References

[1] K. Gödel, *Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes*, Dialectica 12 (1958), pp. 280–287.

[2] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam–Groningen 1952.

[3] — *Formalized recursive functionals and formalized realizability*, Memoirs of the American Mathematical Society, nr. 89, Providence, Rhode Island (Amer. Math. Society) 1969.

[4] G. Kreisel, *Lawless sequences of natural numbers*, Comp. Math. 20 (1968), pp. 222–247.

[5] — *A survey of proof theory II*, in: J. E. Fenstad (editor), Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, Amsterdam 1971, pp. 109–177.

[6] — and A. S. Troelstra, *Formal systems for some branches of intuitionistic analysis*, Ann. Math. Logic 1 (1970), pp. 229–387.

[7] P. Martin-Löf, *About models for intuitionistic type theories and the notion of definitional equality*, Mathematical Institute, University of Stockholm, Report nr. 4, 1972.

[8] D. Prawitz, *Ideas and results in proof theory*, in: J. E. Fenstad (editor), Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, Amsterdam 1971, pp. 235–307.

[9] W. W. Tait, *Intensional interpretations of functionals of finite type I*, J. Symb. Logic 32 (1967), pp. 198–212.

[10] A. S. Troelstra, *Principles of intuitionism*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 95, Berlin–Heidelberg–New York 1969.

[11] — *Notes on the intuitionistic theory of sequences I*, Indagationes Math. 31 (1969), pp. 430–440.

[12] — *Notes on the intuitionistic theory of sequences III*, Indagationes Math. 32 (1970), pp. 245–252.

[13] — *Notions of realizability for intuitionistic arithmetic and intuitionistic arithmetic in all finite types*, in: J. E. Fenstad (editor), Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium Amsterdam 1971, pp. 369–405.

[14] — *Notes on intuitionistic second order arithmetic*, in: A. R. D. Mathias and H. Rogers (editors), Cambridge Summer School in Mathematical Logic. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 337, Berlin–Heidelberg–New York 1971, pp. 171–205.

[15] — (editor), *Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 344, Berlin–Heidelberg–New York 1973.

MATHEMATISCH INSTITUUT DER UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Reçu par la Rédaction le 24. 5. 1973

Multirelation et âge 1-extensifs

par

Roland Fraïssé (Marseille)

Résumé. Une relation R' extension d'une autre R, est dite une 1-extension lorsque, pour toute formule logique universelle ou combinaison booléenne d'universelles, la valeur de vérité est la même pour R et R', les individus libres étant substitués par des éléments de la petite base $|R|$. Nous obtenons ici une condition algébrique d'existence d'une 1-extension commune à deux relations (à l'isomorphie près). Comme application, deux chaînes, ou ordres totaux, de bases infinies, admettent toujours une 1-extension commune.

1. Rappels sur la 1-extension. Rappelons qu'une multirelation, ou suite finie de relations de base commune, soit R, admet R' comme 1-*extension*, lorsque R' est une extension de R et que, pour toute partie finie F de la base $|R'|$, il existe un isomorphisme f de la restriction R'/F sur une restriction de R, avec $f(x) = x$ pour chaque x de l'intersection $F \cap |R|$.

Rappelons qu'un *isomorphisme local* d'une multirelation R vers une autre R', est un isomorphisme d'une restriction de R sur une restriction de R'. Etant donné un entier naturel p, un isomorphisme local f est dit un $(1, p)$-*isomorphisme* de R vers R' lorsque, pour tout $q \leqslant p$ et tous éléments $a_1, \ldots, a_q$ de la base $|R|$, il existe $a'_1, \ldots, a'_q$ de $|R'|$ la transformation f augmentée de la transformation de chaque a_i en a'_i $(i = 1, \ldots, q)$ étant un isomorphisme local de R vers R', et inversement en échangeant R, R' et remplaçant f par f^{-1}. On voit qu'une extension R' de R est une 1-extension si et seulement si, pour toute partie finie F de $|R|$, et tout entier p, l'identité sur F est un $(1, p)$-isomorphisme de R vers R'.

