Operatorenalgebren mit einer endlichen Anzahl von maximalen Idealen

von

PETER VOLKMANN (Karlsruhe)

Zusammenfassung. Für den Banachraum $E = l_{p_1} \oplus \ldots \oplus l_{p_n}$ (und $E = l_{p_1} \oplus \ldots \oplus l_{p_{n-1}} \oplus c_0$; $1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_n < +\infty$) wird gezeigt, daß es in der Algebra $\boldsymbol{L}(E)$ der stetigen, linearen Operatoren genau n maximale zweiseitige Ideale gibt. Ferner werden alle zweiseitigen Ideale bestimmt, die das Ideal $\boldsymbol{S}(E)$ der streng singulären Operatoren enthalten.

1. Einleitung und Übersicht. Nach Porta [6] gibt es in der Algebra $\boldsymbol{L}(E)$ der stetigen, linearen Operatoren des Banachraumes $E = l_2 \oplus l_p$ $(1 < p < +\infty, p \neq 2)$ genau zwei maximale Ideale[1] (vgl. auch Pietsch [4], S. 60). Dieses Resultat wird in der vorliegenden Note wie folgt verallgemeinert.

SATZ 1. *Man bilde den Banachraum*

$$E = l_{p_1} \oplus l_{p_2} \oplus \ldots \oplus l_{p_n},$$

wobei $1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_n < +\infty$ *gilt und statt* l_{p_n} *auch der Raum* c_0 *genommen werden kann. Dann besitzt die Algebra* $\boldsymbol{L}(E)$ *genau* n *maximale Ideale.*

Zum Beweise werden in der nachfolgenden Nr. einige algebraische Überlegungen angestellt, aus denen sich Satz 1 in Nr. 3 mit Hilfe der Ergebnisse von Gohberg, Markus und Fel'dman [1] sowie von Pitt [5] oder Goldberg und Thorp [2] leicht herleiten läßt.

In Nr. 4 wird für den Fall $n = 3$ (d.h. $E = l_{p_1} \oplus l_{p_2} \oplus l_{p_3}$) ein abgeschlossenes Ideal $\boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{L}(E)$ angegeben, das mit dem Ideal $\boldsymbol{S}(E)$ der streng singulären Operatoren aus $\boldsymbol{L}(E)$ nicht vergleichbar ist (d.h. es gilt weder $\boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{S}(E)$ noch $\boldsymbol{S}(E) \subseteq \boldsymbol{J}$). Nach Porta [6] kann es solche Ideale im Falle $n = 2$ nicht geben.

Herrn Prof. Dr. H. Heuser und Herrn Dr. U. Mertins danke ich sehr herzlich für wesentliche Anregungen und Literaturhinweise zur vorliegenden Arbeit.

---

(1) Mit Ideal ist stets ein zweiseitiges Ideal gemeint.

2. Algebraische Betrachtungen. In dieser Nr. sei E ein Vektorraum (über einem beliebigen Körper), und es gelte

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n.$$

$P_j\colon E \to E_j$ seien die zu dieser Zerlegung gehörigen Projektionen, und $I_j\colon E_j \to E$ seien die Einbettungen der Vektorräume E_j in E ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Ferner sei $\boldsymbol{A}$ eine Algebra von linearen Operatoren $T\colon E \to E$, wobei $I_1P_1, I_2P_2, \ldots, I_nP_n \in \boldsymbol{A}$ (also auch $I = \sum_{j=1}^{n} I_jP_j \in \boldsymbol{A}$, I = Identität auf E) gilt. Dann sind $\boldsymbol{A}_{jk} = P_j\boldsymbol{A}I_k = \{P_jTI_k \mid T \in \boldsymbol{A}\}$ ($j, k = 1, 2, \ldots, n$) Vektorräume von Operatoren, die $\boldsymbol{A}_{jj}$ sind sogar Operatorenalgebren (mit Einselement, da $I_{jj} = P_jII_j \in \boldsymbol{A}_{jj}$), und durch

(1) $$T \to \begin{bmatrix} T_{11} & \ldots & T_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{n1} & \ldots & T_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1TI_1 & \ldots & P_1TI_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_nTI_1 & \ldots & P_nTI_n \end{bmatrix}$$

wird ein Isomorphismus zwischen $\boldsymbol{A}$ und der Matrizenalgebra

$$[\boldsymbol{A}_{jk}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \ldots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \ldots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

hergestellt. Die Umkehrabbildung zu (1) ist

(2) $$[T_{jk}] \to \sum_{j,k=1}^{n} I_jT_{jk}P_k.$$

Statt der Pfeile in (1), (2) wird im folgenden einfach ein Gleichheitszeichen geschrieben.

