :  $(1, 7, 8, 2)$  i  $(1, 5, 8, 4)$ .
- takie ideały są bardzo rzadkie, np.  $2 \times 2$  minory  $2 \times 4$  macierzy dają

$$0 \rightarrow R^3(-4) \rightarrow R^8(-3) \rightarrow R^6(-2) \rightarrow R$$

i odpowiedni graf  $T_{2,4,4}$  nie jest grafem Dynkina.

- Lars Christensen (Texas Tech), Oana Veliche (Northeastern) - aspekt związany z liaison,
- Sara Filippini (Kraków), Jacinta Torres (Kraków) - aspekt związany z rozmaitościami Schuberta,

- Lars Christensen (Texas Tech), Oana Veliche (Northeastern) - aspekt związany z liaison,
- Sara Filippini (Kraków), Jacinta Torres (Kraków) - aspekt związany z różnościami Schuberta,
- Lorenzo Guerrieri (Kraków), liczenie wyższych odwzorowań strukturalnych,
- Xianglong Ni (UC Berkeley)-Macaulay 2, nowy algorytm liczenia wyższych odwzorowań strukturalnych,

- gdzie szukać przykładów ideałów doskonałych kowymiaru 3 z rezolwentami w formacie Dynkina ?,
- graf  $T_{p,q,r}$  daje odpowiedź,



- gdzie szukać przykładów ideałów doskonałych kowymiaru 3 z rezolwentami w formacie Dynkina ?,
- graf  $T_{p,q,r}$  daje odpowiedź,



- wierzchołek  $\bullet$  daje nam reprezentację mniejszej grupy, w tym wypadku reprezentację  $\wedge^3 \mathbb{C}^7$  grupy  $SL(7)$ ,

- gdzie szukać przykładów ideałów doskonałych kowymiaru 3 z rezolwentami w formacie Dynkina ?,
- graf  $T_{p,q,r}$  daje odpowiedź,



- wierzchołek  $\bullet$  daje nam reprezentację mniejszej grupy, w tym wypadku reprezentację  $\bigwedge^3 \mathbf{C}^7$  grupy  $SL(7)$ ,
- wierzchołki oznaczone na czerwono i zielono dają formaty typu  $E_7$

- gdzie szukać przykładów ideałów doskonałych kowymiaru 3 z rezolwentami w formacie Dynkina ?,
- graf  $T_{p,q,r}$  daje odpowiedź,



- wierzchołek  $\bullet$  daje nam reprezentację mniejszej grupy, w tym wypadku reprezentację  $\bigwedge^3 \mathbf{C}^7$  grupy  $SL(7)$ ,
- wierzchołki oznaczone na czerwono i zielono dają formaty typu  $E_7$

- 

$$0 \rightarrow R^3 \rightarrow R^7 \rightarrow R^5 \rightarrow R$$

$$0 \rightarrow R^2 \rightarrow R^7 \rightarrow R^6 \rightarrow R$$



- nasza reprezentacja to  $n \times n$  macierze skośno symetryczne,

- nasza reprezentacja to  $n \times n$  macierze skośno symetryczne,
- dla  $n = 2m + 1$  nieparzystego widzimy ideał Buchsbauma-Eisenbuda, jako równania zbioru macierzy rangi  $\leq 2m - 2$ ,
- dla  $n$  parzystego ideał Buchsbauma-Eisenbuda widzimy jako

$$(\Delta, \partial\Delta/\partial x_{1,n}, \dots, \partial\Delta/\partial x_{n-1,n}),$$

gdzie  $\Delta$  to Pfaffian całej macierzy,

- nasza reprezentacja to  $n \times n$  macierze skośnie symetryczne,
- dla  $n = 2m + 1$  nieparzystego widzimy ideał Buchsbauma-Eisenbuda, jako równania zbioru macierzy rangi  $\leq 2m - 2$ ,
- dla  $n$  parzystego ideał Buchsbauma-Eisenbuda widzimy jako

$$(\Delta, \partial\Delta/\partial x_{1,n}, \dots, \partial\Delta/\partial x_{n-1,n}),$$

gdzie  $\Delta$  to Pfaffian całej macierzy,

- w obu wypadkach widzimy też w tej reprezentacji stowarzyszony ideał z rezolwentą formatu  $(1, 4, n, n - 3)$ ,
- cała sytuacja była opisana przez Anne Brown w 1987.