Une traduction logique de la définition précédente, dit que R' est une 1-extension de R lorsque, pour toute formule logique P du premier degré: formule prénexe universelle, ou existentielle, ou combinaison booléenne des deux; avec des prédicats substituables par R ou par son extension R'; et avec n individus libres substitués par des éléments quelconques $a_1, \ldots, a_n$ de la petite base $|R|$; les valeurs de vérités pour R et pour R' sont les mêmes: $P(R)(a_1, \ldots, a_n) = P(R')(a_1, \ldots, a_n)$.

Si R' est une 1-extension de R, il en est évidemment de même de toute restriction de R' à un ensemble intercalé entre $|R|$ et $|R'|$.

Pour toute R de base infinie, il existe une restriction dénombrable de R, dont R est une 1-extension. Si R est de base infinie, pour tout surensemble E de cette base $|R|$, il existe une 1-extension de R à la base E: ce sont des formes atténuées du théorème de Löwenheim-Skolem-Malcev.

Rappelons que deux multirelations sont dites du même *âge*, lorsqu'elles ont les mêmes restrictions finies, à l'isomorphie près. L'ensemble des restrictions finies de R, encore prises à l'isomorphie près, étant dit le *fini-âge* de R. Par exemple, les chaînes, ou ordres totaux, de bases infinies, constituent un âge; les chaînes finies constituant le fini-âge correspondant.

Etant donné deux multirelations du même âge, soit R et S, il existe une isomorphe S' de S et une extension commune à R et S', encore du même âge (voir [1], p. 375, repris en [3], p. 56). Cet énoncé sera renforcé en 3.1 ci-dessous.

Une 1-extension de R est évidemment du même âge que R. L'inverse est faux: prenons pour R la chaîne des entiers naturels; alors la somme $R+S$, où S est une chaîne quelconque, est une 1-extension de R; par contre la chaîne R étendue en ajoutant l'entier -1, antérieur à 0, est du même âge que R, et même est isomorphe à R, sans en être une 1-extension.

Soit R, S deux multirelations de base commune; si la concaténée RS admet une 1-extension $R'S'$ (avec R' de même arité que R, et S' que S), alors R' est une 1-extension de R, et S' de S. Par contre, soit R la chaîne des entiers naturels, R' obtenue de R en ajoutant deux éléments a, b postérieurs aux entiers avec $a<b$, et S étant posée identique à R, soit S' obtenue de même que R' mais avec $b<a$: alors R' est une 1-extension de R, et S' une 1-extension de S, mais $R'S'$ n'est même pas de l'âge de RS.

Soit R' une 1-extension de R; pour toute multirelation S de même base que R, il existe une S' donnant pour $R'S'$ une 1-extension de RS (voir [2], n° 14.3, repris en [3], p. 80). En conséquence, si R' est une extension de R, pour qu'elle en soit une 1-extension, il faut et suffit que, pour toute S sur la base $|R|$, il existe une extension S' de S avec $R'S'$ du même âge que RS.

Autre conséquence: si R' est isomorphe à une 1-extension de R, alors pour toute S sur la base $|R|$, il existe une S' avec $R'S'$ du même âge que RS. La réciproque est fausse: prendre R' réduite à une base dénombrable, et R réduite à une base infinie non dénombrable; alors R' n'est pas isomorphe à une 1-extension de R (c'est l'inverse qui est vrai), et cependant la condition ci-dessus est vérifiée.

Définissons pour chaque ordinal α la *α-équivalence* du second ordre (faisant intervenir les relations au lieu des éléments des bases): R et R' sont dits 1-équivalentes lorsqu'elles ont même âge; elles sont dites $(\alpha+1)$-équivalentes lorsque, pour toute S il existe S' avec RS et $R'S'$ exigées α-équivalentes, et inversement en échangeant R et R'; pour un ordinal limite α, la α-équivalence est définie comme la conjonction des β-équivalences pour tout $\beta<\alpha$. Les α-équivalences sont toutes distinctes; on montre que pour toute R il existe un α tel que la α-équivalence à R équivaut à l'isomorphie à R (utiliser [4], p. 145); notamment dès $\alpha=3$ pour toute R de base dénombrable.

