# Contents of volume LII, number 2


Pages

T. Leżański, Sur l'intégration directe des équations d'évolution. 2 . . . 89–108
P. Mankiewicz, On topological, Lipschitz, and uniform classification of LF-spaces . . . 109–142
P. Wojtaszczyk, On linear properties of separable conjugate spaces of $C^*$-algebras . . . 143–147
M. Leinert, Faltungsoperatoren auf gewissen diskreten Gruppen . . . 149–158
J. Hoffmann-Jørgensen, Sums of independent Banach space valued random variables . . . 159–186
S. Kwapień, On Banach spaces containing $c_0$. A supplement to the paper by J. Hoffmann-Jørgensen "Sums of independent Banach space valued random variables" . . . 187–188
P. G. Casazza and B.-L. Lin, Projections on Banach spaces with symmetric bases . . . 189–193



The journal STUDIA MATHEMATICA prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The papers submitted should be typed on one side only and accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies, one of them being the typed one, not Xerox copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
ul. Śniadeckich 8
00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to

Institute of Mathematics
Polish Academy of Sciences, Exchange,
ul. Śniadeckich 8
00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller's or at

"ARS POLONA — RUCH"

Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA



STUDIA MATHEMATICA, T. LII. (1974)


# Sur l'intégration directe des équations d'évolution 2


par

T. LEŻAŃSKI (Lublin)



**Resumé.** On considére dans ce travail les opérations: $T(t_0, t)$ et $D/Dt$ définiées dans [1] au moyen d'une opération fondamentale $S(t, \varepsilon)$.

De plus, on introduit ici deux nouvelle opérations fondamentales: $S_1(t, \varepsilon)$ — "presque inverse" à $S(t, \varepsilon)$, et $S^*(t, \varepsilon)$ — l'adjointe à $S(t, \varepsilon)$; on construit les opérations correspondentes $T_1(t_0, t)$ et $D_1/Dt$, $D^*/Dt$ — suivant la méthode exposée dans [1], et on étude les rélations entre eux et $T(t_0, t)$. En particulier on déduit une condition suffisante pour que $T(s, t)$ ait l'inverse continue, ou qu'elle soit isométrique, ou bien que l'équation: $T(s, t)x = y$ ait solutions pour $y \in X_t$ $(s < t)$. On montre les formules:

$$y(t) = T(0, t)y(0) + \int_0^t T(s, t)\frac{D}{Ds}y(s)\,ds,$$

$$d/ds\,(x(s), \varphi(s))_s = \left(\frac{D}{Ds}x(s), \varphi(s)\right) + \left(x(s), \frac{D^*}{Ds}\varphi(s)\right)$$

pour $x(s) \in X_s$, $\varphi(s) \in X_s^*$. Enfin, on déduit une formule pour la solution d'équation:

$$\frac{D^2}{Dt^2}x(t) = y(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad 0 < t < 1.$$


**Introduction.** Le présent travail est un complément du travail [1]; les notions dont nous nous occuperons ici, et les notations que nous utiliserons coïncident avec celles de [1]. Rappelons-les: à tout nombre réel d'un intervalle fixe $\langle 0, \tau\rangle$ faisons correspondre un espace réel $X_t$ de Banach avec la norme $\|\ \|_t$. Pour $\varepsilon \geqslant 0$ tel que $0 \leqslant t+\varepsilon \leqslant \tau$ supposons définie une opération linéaire bornée $S(t, \varepsilon) \in X_t \to X_{t+\varepsilon}$, telle que $S(t, 0)x = x$, satisfaisant aux hypothèses suivantes:

(A) *Il existe une constante $K$ telle que*

$$\|S(t, \varepsilon)\| \leqslant 1 + K\varepsilon \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar\varepsilon,\ \bar\varepsilon - \textit{fixe}. \tag{1}$$

(B) *Pour $t \in \langle 0, \tau\rangle$ il existe un ensemble $Z_t \subset X_t$ convexe, symétrique, fermé et contenant $0 \in X_t$, tel que*

$$S(t, \varepsilon) \in Z_t \to Z_{t+\varepsilon}. \tag{2}$$

(C) *Il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que*

$$\|S(t, \varepsilon+\delta)x - S(t+\varepsilon, \delta)S(t, \varepsilon)x\|_{t+\varepsilon+\delta} \leqslant C\delta\varepsilon \quad \textit{pour} \quad x \in Z_t. \tag{3}$$

L'hypothèse (A) est un cas particulier de l'hypothèse (A) du travail [1]; en effet, $\varphi(t,\varepsilon)\overset{\mathrm{df}}{=}1+K\varepsilon$, $\psi(t)\overset{\mathrm{df}}{=}\exp(Kt)$ satisfont aux conditions (1), (2) de [1]. Comme, de plus, (B) et (C) coïncident avec les hypothèses correspondantes (B), (C) de [1], tous les théorèmes de [1] restent vrais ici. Rappelons les notions et les théorèmes fondamentaux de [1].

Pour une division $\pi=\{0\leqslant s=t_0<t_1<\ldots<t_p=\tau\}$ de l'intervalle $\langle s,\tau\rangle$ posons $\delta_i=t_{i+1}-t_i$, $\Delta(\pi)=\max\delta_i$, $T(\pi,s,t)=S(t_n,t-t_n)S(t_{n-1},\delta_{n-1})\ldots S(t_0,\delta_0)$ si $t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}$. Or, on a d'après [1]: $T(\pi,s,t)\in Z_s\to Z_t$. Si $\Delta(\pi_n)\to 0$ et $x\in Z_s$, la suite $T(\pi_n,s,t)x$ converge vers un élément $T(s,t)x\in Z_t$ ne dépendant pas de la suite $\pi_n$ (pourvu que $\Delta(\pi_n)\to 0$). En vertu du théorème 2. (p. 20) de [1], $T(s,t)$ est une „opération d'évolution”:

$$(4)\qquad T(t_2,t_3)T(t_1,t_2)x=T(t_1,t_3)x,\qquad x\in Z_{t_1},\qquad 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant t_3.$$

La suite $T(\pi_n,s,t)x$ converge vers $T(s,t)x$ pour $x\in Z_s$, donc aussi pour $x\in Y_s\overset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{lin}(Z_s)$, toutes les opérations $T(\pi_n,s,t)$ étant linéaires.

Les inégalités suivantes découlent des formules (13), (14), (8) et (17) de [1]: en y posant $\varphi(t,\varepsilon)=1+K\varepsilon$, $\psi(t)=\exp(Kt)$ on a, pour $x\in Z_s$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau$:

$$(5)\qquad \|T(\pi,s,t)x-T(s,t)x\|_t\leqslant C(t-s)\exp\big(K(t-s)\big)\exp\big(K\Delta(\pi)\big),$$

$$(6)\qquad \|T(s,t)x\|_t\leqslant\exp\big(K(t-s)\big)\|x\|_s\qquad \big(x\in Y_s\overset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{lin}(Z_s)\big),$$

$$(7)\qquad \|S(t,\varepsilon)x-T(t,t+\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon}\leqslant C\exp(K\varepsilon)\cdot\varepsilon^2.$$

Définissons les fonctions abstraites $x(t)$ comme les transformations: $\langle 0,\tau\rangle\ni t\to x(t)\in X_t$.

DÉFINITION 1.

$$\frac{D}{Dt}x(t)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[x(t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)]$$

si la limite ci-dessus existe. On a, en vertu de (7) et (4),

$$(8)\qquad \frac{D}{Dt}T(t_0,t)x=0\qquad (x\in Z_{t_0}).$$

Cela posé, nous sommes amenés à l'étude des opérations $T(s,t)$ et des fonctions abstraites $x(t)$. Nous allons donner, entre autres, les conditions suffisantes pour que $T(s,t)$ admette une inverse continue, qu'elle soit symétrique, que l'équation $T(s,t)x=y$ ait une solution etc. Enfin, nous établirons les formules pour la dérivée de la fonction $\big(x(t),\varphi(t)\big)_t$, où $x(t)\in X_t$, $\varphi(t)\in X_t^*$.



