[3] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math. 104 (1960), pp. 93–140.
[4] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 2nd. ed., London 1962.
[5] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2nd. ed., vols. 1 and 2, Cambridge 1959.

STATE UNIVERSITY OF NEW YORK AT BUFFALO

Received June 25, 1974 (851)

STUDIA MATHEMATICA, T. LV. (1976)

L^p-Struktur in Banachräumen

von

EHRHARD BEHRENDS (Berlin)

Abstract. Let V be a Banach space, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Two closed subspaces $X, X^\perp$ are called L^p-summands, if (algebraically) $V = X \oplus X^\perp$ and for all $x \in X$, $x^\perp \in X^\perp$

$$\|x+x^\perp\|^p = \|x\|^p + \|x^\perp\|^p$$

(for $p = \infty$: $\|x+x^\perp\| = \max\{\|x\|, \|x^\perp\|\}$). L^p-projections (with respect to these decompositions), are projections onto L^p-summands.

It is shown that V has nontrivial L^p-summands for at most one p (the only exceptions: $(\boldsymbol{R}^2, \|\ \|_1)$ and $(\boldsymbol{R}^2, \|\ \|_\infty)$). For $p \neq 2$ L^p-projections commute.

1. Einleitung. Sei V ein $\boldsymbol{K}$-Banachraum, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Zwei abgeschlossene Unterräume $X, X^\perp$ von V heißen zueinander orthogonale L^p-*Summanden* (Schreibweise: $V = X \oplus_p X^\perp$), wenn algebraisch $V = X \oplus X^\perp$ gilt und für $x \in X$, $x^\perp \in X^\perp$ stets

$$\|x+x^\perp\|^p = \|x\|^p + \|x^\perp\|^p$$

(bzw. für $p = \infty$: $\|x+x^\perp\| = \max\{\|x\|, \|x^\perp\|\}$) ist. Projektionen e auf L^p-Summanden, die offensichtlich durch

$$\|v\|^p = \|ev\|^p + \|v-ev\|$$

(für $p = \infty$: $\|v\| = \max\{\|ev\|, \|v-ev\|\}$) für alle $v \in V$ charakterisiert sind, heißen L^p-*Projektionen*.

L^p-Summanden und L^p-Projektionen für $p = 1, \infty$ wurden — ausgehend von Arbeiten von Cunningham [4], [5] — in letzter Zeit besonders von [1], [2], [6], [8] untersucht. Die Arbeiten [9], [10], die den allgemeinen Fall $p \in [1, \infty]$ behandeln, setzen die Kommutativität von L^p-Projektionen voraus (etwa implizit dadurch, daß nur Räume betrachtet werden, in denen die Norm der Clarksonschen Ungleichung genügt) oder beschränken sich auf das Studium maximaler kommutierender Familien von L^p-Projektionen.

Untersuchungen der Menge sämtlicher L^p-Summanden im Falle klassischer Banachräume V ergaben ([7], [11a, e, f]), daß dort für $p \neq 2$ L^p-Projektionen kommutieren und daß für $\dim V > 2$ überhaupt nur ein Typ von nichttrivialen L^p-Projektionen existieren kann. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß dieses Ergebnis in beliebigen Banachräumen richtig ist, genauer:

THEOREM. *Sei V ein $\boldsymbol{K}$-Banachraum ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ oder $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$), $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Dann gilt:*

(i) *Für $p \neq 2$ kommutieren je zwei L^p-Projektionen.*

(ii) *Im Falle $p \neq q$, $(1, \infty) \neq (p, q) \neq (\infty, 1)$ kann es auf V nicht gleichzeitig nichttriviale L^p-Summanden und nichttriviale L^q-Summanden geben. Ist zusätzlich* $\dim V > 2$ *(als $\boldsymbol{R}$-Vektorraum), so kann es auch nicht gleichzeitig nichttriviale L^1-Summanden und nichttriviale L^∞-Summanden geben. (Womit insbesondere gezeigt ist, daß — wenn auch nur in einem trivialen Sinn — L^p-Projektionen und L^q-Projektionen für $(p, q) \neq (2, 2)$, $\dim V > 2$ stets vertauschbar sind.)*

Das Theorem wird nach einer Reduktion auf einen Spezialfall in Abschnitt 2 in den Abschnitten 3 und 4 bewiesen. Aus beweistechnischen Gründen mußten die Fälle $1 < p < \infty$ und $p \in \{1, \infty\}$ gesondert behandelt werden. Die zum Beweis benötigten funktionalanalytischen Hilfsmittel sind elementar.