Lemma. *Ist $\boldsymbol{J}$ ein Ideal in $\boldsymbol{A}$, so sind $\boldsymbol{J}_{jk} = P_j\boldsymbol{J}I_k$ ($j, k = 1, 2, \ldots, n$) Unterräume der $\boldsymbol{A}_{jk}$, die $\boldsymbol{J}_{jj}$ sind Ideale in $\boldsymbol{A}_{jj}$, und es gilt*

(3) $$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \ldots & \boldsymbol{J}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{J}_{n1} & \ldots & \boldsymbol{J}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Beweis. Zunächst ist klar, daß $\boldsymbol{J}_{jk}$ ein Unterraum von $\boldsymbol{A}_{jk}$ ist. Die Ideal-Eigenschaft der $\boldsymbol{J}_{jj}$ folgt mit $\boldsymbol{A}I_jP_j\boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{J}$ bzw. $\boldsymbol{J}I_jP_j\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{J}$ aus

$$\boldsymbol{A}_{jj}\boldsymbol{J}_{jj} = P_j\boldsymbol{A}I_jP_j\boldsymbol{J}I_j \subseteq P_j\boldsymbol{J}I_j = \boldsymbol{J}_{jj}$$

und

$$\boldsymbol{J}_{jj}\boldsymbol{A}_{jj} = P_j\boldsymbol{J}I_jP_j\boldsymbol{A}I_j \subseteq P_j\boldsymbol{J}I_j = \boldsymbol{J}_{jj}.$$

(3) ergibt sich wegen $I_jP_j\boldsymbol{J}I_kP_k \subseteq \boldsymbol{J}$ aus der durch (1), (2) beschriebenen Isomorphie zwischen $\boldsymbol{A}$ und $[\boldsymbol{A}_{jk}]$.

Satz 2. *Für $j = 1, 2, \ldots, n$ sei $\boldsymbol{J}_j$ ein maximales Ideal in $\boldsymbol{A}_{jj}$, wobei*

(4) $$\boldsymbol{A}_{jk}\boldsymbol{A}_{kj} \subseteq \boldsymbol{J}_j \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq k).$$

Für $M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ sei

$$\boldsymbol{J}_M = \{S \in \boldsymbol{A} \mid P_jSI_j \in \boldsymbol{J}_j \text{ für } j \notin M\}.$$

Dann gilt:

(a) *Die Abbildung $M \to \boldsymbol{J}_M$ vermittelt einen Isomorphismus des Verbandes $\boldsymbol{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$* [2] *in den Verband der Ideale von $\boldsymbol{A}$.*

(b) *Ist $\boldsymbol{J}$ ein $\boldsymbol{J}_\emptyset$ umfassendes Ideal von $\boldsymbol{A}$, so existiert ein $M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_M$.*

(c) *Gibt es für $j = 1, 2, \ldots, n$ außer $\boldsymbol{J}_j$ keine maximalen Ideale in $\boldsymbol{A}_{jj}$, so besitzt $\boldsymbol{A}$ genau n maximale Ideale.*

Beweis. Zunächst ist

(5) $$\boldsymbol{J}_M = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{A}_{12} & \ldots & & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{D}_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \boldsymbol{A}_{n-1n} \\ & & & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_{n1} & & \ldots & \boldsymbol{A}_{nn-1} & \boldsymbol{D}_n \end{bmatrix},$$

mit

(6) $$\boldsymbol{D}_j = \boldsymbol{D}_j(M) = \begin{cases} \boldsymbol{J}_j & \text{für } j \notin M, \\ \boldsymbol{A}_{jj} & \text{für } j \in M. \end{cases}$$

Daher ist für $M, N \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

$$M \subseteq N \Leftrightarrow \boldsymbol{D}_j(M) \subseteq \boldsymbol{D}_j(N)\ (j = 1, 2, \ldots, n) \Leftrightarrow \boldsymbol{J}_M \subseteq \boldsymbol{J}_N,$$

und zum Beweise von (a) genügt der Nachweis der Formeln

(7) $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}_M \subseteq \boldsymbol{J}_M, \quad \boldsymbol{J}_M\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{J}_M.$$

Sei also $[T_{jk}] \in \boldsymbol{A}$, $[S_{jk}] \in \boldsymbol{J}_M$. Dann ist $[T_{jk}][S_{jk}] = [\Sigma_{jk}]$ mit $\Sigma_{jk} = \sum_{l=1}^{n} T_{jl}S_{lk}$. Offenbar ist $\Sigma_{jk} \in \boldsymbol{A}_{jk}$ für $j \neq k$, und es ist $\Sigma_{jj} \in \boldsymbol{A}_{jj} = \boldsymbol{D}_j$, falls $j \in M$. Ist $j \notin M$, so ist wegen $S_{jj} \in \boldsymbol{D}_j = \boldsymbol{J}_j$ und (4)

$$\Sigma_{jj} = T_{jj}S_{jj} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} T_{jl}S_{lj} \in \boldsymbol{A}_{jj}\boldsymbol{J}_j + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \boldsymbol{A}_{jl}\boldsymbol{A}_{lj} \subseteq \boldsymbol{J}_j = \boldsymbol{D}_j.$$

