3.6. *Si R est 1-extensive, pour toute S du même âge, il existe une isomorphe à S et une 1-extension commune à R et S'.*

En effet d'après 3.1, il existe une extension commune à R et S', qui soit 1-extension de S'.

Une multirelation R peut admettre, pour toute multirelation du même âge, une 1-extension commune (à l'isomorphie près), sans que R soit 1-extensive: prendre pour R une chaîne infinie non dense, donc non 1-extensive; ou encore la chaîne des entiers relatifs affectée de $+$ pour les pairs et de $-$ pour les impairs.

Disons qu'un âge est 1-*extensif* lorsque deux multirelations quelconques de cet âge ont une 1-extension commune (à l'isomorphie près). Exemples: un âge réduit à une multirelation de base finie (et ses isomorphes); l'âge des chaînes infinies; plus généralement, avec les preuves 3.2 et 3.3, tout âge de multirelations enchaînables: rappelons que R est dite enchaînable lorsqu'il existe une chaîne T de même base, tout isomorphisme local de T vers elle-même en étant un de R vers elle-même; tout âge de multirelations presqu'enchaînables: il existe une partie finie F de la base de R, et une chaîne T de base $|R|-F$, tout isomorphisme local de T vers elle-même, prolongé par l'identité sur F, étant un isomorphisme local de R vers elle-même. Autres âges 1-extensifs: celui des relations unaires prenant une infinité de fois chaque valeur $+$ et $-$; celui des ordres composés de deux chaînes infinies, et incomparables entre elles (communiqué par M. Pouzet).

Bibliographie

[1] R. Fraïssé, *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*, Annales E.N.S. 71 (1954), pp. 363–388.

[2] — *Sur quelques classifications des systèmes de relations*, Alger-Math. 1 (1954), pp. 35–182.

[3] — *Cours de logique mathématique*, t. 1, Paris 1971.

[4] — ibidem t. 2, Paris 1972.

[5] A. Robinson, *Introduction to Model Theory and to Metamathematics of Algebra*, Amsterdam 1963.

Reçu par la Rédaction le 21. 8. 1973

$\aleph_1$-Kategorische Theorien nicht-kommutativer Ringe

von

Ulrich Felgner (Heidelberg)

Abstract. In this paper we classify those semi-simple not necessarily commutative rings with unit, R, whose theory $\mathrm{Th}(R)$ ist categorical in $\aleph_1$. We include also classifications of other types of rings with $\aleph_1$-categorical theory, like simple rings with unit, rings without nilpotent elements and group-rings over skew-fields of characteristic zero.

Sei T eine Theorie erster Stufe, die in einer abzählbaren Sprache formuliert ist und sei $\mathfrak{m}$ eine unendliche Kardinalzahl. T heißt $\mathfrak{m}$-kategorisch, falls je zwei Modelle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von T der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ isomorph sind. M. Morley [14] hat gezeigt, daß *jede vollständige Theorie T, welche in einer abzählbaren Sprache erster Stufe formuliert ist und in einer überabzählbaren Kardinalzahl kategorisch ist, dann auch in allen überabzählbaren Kardinalzahlen kategorisch ist.* Aufgrund dieses Satzes beschränken wir uns im Folgenden auf $\aleph_1$-kategorische Theorien.

In der Algebra sind einige Ergebnisse über $\aleph_1$-Kategorizität bekannt, beispielsweise der Satz von E. Steinitz über die algebraisch abgeschlossenen Körper. Es stellt sich hier die Frage, ob man nicht genau angeben kann, welche vollständigen Erweiterungen T^* einer gegebenen Theorie T $\aleph_1$-kategorisch sind. T^* ist bekanntlich genau dann eine Vervollständigung der Theorie T falls es ein Modell $\mathfrak{A}$ von T gibt, so daß $T^* = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ gilt. Dabei ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\Phi;\ \mathfrak{A} \models \Phi\}$ die Theorie von $\mathfrak{A}$, d.h. die Menge aller Aussagen Φ aus der Sprache von T, die in der Struktur $\mathfrak{A}$ gültig sind. Unsere Frage können wir also auch wie folgt aussprechen:

(F) *Für welche Modelle $\mathfrak{A}$ einer gegebenen abzählbaren Theorie T erster Stufe ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ $\aleph_1$-kategorisch?*

Für die Theorie T_{AG} der abelschen Gruppen und die Theorie T_{KK} der kommutativen Körper hat Herr A. Macintyre die Frage (F) vollständig beantwortet [11], [12]. Dabei hat er insbesondere gezeigt, daß für einen kommutativen Körper K, $\mathrm{Th}(K)$ dann und nur dann $\aleph_1$-kategorisch ist, wenn K entweder ein endlicher oder ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Für die Theorie T_{KR} der kommutativen Ringe mit Eins-Element hat Herr J. Reineke die Frage (F) beantwortet. In dieser Arbeit [1] wollen wir die Frage (F) für verschiedene Theorien nicht-kommutativer Ringe beantworten. In den Beweisen werden sowohl rein algebraische als auch rein modelltheoretische Methoden zur Anwendung kommen. Dies ist sehr natürlich, da wir eine Frage diskutieren, die auf dem Grenzgebiet zwischen Algebra und Logik liegt.

Es sei betont, daß wir nur Theorien betrachten, die in einer abzählbaren Sprache des Prädikatenkalküls *erster Stufe* formuliert sind. Fragen über die Kategorizität von Theorien höherer Stufe, welche beispielsweise von Erdös-Gillman-Hendrickson [6], Salzmann [18] und Strambach [20] diskutiert werden, werden wir hier nicht betrachten.

Ganz besonders möchte ich Herrn J. Reineke danken, der mir im Dezember 1972 einige seiner Ergebnisse über $\aleph_1$-kategorische Theorien kommutativer Ringe mitteilte. Seine Erbegnisse hatten mich angeregt, nicht-kommutative Ringe auf $\aleph_1$-Kategorizität hin zu untersuchen. Herrn G. Michler möchte ich für ein anregendes Gespräch in Oberwolfach danken.

1. Modelltheoretische Hilfsmittel. Sei λ eine Kardinalzahl. Die Theorie T heißt *λ-stabil*, falls für jedes Modell $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ von T und jede Teilmenge $B \subseteq A$ mit $\mathrm{Card}(B) \leqslant \lambda$ gilt, daß der Raum $S(B)$ aller vollständigen 1-Typen p über B gleichfalls höchstens die Kardinalität λ hat. Dabei ist $\mathrm{Card}(B)$ die Kardinalität von B. ω-stabile Theorien nennt Morley [14] *total-transzendent*. Morley hat in [14] gezeigt, daß jede $\aleph_1$-kategorische Theorie ω-stabil ist, und daß jede ω-stabile Theorie λ-stabil ist für alle unendlichen Kardinalzahlen λ. Dabei wird die Abzählbarkeit von T vorausgesetzt [2].

Satz A (S. Shelah [19], Theorem 2.13). *Sei T eine vollständige Theorie in der abzählbaren Sprache $\mathfrak{L}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist in keiner Kardinalzahl $\lambda \geqslant \omega$ stabil,*

(ii) *es gibt eine Formel $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ in $\mathfrak{L}$ und in einem Modell $\mathfrak{A}$ von T eine Folge von m-Tupeln $\vec{a}_j$ $(j \in \omega)$ so, daß für alle $j, k \in \omega$ gilt: $(\mathfrak{A} \models \Phi(\vec{a}_j, \vec{a}_k)) \Leftrightarrow j < k$.*

Unter einem Ring R wollen wir im Folgenden immer einen assoziativen Ring verstehen ([13], S. 131). Ein Ring, der ein Eins-Element besitzt, wird *unitaler* Ring genannt. Der Ring R ist *halbeinfach*, wenn das Jacobson-Radikal J von R die Bedingung $J = \{0\}$ erfüllt. Ein Ring, in dem jede Menge von Links-Idealen ein minimales Links-Ideal enthält, wird

[1] Über die Ergebnisse dieser Arbeit habe ich während des Logical Semester im St. Banach Zentrum Warschau (Polen) im März und April 1973 und auf der Tagung Algèbre et Logique in Mons (Belgien) im April 1973 vorgetragen. Beiden Institutionen möchte ich hier noch einmal für ihre freundliche Einladung meinen Dank aussprechen.