**1. Limitation de $\|x(t)\|_t$ au moyen de $\left\|\frac{D}{Dt}x(t)\right\|_t$.** Établissons d'abord la simple inégalité

$$(9)\qquad \|x\|_t-\|x'\|_{t-\varepsilon}\leqslant\|x-S(t-\varepsilon,\varepsilon)x'\|_t+K\varepsilon\|x'\|_{t-\varepsilon}.$$

D'après (1) on a: $\|S(t-\varepsilon,\varepsilon)x'\|_t\leqslant\|x'\|_{t-\varepsilon}+K\varepsilon\|x'\|_{t-\varepsilon}$ d'où

$$\begin{aligned}\|x\|_t-\|x'\|_{t-\varepsilon}&\leqslant\|x\|_t-\|S(t-\varepsilon,\varepsilon)x'\|_t+K\varepsilon\|x'\|_{t-\varepsilon}\\&\leqslant\|x-S(t-\varepsilon,\varepsilon)x'\|_t+K\varepsilon\|x'\|_{t-\varepsilon}.\end{aligned}$$

THÉORÈME 1. *Soit $x(t)\in X_t$; si $\frac{D}{Dt}x(t)$ existe et si les fonctions $\|x(t)\|_t$, $\left\|\frac{D}{Dt}x(t)\right\|_t$ sont continues, on a*

$$(10)\qquad \|x(t)\|_t\leqslant\exp(Kt)\Big\{\|x(0)\|_0+\int_0^t\exp(-Ks)\left\|\frac{D}{Ds}x(s)\right\|_s ds\Big\}.$$

Démonstration. D'après (9) on a pour $0\leqslant\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}$:

$$\frac{1}{\varepsilon}[\|x(t)\|_t-\|x(t-\varepsilon)\|_{t-\varepsilon}]\leqslant\left\|\frac{1}{\varepsilon}[x(t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)]\right\|_t+K\|x(t-\varepsilon)\|_{t-\varepsilon}$$

d'où, en posant $h(t)=\|x(t)\|_t$, $g(t)=\left\|\frac{D}{Dt}x(t)\right\|_t$ on obtient en passant à la limite $(\varepsilon\downarrow 0)$: $\frac{d^-}{dt}h(t)\leqslant g(t)+kh(t)$. La fonction continue:

$$f(t)\overset{\mathrm{df}}{=}\exp(-Kt)h(t)-\int_0^t\exp(-Ks)g(s)ds$$

satisfait à $\frac{d^-}{dt}f(t)=0$, donc $f(t)\leqslant f(0)$, d'où la conclusion qu'il fallait démontrer.

Démontrons maintenant (10) sous des conditions un peu différentes.

DÉFINITION 2. La fonction abstraite $x(t)$ est dite *uniformément différentiable* si à tout $\delta>0$ correspond un $\lambda>0$ tel que

$$(11)\qquad \left\|\frac{1}{\varepsilon}[x(t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)]-\frac{D}{Dt}x(t)\right\|_t\leqslant\delta\qquad\text{pour}\qquad 0\leqslant\varepsilon\leqslant\lambda.$$

THÉORÈME 2. *Si $x(t)$ est uniformément différentiable et si la fonction $g(t)=\left\|\frac{D}{Dt}x(t)\right\|_t$ est continue, l'inégalité* (10) *a lieu.*

Démonstration. Soient $0\leqslant t\leqslant\tau$, $\delta>0$. Comme $x(t)$ est uniformément différentiable, il existe un nombre réel $N$ tel qu'en posant

$\varepsilon = tn^{-1}$, $t_i = i\varepsilon$ on aura pour $n \geqslant N$ et $i = 0, 1, \ldots, n$:

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon}[x(t_i) - S(t_{i-1}, \varepsilon)x(t_{i-1})] - \frac{D}{Dt}x(t_i)\right\|_{t_i} \leqslant \delta \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où

(a) $$\|x(t_i) - S(t_{i-1}, \varepsilon)x(t_{i-1})\|_{t_i} \leqslant [g(t_i)+\delta]\varepsilon \quad \text{où} \quad g(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\|\frac{D}{Dt}x(t)\right\|_t.$$

On en tire, en vertu de (9) et en y posant: $x = x(t_i)$, $x' = x(t_{i-1})$

(b) $$\|x(t_i)\|_{t_i} \leqslant (1+K\varepsilon)\|x(t_{i-1})\|_{t_{i-1}} + [g(t_i)+\delta]\varepsilon,$$

d'où, par récurrence,

$$\|x(t)\|_t = \|x(t_n)\|_{t_n} \leqslant (1+Ktn^{-1})^n\|x(0)\|_0 + \sum_{i=1}^{n}[g(t_i)+\delta][1+Ktn^{-1}]^n tn^{-1}.$$

Si $n \to \infty$, le second membre tend vers

$$\exp(Kt)\|x(0)\|_0 + \int_0^t \left[\left\|\frac{D}{Ds}x(s)\right\|_s + \delta\right]\exp(Ks)\,ds,$$

d'où, $\delta$ étant arbitraire, on obtient la conclusion demandée.

**2. Relations entre une fonction abstraite $x(t)$ et sa dérivée absolue $\frac{D}{Dt}x(t)$.** Soit $x(t)$ une fonction abstraite. Chacun des éléments $x(t)$ appartenant à des $X_t$ différents, il ne peut être question de la continuité de $x(t)$. On y suppléera en introduisant une autre notion.

DÉFINITION 3. Une fonction abstraite $x(t)$ est dite *uniformément $S$-continue*, si l'on a:

(12) $$\bigwedge_{\delta>0}\bigvee_{\lambda}(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \lambda) \Rightarrow \{\|x(t+\varepsilon) - S(t, \varepsilon)x(t)\|_{t+\varepsilon} \leqslant \delta\}.$$

Si $x(t) \in Z_t$ (ou bien si $x(t) \in \lambda_0 Z_t$, où $0 \leqslant t \leqslant \tau$), on peut, en vertu de (7), remplacer dans (12) $S(t, \varepsilon)$ par $T(t, t+\varepsilon)$.

LEMME 1. *Si $x(t)$ est uniformément $S$-continue et si $x(t) \in Z_t$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$, la fonction $z(s) = T(s, t)x(s)$ est, pour $t$ fixé, uniformément continue dans $Z_t$ au sens ordinaire.*

Démonstration. Soient $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant t \leqslant \tau$. On a, en vertu de (4) et (7):

$$\begin{aligned}\|z(s_2) - z(s_1)\|_t &= \|T(s_2, t)x(s_2) - T(s_1, t)x(s_1)\|_t \\ &= \|T(s_2, t)[x_2(s) - T(s_1, s_2)x(s_1)]\|_t \\ &\leqslant \exp(|K|\tau)\|x(s_2) - T(s_1, s_2)x(s_1)\|_{s_2} \to 0\end{aligned}$$

uniformément, si $(s_2 - s_1) \to 0$, c.q.f.d.



On en tire que

$$y(t) = \int^t T(s, t)x(s)\,ds$$

existe (si $x(\cdot)$ est uniformément $S$-continue et si $x(t) \in Z_t$). On a démontré dans [1] (théorème 4, p. 155) que $y(z)$ est uniformément différentiable et que $\frac{D}{Dt}y(t) = x(t)$.

Démontrons maintenant un théorème réciproque.

THÉORÈME 3. *Soit $y(t)$ une fonction abstraite $(y(t) \in Z_t)$, uniformément différentiable et telle que $x(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{D}{Dt}y(t)$ soit uniformément $S$-continue. Alors*

(13) $$y(t) = T(0, t)y(0) + \int_0^t T(s, t)\frac{D}{Ds}y(s)\,ds.$$

Démonstration. Posons:

$$z(t) = y(t) - \int_0^t T(s, t)\frac{D}{Ds}y(s)\,ds - T(0, t)y(0).$$

En vertu de (8) et du théorème 4 de [1] on a $\frac{D}{Dt}z(t) = 0$, $z(0) = 0$ et $z(t)$ est uniformément différentiable. En vertu du théorème 1 ([1], p. 154) on a donc bien $z(t) = 0$, c.q.f.d.