- nasza reprezentacja to  $\wedge^3 \mathbf{C}^6$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 6$ ,

- nasza reprezentacja to  $\wedge^3 \mathbf{C}^6$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 6$ ,
- W  $R$  mamy jedyny  $SL(6)$ -niezmiennik  $\Delta$  stopnia 4,

- nasza reprezentacja to  $\wedge^3 \mathbf{C}^6$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 6$ ,
- W  $R$  mamy jedyny  $SL(6)$ -niezmiennik  $\Delta$  stopnia 4,
- mamy dwa bliźniacze ideały  $\mathbf{I}'_{1562}$  i  $\mathbf{I}''_{1562}$  z rezolwentami formatu  $(1, 5, 6, 2)$ :
- 

$$\mathbf{I}'_{1562} = (\Delta, \partial\Delta/\partial x_{456}, \partial\Delta/\partial x_{356}, \partial\Delta/\partial x_{256}, \partial\Delta/\partial x_{156}),$$

$$\mathbf{I}''_{1562} = (\Delta, \partial\Delta/\partial x_{456}, \partial\Delta/\partial x_{356}, \partial\Delta/\partial x_{346}, \partial\Delta/\partial x_{345}).$$

- nasza reprezentacja to  $\bigwedge^3 \mathbf{C}^7$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 7$ ,

- nasza reprezentacja to  $\wedge^3 \mathbf{C}^7$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 7$ ,
- W  $R$  mamy jedyny  $SL(7)$ -niezmiennik  $\Delta$  stopnia 7,



- nasza reprezentacja to  $\bigwedge^3 \mathbf{C}^7$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 7$ ,
- W  $R$  mamy jedyny  $SL(7)$ -niezmiennik  $\Delta$  stopnia 7,
- mamy ideał  $\mathbf{I}_{1672}$  z rezolwentą formatu  $(1, 6, 7, 2)$ :

$$\mathbf{I}_{1672} = (\Delta, \partial\Delta/\partial x_{567}, \partial\Delta/\partial x_{467}, \partial\Delta/\partial x_{367}, \partial\Delta/\partial x_{267}, \partial\Delta/\partial x_{167})$$

- nasza reprezentacja to  $\wedge^3 \mathbf{C}^7$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 7$ ,
- W  $R$  mamy jedyny  $SL(7)$ -niezmiennik  $\Delta$  stopnia 7,
- mamy ideał  $\mathbf{I}_{1672}$  z rezolwentą formatu  $(1, 6, 7, 2)$ :

$$\mathbf{I}_{1672} = (\Delta, \partial\Delta/\partial x_{567}, \partial\Delta/\partial x_{467}, \partial\Delta/\partial x_{367}, \partial\Delta/\partial x_{267}, \partial\Delta/\partial x_{167})$$

- mamy też ideał  $\mathbf{I}_{1573}$  z rezolwentą formatu  $(1, 5, 7, 3)$

$$\mathbf{I}_{1573} = (\Delta, \partial\Delta/\partial x_{567}, \partial\Delta/\partial x_{467}, \partial\Delta/\partial x_{457}, \partial\Delta/\partial x_{456}).$$

- nasza reprezentacja to  $\bigwedge^3 \mathbf{C}^8$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 8$ ,

- nasza reprezentacja to  $\wedge^3 \mathbf{C}^8$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 8$ ,
- W  $R$  mamy jedyny  $SL(8)$ -niezmiennik  $\Delta$  stopnia 16,

- nasza reprezentacja to  $\bigwedge^3 \mathbf{C}^8$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 8$ ,
- W  $R$  mamy jedyny  $SL(8)$ -niezmiennik  $\Delta$  stopnia 16,
- mamy ideał  $\mathbf{I}_{1782}$  z rezolwentą formatu  $(1, 7, 8, 2)$ :

$$\mathbf{I}_{1782} = (\Delta, \partial\Delta/\partial x_{678}, \partial\Delta/\partial x_{578}, \partial\Delta/\partial x_{478}, \\ \partial\Delta/\partial x_{378}, \partial\Delta/\partial x_{278}, \partial\Delta/\partial x_{178}),$$