[2] Eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit ω-stabiler Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ nennen wir im Folgenden kurz ω-stabil. Ferner nennen wir $\mathfrak{A}$ $\aleph_1$-kategorisch, wenn $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ $\aleph_1$-kategorisch ist.

links-artinsch genannt. Ein Ring, der sowohl links-artinsch als auch rechts-artinsch ist, wird *Artin-Ring* genannt.

Die formale Sprache $\mathfrak{L}_R$ der Ringtheorie enthält neben Variablen die Funktions-Symbole $+$ (Addition), $-$ (Subtraktion), $\cdot$ (Multiplikation), die Individuen-Konstante 0 und das Gleichheitszeichen.

Unter einem Schiefkörper wollen wir im Folgenden stets einen nicht notwendig kommutativen Körper verstehen.

Satz B (A. Macintyre [12]). *Sei K ein kommutativer Körper. Dann sind die folgenden Eigenschaften untereinander äquivalent:*

(i) $\mathrm{Th}(K)$ *ist ω-stabil,*

(ii) $\mathrm{Th}(K)$ *ist $\aleph_1$-kategorisch,*

(iii) *K ist entweder ein endlicher oder ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

Satz C (S. Shelah). *Sei D ein Schiefkörper und* $\mathrm{Th}(D)$ *$\aleph_1$-kategorisch. Dann ist D kommutativ.*

Der Beweis von Satz C verwendet Satz B, Satz E (das Zentrum von D ist endlich oder algebraisch abgeschlossen) und den folgenden Satz von J. T. Baldwin: der maximale Morley-Rang α_T einer $\aleph_1$-kategorischen Theorie T ist endlich. Es wird gezeigt, daß D eine Polynom-Identität über seinem Zentrum erfüllt.

Für zwei Ringe R_1 und R_2 sei $R_1 \oplus R_2$ die direkte Summe der beiden Ringe.

Satz D (A. Macintyre [11]). *Seien R_1 und R_2 Ringe und* $\mathrm{Th}(R_1)$ *und* $\mathrm{Th}(R_2)$ *ω-stabil. Dann ist auch* $\mathrm{Th}(R_1 \oplus R_2)$ *ω-stabil.*

Satz E (J. Reineke [16]). *Sei S ein definierbarer Teilring des Ringes R. Falls* $\mathrm{Th}(R)$ *ω-stabil ist, dann ist auch* $\mathrm{Th}(S)$ *ω-stabil.*

Für eine Ordinalzahl α sei $\mathfrak{L}(\alpha)$ diejenige Sprache, die aus der Sprache $\mathfrak{L}$ entsteht, indem man zu $\mathfrak{L}$ neue paarweise verschiedene Individuen-Konstanten c_η für $\eta < \alpha$ hinzunimmt. Herr A. Macintyre [12] hat gezeigt, daß jede Erweiterung T^0 in einer Sprache $\mathfrak{L}(n)$ für $n \in \omega$ einer ω-stabilen $\mathfrak{L}$-Theorie T gleichfalls ω-stabil ist. Daraus folgt dann unter Verwendung von Satz E sofort:

Satz F (J. Reineke [16]). *Seien R_1 und R_2 unitale Ringe und sei* $\mathrm{Th}(R_1 \oplus R_2)$ *ω-stabil. Dann sind auch* $\mathrm{Th}(R_1)$ *und* $\mathrm{Th}(R_2)$ *ω-stabile Theorien.*

In der Tat, sei e_1 das Eins-Element von R_1 und e_2 das Eins-Element von R_2. Dann sind e_1 und e_2 in $R_1 \oplus R_2 = R$ orthogonale Idempotente und $R_1 = Re_1$, $R_2 = Re_2$. Also sind R_1 und R_2 in Bezug auf die Sprache $\mathfrak{L}_R(2) = \mathfrak{L}_R \cup \{e_1, e_2\}$ definierbare Unterringe von R und die Behauptung von Satz F folgt aus Satz E.

Satz G (J. Reineke [16]). *Sei R ein Ring, I ein zweiseitiges definierbares Ideal von R und* $\mathrm{Th}(R)$ ω-*stabil. Dann ist auch* $\mathrm{Th}(R/I)$ ω-*stabil.*

Dabei wird eine Teilmenge S des Ringes R definierbar genannt, falls es eine Formel $\Phi(x)$ von $\mathfrak{L}_R$ gibt so, daß $S = \{x \in R;\ \Phi(x)\}$.

2. Matrizen-Ringe und ihre modelltheoretischen Eigenschaften. Falls D ein Schiefkörper ist, $1 \leqslant n \in \omega$, dann soll $\mathrm{Mat}_n(D)$ den Ring aller $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus D bezeichnen.

Wir verwenden die folgenden Notationen: falls $\Gamma = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ eine endliche Menge von Formeln ist, dann sei $\bigwedge\bigwedge\Gamma$ die Konjunktion aller Formeln aus Γ, also $\bigwedge\bigwedge\Gamma = \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n$. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ bedeutet, daß die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar-äquivalent sind. $\mathfrak{A} \models \Phi$ bedeutet, daß die Aussage Φ in der Struktur $\mathfrak{A}$ gilt. $\exists! x$ ist der Quantor *es gibt genau ein* x.

Lemma 1. *Seien D_1 und D_2 elementaräquivalente Schiefkörper. Dann gilt auch* $\mathrm{Mat}_n(D_1) \equiv \mathrm{Mat}_n(D_2)$ *für alle* $1 \leqslant n \in \omega$.

Beweis. Sei $R_1 = \mathrm{Mat}_n(D_1)$ und $R_2 = \mathrm{Mat}_n(D_2)$, und sei $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ eine Formel aus der Sprache $\mathfrak{L}_R$ der Ringtheorie. Wir geben eine Übersetzung $*$ wie folgt an: $\Phi^*(x_{11}^1, x_{12}^1, \ldots, x_{nn}^1, x_{11}^2, \ldots, x_{nn}^2, \ldots, x_{nn}^m)$ entsteht aus $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ indem man alle (sowohl die freien als auch die gebundenen) Variablen x_ν, die in Φ vorkommen, durch $n \times n$-Matrizen (x_{ij}^ν) ersetzt und dementsprechend alle in Φ vorkommenden Multiplikationen and Additionen durch die entsprechenden Matrizen-Multiplikationen bzw. Matrizen-Additionen Elementweise ausgeschrieben ersetzt, und ferner die Konstante 0 durch Null-Matrix (0) ersetzt. Dabei sind die x_{ij}^ν dreifach indizierte Variable. Dieser Übersetzung zufolge wird ein in Φ vorkommender Quantor, etwa $\forall x_\nu$, durch den Quantoren-Block

$$\forall x_{11}^\nu \forall x_{12}^\nu \ldots \forall x_{1n}^\nu \forall x_{21}^\nu \forall x_{22}^\nu \ldots \forall x_{2n}^\nu \forall x_{31}^\nu \ldots \forall x_{nn}^\nu$$

ersetzt. Im Falle $n = 2$ wird beispielsweise die Formel

$$\Phi(x_3) = \forall x_1 \exists x_2 [x_1 \cdot x_2 = x_3]$$

in die Formel

$$\Phi^*(x_{11}^3, x_{12}^3, x_{21}^3, x_{22}^3) = \forall x_{11}^1 \forall x_{12}^1 \forall x_{21}^1 \forall x_{22}^1 \exists x_{11}^2 \exists x_{12}^2 \exists x_{21}^2 \exists x_{22}^2 [\bigwedge\bigwedge \{x_{i1}^1 \cdot x_{1j}^2 + x_{i2}^1 \cdot x_{2j}^2 = x_{ij}^3;\ 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}]$$

übersetzt. Durch Induktion über den Formel-Aufbau folgt jetzt sofort, für $n \times n$-Matrizen $a_\nu = (a_{ij}^\nu) \in \mathrm{Mat}_n(D_1)$:

$$R_1 \models \Phi[a_1, a_2, \ldots, a_m] \Leftrightarrow D_1 \models \Phi^*[a_{11}^1, a_{12}^1, \ldots, a_{nn}^1, \ldots, a_{nn}^m],$$

wobei $a_{ij}^\nu \in D_1$. Eine analoge Behauptung gilt für R_2. Aus $D_1 \equiv D_2$ folgt daher sofort die Behauptung.

Korollar. *Seien D_1 und D_2 Schiefkörper und $1 \leqslant n \in \omega$. Falls D_1 elementare Substruktur von D_2 ist, $D_1 \preceq D_2$, dann ist auch* $\mathrm{Mat}_n(D_1)$ *elementare Substruktur von* $\mathrm{Mat}_n(D_2)$.