Si R est dénombrable, toute 2-équivalente de R est isomorphe à une 1-extension de R. En effet supposons R définie sur les entiers et notons C la consécutivité, vraie pour (a, b) lorsque $b=a+1$; notons 0 la relation unaire singleton de zéro. Si R' est 2-équivalente de R, il existe une C' et une $0'$ avec $R'C'O'$ du même âge que RCO. Cela entraîne que $R'C'O'$ soit une extension de RCO (à l'isomorphie près). Plus fortement, pour toute partie finie F de la base $|R'|$, il existe un isomorphisme de la restriction $(R'C'O')/F$ sur une restriction de RCO, dont on peut exiger qu'il conserve chaque entier: il suffit de compléter F par l'intervalle des entiers inférieurs au plus grand entier de F (cette preuve, et l'exemple ci-après, sont communiqués par M. Pouzet).

Par contre, il existe R et R' non dénombrables, 2-équivalentes et dont aucune n'est isomorphe à une extension de l'autre. Prenons $R=\omega_1(Q)$ où ω_1 est le plus petit ordinal non dénombrable, dont chaque élément est remplacé par la chaîne Q des rationnels; et prenons R' symétrique de R. Alors pour toute S sur la base $|R|$, prenons une restriction dénombrable QT dont RS soit une 1-extension: nécessairement Q ainsi obtenue est isomorphe à la chaîne des rationnels, donc R' est une 1-extension de Q (à l'isomorphie près), donc il existe une S' telle que $R'S'$ soit une 1-extension de QT; finalement $R'S'$ est du même âge que RS.

Terminons ce paragraphe de rappels en notant que la 1-extension s'est introduite de façon importante en théorie des modèles, par le théorème-critère de model-complétude (voir [5], p. 92): pour qu'une théorie $\mathfrak{C}$ soit model-complète, il suffit que, pour tout modèle R de $\mathfrak{C}$, toute extension de R qui est modèle de $\mathfrak{C}$, soit une 1-extension de R.

2. Multirelation 1-extensive. Une multirelation R sera dite 1-*extensive* lorsque toute extension de R, du même âge, est une 1-extension de R. Par exemple une chaîne est 1-extensive si et seulement si elle est dense, sans minimum ni maximum.

2.1. *Soit R une multirelation, F une partie finie de la base $|R|$, et p un entier. Il existe une extension S de R, du même âge, la différence des bases $|S|-|R|$ étant finie, et l'identité sur F étant un $(1,p)$-isomorphisme entre deux extensions quelconques de S, du même âge.*

Preuve. Pour chaque entier $q\leqslant p$, disons que deux q-suites d'éléments $a_1, \ldots, a_q$ et $b_1, \ldots, b_q$ de $|R|-F$, sont (R, F)-équivalentes, lorsque l'identité sur F, prolongée par la transformation de a_i en b_i $(i=1, \ldots, q)$ est un isomorphisme local de R vers elle-même. L'entier p étant fixé, les classes de (R, F)-équivalence sont en nombre fini; et même, leur nombre

icm©

est borné par un entier k qui ne dépend que de l'arité de R, du cardinal de F et de l'entier p.

Ou bien la conclusion de l'énoncé est déjà obtenue avec $S = R$. Ou bien il existe une extension R_1 de R, du même âge, et donnant au moins une suite représentant une classe de (R_1, F)-équivalence nouvelle, c'est à dire sans représentante dans la base $|R|$. Le nombre des éléments de la différence $|R_1| - |R|$ est au plus p multiplié par le nombre des classes nouvelles. Ou bien la conclusion de l'énoncé est obtenue avec $S = R_1$. Ou bien nous itérons avec une extension R_2 de R_1; cette itération ne peut avoir lieu que k fois au plus: elle aboutit donc à la multirelation S désirée.

2.2. *Soit R une multirelation: il existe une extension S de R, du même âge, 1-extensive, et dont la base $|S|$ est équipotente à $|R|$.*

Preuve. Les couples (F, p) où F est une partie finie de la base $|R|$ et p un entier, forment un ensemble équipotent à la base $|R|$. Indexons ces couples par les ordinaux i strictement inférieurs au cardinal de $|R|$: soit (F_i, p_i) le couple d'indice i. Partons de $R_0 = R$ et supposons obtenue R_i associée à l'ordinal i, ayant même âge que R et équipotente à R; l'identité sur F_j étant un $(1, p_j)$-isomorphisme entre deux extensions quelconques de R_i ayant l'âge de R, et cela pour chaque $j < i$. Utilisant 2.1, obtenons une extension R_{i+1} de R_i, ayant même âge que R, la base $|R_{i+1}|$ ne différant de $|R_i|$ que par l'addition d'un nombre fini d'éléments donc étant équipotente à $|R|$; et la condition précédente sur les F s'étendant aux indices $j \leqslant i$. Lorsque i est un ordinal limite, prenons pour R_i l'extension commune des R_j $(j < i)$ sur la réunion de leurs bases: l'âge est conservé, la base reste équipotente à $|R|$, et la condition sur les F s'étend aux $j < i$.