**3. La dérivée adjointe $\frac{D^*}{Dt}$; la formule pour $\frac{d}{dt}(x(t), \varphi(t))_t$.** L'opération $S(t, \varepsilon)$ étant linéaire bornée de $X_t$ à $X_{t+\varepsilon}$, son associée $S^*(t, \varepsilon) \in L(X^*_{t+\varepsilon}, X^*_t)$. Admettons la définition suivante pour $\frac{D^*}{Dt}\varphi(t)$ $(\varphi(t) \in X^*_t)$, analogue à celle de $D/Dt$:

DÉFINITION 4.

$$\frac{D^*}{Dt}\varphi(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[S^*(t, \varepsilon)\varphi(t+\varepsilon) - \varphi(t)]$$

si la limite existe.

THÉORÈME 4. *Soient $x(t) \in X_t$, $\varphi(t) \in X^*_t$. Si $x(t)$ et $\varphi(t)$ sont uniformément différentiables et si les fonctions*

$$\left(\frac{D}{Dt}x(t), \varphi(t)\right)_t, \quad \left(x(t), \frac{D^*}{Dt}\varphi(t)\right)_t, \quad \|x(t)\|_t, \quad \|\varphi(t)\|_t$$

*sont continues dans* $\langle 0, \tau\rangle$, *on a la formule suivante:*

(14) $$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{D}{Ds}x(s), \varphi(s)\right)_s + \left((x(s), \frac{D^*}{Ds}\varphi(s)\right)_s\right] ds = (x(s), \varphi(s))_s\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Démonstration. Supposons: $\|x(t)\|_t \leqslant \alpha$, $\|\varphi(t)\|_t \leqslant \beta$, $\delta > 0$ et posons:

$$f(s) = \left(x(s), \frac{D^*\varphi}{Ds}(s)\right)_s, \qquad g(s) = \left(\frac{D}{Ds}x(s), \varphi(s)\right)_s,$$

$f(s)$ et $g(s)$ étant continues, il existe un nombre naturel $N_1$ tel que, en posant pour $n \geqslant N_1$: $\varepsilon = n^{-1}(t_2 - t_1')$, $s_i = t_1 + i\varepsilon$, on aura

(a) $$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds - \varepsilon\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\right| \leqslant \delta,$$

(b) $$\left|\int_{t_1}^{t_2} g(s)\,ds - \varepsilon\sum_{j=0}^{n-1} g(s_j)\right| \leqslant \delta.$$

Les fonctions abstraites $x(t)$, $\varphi(t)$ étant supposées uniformément différentiables, il existe un nombre $N_2$ tel que pour $\varepsilon \leqslant (t_2 - t_1)N_2^{-1}$ (donc aussi pour $n \geqslant N_2$) on aura, en tenant compte de la définition de $f(s)$ et $g(s)$:

$$\left\|\frac{D^*}{Ds}\varphi(s) - \frac{1}{\varepsilon}[S^*(s, \varepsilon)\varphi(s+\varepsilon) - \varphi(s)]\right\|_s \leqslant \delta(t_2 - t_1)^{-1}\alpha^{-1}$$

et

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}\left[x(s) - S(s-\varepsilon, \varepsilon)x(s-\varepsilon) - \frac{D}{Ds}x(s)\right]\right\|_s \leqslant \delta(t_2 - t_1)^{-1}\beta^{-1}$$

pour $\varepsilon < (t_2 - t_1)N_2^{-1}$. Donc, en particulier, en posant $s_i$ pour $s$ et en prenant $\varepsilon = (t_2 - t_1)n^{-1}$, on aura:

(c) $$\left|f(s_i) - \left(x(s_i), \frac{1}{\varepsilon}\left[S^*(s_i, \varepsilon)\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i)\right]\right)_{s_i}\right|$$
$$\leqslant \|x(s_i)\|_{s_i}\cdot\left\|\frac{1}{\varepsilon}[S^*(s_i, \varepsilon)\varphi(s_i+\varepsilon) - \varphi(s_i)]\right\|_{s_i} \leqslant \delta(t_2 - t_1)^{-1}$$

et d'une façon analogue:

(d) $$\left|\left(\frac{1}{\varepsilon}[x(s_j) - S(s_{j-1}, \varepsilon)x(s_{j-1})], \varphi(s_j)\right)_{s_j} - g(s_j)\right|$$
$$\leqslant \|\varphi(s_j)\|_{s_j}\cdot\left\|\frac{1}{\varepsilon}[x(s_j) - S(s_{j-1}, \varepsilon)x(s_j - \varepsilon)]\right\|_{s_j} \leqslant (t_2 - t_1)^{-1}\delta.$$



Soit $n > N = \max(N_1, N_2)$. Multiplions (c) et (d) par $\varepsilon$ et ajoutons-les à (a) et (b); nous obtiendrons ainsi:

(e) $$\left|\int_{t_1}^{t_2}[f(s)+g(s)]ds - \left\{\sum_{i=0}^{n-1}(x(s_i), S^*(s_i, \varepsilon)\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i))_{s_i} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{n}(x(s_j) - S(s_{j-1}, \varepsilon)x(s_{j-1}), \varphi(s_j))_{s_j}\right\}\right| \leqslant 2\delta + 2\delta(t_2 - t_1)^{-1}n\varepsilon = 4\delta.$$

Mais l'expression entre parenthèses est égale à

$$\sum_{i=0}^{n-1}(S(s_i, \varepsilon)x(s_i), \varphi(s_{i+1}))_{s_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1}(x(s_i), \varphi(s_i))_{s_i} + \sum_{j=1}^{n}(x(s_j), \varphi(s_j))_{s_j} -$$
$$- \sum_{j=1}^{n}(S(s_{j-1}, \varepsilon)x(s_{j-1}), \varphi(s_j))_{s_j}$$
$$= (x(s_n), \varphi(s_n))_{s_n} - (x(s_0), \varphi(s_0))_{s_0} = (x(t), \varphi(t))_t\Big|_{t_1}^{t_2},$$

d'où l'on tire la conclusion, $\delta$ étant arbitraire.

COROLLAIRE. *Si* $x(t)$ *et* $\varphi(t)$ *satisfont aux hypothèses du théoréme* 4, *on a*

(15) $$\frac{d}{dt}(x(t), \varphi(t))_t = \left(\frac{D}{Dt}x(t), \varphi(t)\right)_t + \left(x(t), \frac{D^*}{Dt}\varphi(t)\right)_t.$$

**4. L'inverse continue de $T(s, t)$; l'équation $T(s, t)x = y$.** Outre $S(t, \varepsilon)$ soit l'opération $S_1(t, \varepsilon) \in L(X_{t+\varepsilon}, X_t)$ $(\varepsilon \geqslant 0)$, satisfaisante aux hypothèses suivantes:

(16) $$\|S_1(t, \varepsilon)\| \leqslant 1 + K_1\varepsilon,$$

(17) $$\|S_1(t, \varepsilon)S(t, \varepsilon)x - x\|_t \leqslant \beta\varepsilon^2 \quad (x \in Z_t).$$

On en tire facilement

(18) $$\|x\|_t \leqslant (1 + K_1\varepsilon)\|S(t, \varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} + \beta\varepsilon^2 \quad (x \in Z_t).$$

En effet, en vertu de (17) et (16) on a: $\|x\|_t \leqslant \beta\varepsilon^2 + \|S_1(t, \varepsilon)S(t, \varepsilon)x\|_t \leqslant (1 + K, \varepsilon)\|S(t, \varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} + \beta\varepsilon^2$, c.q.f.d.

THÉORÈME 5. *Si* $S_1(t, \varepsilon)$ *vérifie* (16) *et* (17), *on a*

(19) $$\|T(s, t)x\|_t \geqslant \exp(-K_1(t-s))\|x\|_s \quad (0 \leqslant s \leqslant t,\ x \in Z_s).$$

Démonstration. Soit $n$ un nombre naturel tel que $\varepsilon = (t-s)^{-1}n^{-1} < |K_1|$. Posons $t_i = s + i\varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$; $x_{i+1} = S(t_i, \varepsilon)x_i$ pour $x_0 = x \in Z_s$. D'après (1) ([1], p. 150), on a

(a) $$\|x_n - T(s, t)x\|_t \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Posons pour abréger

$$\eta_j = \|x_{n-j}\|_{t_{n-j}} \quad (j = 0, 1, \ldots, n), \qquad \vartheta = 1+K_1\varepsilon, \qquad \mu = \beta\varepsilon^2,$$

alors, en vertu de (18), on a:

(b) $$\eta_{j+1} = \|x_{n-j-1}\|_{t_{n-j-1}} \leqslant (1+K_1\varepsilon)\|x_{n-j}\|_{t_{n-j}} + \beta\varepsilon^2 = \vartheta\eta_j + \mu,$$

d'où l'on obtient par récurrence:

(c) $$\|x\|_s = \|x_0\|_{t_0} = \eta_n \leqslant \vartheta^n\eta_0 + \mu(1+\vartheta+\ldots+\vartheta^{n-1}).$$

Distinguons deux cas: 1° $K_1 \neq 0$, 2° $K_1 = 0$.