Lemma 2. *Sei D ein Schiefkörper, $1 \leqslant n \in \omega$ und* $\mathrm{Th}(\mathrm{Mat}_n(D))$ ω-*stabil. Dann ist auch* $\mathrm{Th}(D)$ ω-*stabil.*

Beweis. Für $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ sei e_{ij} diejenige Matrix aus $\mathrm{Mat}_n(D)$, welche nur an der Kreuzung der i-ten Zeile mit der j-ten Spalte eine Eins enthält und sonst Nullen. $\mathfrak{L}_R(1)$ entsteht aus der Sprache $\mathfrak{L}_R$ durch Hinzunahme einer neuen Konstante c_0. Wenn wir c_0 in $\mathrm{Mat}_n(D)$ durch das Element e_{11} interpretieren, dann ist nach A. Macintyre [12], Corollary to Lemma 5, auch die $\mathfrak{L}_R(1)$-Theorie $\mathrm{Th}(\langle \mathrm{Mat}_n(D), e_{11}\rangle)$ ω-stabil. D ist aber in der Sprache $\mathfrak{L}_R(1)$ definierbar, $D = \{x \in \mathrm{Mat}_n(D);\ x \cdot e_{11} = x \wedge \wedge e_{11} \cdot x = x\}$ und nach Satz E ist $\mathrm{Th}(\langle D, e_{11}\rangle)$ ω-stabil. Aber e_{11} ist das Eins-Element von D, ist also in D definierbar, und daher ist sogar $\mathrm{Th}(D)$ ω-stabil. Q.E.D.

Lemma 3. *Sei D ein Schiefkörper, $1 \leqslant n \in \omega$ und* $\mathrm{Th}(\mathrm{Mat}_n(D))$ $\aleph_1$-*kategorisch. Dann ist auch* $\mathrm{Th}(D)$ $\aleph_1$-*kategorisch.*

Beweis. Seien D_1 und D_2 elementar-äquivalente Schiefkörper der Kardinalität $\aleph_1$ und sei $D \equiv D_1$. Daraus folgt nach Lemma 1, daß $\mathrm{Mat}_n(D) \equiv \mathrm{Mat}_n(D_1) \equiv \mathrm{Mat}_n(D_2)$ gilt. Aus $\mathrm{Card}(\mathrm{Mat}_n(D_1)) = \mathrm{Card}(\mathrm{Mat}_n(D_2)) = \aleph_1$ folgt nach Voraussetzung $\mathrm{Mat}_n(D_1) \cong \mathrm{Mat}_n(D_2)$. Daraus folgt aber $D_1 \cong D_2$ (siehe L. Dornhoff [5], p. 13, Theorem 2.18). Q.E.D.

Lemma 4. *Sei R ein einfacher unitaler Artinring und $R^* \equiv R$. Dann ist auch R^* ein einfacher unitaler Artinring. Die Klasse aller einfachen unitalen Artinringe ist also* $\mathrm{EC}_{\Delta\Sigma}$.

Beweis. Zunächst ist klar, daß der mit R elementar äquivalente Ring R^* ebenfalls unital ist. Nach dem Struktur-Satz von Artin-Wedderburn gibt es einen Schiefkörper D so, daß $R \cong \mathrm{Mat}_n(D)$ für eine Zahl n mit $1 \leqslant n \in \omega$. Seien e_{ij} die Matrizen-Einheiten von R (siehe Lemma 2). Dann gilt $D \cong e_{ii} R e_{ii}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Aus $R \equiv R^*$ folgt, daß auch in R^* die Aussage gilt: „es gibt Elemente $x_{11}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{nn}$ (mit $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$) so daß $1 = x_{11} + x_{22} + \ldots + x_{nn}$, $x_{hi} \cdot x_{jk} = \delta_{ij} x_{hk}$ (wenn δ_{ij} das Kroneckersche Delta ist) und $x_{11} R^* x_{11}$ ein Schiefkörper ist". Nach Jacobson [8], p. 52, Proposition 6, folgt daraus, daß R^* der Ring aller $n \times n$-Matrizen über dem Schiefkörper $x_{11} R^* x_{11} = S$ ist. Nach dem Satz von Artin-Wedderburn ist R^* ein einfacher Artin-Ring. Q.E.D.

Bemerkung. Man kann Lemma 4 auch dadurch beweisen, daß man zuerst folgert, daß R^* ein halbeinfacher unitaler Ring ist, denn R ist halbeinfach und Halbeinfachheit ist eine Eigenschaft erster Stufe. Weil R artinsch und noethersch ist, ist R von endlicher Länge (siehe Bourbaki [3], p. 22–25). Daraus folgt, daß auch in R^* alle Ketten von Haupt-Rechts-

Idealen sowie alle Ketten von Haupt-Links-Idealen nur von beschränkter Länge sein können. R^* ist also perfekt im Sinne von H. Bass [1], und daher ist $R^* \cong R^*/J^*$ artinsch, wenn J^* das Jacobson-Radikal von R^* ist (Bass [1] Theorem P). R ist regulär im Sinne von J. v. Neumann und 0 und 1 sind die einzigen zentralen Idempotente von R. Weil dies wegen $R \equiv R^*$ auch in R^* gelten muß, folgt: das Zentrum von R^* ist ein Körper (siehe Maeda [13], p. 148). Nach dem Satz von Artin-Wedderburn ist daher $R^* \cong \mathrm{Mat}_n(S)$, wobei S ein Schiefkörper ist. Damit ist Lemma 4 aufs Neue bewiesen (³).

Lemma 5. *Seien D_1 und D_2 Schiefkörper, $1 \leqslant n_1 \in \omega$ und $1 \leqslant n_2 \in \omega$. Falls $\mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \equiv \mathrm{Mat}_{n_2}(D_2)$, dann gilt $n_1 = n_2$ und $D_1 \equiv D_2$.*

Beweis. Seien e_{ij} die Matrizen-Einheiten (siehe Lemma 2). Die Linksideale Re_{ii} (für $1 \leqslant i \leqslant n_1$) sind minimale Links-Ideale des Ringes $R = \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1)$ und folglich sind die e_{ii} primitive Idempotente (ein Idempotent e haißt primitiv, wenn e nicht als Summe von zwei orthogonalen von Null verschiedenen Idempotenten geschrieben werden kann). In $\mathrm{Mat}_{n_1}(D_1)$ ist also 1 als Summe von n_1 primitiven orthogonalen Idempotenten darstellbar. Sei jetzt $1 = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ wobei alle f_i primitive Idempotente sind und $f_i \cdot f_j = \delta_{ij} \cdot f_i$. Weil f_i primitiv ist, ist Rf_i nicht in die direkte Summe zweier echter Linksideale zerlegbar und f_i ist das einzige von Null verschiedene Idempotent des halbeinfachen Artinringes $f_i R f_i$ (siehe Behrens [2], p. 156, Satz 3, p. 157, Satz 4 und p. 159, Satz 7). Nach dem Satz von Artin-Wedderburn ist daher $f_i R f_i$ ein Schiefkörper und daraus folgt, daß Rf_i ein minimales Linksideal von $R = \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1)$ ist (denn R ist einfach, hat also keine nilpotenten Ideale). Aus $R = R\cdot 1 = Rf_1 \oplus \ldots \oplus Rf_k$ (direkte Summe von minimalen Linksidealen Rf_i) folgt daher $k = n_1$ (siehe Behrens [2], p. 87). Damit haben wir gezeigt: In $\mathrm{Mat}_{n_1}(D_1)$ ist 1 als Summe von n_1 aber auch nur von n_1 primitiven orthogonalen Idempotenten darstellbar. Aus $\mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \equiv \mathrm{Mat}_{n_2}(D_2)$ folgt daher $n_1 = n_2$ und wir schreiben $n = n_1 = n_2$.