Notons R^1 la multirelation finalement obtenue, lorsque l'indice i atteint le cardinal de $|R|$; c'est encore une extension de R, avec même âge et même cardinal; et pour toute partie finie F de $|R|$ et tout p, l'identité sur F est un $(1, p)$-isomorphisme entre deux extensions quelconques de R^1, du même âge. Itérons la construction, obtenant la suite des R^u pour chaque entier u, et soit S l'extension commune des R^u, sur la réunion de leurs bases. Alors S est encore du même âge et du même cardinal que R; et pour toute partie finie F de $|S|$, et tout p, l'identité sur F est un $(1, p)$-isomorphisme de S vers toute extension du même âge: autrement dit une extension quelconque de S, du même âge, est une 1-extension: l'énoncé est prouvé.

Rappelons qu'une multirelation R est dite *homogène* lorsque tout isomorphisme local de R vers elle-même, de domaine fini, est extensible en un automorphisme de R. Exemple: la chaîne des rationnels.

2.3. *Toute multirelation homogène et de base dénombrable, est 1-extensive.*

Preuve. Soit R homogène dénombrable; pour toute partie finie F de $|R|$, et toute extension H de R/F, appartenant au fini-âge de R, l'identité sur F peut être étendue en un isomorphisme de H sur une restriction de R (voir [1], p. 377, repris sous une autre forme en [3], p. 110). En particulier, si S est une extension de R, du même âge, il suffit de prendre pour H une restriction finie de S, pour voir que S est une 1-extension.

Notons qu'il existe des relations dénombrables, 1-extensives et non homogènes: il suffit de se placer dans un âge dépourvu de relation homogène, par exemple l'âge des arbres (voir [1], p. 387).

3. Condition d'existence d'une 1-extension commune.

3.1. *Soit R, S deux multirelations du même âge; il existe une S' isomorphe à S et une extension commune à R et S', sur la réunion de leurs bases, qui soit une 1-extension de R.*

3.2. *Soit R, S du même âge; pour qu'il existe une S' isomorphe à S et une 1-extension commune à R et S', il faut et suffit que, pour toutes parties finies F de $|R|$ et G de $|S|$, et tout entier p, il existe une multirelation T, un $(1, p)$-isomorphisme de R vers T, de domaine F, et un $(1, p)$-isomorphisme de S vers T, de domaine G.*

Prouvons d'abord 3.2, après quoi nous indiquerons les remarques donnant 3.1.

Si une 1-extension commune à R et S' existe, prenons-la comme multirelation T de l'énoncé, avec l'identité sur F comme $(1, p)$-isomorphisme de R vers T, et l'isomorphisme de S sur S', restreint au domaine G, comme $(1, p)$-isomorphisme de S vers T.

Inversement, supposons vérifiée la condition de l'énoncé. A chaque triplet (F, G, p), associons une multirelation T avec les $(1, p)$-isomorphismes de l'énoncé, que nous notons respectivement f (de R vers T, domaine F) et g (de S vers T, domaine G): cela donne un sextuplet (F, G, p, T, f, g) prolongeant le triplet. Disons que deux sextuplets prolongeant le même triplet (F, G, p) par (T, f, g) et (T', f', g'), sont isomorphes, lorsque la transformation de $f(x)$ en $f'(x)$ pour chaque x de F, et de $g(y)$ en $g'(y)$ pour chaque y de G, est bijective, et de plus est un isomorphisme de la restriction $T/f(F) \cup g(G)$ sur $T'/f'(F) \cup g'(G)$. Choisissons un sextuplet dans chaque classe d'isomorphie; appelons désormais sextuplets, seulement ceux ainsi sélectionnés, et construisons, sur l'ensemble des sextuplets, un ultrafiltre comme suit. A chaque triplet (F, G, p), associons l'ensemble $U(F, G, p)$ des sextuplets qui commencent par un (F', G', p') avec $F' \supseteq F$, $G' \supseteq G$, $p' \geqslant p$. Ces ensembles U et leurs surensembles constituent un filtre sur l'ensemble des sextuplets. En effet par hypothèse un U n'est jamais vide. De plus si $F' \supseteq F$, $G' \supseteq G$, $p' \geqslant p$, alors $U(F', G', p') \subseteq U(F, G, p)$: donc l'intersection de deux U en contient