Damit gilt $[\Sigma_{jk}] \in \boldsymbol{J}_M$, und analog kann $[S_{jk}][T_{jk}] \in \boldsymbol{J}_M$ gezeigt werden, d.h. (7) gilt. Zum Beweise von (b) werde ein $\boldsymbol{J}_\emptyset$ umfassendes Ideal $\boldsymbol{J}$ in

(2) $\boldsymbol{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ bezeichnet die Potenzmenge der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

der Form (3) geschrieben. Mit

$$J_\sigma = \begin{bmatrix} J_1 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & J_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_{n-1n} \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn-1} & J_n \end{bmatrix}$$

ergibt sich dann $J_{jj} \supseteq J_j$ und $J_{jk} = A_{jk}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq k)$. Da J_{jj} nach obigem Lemma ein Ideal in A_{jj} ist und da J_j maximales Ideal ist, kann nur $J_{jj} = J_j$ oder $J_{jj} = A_{jj}$ sein. Setzt man $M = \{j \mid J_{jj} = A_{jj}\}$, so folgt $J = J_M$. Damit gilt (b).

Wegen (a), (b) hat A mindestens n maximale Ideale

$$J_{\{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun sei J_j das einzige maximale Ideal in A_{jj} (für $j = 1, 2, \ldots, n$), und es sei J irgendein maximales Ideal aus A. Dann gibt es ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit

(8) $$J_{jj} \neq A_{jj}$$

(J_{jj} aus (3)), da anderenfalls

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & O_{12} & \cdots & O_{1n} \\ O_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O_{n-1n} \\ O_{n1} & \cdots & O_{nn-1} & I_{nn} \end{bmatrix} \in J$$

sein müßte([3]), was nicht geht. Aus (8) folgt $J_{jj} \subseteq J_j$, und mit (5), (6) folgt weiter

$$J \subseteq J_{\{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}}.$$

Die Maximalität von J liefert hier Gleichheit, und damit ist auch (c) bewiesen.

3. Beweis des Satzes 1. Für $1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_n < +\infty$ sei $E_j = l_{p_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ und $E_n = l_{p_n}$ oder $E_n = c_0$. Weiter seien L_{jk}, S_{jk} und K_{jk} die Räume der linear-stetigen, streng singulären bzw. kompakten Operatoren $T\colon E_k \to E_j$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Dann gilt

$$L_{jk} \supseteq S_{jk} \supseteq K_{jk}.$$

Nach Pitt [5] (vgl. Lindenstrauss und Tzafriri [3], S. 31, Theorem I.2.7) ist

(9) $$L_{jk} = K_{jk} \quad (j < k),$$

([3]) $O_{jk}\colon E_k \to E_j$ bezeichnet den Nulloperator.

und nach Goldberg und Thorp [2] ist

(10) $$L_{jk} = S_{jk} \quad (j \neq k).$$

Außerdem ist K_{jj} nach Gohberg, Markus und Fel'dman [1] das einzige abgeschlossene, eigentliche Ideal in L_{jj} (vgl. auch Pietsch [4], S. 59).

Bildet man den Banachraum

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n,$$

so kann in Nr. 2 $A = L(E)$ genommen werden. Damit ergibt sich zunächst $A_{jk} = L_{jk}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$. Ferner sind die Voraussetzungen des Satzes 2 (insbesondere von Teil (c)) mit $J_j = K_{jj}$ erfüllt: (4) erhält man aus (9) wegen

$$A_{jk}A_{kj} = K_{jk}L_{kj} \subseteq K_{jj} = J_j \quad (j < k),$$
$$A_{jk}A_{kj} = L_{jk}K_{kj} \subseteq K_{jj} = J_j \quad (j > k),$$

oder aus (10) wegen

$$A_{jk}A_{kj} = S_{jk}S_{kj} \subseteq S_{jj} = K_{jj} = J_j \quad (j \neq k).$$

Somit folgt Satz 1 aus Satz 2.

4. Bemerkungen. Mit E wie in Nr. 3 und $J_j = K_{jj} = S_{jj}$ in Satz 2 wird (wegen (10))

$$J_\sigma = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} = S(E).$$

Daher beschreibt Satz 2 alle Ideale der Algebra $L(E)$, welche das Ideal $S(E)$ der streng singulären Operatoren enthalten. (Diese Ideale sind übrigens abgeschlossen.)