Eine Aussage Φ aus der Sprache der Körpertheorie gilt in D_1 genau dann wenn die Relativierung von Φ auf $e_{11} \cdot \mathrm{Mat}_n(D_1) \cdot e_{11}$ in $\mathrm{Mat}_n(D_1)$ gilt. Weil für jeden beliebigen Satz von Matrizen-Einheiten $\{e'_{ij}\colon 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$, $D_1 \cong e'_{ii}\mathrm{Mat}_n(D_1)e'_{ii}$ gilt, können wir auch sagen: $D_1 \models \Phi \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_n(D_1) \models$ „es gibt ein System von Matrizen-Einheiten $\{x_{ij};\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ so daß $\Phi^*(x_{11})$" (siehe Jacobson [8], p. 52). Dabei entsteht $\Phi^*(x_{11})$ aus Φ indem man jeden Quantor $\forall y$ durch $\forall y(\exists z\colon\ y = x_{11}zx_{11} \Rightarrow \ldots)$ und $\exists y$ durch $\exists y(\exists z\colon\ y = x_{11}zx_{11} \wedge \ldots)$ ersetzt — dabei wird angenommen, daß die

(³) Halbeinfachheit ist eine Eigenschaft erster Stufe, Einfachheit und "artinsch" sind dagegen keine Eigenschaften erster Stufe. "Einfach und artinsch der Länge n" ist dagegen eine Eigenschaft der ersten Stufe, wie Lemma 4 zeigt.

Variable x_{11} in Φ noch nicht vorkommt. Eine analoge Behauptung gilt für $\mathrm{Mat}_n(D_2)$. Aus $\mathrm{Mat}_n(D_1) \equiv \mathrm{Mat}_n(D_2)$ folgt daher $D_1 \equiv D_2$. Q.E.D.

Korrollar. *Sei D ein Schiefkörper, $1 \leqslant n \in \omega$ und R ein Ring so, daß $R \equiv \mathrm{Mat}_n(D)$ gilt. Dann gibt es einen Schiefkörper S mit $D \equiv S$ so, daß $R \cong \mathrm{Mat}_n(S)$ gilt.*

Dies folgt sofort aus Lemma 4 und Lemma 5. Wir können jetzt die Umkehrung von Lemma 3 beweisen.

Lemma 6. *Sei D ein Schiefkörper, $1 \leqslant n \in \omega$ und $\mathrm{Th}(D)$ $\aleph_1$-kategorisch. Dann ist auch $\mathrm{Th}(\mathrm{Mat}_n(D))$ $\aleph_1$-kategorisch.*

Beweis. Wenn D endlich ist, dann ist auch $\mathrm{Mat}_n(D)$ endlich und $\mathrm{Th}(\mathrm{Mat}_n(D))$ hat keine unendlichen Modelle, ist also trivialerweise $\aleph_1$-kategorisch. Wenn D unendlich ist, dann gibt es nach dem Satz von Löwenheim-Skolem einen mit D elementar-äquivalenten Schiefkörper D_1 der Mächtigkeit $\aleph_1$ und daher $\mathrm{Card}(\mathrm{Mat}_n(D_1)) = \aleph_1$. Nach Lemma 1 gilt $\mathrm{Mat}_n(D) \equiv \mathrm{Mat}_n(D_1)$, also: $\mathrm{Mat}_n(D_1) \models \mathrm{Th}(\mathrm{Mat}_n(D))$. Sei jetzt R ein beliebiges Modell von $\mathrm{Th}(\mathrm{Mat}_n(D))$ der Kardinalität $\aleph_1$. Wir müssen $R \cong \mathrm{Mat}_n(D_1)$ beweisen. Nach dem Korollar zu Lemma 5 gibt es einen Schiefkörper S mit $D_1 \equiv D \equiv S$ und $R \cong \mathrm{Mat}_n(S)$. Aus $\mathrm{Card}(R) = \aleph_1$ folgt $\mathrm{Card}(S) = \aleph_1$. Aufgrund der $\aleph_1$-Kategorizität von $\mathrm{Th}(D) = \mathrm{Th}(D_1)$ ergibt sich nun $D_1 \cong S$ und daher $R \cong \mathrm{Mat}_n(S) \cong \mathrm{Mat}_n(D_1)$. Q.E.D.

Lemma 7. *Sei D ein Schiefkörper, $1 \leqslant n \in \omega$ und H ein endlicher unitaler Ring. Sei R ein beliebiger Ring derart, daß R und $\mathrm{Mat}_n(D) \oplus H$ elementar-äquivalent sind. Dann gibt es einen Schiefkörper S so, daß $R \cong \mathrm{Mat}_n(S) \oplus H$ wobei $D \equiv S$.*

Beweis. Falls D endlich ist, dann folgt aus $R \equiv \mathrm{Mat}_n(D) \oplus H$ nach einem Satz von A. Tarski $R \cong \mathrm{Mat}_n(D) \oplus H$ und wir sind fertig. Wir können daher im Folgenden annehmen, daß D unendlich ist. Sei E_1 das Eins-Element von $\mathrm{Mat}_n(D)$ und E_2 das Eins-Element von H. Setze $A = \mathrm{Mat}_n(D) \oplus H$; dann ist $1 = E_1 + E_2$ das Eins-Element von A und $E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_1 = 0$. Die Idempotente E_1 und E_2 liegen im Zentrum von A und es gilt $\mathrm{Mat}_n(D) = AE_1, AE_1 = E_1A, H = AE_2 = E_2A$. Für eine Menge $S \subseteq A$ sei $l(S) = \{x \in A;\ \forall y \in S\colon\ y \cdot x = 0\}$ der links-Annihilator von S und $r(S) = \{x \in A;\ \forall y \in S\colon\ x \cdot y = 0\}$ der rechts-Annihilator von S. Aus $E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_1 = 0$ folgt $H = E_2A \subseteq r(E_1) = l(E_1)$ und $\mathrm{Mat}_n(D) \subseteq r(E_2) = l(E_2)$. Aus $x \in r(E_1)$ folgt $x = 1 \cdot x = (E_1 + E_2) \cdot x = E_2 \cdot x \in E_2A = H$, also $H = r(E_1) = l(E_1)$ und analog $\mathrm{Mat}_n(D) = r(E_2) = l(E_2)$. Da H endlich ist, können wir mittels einer Formel $\tau(v)$ von $\mathfrak{L}_R$ ausdrücken, daß die Gesamtheit aller y mit $y \cdot v = 0$ einen mit H isomorphen Ring bilden, indem man aufschreibt: es gibt genau $m = \mathrm{Card}(H)$ viele Elemente $y_1, \ldots, y_m$ mit $y_i \cdot v = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ so daß $\alpha(y_1, \ldots, y_m)$ und $\mu(y_1, \ldots, y_m)$ gilt, wenn $\alpha(h_1, \ldots, h_m)$ die Gruppentafel der additiven Gruppe von H ist und $\mu(h_1, \ldots, h_m)$ die Multiplikationstafel von $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$ ist.

Mittels einer Formel $\sigma(u)$ können wir ausdrücken, daß die Gesamtheit aller x mit $x\cdot u = 0$ den Ring aller $n\times n$-Matrizen über einem Schiefkörper bilden. Dazu schreibt man auf, daß die Gesamtheit aller x mit $x\cdot u=0$ einen unitalen Ring bildet, in welchem es ein System von Matrizen-Einheiten $\{e_{ij};\ 1\leqslant i,j\leqslant n\}$ gibt, derart daß die Gesamtheit aller y mit $y\cdot u = 0$ und $y\cdot e_{ij} = e_{ij}\cdot y$ (für alle $1\leqslant i,j\leqslant n$) einen Schiefkörper bildet (vergl. Jacobson [8], p. 52).

Sei $I(u,v)$ die Formel: „$0\neq u = u^2\wedge 0\neq v = v^2\wedge u\cdot v = v\cdot u = 0\wedge\wedge\forall w(w\cdot u = u\cdot w\wedge w\cdot v = v\cdot w)\wedge\forall w\big(w = w(u+v) = (u+v)w\big)\wedge u+v\neq 0$". Die Formel $I(u,v)$ besagt, daß u und v zwei von Null verschiedene orthogonale zentrale Idempotente sind, deren Summe die Eins ist. Sei schließlich $\vartheta(u,v)$ die Formel: $\forall x\forall y(x\cdot u = y\cdot v = 0\wedge x+y = 0\Rightarrow x = y = 0)$.