icm©

un autre, obtenu en prenant la réunion des F, la réunion des G, et le plus grand des entiers p. Prenons un ultrafiltre plus fin.

Disons qu'un élément a de la base $|R|$ et un b de $|S|$ sont identifiés lorsque, pour presque tout sextuplet (selon l'ultrafiltre), on a l'égalité $f(a) = g(b)$. On voit que deux éléments distincts a, a' de $|R|$ ne peuvent pas être identifiés à un même b de $|S|$: pour F comprenant a et a', donc pour presque tout sextuplet, f étant bijective, on a $f(a) \neq f(a')$. Supposons les bases $|R|$ et $|S|$ disjointes, puis prenons comme base $|V|$ de la multirelation V à construire, la réunion de $|R|$ et de l'ensemble des éléments de $|S|$ non identifiés. L'isomorphisme de S sur S' étant obtenu en remplaçant chaque élément de $|S|$ par son identifié, s'il existe.

Supposons pour simplifier que R et S se réduisent à deux relations n-aires; alors à chaque n-suite $a_1, \ldots, a_n$ extraite de $|V|$, associons la valeur $V(a_1, \ldots, a_n) = +$ ou $-$, selon que $T\big(h(a_1), \ldots, h(a_n)\big) = +$ pour presque tout sextuplet, ou $-$ pour presque tout sextuplet: $h(a)$ désignant $f(a)$ ou $g(a)$ selon que a appartient à $|R|$ ou à $|S|$. Dans le cas où les a appartiennent tous à $|R|$, on a l'égalité $V(a_1, \ldots, a_n) = T\big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big)$ pour presque tout sextuplet; or $R(a_1, \ldots, a_n) = T\big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big)$ pour tous les sextuplets dont le terme F comprend $a_1, \ldots, a_n$, donc pour presque tous: finalement $V(a_1, \ldots, a_n) = R(a_1, \ldots, a_n)$: la multirelation V est une extension de R, et aussi de S'.

Il reste à prouver que V est une 1-extension de R, par exemple. Donc qu'étant donné un F et un p, soit F_0 et p_0, l'identité sur F_0 est un $(1, p_0)$-isomorphisme de R vers V. Cela revient à dire que, pour chaque $q \leqslant p_0$ et chaque q-suite $b_1, \ldots, b_q$ extraite de $|V| - F_0$, il existe une q-suite $a_1, \ldots, a_q$ extraite de $|R| - F_0$, l'identité sur F_0 prolongée par la transformation de b_i en a_i $(i = 1, \ldots, q)$ étant un isomorphisme local de V vers R. Nous pouvons supposer que les b appartiennent tous à la base $|S'|$, et même qu'aucun b n'est identifié à un élément de $|R|$: en effet un tel b pourrait être incorporé dans F_0. Appelons G_0 l'ensemble des b; d'après ce qui précède, pour presque tout sextuplet (F, G, p, T, f, g) la transformation des éléments de F_0 par f et des éléments de G_0 par g est une application bijective h de domaine $F_0 \cup G_0$, et h est un isomorphisme local de V vers T. De plus, pour les sextuplets vérifiant $F \supseteq F_0$, $G \supseteq G_0$, $p \geqslant p_0$, donc pour presque tous, la transformation f, donc aussi sa restriction au domaine F_0, est un $(1, p)$-isomorphisme, donc aussi un $(1, p_0)$-isomorphisme de R vers T. Donc à la q-suite $g(b_1), \ldots, g(b_q)$ correspond une q-suite $a_1, \ldots, a_q$ extraite de $|R|$, la transformation f^{-1} restreinte à $f(F_0)$, prolongée par la transformation de $g(b_i)$ en a_i $(i = 1, \ldots, q)$, étant un isomorphisme local de T vers R, de domaine $f(F_0) \cup g(G_0) = h(F_0 \cup G_0)$. Composant h avec ce dernier isomorphisme, nous voyons que l'identité sur F_0, prolongée par la transformation de b_i en a_i $(i = 1, \ldots, q)$, est un isomorphisme local de V vers R, comme demandé.