1° Si $K_1 \neq 0$, il vient

$$\begin{aligned}\|x\|_s &\leqslant (1+K_1\varepsilon)^n\|x_n\|_{t_n} + \mu(1-\vartheta)^{n-1}\\ &= \big(1+K_1(t-s)n^{-1}\big)^n\|x_n\|_t + \beta(t-s)K_1^{-1}n^{-1}(1+K_1\varepsilon)^n \to\\ &\qquad\qquad \to \exp\big(K_1(t-s)\big)\|T(s,t)x\|_t\end{aligned}$$

quand $n\to\infty$, d'où la conclusion.

2° Si $K_1 = 0$, on a $\vartheta = 1$, d'où

$$\|x\|_s \leqslant \mu n + \eta_0 = \|x_n\|_t + \beta\varepsilon^2 n = \|x_n\|_t + \beta(t-s)^2n^{-1} \to \|T(s,t)x\|_t, \text{ c.q.f.d.}$$

Le théorème 5 nous dit que l'opération $T(s,t)$ admet une inverse continue; dans ce qui suit, nous allons donner les conditions suffisantes pour que l'équation

(20) $$T(s,t)x = y_0$$

ait une solution. Admettons les hypothèses suivantes:

(21) $$S_1(t,\varepsilon)\,\epsilon\, Z_{t+\varepsilon} \to \exp(\varrho\varepsilon)Z_t \quad (\varrho \text{ étant un nombre fixé}),$$

(22) $$\|S(t,\varepsilon)S_1(t,\varepsilon)x - x\|_{t+\varepsilon} \leqslant \beta_1\varepsilon^2 \quad (x\,\epsilon\, Z_{t+\varepsilon}).$$

Remarquons que (22) entraîne

(23) $$\|T(t,t+\varepsilon)S_1(t,\varepsilon)x - x\|_{t+\varepsilon} \leqslant \beta_2\varepsilon^2, \quad \beta_2 = \beta_1 + C\exp\big((|\varrho|+|K|)\tau\big).$$

En effet, en vertu de (7) on a pour $x\,\epsilon\, Z_{t+\varepsilon}$ ($C$, $K$ étant les constantes qui figurent dans (A), (B), (C), p. 89):

$$\begin{aligned}&\|S(t,\varepsilon)S_1(t,\varepsilon)x - T(t,t+\varepsilon)S_1(t,\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon}\\ &\qquad\leqslant C\exp(K\varepsilon)\varepsilon^2\cdot\exp(\varrho\varepsilon) \leqslant C\exp(|K|T)\exp(|\varrho|\tau)\varepsilon^2\end{aligned}$$

(car $S_1(t,\varepsilon)x\,\epsilon\,\exp(\varrho\varepsilon)Z_t$), d'où résulte (23).

Théorème 6. *Si $S_1(t,\varepsilon)$ satisfait à (16), (17), (21), (22) et si $y\,\epsilon\, Z_t$, l'équation $T(s,t)x = y$ admet une solution unique $x\,\epsilon\,\exp\big(\varrho(t-s)Z_t\big)$ $(s \leqslant t$,*



Démonstration. Posons, pour $n$ naturel, $\varepsilon = (t-s)n^{-1}$, $t_i = s+i\varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $x_0 \overset{\mathrm{df}}{=} y\,\epsilon\, Z_t$; $x_i = S_1(t_{n-1},\varepsilon)x_{i-1}$. On prouve facilement, en tenant compte de (21) que

(a) $$x_i\,\epsilon\,\exp(i\varrho\varepsilon)Z_{t_{n-i}},$$

de sorte que (22) donne en posant: $\beta_3 = \beta_2\exp(|\varrho|\tau)$:

(b) $$\|T(t_{n-i-1},t_{n-i})S_1(t_{n-i-1},\varepsilon)x_i - x_i\|_{t_{n_i}} \leqslant \beta_2\exp(i\varrho\varepsilon)\varepsilon^2 \leqslant \beta_3\varepsilon^2$$

puisque $i\varepsilon \leqslant n\varepsilon = t-s \leqslant \tau$. Posons, pour abréger,

$$\xi_i = \|T(t_{n-1},t)x_i - y\|_t \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

En particulier

$$\xi_0 = \|T(t_n,t)x_0 - y\|_t = \|T(t,t)y - y\|_t = 0.$$

En vertu de (b) on a:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \|T(t_{n-i},t)x_i - y\|_t = \|T(t_{n-i+1},t)T(t_{n-i},t_{n-i+1})S_1(t_{n-i},\varepsilon)x_{i-1} - y\|_t\\ &\leqslant \|T(t_{n-i+1},t)[T(t_{n-i},t_{n-i+1})S_1(t_{n-i},\varepsilon)x_{i-1} - x_{i-1}\|_t +\\ &\quad + \|T(t_{n-i+1},t)x_{i-1} - y\|_t \leqslant \|T(t_{n-i+1},t)\|\cdot\beta_3\varepsilon^2 + \xi_{i-1} \leqslant \beta_4\varepsilon^2 + \xi_{i-1},\end{aligned}$$

où $\beta_4 = \beta_3\exp(|K|\tau)$. On en tire par récurrence

(c) $$\|T(t_0,t)x_n - y\|_t = \xi_n \leqslant \beta_4\varepsilon^2 n = \beta_4(t-s)^2n^{-1} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

La suite $T(s,t)x_n$ satisfait alors à la condition de Cauchy; il en est de même de $x_n$, en vertu de (19) et du fait que $x_n\,\epsilon\,\exp(n\varrho\varepsilon)Z_t = \exp\big(\varrho(t-s)\big)Z_t$. La suite $x_n$ converge vers un $\bar{x}\,\epsilon\,\exp\big(\varrho(t-s)\big)Z_s$ (les $Z_s$ sont fermés, v. (A), p. 89) et, par suite, $T(s,t)x_n \to T(s,t)\bar{x} = y$ en vertu de (c), c.q.f.d.

Corollaire. *Si l'on suppose, en plus des hypothèses* (A), (B), (C), *p. 89, que les ensembles $Z_t$ sont symétriques, il résulte de* (16), (17), (21) *et* (22) *que $T(s,t)$ est un homéomorphisme linéaire (bijection) de $Y_s = \lim(Z_s)$ sur $\lim(Z_t)$. Si, de plus, $K = K_1 = 0$, $T(s,t)$ est isométrique, ce qui est une conséquence de* (6) *et de* (19).

Théorème 7. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) $$\|T(t_0,t)x_0\|_t = \text{const}, \quad t_0 < t, \quad x_0\,\epsilon\, Z_t$$

*et*

(b) $$\big|\|S(t,\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} - \|x\|_t\big| \leqslant r(\varepsilon)\varepsilon, \quad x\,\epsilon\, Z_t, \quad r(\varepsilon)\downarrow 0 \ (\varepsilon\downarrow 0).$$

Démonstration. 1° (a) $\Rightarrow$ (b). Comme $\|T(t,t+\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} = \|x\|_t$, on a pour $x\,\epsilon\, Z_t$

$$\begin{aligned}\big|\|S(t,\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} - \|x\|_t\big| &\leqslant \big|\|S(t,\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} - \|T(t,t+\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon}\\ &\leqslant \|S(t,\varepsilon)x - T(t,t+\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} \leqslant c\exp(k\varepsilon)\varepsilon^2\end{aligned}$$

d'où résulte (b).