Es folgt: $A\models\exists u\,\exists v[I(u,v)\wedge\vartheta(u,v)\wedge\sigma(u)\wedge\tau(v)]$, denn für $u = E_2$ und $v = E_1$ ist $I(E_2,E_1)\wedge\vartheta(E_2,E_1)\wedge\sigma(E_2)\wedge\tau(E_1)$ in $A = \mathrm{Mat}_n(D)\oplus H$ richtig. Wegen $R\equiv A$ folgt, daß die obige Aussage auch in R gelten muß. Folglich gibt es Idempotente E_1^* und E_2^* in R so daß $I(E_2^*,E_1^*)\wedge\vartheta(E_2^*,E_1^*)\wedge\wedge\sigma(E_2^*)\wedge\tau(E_1^*)$ in R erfüllt ist. Also $r(E_1^*)\cong H$ und $r(E_2^*)\cong\mathrm{Mat}_n(D^*)$, wobei D^* ein Schiefkörper ist (Jacobson [8], p. 52, Proposition 6), und wegen $I(E_2^*,E_1^*)\wedge\vartheta(E_2^*,E_1^*)$ gilt $R\cong\mathrm{Mat}_n(D^*)\oplus H$.

Ähnlich wie in Lemma 5 zeigt man jetzt, daß $D\equiv D^*$ gilt. Dabei benutzt man die Tatsache, daß es sowohl in A als auch in R ein und nur ein zentrales Idempotent E gibt so, daß EA und ER wenigstens $m+1$ Elemente enthalten und $l(E)$ genau m verschiedene Elemente enthält, wobei $m = \mathrm{Card}(H)$. Für ein solches E sind EA und ER zweiseitige Ideale in A bzw. in R und es muß $EA\cong\mathrm{Mat}_n(D)$ und $ER\cong\mathrm{Mat}_n(D^*)$ gelten, $l(E) = H$ folgt ebenfalls. $D\models\Phi\Leftrightarrow A\models$ „es gibt ein zentrales Idempotent E so daß $\mathrm{Card}(EA)\geqslant m+1$ und $\mathrm{Card}\big(l(E)\big) = m$ und es gibt e_{ij} (für $1\leqslant i,j\leqslant n$) mit $E = e_{11}+e_{22}+\ldots+e_{nn}$, $e_{hi}e_{jk} = \delta_{ij}e_{hk}$ so daß die Relativierung von Φ auf $e_{11}EAe_{11}$ gilt". Eine analoge Behauptung gilt für D^* und R. Aus $R\equiv A$ folgt daher $D\equiv D^*$. Q.E.D.

Lemma 8. *Sei D ein Schiefkörper, $1\leqslant n\in\omega$ und $\mathrm{Th}(D)$ $\aleph_1$-kategorisch. Wenn H ein endlicher unitaler Ring ist, dann ist auch $\mathrm{Th}\big(\mathrm{Mat}_n(D)\oplus H\big)$ $\aleph_1$-kategorisch.*

Beweis. Seien R_1 und R_2 Modelle von $\mathrm{Th}\big(\mathrm{Mat}_n(D)\oplus H\big)$ der Mächtigkeit $\aleph_1$. Aus $R_1\equiv R_2\equiv\mathrm{Mat}_n(D)\oplus H$ folgt nach Lemma 7: $R_1\cong\mathrm{Mat}_n(S_1)\oplus\oplus H$ und $R_2\cong\mathrm{Mat}_n(S_2)\oplus H$ für Schiefkörper S_1 und S_2 mit $S_1\equiv S_2\equiv D$. Wegen $\mathrm{Card}(S_1) = \mathrm{Card}(S_2) = \aleph_1$ folgt nach Voraussetzung $S_1\cong S_2$ und daraus $R_1\cong R_2$. Q.E.D.

3. ω-stabile Ringe.

Definition (H. Bass [1]). Sei R ein Ring und I ein zweiseitiges Ideal in R. Dann heißt I *links-T-nilpotent*, falls es zu jeder Folge $\langle a_n;\ n\in\omega\rangle$ von Elementen $a_n\in I$ eine Zahl $k\in\omega$ mit $a_0\cdot a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot a_k = 0$ gibt (*rechts-T-nilpotenz* verlangt indessen $a_k\cdot a_{k-1}\cdot\ldots\cdot a_1\cdot a_0 = 0$).

I heißt *T-nilpotent*, wenn I sowohl links-T-nilpotent als auch rechts-T-nilpotent ist.

Definition (S. Eilenberg, H. Bass [1]). Ein unitaler Ring R heißt *links-perfekt*, wenn das Jacobson-Radikal J von R links-T-nilpotent ist und R/J ein Artin-Ring ist (*rechts-perfektheit* verlangt stattdessen, daß J rechts-T-nilpotent ist).

R heißt *perfekt*, wenn R sowohl links-perfekt als auch rechts-perfekt ist. Eine fundamentale Rolle spielt im Folgenden das Lemma 9:

Lemma 9. *Sei R ein unitaler Ring und $\mathrm{Th}(R)$ ω-stabil. Dann ist R ein perfekter Ring.*

Beweis. Für $a\in R$ ist $Ra = \{x\cdot a;\ x\in R\}$ das von a erzeugte Haupt-links-Ideal. Angenommen es gibt in R eine strikt absteigende Folge von Haupt-links-Idealen: $Ra_0\supset Ra_1\supset\ldots\supset Ra_n\supset Ra_{n+1}\supset\ldots$ Sei

$$\varphi(x,y)\Leftrightarrow x\neq y\wedge\forall u\,\exists v[v\cdot x = u\cdot y]\,.$$

Dann gilt offenbar $R\models\varphi(a_i,a_j)\Leftrightarrow i<j$ und nach Satz A von S. Shelah wäre $\mathrm{Th}(R)$ nicht ω-stabil. Also muß R die Minimal-Bedingung für Haupt-links-Ideale erfüllen. Nach H. Bass [1], Theorem P, ist dies damit äquivalent, daß R rechts-perfekt ist. Analog folgt, daß R links-perfekt ist. R ist daher perfekt. Q.E.D.

Lemma 10. *Sei $R\neq\{0\}$ ein Ring in dem es keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente gibt und sei $\mathrm{Th}(R)$ ω-stabil. Dann ist R ein unitaler halbeinfacher Artin-Ring.*

Beweis. Sei $e = e^2\in R$ und $y\in R$. Dann gilt $(eye-ey)^2 = 0$, also $eye-ey = 0$, da R keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ hat. Analog folgt $eye = ye$, also $ey = ye$ und wir haben gezeigt: in R liegen alle Idempotente im Zentrum. In jedem Ring bilden die zentralen Idempotente einen relativ-komplementären distributiven Verband (vergl. Maeda [13], p. 137). Setze $V = \{e\in R;\ e = e^2\}$ und $e_1\leqslant e_2\Leftrightarrow e_1\cdot e_2 = e_1$. Betrachte die Formel $\varphi(x,y)\Leftrightarrow[x\neq y\wedge x = x^2\wedge y = y^2\wedge x\cdot y = x]$. Angenommen es gäbe in $\langle V,\leqslant\rangle$ eine unendliche aufsteigende Kette $e_0<e_1<\ldots<e_n<e_{n+1}<\ldots$, dann würde $R\models\varphi(e_i,e_j)\Leftrightarrow i<j$ folgen und nach Satz A wäre $\mathrm{Th}(R)$ nicht ω-stabil. Daher muß $\langle V,\leqslant\rangle$ ein endlicher distributiver relativ-komplementärer Verband sein.

Es gilt $V\neq\{0\}$. Sei nämlich $\mathcal{A} = \{aR;\ a\in R\wedge aR\neq\{0\}\}$. Aus $\exists a\in R$ $(a\neq 0)$, also $0\neq a^2\in aR$ folgt $\mathcal{A}\neq\emptyset$. Aus der ω-stabilität von $\mathrm{Th}(R)$ folt, daß es in $\mathcal{A}$ keine unendlich langen echt absteigenden Ketten geben kann (vergl. Lemma 9). Folglich hat $\mathcal{A}$ ein minimales Element $bR\neq\{0\}$.

Wenn $0 \neq d \in bR$, dann ist $0 \neq d^2 \in dbR$. Aus $d \in bR$, also $d = b \cdot r$ für ein $r \in R$, folgt $dbR \subseteq bR$ und wegen der Minimalität $dbR = bR$. Aus $d \in bR = dbR$ folgt, daß es ein $e \in bR$ gibt mit $d = de$ und $0 \neq e = e^2$ ist eine unmittelbare Folge. Daher gilt $0 \neq e \in V \neq \{0\}$.