Unter der Hypothese, daß L^p-Projektionen für $p \neq 2$ kommutieren, sind schon zahlreiche Ergebnisse erzielt worden. In [7], [11b, c, d] wird gezeigt, daß sich wichtige Resultate über L^1-und L^∞-Projektionen auf den allgemeinen Fall $p \neq 2$ übertragen lassen. So ist z.B. für $p \neq 2$ die von den L^p-Projektionen erzeugte Banachalgebra darstellbar als Raum der stetigen Funktionen auf einem kompakten hyperstoneschen Raum, und die Menge aller L^p-Summanden bildet eine vollständige Boolesche Algebra.

2. Vorbereitungen. Im folgenden sei V ein $\boldsymbol{K}$-Banachraum, wo $\boldsymbol{K}$ für den Skalarenkörper der reellen oder komplexen Zahlen steht. Ein abgeschlossener Unterraum X von V heißt L^p-Summand, wenn ein abgeschlossener Unterraum $X^\perp$ existiert, so daß X und $X^\perp$ zueinander orthogonale L^p-Summanden sind (siehe Einleitung; $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Mit X ist offensichtlich auch $X^\perp$ ein L^p-Summand.

2.1. LEMMA. *$X^\perp$ ist zu X eindeutig bestimmt, d.h. aus $X \oplus_p X^\perp = V = X \oplus_p Y$ folgt $Y = X^\perp$.*

Beweis. Sei $y \in Y$. Wir zeigen $y \in X^\perp$, woraus dann aus Symmetriegründen $Y = X^\perp$ folgt. Wegen $V = X \oplus_p X^\perp$ ist $y = x + x^\perp$ mit $x \in X$, $x^\perp \in X^\perp$. Im Falle $p < \infty$ ist

$$\|y\|^p = \|x\|^p + \|x^\perp\|^p$$

und gleichzeitig (wegen $x^\perp = -x + y$, $V = X \oplus_p Y$)

$$\|x^\perp\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p, \quad \text{d.h. } x = 0, \text{ d.h. } y = x^\perp \in X^\perp.$$

Im Falle $p = \infty$ betrachte man $y + ax = (a+1)x + x^\perp$ für beliebiges $a > 0$. Die Voraussetzung liefert

$$\max\{a\|x\|, \|y\|\} = \|y + ax\| = \|(a+1)x + x^\perp\| = \max\{(a+1)\|x\|, \|x^\perp\|\},$$

was für $x \neq 0$ bei genügend großem a den Widerspruch $a = a+1$ zur Folge hätte. Also ist auch in diesem Fall $x = 0$, d.h. $y = x^\perp \in X^\perp$.

Wegen 2.1 ist es sinnvoll, von dem zu X gehörigen orthogonalen L^p-Summanden und der zu X gehörigen Projektion e zu sprechen. Für jedes $v \in V$ gilt

$$\|v\|^p = \|ev\|^p + \|v - ev\|^p$$

(bzw. $\|v\| = \max\{\|ev\|, \|v - ev\|\}$ für $p = \infty$). Umgekehrt heißen Projektionen e mit dieser Eigenschaft L^p-Projektionen (für $p = 1$ bzw. $p = \infty$ heißen derartige Abbildungen bei Alfsen–Effros [2] L-Projektionen bzw. M-Projektionen). Sie sind offensichtlich stetig mit $\|e\| \leqslant 1$, und es gilt $V = \operatorname{Bild} e \oplus_p \operatorname{Kern} e$. Folglich entsprechen sich Aussagen über L^p-Summanden und L^p-Projektionen eineindeutig.

2.2. LEMMA. *Sei $1 \leqslant p \leqslant \infty$ und p', $1 \leqslant p' \leqslant \infty$, durch $1/p + 1/p' = 1$ definiert. Ist dann $e: V \to V$ eine L^p-Projektion, so ist $e': V' \to V'$ eine $L^{p'}$-Projektion.*

(Äquivalent dazu: *der Annihilator in V' eines L^p-Summanden in V ist ein $L^{p'}$-Summand.*)

Beweis. Da e' idempotent ist, ist nur die Aussage über die Normzerlegung nachzuweisen, d.h. (wegen $\|\varphi \circ e\| = \|\varphi|_{\operatorname{Bild} e}\|$, $\|\varphi \circ (\operatorname{Id} - e)\| = \|\varphi|_{\operatorname{Kern} e}\|$)

$$\|\varphi\|^{p'} = \|\varphi|_{\operatorname{Bild} e}\|^{p'} + \|\varphi|_{\operatorname{Kern} e}\|^{p'}$$