2° (b) ⇒ (a). Posons, pour $n$ naturel, $t_0$ et $t$ fixés, $\varepsilon = (t-t_0)n^{-1}$, $t_i = t_0 + i\varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $x_{i+1} = S(t_i, \varepsilon)x_i$, $(x_0 \in Z_t)$. En vertu de [1], (14), p. 152: $x_n \to T(t_0, t)x_0$, car $x_0 \in Z_t$. D'autre part

$$\big|\|x_n\|_t - \|x_0\|_{t_0}\big| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \big|\|x_{i+1}\|_{t_{i+1}} - \|x_i\|_{t_i}\big| = \sum_{i=0}^{n-1} \big|\|S(t_i, \varepsilon)x_i\|_{t_{i+1}} - \|x_i\|_{t_i}\big|$$
$$\leqslant n\varepsilon r(\varepsilon) = (t-t_0)r\big((t-t_0)n^{-1}\big) \to 0 \quad \text{si} \quad n\to\infty,$$

d'où l'on tire (a) en passant à la limite, c.q.f.d.

**5. Une nouvelle „dérivation absolue” et ses applications.** Moyennant l'opération $S_1(t, s) \in \mathscr{L}(X_{t+s}, X_t)$ on peut définir la dérivée absolue d'une fonction abstraite $x(t)$ comme il suit:

DÉFINITION 5.

$$\frac{D_1}{Dt}x(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[S_1(t, \varepsilon)x(t+\varepsilon) - x(t)],$$

si la limite existe. Le théorème 8 met en évidence le rapport entre $\frac{D_1}{Dt}$ et $\frac{D}{Dt}$.

THÉORÈME 8. *Supposons vérifiées les relations* (16) *et* (17); *soit* $x(t)$ *une fonction abstraite satisfaisant aux conditions suivantes*:

(a) $\qquad x(t) \in Z_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$

(b) $x(t)$ *est uniformément différentiable et* $z(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{D}{Dt}x(t)$ *est uniformément* $S$*-continue* (v. Déf. 3).

*Dans ces conditions la dérivée absolue* $\frac{D_1}{Dt}x(t)$ *existe et* $\frac{D_1}{Dt}x(t) = \frac{D}{Dt}x(t)$.

Démonstration. Remarquons d'abord que la $S$-continuité de $z(t)$ entraîne:

(c) $\qquad \|S_1(t, \varepsilon)z(t+\varepsilon) - z(t)\|_t \to 0$ uniformément si $\varepsilon\downarrow 0$.

En effet, on a

$$\|S_1(t, \varepsilon)z(t+\varepsilon) - z(t)\|_t$$
$$\leqslant \|S_1(t, \varepsilon)[z(t+\varepsilon) - S(t, \varepsilon)z(t)]\|_t + \|S_1(t, \varepsilon)S(t, \varepsilon)z(t) - z(t)\|_t$$
$$\leqslant (1+K_1\varepsilon)\|z(t+\varepsilon) - S(t, \varepsilon)z(t)\|_{t+\varepsilon} + \beta\varepsilon^2.$$

en vertu de (16) et (17), ce qui prouve (c), puisque $z(t)$ est $S$-continue.



Démontrons maintenant la conclusion du théorème. Soit $z(t) = \frac{D}{Dt}x(t)$; alors

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}[S_1(t, \varepsilon)x(t+\varepsilon) - x(t)] - z(t)\right\|_t$$
$$\leqslant \|S_1(t, \varepsilon)\{\varepsilon^{-1}[x(t+\varepsilon) - S(t, \varepsilon)x(t)] - z(t+\varepsilon)\}\|_t +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\|S_1(t, \varepsilon)S(t, \varepsilon)x(t) - x(t)\| + \|S_1(t, \varepsilon)z(t+\varepsilon) - z(t)\|_t$$
$$\leqslant (1+K_1\varepsilon)\left\|\frac{1}{\varepsilon}[x(t+\varepsilon) - S(t, \varepsilon)x(t)] - z(t+\varepsilon)\right\|_{t+\varepsilon} +$$
$$+ \|S_1(t, \varepsilon)z(t+\varepsilon) - z(t)\|_t + \beta\varepsilon^2 \to 0$$

uniformément si $\varepsilon\downarrow 0$, en vertu de (c) et du fait que $x(t)$ est uniformément différentiable, c.q.f.d.

THÉORÈME 9. *Si* $S_1(t, \varepsilon)$ *satisfait à* (16) *et* (17) *et si* $x_0 \in Z_{t_0}$, *la fonction* $f(t) = \|T(t_0, t)x_0\|$ *est continue.*

Démonstration. Posons $x(t) = T(t_0, t)x_0$; alors $f(t) = \|x(t)\|_t$. En vertu de [1] ((15), p. 152), $x(t) \in Z_t$; de plus, (6) entraîne

(a) $\qquad \|x(t)\|_t \leqslant C\exp\big(K(t-t_0)\big)\|x_0\|_{t_0} \leqslant C\exp(|K|\tau)\|x(t_0)\|_{t_0} = a_0.$

Or, (4) et (6) donnent, avec (a),

(b) $\qquad f(t+\varepsilon) = \|T(t, t+\varepsilon)x(t)\|_{t+\varepsilon} \leqslant \exp(K\varepsilon)\|x(t)\|_t = \exp(K\varepsilon)f(t).$

D'autre part, (16) et (17) entraînent (19) (v. théorème 9)

(c) $\qquad f(t+\varepsilon) = \|T(t, t+\varepsilon)x(t)\|_{t+\varepsilon} \geqslant \exp(-K_1\varepsilon)f(t),$

d'où il vient finalement

$$-|\exp(-K_1\varepsilon) - 1|a_0 \leqslant f(t+\varepsilon) - f(t) \leqslant |\exp(K\varepsilon) - 1|a_0, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

**6. La dérivée $\frac{D_1^*}{Dt}\varphi(t)$; les dérivées gauche et droite de $\big(x(t), \varphi(t)\big)_t$.** Comme $S_1(t, \varepsilon) \in \mathscr{L}(X_{t+\varepsilon}, X_t)$ on a $S_1^*(t, \varepsilon) \in \mathscr{L}(X_t^*, X_{t+\varepsilon}^*)$. Admettons la

DÉFINITION 6.

$$\frac{D_1^*}{Dt}\varphi(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(t) - S_1^*(t-\varepsilon_1\varepsilon)\varphi(t-\varepsilon)] \qquad \text{pour} \qquad \varphi(t) \in X_t^*.$$

Théorème 10. *Supposons vérifiées les relations* (16) *et* (17); *si* $x(t)\in Z_t$, $\varphi(t)\in X_t^*$, $\|\varphi(t)\|_t\leqslant a$ $(0\leqslant t\leqslant \tau)$ *et si les dérivées* $\frac{D}{Dt}x(t)$, $\frac{D_1^*}{Dt}\varphi(t)$ *existent au point* $s=t$, *on a*

$$(24)\qquad \frac{d^-}{dt}\big(x(t),\varphi(t)\big)_t=\left(\frac{D}{Dt}x(t),(t)\right)_t+\left(x(t),\frac{D_1^*}{Dt}\varphi(t)\right).$$

Démonstration. Pour $\varepsilon>0$ l'identité suivante a lieu:

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{\varepsilon}\big[\big(x(t),\varphi(t)\big)_t-\big(x(t-\varepsilon),\varphi(t-\varepsilon)\big)_{t-\varepsilon}\big]=\left(\frac{1}{\varepsilon}[x(t)-\right.$$
$$\left.-S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)],\varphi(t)\right)_t+\left(x(t),\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(t)-S_1^*(t-\varepsilon,\varepsilon)\varphi(t-\varepsilon)]\right)_t+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}[S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)-x(t)],\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(t)-S_1^*(t-\varepsilon,\varepsilon)\varphi(t-\varepsilon)]\right)_t+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\big\{\big(S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon),S_1^*(t-\varepsilon,\varepsilon)\varphi(t-\varepsilon)\big)_t-\big(x(t-\varepsilon),\varphi(t-\varepsilon)\big)_{t-\varepsilon}\big\}.$$

Or, si $\varepsilon\downarrow 0$, la somme du premier et du second terme du second membre de (a) tend vers le premier membre de (24); le troisième terme tend vers zéro puisque les expressions entre parenthèses admettent des limites; enfin la valeur absolue du quatrième terme ne dépasse pas

$$\frac{1}{\varepsilon}\|S_1^*(t-\varepsilon,\varepsilon)S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)-x(t-\varepsilon)\|_{t-\varepsilon}\cdot\|\varphi(t-\varepsilon)\|_{t-\varepsilon}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\beta\varepsilon^2\to 0,$$

si $\varepsilon\downarrow 0$, en vertu de (17), c.q.f.d.