Sei f die Summe aller Atome des endlichen Verbandes $\langle V, \leqslant \rangle$. Angenommen es gibt ein $y \in R$ mit $y \neq f \cdot y$. Sei $z = y - f \cdot y$. Dann gilt $zR \in \mathcal{A}$ und wie wir oben gesehen haben, gibt es ein Idempotent $e \in zR$, $e \neq 0$. Also $e = z \cdot r$ für ein $r \in R$ und es folgt $e = z \cdot r = (y - f \cdot y) \cdot r$, $e^2 = e(y - fy)r = (ey - efy)r = 0$, denn $e \leqslant f$, also $e \cdot f = e$, weil f das Maximum der Booleschen Algebra $\langle V, \leqslant \rangle$ ist. Aus diesem Widerspruch folgt, daß f eine rechts-Eins in R ist. Aber f liegt im Zentrum und daher ist f das Eins-Element von R. Damit haben wir gezeigt: *R ist unital.* Nach Lemma 9 sind alle Elemente von J nilpotent. Weil R aber keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ hat, folgt $J = \{0\}$. R ist also halbeinfach und nach Lemma 9 ist $R \cong R/J$ artinsch. Q.E.D.

Bemerkung. Lemma 10 kann man auch als Kriterium für die Existenz eines Eins-Elementes auffassen. Die Voraussetzung der Inexistenz nilpotenter Elemente $\neq 0$ kann nicht fallen gelassen werden, da beispielsweise für jede (additiv geschriebene) elementar-abelsche p-Gruppe $\langle G, + \rangle$ mit der trivialen Multiplikation $x \cdot y = 0$ für alle $x, y \in G$, $\mathrm{Th}(\langle G, +, \cdot \rangle)$ ω-stabil ist. Der Ring $\langle G, +, \cdot \rangle$ hat kein Eins-Element.

Aus Lemma 10 folgt, daß der Ring $\mathfrak{C}$ aller eindeutigen stetigen Abbildungen von $\boldsymbol{R}^+ = \{x \in \boldsymbol{R};\ x \geqslant 0\}$ in die komplexen Zahlen $\boldsymbol{C}$ keine ω-stabile Theorie hat. In Bezug auf die Faltung (convolution) als Multiplikation ist $\mathfrak{C}$ nach dem Satz von Titchmarsh ein null-teiler-freier Ring und enthält daher insbesondere keine nilpotenten Elemente $\neq 0$. $\mathfrak{C}$ hat aber kein Eins-Element.

Satz 1. *Sei $R \neq \{0\}$ ein Ring ohne nilpotente Elemente $\neq 0$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) *$\mathrm{Th}(R)$ ist ω-stabil,*

(ii) *R ist die direkte Summe von endlich vielen Schiefkörpern D_ν, $R = D_1 \oplus \ldots \oplus D_n$, wobei für alle $1 \leqslant \nu \leqslant n$, $\mathrm{Th}(D_\nu)$ ω-stabil ist.*

Beweis. Ad. (i)$\Rightarrow$(ii): Nach Lemma 10 ist R ein unitaler halbeinfacher Artin-Ring. Nach dem Satz von Artin-Wedderburn ist daher R die direkte Summe von endlich vielen Matrizen-Ringen $\mathrm{Mat}_{n_i}(D_i)$. Weil aber R keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente besitzt, muß $n_i = 1$ gelten, und R ist die direkte Summe von den Schiefkörpern D_i. Nach Satz F haben all diese Schiefkörper eine ω-stabile Theorie. Die Umkehrung (ii)$\Rightarrow$(i) folgt durch Induktion sofort aus Satz D. Q.E.D.

Lemma 11. *Sei R ein kommutativer unitaler Ring und $\mathrm{Th}(R)$ ω-stabil. Dann ist das Jacobson-Radikal J von R gerade die Menge aller nilpotenten Elemente von R.*

Beweis. Nach Lemma 9 ist R ein perfekter Ring. Alle Elemente von J sind daher nilpotent. Wenn umgekehrt $x \in R$ nilpotent ist, dann ist xR ein Nil-Ideal, also $xR \subseteq J$ und aus $1 \in R$ folgt $x \in xR$, also $x \in J$ (vergl. Behrens [2], p. 73). Q.E.D.

Bemerkung. Das Jacobson-Radikal J ist der Durchschnitt aller modularen maximalen Rechtsideale. Jacobson hat gezeigt, daß J auch in der Sprache $\mathfrak{L}_R$ der ersten Stufe definierbar ist:

$$J = \{x \in R;\ \forall y \in R \forall z \in R\ \exists u \in R\colon\ u \circ (y \cdot x \cdot z) = (y \cdot x \cdot z) \circ u = 0\},$$

wenn $a \circ b = a + b - a \cdot b$ gesetzt wird (siehe Jacobson [8], p. 9]. Der Begriff der Nilpotenz kann im Allgemeinen nicht in der elementaren Sprache $\mathfrak{L}_R$ ausgedrückt werden, da wir in $\mathfrak{L}_R$ nicht über natürliche Zahlen quantifizieren können. Nach Lemma 11 ist jedoch für die Klasse der kommutativen unitalen Ringe mit ω-stabiler Theorie die Nilpotenz eines Elementes x in der Sprache $\mathfrak{L}_R$ ausdrückbar.

Aus Satz 1 erhalten wir jetzt als Korollar:

Satz 2 (J. Reineke [16]). *Sei R ein kommutativer halbeinfacher Ring mit Eins-Element. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(i) *$\mathrm{Th}(R)$ ist ω-stabil.*

(ii) *R ist die direkte Summe von endlich vielen algebraisch abgeschlossenen Körpern und einem endlichen Ring.*

Dies folgt sofort aus Satz 1, Lemma 11 und Satz B.

4. $\aleph_1$-kategorische Ringe. Wir fassen jetzt unsere Ergebnisse aus den Abschnitten 2 und 3 zusammen, um diejenigen nicht-kommutativen Ringe R zu klassifizieren, deren Theorie $\mathrm{Th}(R)$ $\aleph_1$-kategorisch ist.

Satz 3. *Sei R ein einfacher unitaler Ring. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) *$\mathrm{Th}(R)$ ist $\aleph_1$-kategorisch,*

(ii) *$R = \mathrm{Mat}_n(K)$, wobei $1 \leqslant n \in \omega$ und K ein endlicher oder ein algebraisch abgeschlossener kommutativer Körper ist.*

Beweis. Ad (i)$\Rightarrow$(ii): Sei R ein einfacher unitaler Ring und $\mathrm{Th}(R)$ $\aleph_1$-kategorisch. Nach einem Satz von Morley ist $\mathrm{Th}(R)$ ω-stabil, und nach Lemma 9 ist R perfekt. Weil R einfach ist, also auch halbeinfach, folgt: $R \cong R/J$ ist artinsch. Nach dem Satz von Artin-Wedderburn ist daher R isomorph zu einem Ring von $n \times n$-Matrizen über einem Schiefkörper K, $R \cong \mathrm{Mat}_n(K)$. Nach Lemma 3 ist $\mathrm{Th}(K)$ $\aleph_1$-kategorisch und nach Satz C ist K daher kommutativ. Nach Satz B ist K endlich oder algebraisch abgeschlossen.

Ad. (ii)$\Rightarrow$(i): dies folgt sofort aus Lemma 6. Q.E.D.

Korollar. *Sei R ein unitaler einfacher Ring, der eine Polynom-Identität über seinem Zentrum erfüllt. Dann sind die folgenden Eigenschaften untereinander äquivalent*:

(i) $\mathrm{Th}(R)$ *ist* $\aleph_1$-*kategorisch*,

(ii) $\mathrm{Th}(R)$ *ist* ω-*stabil*,

(iii) $R = \mathrm{Mat}_n(K)$, *wobei* $1 \leqslant n \in \omega$ *und* K *ein endlicher oder ein algebraisch abgeschlossener kommutativer Körper ist.*

Beweis. Ad. (i) ⇒ (ii): dies ist nach M. Morley der Fall.

