[14] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces*, Israel J. Math. 17 (1974), pp. 219–230.

[15] J. Lindenstrauss, *Weakly compact sets — their topological properties and the Banach spaces they generate*, Symposium on Infinite Dim. Topology (edited by R.D. Anderson), Annals of Math. Studies 69.

[16] V. D. Milman, *The geometric theory of Banach spaces, I*, Uspehi Matem. Nauk 25 (1970), pp. 113–174, 26 (1971), pp. 74–149.

[17] J. J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Seminaire sur les equations aux dérivées partielles, Collége de France 1966–1967.

[18] D. Przeworska-Rolewicz and S. Rolewicz, *Equations in linear spaces*, Warszawa 1968.

[19] J. Reif, *Subspaces of Banach spaces with projectional basis*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), pp. 1117–1120.

[20] H. P. Rosenthal, *The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces*, Composito Mathematica 28 (1974), pp. 83–111.

[21] D. G. Tacon, *The conjugate of a smooth Banach space*, Bull. Austral. Math. Soc. 2 (1970), pp. 415–425.

[22] H. Toruńczyk, *Smooth partitions of unity of some non-separable Banach spaces*, Studia Math. 46 (1973), pp. 43–51.

[23] S. Troyanski, *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain nonseparable Banach spaces*, ibid. 37 (1971), pp. 173–180.

[24] — *On equivalent norms and minimal systems in nonseparable Banach spaces* ibid. 43 (1973), pp. 125–138.

Received January 16, 1974 (781)

STUDIA MATHEMATICA, T. LV. (1976)

Localisation des sommes de Riesz sur un groupe de Lie compact

par

JEAN-LOUIS CLERC (Princeton, N.J.)

Résumé. Grâce à une étude précise des noyaux des sommes de Riesz, on obtient des résultats de localisation pour les développements de Peter–Weyl sur un groupe de Lie compact.

Ce travail est la suite de l'article [3], dont il reprend les notations: G est un groupe de Lie réel, compact, connexe et simplement connexe (donc semi-simple), de dimension n, et de rang l; si f est une fonction sommable sur G, on pose

$$S_R^\delta f = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(1-\frac{\langle\lambda+\beta,\lambda+\beta\rangle}{R^2}\right)_+^\delta d_\lambda\chi_\lambda * f,$$

où $\delta\geqslant 0$ et $R>0$ (sommes de Riesz d'indice δ). L'opérateur S_R^δ s'interprète comme une convolution avec une fonction centrale s_R^δ, dont un développement a été obtenu dans [3], lorsque $\delta>(l-1)/2$

$$s_R^\delta(\exp H) = C\frac{R^n}{D(\exp H)}\sum_{\zeta\in t_e}\Big(\prod_{\alpha\in R^+}(\alpha, H+\zeta)\Big)\mathscr{J}_{n/2+\delta}(R\,|H+\zeta|)\ (^1),$$

où $\mathscr{J}_\nu(\varrho) = \varrho^{-\nu}J_\nu(\varrho)$ et J_ν est la fonction de Bessel d'indice ν. On se propose ici d'améliorer les estimations obtenues précédemment et d'obtenir des résultats de localisation.

LEMME. *Soit $\delta>(l-1)/2$, et soit $\varepsilon>0$. Il existe une constante $C>0$, telle que*

$$x\in G \quad \textit{et} \quad d(x,e)>\varepsilon \Rightarrow |s_R^\delta(x)|\leqslant CR^{\frac{n-1}{2}+\frac{n-l}{2}-\delta}.$$

Rappelons que Q est un domaine fondamental d'un tore maximal, centré à l'origine; et soit B_ε la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε. Soit $H_0\in\bar{Q}\cap\complement B_\varepsilon$. Soit J l'ensemble des racines positives qui prennent en

(1) La série converge absolument pour tout H, et le membre de droite de l'égalite défini a priori pour H régulier se prolonge par continuité.

H_0 une valeur multiple de $2i\pi$; soit $\tilde{B}_0$ une boule fermée de centre H_0 ne contenant pas de points singuliers d'ordre supérieur à celui de H_0. On peut recouvrir $\bar{Q}\cap \complement B_\varepsilon$ par un nombre fini de telles boules; il suffit par conséquent d'obtenir la majoration cherchée sur chaque $\tilde{B}_0$. Mais d'après le choix de $\tilde{B}_0$, $K\in\tilde{B}_0$

(i) $|K|>C$,

(ii) $|K+\zeta|\geqslant C|\zeta|$, $\zeta\in t_e$, $\zeta\neq 0$,

(iii) $|\sin\frac{1}{2}i\alpha(K)|\geqslant C|\alpha(K)-\alpha(H_0)|$, $\alpha\in J$,

(iv) $|\sin\frac{1}{2}i\alpha(K)|\geqslant C>0$, $\alpha\notin J$.