D'une façon analogue on peut démontrer le

Théorème 11. *Supposons satisfaites les relations* (16) *et* (25):

$$(25)\qquad \|S(t,\varepsilon)S_1(t,\varepsilon)x-x\|_{t+\varepsilon}\leqslant\beta_1\varepsilon^2\quad (x\in Z_{t+\varepsilon})$$

*et soient*:

$$x(s)\in Z_s,\qquad \varphi(s)\in X_s^*,\qquad \|\varphi(s)\|_s\leqslant a.$$

*Dans ces conditions, si* $x(t)$ *et* $\varphi(t)$ *admettent des dérivées* $\frac{D_1}{Dt}x(t)$, $\frac{D^*}{Dt}\varphi(t)$ *au point* $s=t$, *on a*

$$(26)\qquad \frac{d^+}{dt}\big(x(t),\varphi(t)\big)_t=\left(\frac{D_1}{Dt}x(t),\varphi(t)\right)_t+\left(x(t),\frac{D^*}{Dt}\varphi(t)\right).$$



La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 10 et s'appuie sur l'identité:

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{\varepsilon}\big[\big(x(t+\varepsilon),\varphi(t+\varepsilon)\big)_{t+\varepsilon}-\big(x(t),\varphi(t)\big)_t\big]$$
$$=\left(\frac{1}{\varepsilon}[S_1(t,\varepsilon)x(t+\varepsilon)-x(t)],\varphi(t)\right)_t+\left(x(t),\frac{1}{\varepsilon}[S^*(t,\varepsilon)\varphi(t+\varepsilon)-\varphi(t)]\right)_t+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}[S_1(t,\varepsilon)x(t+\varepsilon)-x(t)],\frac{1}{\varepsilon}[S^*(t,\varepsilon)\varphi(t+\varepsilon)-\varphi(t)]\right)_t-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\big\{\big(S_1(t,\varepsilon)x(t+\varepsilon),S^*(t,\varepsilon)\varphi(t+\varepsilon)\big)_t-\big(x(t+\varepsilon),\varphi(t+\varepsilon)\big)_{t+\varepsilon}\big\}.$$

**7. Cas où les $X_t$ sont des espaces de Hilbert.** Admettons maintenant que chaque $Z_t$ soit un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(x,y)_t$ et supposons que $S(t,\varepsilon)$ remplisse la condition (27) (outre les hypothèses (A), (B), (C), p. 89):

$$(27)\qquad \big|\|S(t,\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon}^2-\|x\|_t\big|\leqslant r(\varepsilon)\varepsilon,\qquad x\in Z_s,\qquad r(\varepsilon)\downarrow 0\quad\text{si}\quad \varepsilon\downarrow 0.$$

Théorème 12. *Si* $x(t)\in Z_t$ *est bornée*: $\|x(t)\|_t\leqslant a$ *et si la dérivée* $\frac{D}{Dt}x(t)$ *existe, on a*

$$(28)\qquad \frac{d^-}{dt}\|x(t)\|_t^2=2\left(\frac{D}{Dt}x(t),x(t)\right)_t.$$

Démonstration. On obtient facilement

$$\frac{1}{\varepsilon}\big[\|x(t)\|_t^2-\|x(t-\varepsilon)\|_{t-\varepsilon}^2\big]-2\left(\frac{1}{\varepsilon}[x(t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)],x(t)\right)_t$$
$$=-\varepsilon\left\|\frac{1}{\varepsilon}[x(t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)]\right\|_t^2+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\big[\|S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)\|_t^2-\|x(t-\varepsilon)\|_{t-\varepsilon}^2\big]\to 0$$

en vertu de (27) et en tenant compte du fait que $\frac{D}{Dt}x(t)$ existe, c.q.f.d.

Théorème 13. *Si* $S(t,\varepsilon)$ *satisfait à* (27), *si* $x_i(t)\in Z_t$ *et* $\|x_i(t)\|_t\leqslant a$, *enfin si les dérivées* $\frac{D}{Dt}x_i(t)$ *existent, on a*

$$(29)\qquad \frac{d^-}{dt}\big(x_1(t),x_2(t)\big)_t=\left(\frac{D}{Dt}x_1(t),x_2(t)\right)_t+\left(x_1(t),\frac{D}{Dt}x_2(t)\right)_t.$$

Démonstration. Il suffit de poser dans le théorème précédent $x(t) = x_1(t)+x_2(t)$ et de soustraire ensuite les équations du type (28) qui s'ensuivent pour $x_1(t)\pm x_2(t)$.

Nous allons maintenant établir une condition suffisante pour que $T(t_0, t)$ soit isométrique; le théorème suivant, qui la fournit, peut être plus utile que le théorème 7 dans le cas où les $X_t$ sont des espaces de Hilbert.

THÉORÈME 14. *Si $S(t, s)$ satisfait à (27) et $x_0 \epsilon Z_{t_0}$, $\|T(t_0, t)x_0\|_t$ est constante.*

Démonstration. Soit $x(t) \overset{\text{df}}{=} T(t_0, t)x_0$ $(t\geqslant t_0)$; en vertu de (15) ([1], p. 152) $x(t)\epsilon Z_t$; de plus, $\|x(t)\|_t \leqslant a_0 = \exp(|K|\tau)\,\|x_0\|_{t_0}$ (v. (6)). La fonction $f(t) = \|x(t)\|_t$ est continue; cela découle des relations (7) et (27), puisque $x(t+\varepsilon) = T(t, t+\varepsilon)x(t)$. D'après le théorème 12 $\frac{d^-}{dt}f(t) = 0$, car $\frac{D}{Dt}T(t_0, t)x_0 = 0$. Or, $f(t)$ étant continue et admettant une dérivée gauche identiquement nulle, elle est constante, c.q.f.d.

**8. Rapport entre $\frac{D}{Dt}$ et les opérations différentielles.** Soit, outre $S(t, \varepsilon)$, une opération $\sigma(t, \varepsilon)\epsilon \mathscr{L}(X_{t+\varepsilon}, X_t)$ telle que $\|\sigma(t, \varepsilon)\|\leqslant \gamma$. Posons:

$$\frac{\delta}{\delta t}y(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[\sigma(t, \varepsilon)y(t+\varepsilon)-y(t)].$$

La fonction $x(t)$ sera dite *$\sigma$-continue*, si $\|\sigma(t, \varepsilon)x(t+\varepsilon)-x(t)\|_t\to 0\;(\varepsilon\downarrow 0)$. Soit $y(t)$ une fonction abstraite telle que la dérivée uniforme $x(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{D}{Dt}y(t)$ soit $\sigma$-continue. Posons enfin

$$F_t(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[\sigma(t, \varepsilon)S(t, \varepsilon)x-x]. \tag{30}$$

Le domaine $D(F_t)$ est par définition l'ensemble des $x\epsilon X_t$ pour lesquels la limite ci-dessus existe.