Le 3.2 étant prouvé, le 3.1 s'obtient de même, en atténuant comme suit la condition de l'énoncé: pour tous F, G, p il existe une T, un $(1, p)$-isomorphisme de R vers T, de domaine F, et un isomorphisme local de S vers T, de domaine G. Or cette condition est vérifiée par $T = R$, avec l'identité sur F pour le $(1, p)$-isomorphisme, en remarquant que, S étant du même âge que R, il existe une restriction de R isomorphe à S/G.

3.3. *Soit R, S deux chaînes infinies; il existe une isomorphe S' de S et une 1-extension commune à R et S'.*

Preuve. Soit R une chaîne infinie, F une partie finie de la base $|R|$; pour qu'un isomorphisme local f de R vers une chaîne T, soit un $(1, p)$-isomorphisme, il faut et suffit que, pour tout couple d'éléments a, b consécutifs dans R/F, l'intervalle ouvert (a, b) selon R, et l'intervalle ouvert correspondant $\big(f(a), f(b)\big)$ selon T, soient tous deux du même cardinal, ou tous deux de cardinaux $\geqslant p$; même condition pour le premier intervalle ouvert, et pour le dernier. On voit que toute chaîne T répond à cette exigence dès que son cardinal est supérieur ou égal à $\operatorname{card}(F) + p\big(\operatorname{card}(F) + 1\big)$: le premier terme de la somme correspond aux transformés des éléments de F, le deuxième aux intervalles ouverts.

Le même résultat valant pour la chaîne S, la condition de 3.2 est vérifiée avec toute chaîne finie T à partir d'un certain cardinal de $|T|$.

3.4. *Il existe des paires de relations R, S du même âge et sans 1-extension commune (même après isomorphie de S).*

Prenons pour R la chaîne des entiers naturels, dont la diagonale est modifiée en posant $R(a, a) = +$ pour a pair, et $-$ pour a impair. Même définition pour S, avec $-$ pour a pair et $+$ pour a impair. La condition: a est le minimum et $R(a, a) = +$, est exprimable par une formule prénexe universelle, donc se conserve lorsqu'on passe de R à une 1-extension de R. Donc une 1-extension commune à R et à une isomorphe de S admettrait deux minimums, avec $+$ pour l'un et $-$ pour l'autre: contradiction (exemple dû à J. L. Paillet).

Prenons pour R un ordre partiel admettant un minimum a; pour S un ordre du même âge que R mais admettant deux éléments minimaux b, c, incomparables entre eux. Les conditions sur a d'une part, sur b et c d'autre part, sont exprimables chacune par une formule prénexe universelle; elles sont donc vérifiées par la 1-extension commune, et elles sont contradictoires (exemple suggéré par R. Bonnet).

3.5. *L'existence d'une 1-extension commune (à l'isomorphie près) n'est pas transitive.*

En effet, la chaîne Z des entiers relatifs avec $Z(a, a) = +$ pour a pair et $-$ pour a impair, admet une 1-extension commune avec la chaîne N des entiers naturels affectée de $+$ aux pairs et $-$ aux impairs, et avec N affectée de $+$ aux impairs et $-$ aux pairs.

3.6. *Si R est 1-extensive, pour toute S du même âge, il existe une isomorphe à S et une 1-extension commune à R et S'.*

En effet d'après 3.1, il existe une extension commune à R et S', qui soit 1-extension de S'.

Une multirelation R peut admettre, pour toute multirelation du même âge, une 1-extension commune (à l'isomorphie près), sans que R soit 1-extensive: prendre pour R une chaîne infinie non dense, donc non 1-extensive; ou encore la chaîne des entiers relatifs affectée de $+$ pour les pairs et de $-$ pour les impairs.