Soit

$$\psi(H)=R^n\sum_{\zeta\in t_e}\Big(\prod_{\alpha\in R^+}(\alpha,H+\zeta)\Big)\mathscr{J}_{n/2+\delta}(R|H+\zeta|)$$
$$=C\Big(\prod_{\alpha\in R^+}\sin\frac{i(\alpha,H)}{2}\Big)s_R^\delta(\exp H).$$

ψ s'annule sur les hyperplans $\{\alpha(H)=\alpha(H_0)\}$ $(\alpha\in J)$. Soit π_α le projecteur orthogonal sur un tel hyperplan; alors

$$\psi(H)=\psi(H)-\psi(\pi_\alpha H)=\big(\alpha(H)-\alpha(H_0)\big)\int_0^1\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}\psi\Big)(1-t)\big(\pi_\alpha(H)+tH\big)\,dt$$
$$=\big(\alpha(H)-\alpha(H_0)\big)\psi_1(H),$$

où ψ_1 s'annule sur les autres hyperplans, et $|D^\gamma\psi_1(H)|\leqslant\sup\Big|D^\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\psi(K)\Big|$, où le sup est pris sur l'ensemble des points du segment $\{(1-t)\pi_\alpha H+ +tH\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$. Par récurrence, on voit que l'on peut écrire ψ sous la forme

$$\psi(H)=\prod_{\alpha\in J}\big(\alpha(H)-\alpha(H_0)\big)\Phi(H),$$

avec

$$|\Phi(H)|\leqslant\sup_{\gamma,K}|D^\gamma\Phi(K)|,$$

où γ est un multiindice de longueur égale à $\operatorname{card}J$ ($=$ ordre de singularité de H_0, cf. [4], p. 261), et K varie dans l'enveloppe convexe fermée des projections de H sur les hyperplans. Mais cette enveloppe convexe est contenue dans $\tilde{B}_0$, puisque celle-ci est convexe et invariante par les symétries par rapport aux hyperplans. Il reste à estimer $D^\gamma\psi$ sur $\tilde{B}_0$, en se servant des propriétés (i) et (ii). Utilisant le formule de Leibniz, il faut majorer des termes comme

$$D^\mu\prod_{\alpha\in R^+}(\alpha,K+\zeta)\cdot D^\nu\mathscr{J}_{n/2+\delta}(R|H+\zeta|),\qquad\text{où}\qquad|\mu|+|\nu|=m_0=\operatorname{card}J.$$

Mais:

$$\Big|D^\mu\prod_{\alpha\in R^+}(\alpha,K+\zeta)\Big|\leqslant C|K+\zeta|^{m-|\mu|},$$

et

$$|D^\nu\mathscr{J}_{n/2+\delta}(R+|K+\zeta|)\leqslant CR^{|\nu|}(R|K+\zeta|)^{-\frac{n}{2}-\delta-\frac{1}{2}},$$

grâce aux propriétés des fonctions de Bessel et à l'estimation à l'infini classique. D'où

$$|D^\gamma\psi(K)|\leqslant\sum_{\substack{\mu,\nu\\|\mu|+|\nu|=m_0}}CR^nR^{|\nu|}R^{-\frac{n}{2}-\delta-\frac{1}{2}}\Big(1+\sum_{\substack{\zeta\neq 0\\ \zeta\in t_e}}|\zeta|^{m-|\mu|}|\zeta|^{-\frac{n}{2}-\delta-\frac{1}{2}}\Big)$$
$$\leqslant CR^{\frac{n-1}{2}+m_0-\delta}.$$

On termine alors l'estimation, en utilisant (iii) et (iv)

$$|D(\exp H)|=\Big|C\prod_{\alpha\in R^+}\sin\frac{i\alpha(H)}{2}\Big|\leqslant C\Big|\prod_{\alpha\in J}\big(\alpha(H)-\alpha(H_0)\big)\Big|.$$

Par suite, $|s_R^\delta(\exp H)|\leqslant CR^{\frac{n-1}{2}+m_0-\delta}$, et comme $m_0\leqslant m=\dfrac{n-l}{2}$, le résultat annoncé s'en déduit.