THÉORÈME 15. *Si $y(t)\epsilon D(F_t)$, on a*

$$\frac{D}{Dt}y(t) = \frac{\delta}{\delta t}y(t)-F_t(y(t)).$$

*En effet, on a:*

(a) $\left\|\frac{1}{\varepsilon}[y(t)-S(t-\varepsilon, \varepsilon)y(t-\varepsilon)-x(t)]\right\|_t \leqslant r(\varepsilon)$, *où* $r(\varepsilon)\downarrow 0$ *si* $\varepsilon\downarrow 0$,

*$x(t)$ étant la dérivée uniforme de $y(\cdot)$. En posant $t+\varepsilon$ pour $t$ on obtient:*

(b) $$\left\|\frac{1}{\varepsilon}[y(t+\varepsilon)-S(t, \varepsilon)y(t)]-x(t+\varepsilon)\right\|_{t+\varepsilon}\leqslant r(\varepsilon)$$

*d'où l'on tire*

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}[\sigma(t, \varepsilon)y(t+\varepsilon)-y(t)]+\frac{1}{\varepsilon}[y(t)-\sigma(t, \varepsilon)S(t, \varepsilon)y(t)-x(t)]\right\|_t$$
$$\leqslant \left\|\sigma(t, \varepsilon)\left\{\frac{1}{\varepsilon}[y(t+\varepsilon)-S(t, \varepsilon)y(t)]-x(t+\varepsilon)\right\}\right\|_t + \|\sigma(t, \varepsilon)x(t+\varepsilon)-x(t)\|$$
$$\leqslant \|\sigma(t, \varepsilon)\|r(\varepsilon)+\|\sigma(t, \varepsilon)x(t+\varepsilon)-x(t)\|_t\to 0;$$

*$x(t)$ étant supposée $\sigma$-continue. Il suffit de passer à la limite $(\varepsilon\downarrow 0)$ pour obtenir la conclusion qu'il fallait démontrer.*

*Si, en particulier, tous les $X_t$ sont égaux: $X_t = X$ et si $\sigma(t, \varepsilon) = I$, on obtient:*

$$\frac{D}{Dt}y(t) = \frac{d}{dt}y(t)-F_t y(t)$$

*($F_t$ étant égal dans ce cas à $F_t x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[S(t, \varepsilon)x-x]$), en supposant que $y(t)\epsilon D(F_t)$.*

**9. Exemple.** Illustrons maintenant les considérations précédentes par un assez simple example. Soient: $X_t = H$ un espace réel de Hilbert, $A$ une opération linéaire fermée de domaine $M$ dense, satisfaisant aux conditions

(a) $$\|(I-\varepsilon A)^{-1}\|\leqslant 1+K\varepsilon \qquad (I+\varepsilon A)(M) = H.$$

Posons:

$$S(t, \varepsilon) = (I-\varepsilon A)^{-1}, \qquad x\epsilon Z_t^0 \equiv x\epsilon D(A^2), \qquad \|x\|\leqslant \exp(Kt),$$
$$\|A^2x\|\leqslant \exp(Kt), \qquad Z_t = \overline{Z_t^0}.$$

Vérifions les hypothèses (A), (B), (C).

(A) L'hypothèse est évidemment équivalente à (a).

(B) Il suffit de prouver que $S(t, \varepsilon)\epsilon Z_t^0\to Z_{t+\varepsilon}^0$, $S(t, \varepsilon)$ étant bornée. Soit $x\epsilon Z_t^0$, c'est-à-dire $\|x\|\leqslant \exp(Kt)$, $\|A^2x\|\leqslant\exp(Kt)$, $x\epsilon D(A^2)$. Or, on a

$$\|S(t, \varepsilon)x\| = \|(I-\varepsilon A)^{-1}x\|\leqslant \exp(K\varepsilon)\exp(Kt) = \exp(K(t+\varepsilon)).$$

Pareillement

$$\|A^2S(t, \varepsilon)x\|\leqslant \exp(Kt)\exp(K\varepsilon),$$

d'où l'on tire (B).

(C) On a, pour $x \in Z_t^0$, $\varepsilon, \delta \geqslant 0$,

$$\|S(t, \varepsilon+\delta)x - S(t+\delta, \varepsilon_0)S(t, \delta)x\| = \|(I-(\varepsilon+\delta)A)^{-1}x-(I-\varepsilon A)^{-1}(I-\delta A)^{-1}x\| = \|\varepsilon\delta(I-\varepsilon A)^{-1}(I-\delta A)^{-1}(I-(\varepsilon+\delta)A)^{-1}A^2x\| \leqslant \varepsilon\delta\exp(3|K|\tau)\|A^2x\| \leqslant \varepsilon\delta\exp(4|K|\tau) = c\varepsilon\delta,$$

d'où l'on tire (C) aussi pour $x \in \overline{Z_t^0} = Z_t$, puisque $S(t, \varepsilon)$ est bornée.

Les hypothèses (A), (B), (C) étant vérifiées, il existe une opération $T(s, t)$ linéaire bornée, définie sur $\overline{\lim Z_s} = H$ ($D(A^2)$ étant dense dans $H$).

Supposons maintenant que

(b) $$\|(I+\varepsilon A)^{-1}\| \leqslant 1+K_1\varepsilon, \quad \varepsilon \geqslant 0,$$

et posons: $S_1(t, \varepsilon) = (I+\varepsilon A)^{-1}$. On prouve facilement que

(c) $$\|S_1(t, \varepsilon)S(t, \varepsilon)x - x\| \leqslant \exp(2(|K|+|K_1|)\tau)\varepsilon^2 = \beta\varepsilon^2 \text{ pour } x \in Z_t^0,$$

ainsi que

(d) $$\|S(t, \varepsilon)S_1(t, \varepsilon)x - x\| \leqslant \beta\varepsilon^2 \quad (x \in Z_t), \quad \beta \overset{\mathrm{df}}{=} \exp(2(|K|+|K_1|)\tau).$$

Alors $T(t_0, t)$ est une bijection de $H$ sur $H = \lim(Z_t)$. Si l'on admet: $A^* = -A$, $-T(t_0, t)$ est isométrique; en effet:

$$\big|\|S(t, \varepsilon)x\|^2 - \|x\|^2\big| = |(S^*(t, \varepsilon)S(t, \varepsilon)x - x, x)| = |((I+\varepsilon A)^{-1}(I-\varepsilon A)^{-1}x - x, x)| \leqslant \varepsilon^2\|A^2x\|\,\|x\| \leqslant \exp(2|K|\tau)\varepsilon^2, \quad \text{pour} \quad x \in Z_t,$$

d'où résulte la conclusion, en vertu du théorème 14.

**10. L'équation:** $\dfrac{D^2}{Dt^2}x(t) = -y(t)$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$. Posons ici $\tau = 1$, et supposons que l'opération $T(s, t)$ définie plus haut a un sens et est équibornée pour $s, t \in \langle 0, 1\rangle$ Désignons par $\mathfrak{N}_0$ (seulement dans ce N°) l'ensemble des fonctions abstraites $y(\cdot)$ uniformément $S$-continues et telles que $y(t) \in Z_t$. Définissons une fonction réelle $K(t, s)$

(a) $$K(t, s) = \begin{cases} s(1-t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t(1-s) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour $y(\cdot) \in \mathfrak{N}_0$ et $t$ fixé, la fonction: $K(t, s)T(s, t)y(s) \in Z_t$ et elle est continue au sens habituel, en vertu du lemme 1. Alors l'intégrale

(b) $$x(t) = \int_0^1 K(t, s)T(s, t)y(s)\,ds$$

existe. Nous allons etablir le



THÉORÈME 16. *$x(t)$ ainsi que $\dfrac{D}{Dt}x(t)$ sont uniformément différentiables et on a:*

(c) $$\frac{D^2}{Dt^2}x(t) = -y(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Démonstration. On a d'abord: $x(t) = u(t)+v(t)$, où

(d) $$u(t) = \int_0^t s(1-t)T(s, t)y(s)\,ds, \quad v(t) = \int_t^1 t(1-s)T(s, t)y(s)\,ds.$$

Nous avons:

$$\varepsilon^{-1}[u(t) - S(t-\varepsilon, \varepsilon)u(t-\varepsilon)]$$

$$= \varepsilon^{-1}\Big\{\int_0^t s(1-t)T(s, t)y(s)\,ds - S(t-\varepsilon, \varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} s(1-t+\varepsilon)T(s, t-\varepsilon)y(s)\,ds\Big\}$$

$$= \varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon} s(1-t)[T(s, t) - S(t-\varepsilon, \varepsilon)T(s, t-\varepsilon)]y(s)\,ds +$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_{t-\varepsilon}^t s(1-t)T(s, t)y(s)\,ds - \int_0^{t-\varepsilon} S(t-\varepsilon, \varepsilon)sT(s, t-\varepsilon)y(s)\,ds.$$

Or, comme $y(s) \in Z_s$, on a d'après [1], (17) du lemme 5, p. 152:

(e) $$\|S(t-\varepsilon, \varepsilon)T(s, t-\varepsilon)y(s) - T(s, t)y(s)\|_t \leqslant \text{const}\cdot\varepsilon^2,$$

d'où l'on tire que le premier terme du second membre tend vers zéro si $\varepsilon\downarrow 0$; pour la même raison, le troisième terme tend vers $-\int_0^t sT(s, t)y(s)\,ds$, car la fonction: $T(s, t)y(s)$ est continue de $s$. Enfin, le second terme tend vers $t(1-t)y(t)$ car $T(s, t)y(s)$ tend vers $y(t)$ uniformément si $s \to t$.