Außerdem gibt es für $n \geqslant 3$ abgeschlossene Ideale J in $L(E)$, die weder $S(E)$ enthalten noch in $S(E)$ enthalten sind, so z.B.

(11) $$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & K_{12} & K_{13} \\ S_{21} & K_{22} & K_{23} \\ S_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

im Falle $n = 3$: $J \subseteq S(E)$ ist wegen $J_{11} = L_{11}$ unmöglich, und $S(E) \subseteq J$ steht im Widerspruch zu $J_{32} = K_{32}$. (Man beachte, daß die natürliche Einbettung $l_{p_2} \to l_{p_2}$ (bzw. $l_{p_2} \to c_0$) nicht kompakt ist, also ist nicht $S_{32} = L_{32} \subseteq K_{32}$.) Die Formeln

$$JL(E) \subseteq J, \quad L(E)J \subseteq J$$

ergeben sich aus (11) mit (9), (10), also ist J ein Ideal.

Literatur

[1] I. C. Gohberg, A. S. Markus und I. A. Fel'dman, *Normally solvable operators and ideals associated with them*, Amer. Math. Soc. Translat., II. Ser. 61 (1967), S. 63–84. Russ. Original in Bul. Akad. Štiince RSS Moldoven, 1960, Nr. 10 (76), S. 51–70.
[2] S. Goldberg und E. O. Thorp, *On some open questions concerning strictly singular operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), S. 334–336.
[3] J. Lindenstrauss und L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, Berlin–Heidelberg–New York 1973.
[4] A. Pietsch, *Theorie der Operatorenideale*, Wissenschaftliche Beiträge der Friedrich-Schiller-Universität, Jena 1972.
[5] H. R. Pitt, *A note on bilinear forms*, J. London Math. Soc. 11 (1936), S. 174–180.
[6] H. Porta, *Factorable and strictly singular operators. I*, Studia Math. 37 (1971), S. 237–243.

Received July 12, 1974 (864)

STUDIA MATHEMATICA, T. LV. (1976)

Toeplitz operators for a certain class of function algebras

by

J. JANAS (Kraków)

Abstract. In this paper we describe a joint approximate spectrum of a p-tuple of Toeplitz operators for a certain class of function algebras (approximating in modulus). We also give a characterization of a C^*-algebra generated by Toeplitz operators modulo commutator ideal.

Let A be a function algebra on a compact Hausdorff space X. Suppose we are given a finite, regular Borel measure $\mu > 0$ on X. Denote by $\mathscr{L}^2(\mu)$ the Hilbert space of all complex-valued μ-square integrable functions. One can define the $H^2(\mu)$ space as the closure of A in $\mathscr{L}^2(\mu)$ and $H^\infty(\mu)$ as the set of all functions $\varphi \in L^\infty(\mu)$ such that $\varphi H^2(\mu) \subset H^2(\mu)$. For $\varphi \in L^\infty(\mu)$ we define the Toeplitz operator T_φ on $H^2(\mu)$ by $T_\varphi f = P(\varphi \cdot f)$, where $f \in H^2(\mu)$ and $P\colon \mathscr{L}^2(\mu) \to H^2(\mu)$ is an orthogonal projection. Denoting by L_φ the operator of multiplication by φ in $\mathscr{L}^2(\mu)$, we can write

$$T_\varphi f = PL_\varphi f.$$

Let $L(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space H. Denote by $\sigma_\Pi(T_1, \ldots, T_s)$ the joint approximate point spectrum for a system $T_1, \ldots, T_s$ of commuting operators in $L(H)$ (see [1] for the definition). In the case where $X = \Gamma$ is the unit circle, A the disc algebra and μ the Lebesgue measure on X, it is well known that

$$\sigma_\Pi(L_{\varphi_1}, \ldots, L_{\varphi_s}) = \sigma_\Pi(T_{\varphi_1}, \ldots, T_{\varphi_s}), \text{ where } \varphi_i \in H^\infty(\mu) \text{ for } i = 1, \ldots, s.$$

Let M_{L^∞} be the spectrum of $L^\infty(\mu)$. Since

$$\sigma_\Pi(L_{\varphi_1}, \ldots, L_{\varphi_s}) = \{(\hat{\varphi}_1(m), \ldots, \hat{\varphi}_s(m)),\ m \in M_{L^\infty}\},$$

where $\hat{\varphi}_i$ denotes the Gelfand transform of φ_i, we have

$$\sigma_\Pi(T_{\varphi_1}, \ldots, T_{\varphi_s}) = \{(\hat{\varphi}_1(m), \ldots, \hat{\varphi}_s(m)),\ m \in M_{L^\infty}\}.$$

The lemma which we shall now prove shows that the above equality is true in a more general setting.