Disons qu'un âge est 1-*extensif* lorsque deux multirelations quelconques de cet âge ont une 1-extension commune (à l'isomorphie près). Exemples: un âge réduit à une multirelation de base finie (et ses isomorphes); l'âge des chaînes infinies; plus généralement, avec les preuves 3.2 et 3.3, tout âge de multirelations enchaînables: rappelons que R est dite enchaînable lorsqu'il existe une chaîne T de même base, tout isomorphisme local de T vers elle-même en étant un de R vers elle-même; tout âge de multirelations presqu'enchaînables: il existe une partie finie F de la base de R, et une chaîne T de base $|R|-F$, tout isomorphisme local de T vers elle-même, prolongé par l'identité sur F, étant un isomorphisme local de R vers elle-même. Autres âges 1-extensifs: celui des relations unaires prenant une infinité de fois chaque valeur $+$ et $-$; celui des ordres composés de deux chaînes infinies, et incomparables entre elles (communiqué par M. Pouzet).

Bibliographie

[1] R. Fraïssé, *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*, Annales E.N.S. 71 (1954), pp. 363–388.

[2] — *Sur quelques classifications des systèmes de relations*, Alger-Math. 1 (1954), pp. 35–182.

[3] — *Cours de logique mathématique*, t. 1, Paris 1971.

[4] — ibidem t. 2, Paris 1972.

[5] A. Robinson, *Introduction to Model Theory and to Metamathematics of Algebra*, Amsterdam 1963.

Reçu par la Rédaction le 21. 8. 1973

$\aleph_1$-Kategorische Theorien nicht-kommutativer Ringe

von

Ulrich Felgner (Heidelberg)

Abstract. In this paper we classify those semi-simple not necessarily commutative rings with unit, R, whose theory $\mathrm{Th}(R)$ ist categorical in $\aleph_1$. We include also classifications of other types of rings with $\aleph_1$-categorical theory, like simple rings with unit, rings without nilpotent elements and group-rings over skew-fields of characteristic zero.

Sei T eine Theorie erster Stufe, die in einer abzählbaren Sprache formuliert ist und sei $\mathfrak{m}$ eine unendliche Kardinalzahl. T heißt $\mathfrak{m}$-kategorisch, falls je zwei Modelle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von T der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ isomorph sind. M. Morley [14] hat gezeigt, daß *jede vollständige Theorie T, welche in einer abzählbaren Sprache erster Stufe formuliert ist und in einer überabzählbaren Kardinalzahl kategorisch ist, dann auch in allen überabzählbaren Kardinalzahlen kategorisch ist.* Aufgrund dieses Satzes beschränken wir uns im Folgenden auf $\aleph_1$-kategorische Theorien.

In der Algebra sind einige Ergebnisse über $\aleph_1$-Kategorizität bekannt, beispielsweise der Satz von E. Steinitz über die algebraisch abgeschlossenen Körper. Es stellt sich hier die Frage, ob man nicht genau angeben kann, welche vollständigen Erweiterungen T^* einer gegebenen Theorie T $\aleph_1$-kategorisch sind. T^* ist bekanntlich genau dann eine Vervollständigung der Theorie T falls es ein Modell $\mathfrak{A}$ von T gibt, so daß $T^* = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ gilt. Dabei ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\Phi;\ \mathfrak{A} \models \Phi\}$ die Theorie von $\mathfrak{A}$, d.h. die Menge aller Aussagen Φ aus der Sprache von T, die in der Struktur $\mathfrak{A}$ gültig sind. Unsere Frage können wir also auch wie folgt aussprechen:

(F) *Für welche Modelle $\mathfrak{A}$ einer gegebenen abzählbaren Theorie T erster Stufe ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ $\aleph_1$-kategorisch?*

Für die Theorie T_{AG} der abelschen Gruppen und die Theorie T_{KK} der kommutativen Körper hat Herr A. Macintyre die Frage (F) vollständig beantwortet [11], [12]. Dabei hat er insbesondere gezeigt, daß für einen kommutativen Körper K, $\mathrm{Th}(K)$ dann und nur dann $\aleph_1$-kategorisch ist, wenn K entweder ein endlicher oder ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Für die Theorie T_{KR} der kommutativen Ringe mit Eins-Ele-