Théorème 1. *Soit* $\delta\geqslant\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n-l}{2}$; *alors, si f est une fonction de $L^1(G)$, telle que f soit nulle presque partout au voisinage d'un point x de G,*

$$S_R^\delta f(x)\to 0\qquad(R\to+\infty).$$

Autrement dit, si δ est supérieur à cet indice, le comportement de f en un point de G ne dépend que des valeurs de f au voisinage de x. En effet, si la condition $\delta\geqslant\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n-l}{2}$ est satisfaite, il résulte du lemme que s_R^δ est bornée (uniformément en R) sur le complémentaire d'un voisinage quelconque de l'origine. Par suite, il existe une constante C, telle que pour toute f nulle presque partout dans la boule B_ε de centre x et de rayon ε, on ait

$$|S_R^\delta f(x)|=\Big|\int_{G\setminus B_\varepsilon}s_R^\delta(z)f(xz^{-1})\,dz\Big|\leqslant C\int_{G\setminus B_\varepsilon}|f(xz^{-1})|\,dz\leqslant C\|f\|_1.$$

Etant donné une telle $f\in L^1(G)$, on peut par ailleurs trouver une fonction g de classe C^∞, encore nulle dans un voisinage de x, et telle que $\|f-g\|_1$ soit arbitrairement petit; mais $S_R^\delta g(x)\to g(0)=0$, car il est bien connu que la série de Fourier d'une fonction C^∞ converge absolument. D'où le résultat, en écrivant que

$$|S_R^\delta f(x)| \leqslant |S_R^\delta g(x)| + C\|f-g\|_1.$$

Remarques.

1. Dans le cas où $G = SU(2)$, on sait (voir [1]) que l'indice $\frac{n-1}{2} + \frac{n-l}{2} = 2$ est critique pour la localisation dans $L^1(G)$.

2. Si G n'est pas simplement connexe, et si le centre de G est réduit au neutre, on peut améliorer le théorème 1: les points du centre sont en effet les points singuliers d'ordre maximal (voir [4], p. 268).

Si maintenant f est dans un espace $L^p(G)$ avec $p > 1$, on peut espérer améliorer ce résultat. C'est le sens du théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Soit $\delta \geqslant (n-1)/2$ et $p > 2n/(n+1)$. Alors, si f est une fonction de $L^p(G)$, telle que f soit nulle presque partout au voisinage d'un point x de G,*

$$S_R^\delta f(x) \to 0, \quad R \to +\infty.$$

Utilisant un raisonnement analogue au précédent, on voit qu'il suffit de montrer que, sous les hypothèses du théorème, et uniformément en R,

$$\int_{d(g,e)>\varepsilon} |S_R^\delta(g)|^{p'} dg \leqslant C < +\infty$$

où p' est l'exposant conjugué de p.

Mais d'après les majorations obtenues en [3], on voit que

$$d(g, e) > \varepsilon, \qquad |s_R^\delta(g)| \leqslant Cte + |D(g)|^{-1}$$

de sorte que l'on doit montrer seulement que

$$\int_{d(g,e)>\varepsilon} |D(g)|^{-p'} dg < +\infty,$$

soit encore

$$\int_{H\in Q, |H|>\varepsilon} |D(\exp H)|^{-p'+2} dH < +\infty.$$

Mais cette dernière intégrale est de même nature que

$$\int_{|K|<1} \Big|\prod_{a\in R^+} (a, K)\Big|^{-p'+2} dK.$$

Posant $r = -p'+2$, et supposant r negatif (sinon l'estimation est évidente), on voit que r est strictement plus grand que $-l/m$, pendant que $\prod_{a\in R} (a, K)$ est un polynôme homogène de degré m. La suite du raisonnement

consiste à montrer que les positions relatives des hyperplans $\{a(K) = 0\}$ ne sont pas trop singulières.

Grâce à l'antisymétrie de $\prod_{a\in R^+} a$ par rapport au groupe de Weyl, on peut se contenter d'intégrer sur la chambre de Weyl dominante. Soient a_i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ les racines simples. Alors $a = \sum m_i a_i$, avec $m_i \geqslant 0$, et par suite

$$\prod_{a\in R^+} (a, K) = \sum_\gamma a_\gamma K^\gamma$$

où $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l)$ est un multi-indice de degré

$$|\gamma| = \gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_l = m, \qquad K^\gamma = K_1^{\gamma_1}\ldots K_l^{\gamma_l}$$

avec $K_i = a_i(K)$ et $a_\gamma \geqslant 0$.