Ad. (ii) ⇒ (iii): wie in Satz 3 folgt $R \cong \mathrm{Mat}_n(K)$, wobei K ein Schiefkörper ist mit ω-stabiler Theorie gemäß Lemma 2. Sei Z das Zentrum von R. Dann ist Z auch das Zentrum von K und Z ist ein kommutativer Körper, R also eine Z-Algebra (d.h. für $z \in Z$ und $x \in R$ und $z \cdot x = 0$ folgt $z = 0$ oder $x = 0$). Es gibt also in der freien Algebra $Z[x_1, \ldots, x_m]$, die von den nicht-kommutierenden Variablen $x_1, \ldots, x_m$ erzeugt wird, ein Polynom $f(x_1, \ldots, x_m)$ (für ein $m \in \omega$), welches in $Z[x_1, \ldots, x_m]$ von Null verschieden ist, so daß $f(r_1, \ldots, r_m) = 0$ für alle $r_1, \ldots, r_m \in R$ gilt (vergl. Kaplansky [9], S. 580, [10], S. 156–161). Es folgt jetzt, daß auch K dieselbe Polynom-Identität erfüllt. Nach Kaplansky [9] (vergl. [10], S. 157) hat K endliche Dimension über seinem Zentrum Z. Nach Satz E ist $\mathrm{Th}(Z)$ ω-stabil, und daher nach Satz B ist Z endlich oder algebraisch abgeschlossen. Dann ist aber K offenbar kommutativ, also $Z = K$. Die Implikation (iii) ⇒ (i) ergibt sich nach Satz B sofort aus Lemma 6. Q.E.D.

Satz 4. *Sei R ein halbeinfacher unitaler Ring. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent*:

(i) $\mathrm{Th}(R)$ *ist* $\aleph_1$-*kategorisch*,

(ii) *R ist endlich, oder es gibt einen endlichen unitalen Ring H und einen algebraisch abgeschlossenen kommutativen Körper K, so daß $R \cong H \oplus \mathrm{Mat}_n(K)$ für eine Zahl n mit $1 \leqslant n \in \omega$.*

Beweis. Ad. (i) ⇒ (ii). Nach Lemma 9 ist R ein halbeinfacher Artin-Ring und daher gilt $R = \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(D_k)$ für Schiefkörper $D_1, \ldots, D_k$ und Zahlen $n_1, \ldots, n_k$. Wir behaupten, daß in dieser direkten Zerlegung nur ein unendlicher Schiefkörper auftreten kann. Angenommen es gibt zwei unendliche Schiefkörper, etwa D_1 und D_2, in dieser Zerlegung. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem gibt es Schiefkörper $D_1', D_1'', D_2', D_3', \ldots, D_k'$ mit $D_1 \equiv D_1' \equiv D_1''$, $D_\nu \equiv D_\nu'$ (für $2 \leqslant \nu \leqslant k$), $\mathrm{Card}(D_1'') = \aleph_0$, $\mathrm{Card}(D_1') = \mathrm{Card}(D_2') = \aleph_1$ und $\mathrm{Card}(D_\nu') \leqslant \aleph_0$ für $3 \leqslant \nu \leqslant k$. Nach einem Satz von Mostowski [15] und Feferman-Vaught [7] erhält die Bildung der direkten Summe die elementare Äquivalenz, das heißt es gilt $R \equiv R' = \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1') \oplus \mathrm{Mat}_{n_2}(D_2') \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(D_k')$ und $R \equiv R'' = \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1'') \oplus \mathrm{Mat}_{n_2}(D_2') \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(D_k')$. Ferner haben wir $\mathrm{Card}(R') = \mathrm{Card}(R'') = \aleph_1$, aber die Ringe R' und R'' können nicht isomorph sein (siehe Behrens [2], S. 83, Satz 3), ein Widerspruch, $\mathrm{Th}(R)$ wäre nicht $\aleph_1$-kategorisch!

Wir haben gezeigt: wenn R nicht endlich ist, dann gibt es genau einen unendlichen Schiefkörper D_1 und die Körper $D_2, \ldots, D_k$ sind endliche Körper. Wir setzen $H = \mathrm{Mat}_{n_2}(D_2) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(D_k)$ und $R = \mathrm{Mat}_n(D) \oplus H$, wobei $n = n_1$, $D = D_1$ und H ein endlicher Ring ist.

Nach dem Korollar zu Lemma 5 und Behrens [2], S. 83, Satz 3, folgt: auch $\mathrm{Th}(\mathrm{Mat}_n(D))$ ist $\aleph_1$-kategorisch. Dies impliziert nach Lemma 3, daß $\mathrm{Th}(D)$ $\aleph_1$-kategorisch ist. Nach Satz C und Satz B ist D ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Ad. (ii) ⇒ (i): die folgt sofort aus Satz B und Lemma 8. Q.E.D.

Aus Satz 4 erhalten wir unmittelbar als Korollar einen Satz von J. Reineke [16]:

Korollar 1. *Sei R ein kommutativer halbeinfacher unitaler Ring. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent*:

(i) $\mathrm{Th}(R)$ *ist* $\aleph_1$-*kategorisch*,

(ii) *R ist endlich, oder $R = K \oplus H$ wobei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und H ein endlicher Ring ist.*

Korollar 2. *Sei R ein kommutativer nullteiler-freier unitaler Ring (also ein Integritätsbereich). Dann sind äquivalent*:

(i) $\mathrm{Th}(R)$ ist ω-*stabil*,

(ii) $\mathrm{Th}(R)$ *ist* $\aleph_1$-*kategorisch*,

(iii) *R ist entwender endlich oder ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

Satz 5. *Sei $R \neq \{0\}$ ein Ring ohne nilpotente Elemente $\neq 0$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent*:

(i) $\mathrm{Th}(R)$ *ist* $\aleph_1$-*kategorisch*,

(ii) *R ist endlich, oder $R = K \oplus H$ wobei K ein algebraisch abgeschlossener kommutativer Körper ist und H ein endlicher Ring ist.*

Beweis. Ad. (i) ⇒ (ii): Zunächst folgt die ω-Stabilität und daraus nach Satz 1: $R = D_1 \oplus D_2 \oplus \ldots \oplus D_k$. Wie im Beweis von Satz 4 folgt, daß nur höchstens ein Schiefkörper, etwa $D = D_1$, unendlich sein kann. Sei H die direkte Summe aller in der Zerlegung $R = D_1 \oplus \ldots \oplus D_k$ auftretenden endlichen Körper D_ν. Dann gilt $R = D \oplus H$ und wie in Satz 4 folgt: $\mathrm{Th}(D)$ ist $\aleph_1$-kategorisch. Daher ist D kommutativ (Satz C) und daher algebraisch abgeschlossen (Satz B). Die Umkehrung (ii) ⇒ (i) folgt sofort aus Lemma 8 und Satz B. Q.E.D.

Bemerkungen. (1) In den Sätzen 3 und 4 wurde gezeigt, daß die dort auftretenden Matrizen-Ringe nicht nur Matrizen-Ringe über Schiefkörpern sind, sondern sogar über kommutativen Körpern K, die dann sogar noch näher charakterisiert wurden. Wir heben hervor, daß der Kommutativitäts-Beweis dabei im Wesentlichen modell-theoretischer Natur war.

(2) Die Schiefkörper D, deren Theorie $\mathrm{Th}(D)$ $\aleph_1$-kategorisch ist, sind nach den Sätzen B und C bekannt. Die Struktur der Schiefkörper D mit ω-stabiler Theorie ist bisher noch unbekannt. ω-stabile Schiefkörper, die eine Polynom-Identität über ihrem Zentrum erfüllen, sind endliche oder algebraisch abgeschlossene kommutative Körper. Wir bemerken, daß Schiefkörper D mit $\aleph_0$-kategorischer Theorie $\mathrm{Th}(D)$ notwendig endlich sind.

(3) In einem ω-stabilen Ring R ist das Radikal J T-nilpotent, (Lemma 9) und daher insbesondere ein Nil-Ideal. Durch Anwendung des Kompaktheits-Satzes von Gödel-Malzew folgt daraus: es gibt eine Zahl $n \in \omega$, so daß alle Produkte von je n Elementen aus J Null sind. Es gilt also: Das Jacobson-Radikal J eines unitalen Ringes R mit ω-stabiler Theorie ist nilpotent (vergl. [2], S. 73). Dies hat zur Folge, daß hier die Radikale von Jacobson, Levitzki und Baer-McCoy zusammenfallen (siehe auch F. Szász [21], p. 430).

Wir schließen unsere Untersuchungen ab, indem wir Gruppenringe mit $\aleph_1$-kategorischer Theorie betrachten. Wir erinnern zunächst an einige bekannte Definitionen.