Nous avons donc démontré que:

(f) $$\frac{D}{Dt}u(t) = t(1-t)y(t) - \int_0^t sT(s, t)y(s)\,ds.$$

On montre tout pareillement que

(g) $$\frac{D}{Dt}v(t) = -t(1-t)y(t) + \int_t^1 (1-s)T(s, t)y(s)\,ds.$$

En effet,

$\varepsilon^{-1}[v(t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)v(t-\varepsilon)]$

$$= \varepsilon^{-1}\Big\{\int_t^1 t(1-s)T(s,t)y(s)\,ds - S(t-\varepsilon,\varepsilon)\int_{t-\varepsilon}^1 (t-\varepsilon)(1-s)T(s,t)y(s)\,ds\Big\}$$

$$= \varepsilon^{-1}\int_{t-\varepsilon}^1 t(1-s)[T(s,t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)T(s,t-\varepsilon)]y(s)\,ds -$$

$$-\varepsilon^{-1}\int_{t-\varepsilon}^1 t(1-s)T(s,t)y(s)\,ds + \int_{t-\varepsilon}^1 (1-s)S(t-\varepsilon,\varepsilon)T(s,t-\varepsilon)y(s)\,ds.$$

Or, comme plus haut, le premier terme tend vers zéro (si $\varepsilon\downarrow 0$), le second vers: $-t(1-t)y(t)$, et le troisième vers: $\int_t^1 (1-s)T(s,t)y(s)\,ds$, d'où (g). On obtient de (d), (f) et (g):

(h) $$\frac{D}{Dt}x(t) = -\int_0^1 sT(s,t)y(s)\,ds + \int_t^1 T(s,t)y(s)\,ds.$$

Désignons par $w(t)$ et $z(t)$ le premier et le second terme du second membre de (h) resp.; montrons ensuite que $w(\cdot)$ et $z(\cdot)$ sont uniformément différentiables et qu'on a:

(i) $$\frac{D}{Dt}w(t) = 0,$$

(j) $$\frac{D}{Dt}z(t) = -y(t).$$

En effet, on a:

$\varepsilon^{-1}[w(t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)w(t-\varepsilon)]$

$$= \varepsilon^{-1}\Big\{\int_0^1 sT(s,t)y(s)\,ds - S(t-\varepsilon,\varepsilon)\int_0^1 sT(s,t-\varepsilon)y(s)\,ds\Big\}$$

$$= \varepsilon^{-1}\int_0^1 s[T(s,t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)T(s,t-\varepsilon)]y(s)\,ds \to 0 \quad (\text{si } \varepsilon\downarrow 0)$$

en vertu [1], (17) du lemme 5, p. 152. (i) est ainsi démontré. D'autre part, on a pour $\varepsilon>0$:

$\varepsilon^{-1}[z(t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)z(t-\varepsilon)]$

$$= \varepsilon^{-1}\Big\{\int_t^1 T(s,t)y(s)\,ds - S(t-\varepsilon,\varepsilon)\int_t^1 T(s,t-\varepsilon)y(s)\,ds\Big\}$$

$$= \varepsilon^{-1}\int_{t-\varepsilon}^1 [T(s,t)-S(t-\varepsilon,\varepsilon)T(s,t-\varepsilon)]y(s)\,ds - \varepsilon^{-1}\int_{t-\varepsilon}^t T(s,t)y(s)\,ds.$$



On montre tout comme auparavant que le premier terme du second membre tend vers zéro, si $\varepsilon\downarrow 0$, tandis que le second tend vers $-y(t)$. Les égalités (i) et (j) sont ainsi démontrées, et par conséquent aussi l'équation

$$\frac{D^2}{Dt^2}x(t) = -y(t);$$

les conditions aux limites: $x(0)=0$, $x(1)=0$ découlent de l'identité: $K(0,s)K(1,s)=0$, c.q.f.d.

**11. Quelques remarques concernant les applications.** Bien qu'il soit parfois possible de construire les solutions dites „généralisées" de l'équation: $dx(t)/dt = A_t x(t)$, par la méthode de l'intégrale-produit, décrite dans [1], le domaine principal des applications du présent travail semblent être les espaces du type de Riemann-Hilbert. L'espace en question peut être défini comme un espace métrique $X$, dans lequel la dérivée des fonctions abstraites: $dx(t)/dt$ est bien déterminée, et tel qu'à tout point $x\in X$ correspond un "plan tangent" $H_x$ qui est, à son tour, un espace réel de Hilbert, avec le produit scalaire $(\ ,\ )_x$. De plus, à tout couple $x,y\in X$ correspond une bijection linéaire $\Phi(x,y)$ de $H_x$ sur $H_y$. A une fonction abstraite $x(\ )$ faisons correspondre l'opération $S(t,\varepsilon)h = \Phi\big(x(t),x(t+\varepsilon)\big)h$; pour $h\in H_{x(t)}$, la fonction $h(t)\in H_{x(t)}$ sera alors dite translation parallèle de $h(0)$ suivant $x(t)$, si

$$\frac{D}{Dt}h(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\big[h(t)-\Phi\big(x(t-\varepsilon),x(t)\big)h(t-\varepsilon)\big] = 0.$$

Or, les propriétés fondamentales de la translation parallèle découlent des résultats de ce travail (et de [1]).

Un autre exemple d'application est fourni par les lignes géodésiques, c-à-d. les fonctions abstraites satisfaisant à:

$$\frac{D}{Dt}\frac{d}{dt}x(t) = 0;$$

or, les résultats du présent travail nous permettent de déduire cette équation de la condition:

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\|\frac{d}{dt}x(t)\Big\|_{x(t)}dt = \min$$

d'une façon immédiate, c.-à-d. sans faire usage de l'équation du type:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = A\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t)\right)$$

(ce qu'on fait d'habitude), et qui peut être dépourvue de sens dans le cas des espaces plus généraux.

**Travaux cités**


[1] T. Leżański, *Sur l'intégration directe des équations d'évolution*, Studia Math. 24 (1970), pp. 149–163.

[2] K. Yoshida, *Functional analysis*, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.


*Received December 9, 1972* (733)

STUDIA MATHEMATICA, T. LII. (1974)

# On topological, Lipschitz, and uniform classification of LF-spaces

by

P. MANKIEWICZ (Warszawa)

**Abstract.** It is proved that all essentially infinite-dimensional LF-spaces (i.e. LF-spaces which are not isomorphic to the strict inductive limit of finite-dimensional spaces) are topologically equivalent. The problem of Lipschitz and uniform classification is also studied. Some partial results are obtained.

**Introduction.** The problem of the topological classification of Fréchet spaces was investigated by several authors (see for ex. [1], [2], [3], [8]). There exists a conjecture that all infinite-dimensional Fréchet spaces with the same density character are homeomorphic to each other. In 1966, Kadec verified this conjecture for separable Banach spaces, and then Anderson extended this result to the class of separable Fréchet spaces.

In Section 2 of this paper we establish a theorem of the Kadec–Anderson type for separable LF-spaces. It should be noted that the methods presented in that section enable us to solve completely the problem of topological classification of LF-spaces with the density character less than $\aleph$, under the hypothesis that the Kadec–Anderson theorem extends to Fréchet spaces with density character $\aleph'$, for all $\aleph' < \aleph$.

The problem of the uniform classification of Fréchet spaces has not been solved yet (even in the separable case). Lindenstrauss [11] has proved that there exists a continuum of Banach spaces which are different with respect to uniform homeomorphisms. There is a conjecture that in the class of separable Fréchet spaces the following fact holds:

(C) *A space $X$ is uniformly homeomorphic with a space $Y$ if and only if $X$ is isomorphic to $Y$.*

The validity of this conjecture in the case where $X$ is a Hilbert space has been established by Enflo [6]. Similar results for $X = s$ (the space of all scalar sequences) and for $X = H\times s$ have been obtained by the author [12], [16]. Paper [12] contains also some invariants of uniform homeomorphisms in the class of Fréchet spaces.