Soit maintenant s une permutation quelconque de $(1, 2, \ldots, l)$. Il suffit de montrer que

$$\int_{0<K_{s(1)}\leqslant K_{s(2)}\leqslant\cdots\leqslant K_{s(l)}\leqslant 1} \Big(\sum a_\gamma K^\gamma\Big)^r dK < +\infty.$$

Mais un examen attentif cas par cas (voir [2]) montre qu'il figure toujours un monôme $K_{s(1)}^{\gamma_1} \ldots K_{s(l)}^{\gamma_l}$, avec $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_l$ et $a_\gamma > 0$. On minore alors par ce seul monôme et on est ramené à l'estimation de l'intégrale

$$I = \int_{0<K_1\leqslant K_2\leqslant\cdots\leqslant K_l\leqslant 1} (K_1^{\gamma_1}\ldots K_l^{\gamma_l})^r dK_1\ldots dK_l$$

Par hypothèse $r\Big(\sum_{i=1}^{l} \gamma_i\Big) = rm > -l$. Comme les (γ_i) sont strictement décroissants, on en déduit que $r\Big(\sum_{i=1}^{j} \gamma_i\Big) > -j$. Par suite,

$$I = \int_{0<K_2\leqslant\ldots\leqslant K_l\leqslant 1} K_2^{r\gamma_2}\ldots K_l^{r\gamma_l}\Big(\int_0^{K_2} K_1^{r\gamma_1} dK_1\Big) dK_2\ldots dK_l$$
$$= C \int_{0<K_2\leqslant K_3\leqslant\ldots\leqslant K_l\leqslant 1} K_2^{r(\gamma_1+\gamma_2)+1} K_3^{r\gamma_3}\ldots K_l^{r\gamma_l} dK_2\ldots dK_l.$$

Par récurrence, on voit finalement que

$$I = Cte \int_0^1 K_l^{r\gamma_1+\ldots+r\gamma_l+(l-1)} dK_l < +\infty.$$

Remarque. La méthode utilisée permet aussi, par l'intermédiaire de la formule de Weyl pour les caractères, d'évaluer leur norme L^p. En particulier, si $p > n/m$, alors $\|\chi_\lambda\|_p$ est uniformément bornée pour λ dans Λ. Ceci constitue une généralisation du théorème 1 de [5].

Bibliographie

[1] A. Bonami et J. L. Clerc, *Sommes de Cesàro et multiplicateurs des développements en harmoniques sphériques*, Trans. Amer. Math. Soc. 183 (1973), p. 223–263.

[2] R.S. Cahn, *Lattice points and Lie groups I*, ibidem 183 (1973), p. 119–129.

[3] J. L. Clerc, *Sommes de Riesz et multiplicateurs sur un groupe de Lie compact*, Ann. Inst. Fourier 24 (1974), p. 149–172.

[4] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, New York 1962.

[5] D. Rider, *Norms of characters and central A_p sets for $U(n)$*, Conference on harmonic analysis, Lecture Notes in Mathematics n° 266, Springer Verlag, 1971.

Received May 14, 1974 (829)

STUDIA MATHEMATICA, T. LV. (1976)

Some ideals of operators on Hilbert space

by

G. BENNETT (Bloomington, Ind.)

Abstract. For q an even integer and $q < p < \infty$, it is shown that $\Pi_{p,q}$, the class of (p, q)-absolutely summing operators on Hilbert space, coincides with the ideal generated by the Lorentz sequence space $l_{2p/q,p}$. This differs from all previously known results (wherein $\Pi_{p,q}$ turns out to be a Schatten r-class for some $r = r(p, q)$) and settles negatively a conjecture of Kwapień and a problem of Pietsch.

1. Introduction. Following Mitiagin and Pełczyński [13], we say that a bounded linear operator T between Banach spaces X and Y is (p, q)-*absolutely summing*, $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, provided that the following condition holds.

(1) There exists a constant M (independent of n) such that, for all finite subsets $\{x_1, \ldots, x_n\}$ of X, we have

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|_Y^p\Big)^{1/p} \leqslant M \sup_{\|f\|_{X^*} \leqslant 1} \Big(\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, f\rangle|^q\Big)^{1/q}.$$

Condition (1) is clearly equivalent to

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|_Y^p < \infty$ whenever $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ is a sequence of elements of X with the property that $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x_j, f\rangle|^q < \infty$ for each $f \in X^*$.

Such operators have received a good deal of attention in recent years, but their totality, $\Pi_{p,q}(X, Y)$, has not been characterized even when X and Y are Hilbert spaces. In this case the known results are described below. For the statement of these results, we denote by $\mathfrak{S}_r$ the so-called *Schatten r-class* [19]. Thus $\mathfrak{S}_r$ is the set of all bounded linear operators on l_2 which admit a factorization, UVW, where W is a unitary operator, U is an isometry on the range of V (i.e. $\|UVx\| = \|Vx\|$ for each $x \in l_2$), and V is a diagonal operator from l_r (i.e. $Vx = (\lambda_k x_k)_{k=1}^{\infty}$ for some fixed $\lambda \in l_r$).

(A) *If* $p = q < \infty$, *then* $\Pi_{p,q} = \mathfrak{S}_2$.

(B) *If* $p = \infty$ *or* $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} \geqslant \dfrac{1}{2}$, *then every bounded linear operator on* l_2 *belongs to* $\Pi_{p,q}$.