- nasza reprezentacja to  $\bigwedge^3 \mathbf{C}^8$ , więc  $R = K[x_{ijk}]$  z  $1 \leq i < j < k \leq 8$ ,
- W  $R$  mamy jedyny  $SL(8)$ -niezmiennik  $\Delta$  stopnia 16,
- mamy ideał  $\mathbf{I}_{1782}$  z rezolwentą formatu  $(1, 7, 8, 2)$ :

$$\mathbf{I}_{1782} = (\Delta, \partial\Delta/\partial x_{678}, \partial\Delta/\partial x_{578}, \partial\Delta/\partial x_{478}, \\ \partial\Delta/\partial x_{378}, \partial\Delta/\partial x_{278}, \partial\Delta/\partial x_{178}),$$

- mamy też ideał  $\mathbf{I}_{1584}$  z rezolwentą formatu  $(1, 5, 8, 4)$

$$\mathbf{I}_{1584} = (\Delta, \partial\Delta/\partial x_{678}, \partial\Delta/\partial x_{578}, \partial\Delta/\partial x_{568}, \partial\Delta/\partial x_{567}).$$

## Przypuszczenie o generyczności.

Każdy ideał doskonały kowymiaru 3 z rezolwentą formatu Dynkina jest otrzymany (z dokładnością do deformacji) przez specjalizację odpowiedniego ideału zdefiniowanego powyżej.

## Przypuszczenie o generyczności.

Każdy ideał doskonały kowymiaru 3 z rezolwentą formatu Dynkina jest otrzymany (z dokładnością do deformacji) przez specjalizację odpowiedniego ideału zdefiniowanego powyżej.

- czemu tego się oczekuje ?



## Przyjęcie o generyczności.

Każdy ideał doskonały kowymiaru 3 z rezolwentą formatu Dynkina jest otrzymany (z dokładnością do deformacji) przez specjalizację odpowiedniego ideału zdefiniowanego powyżej.

- czemu tego się oczekuje ?
- przykłady odpowiadają prawidłowości związanej z diagramami  $T_{p,q,r}$ ,

## Przyпускzenie o generyczności.

Każdy ideał doskonały kowymiaru 3 z rezolwentą formatu Dynkina jest otrzymany (z dokładnością do deformacji) przez specjalizację odpowiedniego ideału zdefiniowanego powyżej.

- czemu tego się oczekuje ?
- przykłady odpowiadają prawidłowości związanej z diagramami  $T_{p,q,r}$ ,
- rezolwenty pochodzące od naszych ideałów dadzą się scharakteryzować w terminach samej ich struktury,

## Przyjęcie o generyczności.

Każdy ideał doskonały kowymiaru 3 z rezolwentą formatu Dynkina jest otrzymany (z dokładnością do deformacji) przez specjalizację odpowiedniego ideału zdefiniowanego powyżej.

- czemu tego się oczekuje ?
- przykłady odpowiadają prawidłowości związanej z diagramami  $T_{p,q,r}$ ,
- rezolwenty pochodzące od naszych ideałów dadzą się scharakteryzować w terminach samej ich struktury,
- jest jeszcze związek z innym przyjęciem.

## Pytanie Peskina i Szpiro (1975).

Niech  $R$  będzie pierścieniem lokalnym,  $M, N$ -dwoma  $R$ -modułami skończenie generowanymi. Załóżmy, że  $pd_R M < \infty$ , oraz że  $M \otimes_R N$  ma skończoną długość. Czy z powyższego wynika, że

$$\dim(M) + \dim(N) \leq \dim(R)?$$

## Pytanie Peskina i Szpiro (1975).

Niech  $R$  będzie pierścieniem lokalnym,  $M, N$ -dwoma  $R$ -modułami skończenie generowanymi. Załóżmy, że  $pd_R M < \infty$ , oraz że  $M \otimes_R N$  ma skończoną długość. Czy z powyższego wynika, że

$$\dim(M) + \dim(N) \leq \dim(R)?$$

## Twierdzenie o dychotomii.

Jeśli odpowiedź na pytanie Peskina i Szpiro jest pozytywna, to Przypuszczenie o generyczności jest prawdziwe.

Dziękuję za uwagę!