Sei R ein unitaler Ring und G eine beliebige Gruppe. Sei $R[G]$ die Menge aller Funktionen f von G in R so, daß $f(x) \neq 0$ nur für höchstens endlich viele $x \in G$ gilt. Die Funktion $E(x)$ mit $E(x) = 1$ falls $x = 1$ und $E(x) = 0$ falls $x \neq 1$ ist das Einselement von $R[G]$. $N(x) = 0$ für alle $x \in G$ ist das Null-Element,

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x), \qquad (f_1\cdot f_2)(x) = \sum_{x=y\cdot z} f_1(y)\cdot f_2(z) .$$

Für $a \in G$ sei $\delta_a \in R[G]$ diejenige Funktion mit der Eigenschaft $\delta_a(x) = 1$ falls $x = a$, $\delta_a(x) = 0$ falls $x \neq a$. Für eine Untergruppe H von G sei ωH das von $\{E - \delta_a;\ a \in H\}$ erzeugte Rechts-Ideal in $R[G]$. $\Delta = \omega G$ ist das (zweiseitige) fundamentale (oder Augmentierungs-) Ideal von $R[G]$. Es gilt $R \cong R[G]/\omega G$ und $G = \{1\} \Leftrightarrow \omega G = \{0\}$ (vergl. I. G. Connell [4], p. 651).

Satz 6. *Sei G eine beliebige Gruppe und D ein Schiefkörper der Charakteristik Null. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Th}(D[G])$ *ist $\aleph_1$-kategorisch,*

(ii) $G = \{1\}$ *und D ist ein kommutativer algebraisch abgeschlossener Körper.*

Beweis. Ad. (i)$\Rightarrow$(ii): Sei $\mathrm{Th}(D[G])$ $\aleph_1$-kategorisch. Wir betonen dabei, daß wir $D[G]$ nur als Ring betrachten und daß dementsprechend $\mathrm{Th}(D[G])$ in der einsortigen Sprache $\mathfrak{L}_R$ formuliert ist. Zunächst folgt, daß $\mathrm{Th}(D[G])$ ω-stabil ist und daß nach Lemma 9 daher $D[G]$ ein perfekter Ring ist. Nach einem Satz von S. M. Woods [22] folgt daraus, daß G endlich ist, und nach dem Satz von Maschke, daß $D[G]$ halbeinfach ist (siehe P. Ribenboim [17], p. 143). Ein halbeinfacher perfekter unitaler Ring ist ein Artin-Ring (siehe auch I. G. Connell [4], p. 657). Nach dem Satz von Artin-Wedderburn gilt daher:

$$(*) \qquad D[G] \cong \mathrm{Mat}_{n_1}(S_1) \oplus \mathrm{Mat}_{n_2}(S_2) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(S_k) ,$$

wobei $S_1, \ldots, S_k$ Schiefkörper sind und $k, n_1, \ldots, n_k \in \omega$. Dem Beweis des Artin-Wedderburnschen Satzes entnimmt man, daß es irreduzible $D[G]$-Moduln $V_1, \ldots, V_k$ gibt, so daß für $1 \leqslant \nu \leqslant k$: $S_\nu \cong \mathrm{End}_{D[G]}(V_\nu)$, wenn $\mathrm{End}_{D[G]}(V_\nu)$ der Ring aller $D[G]$-Endomorphismen von V_ν ist. Weil D in $D[G]$ isomorph enthalten ist, folgt also $D \tilde{\subseteq} S_\nu \tilde{\subseteq} D[G]$ und alle S_ν sind also unendlich. Wie im Beweis von Satz 4 folgt aber, daß in der direkten Zerlegung $(*)$ nur ein unendlicher Matrizenring auftreten kann. Also gilt $k = 1$ und daher $D[G] \cong \mathrm{Mat}_n(S)$, wenn $n = n_1$ und $S = S_1$. Somit ist $D[G]$ ein einfacher Ring. Es gilt stets $\omega G \neq D[G]$, und hier folgt daher $\omega G = \{0\}$, also $G = \{1\}$ und somit $D[G] \cong D$. Nach den Sätzen B und C ist also D ein kommutativer algebraisch abgeschlossener Körper. Die Umkehrung (ii)$\Rightarrow$(i) ist trivial. Q.E.D.

Zu den wichtigsten Problemen, die in dieser Arbeit offen geblieben sind, gehören die Frage nach Struktur ω-stabiler Schiefkörper und ω-stabiler und $\aleph_1$-kategorischer Ringe, die nicht notwending halbeinfach sind (die Sätze 5 und 6 sind als Teilantwort auf diese Frage zu verstehen). Lösungen dieser Probleme sind willkommen.

Literatur

[1] H. Bass, *Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings* Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), pp. 466–488.

[2] E. A. Behrens, *Algebren*, Bibliographisches Institut Mannheim 1965.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chapitre 8: *Modules et anneaux semi-simples*, Paris 1958.

[4] I. G. Connell, *On the group ring*, Canad. J. Math. 15 (1963), pp. 650–685.

[5] L. Dornhoff, *Group representation theory*, Part A, New York 1971.

[6] P. Erdös, L. Gillman and M. Hendrickson, *An isomorphism theorem for real closed fields*, Annals of Math. 61 (1955), pp. 542–554.

[7] S. Feferman and R. L. Vaught, *The first order properties of products of algebraic systems*, Fund. Math. 47 (1959), pp. 57–103.

[8] N. Jacobson, *Structure of rings*, AMS-Colloquium Publications 37, Providence, R. I., 1964 (Revised Edition).

[9] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), pp. 575–580.

[10] — *Fields and Rings*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago–London 1970 (2nd printing).

[11] A. Macintyre, *On ω_1-categorical theories of abelian groups*, Fund. Math. 70 (1971), pp. 253–270.

[12] — *On ω_1-categorical theories of fields*, Fund. Math. 71 (1971), pp. 1–25.

[13] F. Maeda, *Kontinuierliche Geometrien*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1958.
[14] M. Morley, *Categoricity in power*, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), pp. 514–538.
[15] A. Mostowski, *On direct products of theories*, J. Symb. Logic 17 (1952), pp. 1–31.
[16] J. Reineke, *Über ω_1-Kategorizität von kommutativen Ringen mit Einselement*, Dissertation, Hannover 1973.
[17] P. Ribenboim, *Rings and Modules*, New York 1969.
[18] H. Salzmann, *Kompakte zweidimensionale projektive Ebenen*, Math. Annalen, 145 (1962), pp. 401–428.
[19] S. Shelah, *Stability, the* f.c.p. *and superstability; model-theoretic properties of formulas in first order theory*, Ann. Math. Logic 3 (1971), pp. 271–362.
[20] K. Strambach, *Über sphärische Möbiusebenen*, Archiv der Math. 18 (1967), pp. 208–211.
[21] F. Szász, *Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale*, Teil II, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 12 (1961), pp. 417–439.
[22] S. M. Woods, *On perfect group rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 27 (1971), pp. 49–52.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT
Heidelberg, Fed. Republic of Germany

Reçu par la Rédaction le 23. 8. 1973

Relations on lines as primitive notions for Euclidean geometry

by

W. Schwabhäuser (Stuttgart) and **L. W. Szczerba** (Warszawa)

Abstract. Euclidean geometry is usually treated as a theory of relations on points. It is proved that this geometry may be formulated as a theory of relations on lines. The simplest systems of primitive notions for dimension-free, two-dimensional and n-dimensional (with $n > 3$) geometries are given. For $n = 3$ the problem of defining such a system remains open.

The possible systems of primitive notions for geometry were studied by Royden [5], Beth and Tarski [1], Scott [6]. Some negative results are contained in Robinson [4] and Tarski [8]. In all these systems variables are ranging over points, i.e. geometry is treated as a theory of structures with universa consisting of points only. In Menger [3] two universa are used: that of points and an additional one of lines. In Tarski [7] elements of the universum are open discs. In this paper we are concerned with possibilities of taking as the universum the set of lines only and relations on them as primitive notions (1).

We shall prove that the binary relation of perpendicularity together with the ternary relation of copunctuality may be used as a system of primitive notions for dimension-free elementary Euclidean geometry. Perpendicularity alone suffices for all dimensions higher than three. In dimension two, a ternary relation is essential: there is no system of primitives for plane Euclidean geometry consisting of binary relations only. In the three-dimensional case, we know that perpendicularity together with the binary relation of intersection lines may be used as system of primitives. However, we do not know whether the notion of intersection of lines is superfluous or not.

We do not know whether exists at all a binary line-relation, which may be used as the only primitive notion for space Euclidean geometry.

(1) Most of the results have been obtained when both authors attended the Meeting on Foundations of Geometry in Oberwolfach 15–21. 7. 1973. We wish to express our thanks to the organisers of that meeting.