(bzw. für $p = 1$: $\|\varphi\| = \max\{\|\varphi|_{\operatorname{Bild} e}\|, \|\varphi|_{\operatorname{Kern} e}\|\}$) für jedes $\varphi \in V'$. Das ist für $p = 1$ und $p = \infty$ leicht direkt nachzuweisen (s.a. Alfsen–Effros [2], Prop. 2.5) und folgt für $1 < p < \infty$ aus der Gleichung

$$a^{p'} + b^{p'} = \max_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \left(a\lambda + b\sqrt[p]{1 - \lambda^p}\right)^{p'} \qquad (a, b \geqslant 0).$$

2.2. gestattet in denjenigen Fällen, in denen Aussagen über die Transponierten zu Aussagen über die Ausgangsabbildungen führen (z.B. Kommutativität, Trivialität) über die auftretenden Zahlen p einschränkende Voraussetzungen zu machen.

2.3. LEMMA. *Sei V ein $\boldsymbol{K}$-Banachraum, $e: V \to V$ eine L^p-Projektion $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Sind dann $J_1 \subset \operatorname{Kern} e$, $J_2 \subset \operatorname{Bild} e$ abgeschlossene Unterräume, so gilt mit $J := J_1 + J_2$*

(i) *J ist abgeschlossener Unterraum von V,*

(ii) *$\hat{e}: V/J \to V/J$ ist durch $\hat{e}([v]) := [ev]$ wohldefiniert,*

(iii) *bzgl. der Quotientennorm ist $\hat{e}$ eine L^p-Projektion.*

Beweis. (i): J ist isometrisch isomorph zum Banachraum $J_1 \times J_2$, versehen mit der Norm

$$\|(j_1, j_2)\| := (\|j_1\|^p + \|j_2\|^p)^{1/p}$$

(bzw. für $p = \infty$: $\|(j_1, j_2)\| := \max\{\|j_1\|, \|j_2\|\}$) und damit als vollständiger Teilraum von V abgeschlossen.

(ii): Offensichtlich ist $e(J) \subset J$.

(iii): Da e Projektion ist, gilt $\hat{e}^2 = \hat{e}$. Folglich sind nur noch die Normeigenschaften für $\hat{e}$ nachzuweisen:

$p < \infty$:

$$\begin{aligned}
\|[v]\|^p &= \inf\{\|v+j_1+j_2\|^p \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\}\\
&= \inf\{\|ev+j_2\|^p + \|v-ev+j_1\|^p \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\}\\
&= \inf\{\|ev+j_2\|^p \mid j_2 \in J_2\} + \inf\{\|v-ev+j_1\|^p \mid j_1 \in J_1\}\\
&= \inf\{\|ev+j_2\|^p + \|j_1\|^p \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\} +\\
&\qquad + \inf\{\|v-ev+j_1\|^p + \|j_2\|^p \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\}\\
&= \inf\{\|ev+j_1+j_2\|^p \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\} +\\
&\qquad + \inf\{\|v-ev+j_1+j_2\|^p \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\}\\
&= \|[ev]\|^p + \|[v-ev]\|^p\\
&= \|\hat{e}([v])\|^p + \|(\mathrm{Id}-\hat{e})([v])\|^p
\end{aligned}$$

$p = \infty$:

$$\begin{aligned}
\|[v]\| &= \inf\{\|v+j_1+j_2\| \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\}\\
&= \inf\{\max\{\|ev+j_2\|, \|v-ev+j_1\|\} \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\}\\
&= \max\{\{\inf\|ev+j_2\| \mid j_2 \in J_2\}, \inf\{\|v-ev+j_1\| \mid j_1 \in J_1\}\}\\
&= \max\Big\{\inf\{\max\{\|ev+j_2\|, \|j_1\|\} \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\},\\
&\qquad \inf\{\max\{\|v-ev+j_1\|, \|j_2\|\} \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\}\Big\}\\
&= \max\Big\{\inf\{\|ev+j_1+j_2\| \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\},\\
&\qquad \inf\{\|v-ev+j_1+j_2\| \mid j_1 \in J_1, j_2 \in J_2\}\Big\}\\
&= \max\{\|\hat{e}([v])\|, \|(\mathrm{Id}-\hat{e})([v])\|\}.
\end{aligned}$$

2.4. Lemma. *Ist V ein $\mathbf{K}$-Banachraum, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $(p, q) \neq (\infty, \infty)$, $e\colon V \to V$ L^p-Projektion, $f\colon V \to V$ L^q-Projektion, so ist*

$$(\mathrm{Bild}\, e - \mathrm{Bild}\, f) \cap \mathrm{Kern}\, e \cap \mathrm{Kern}\, f = 0$$

(*d.h. gilt $ev = fw + j$ für gewisse $v, w \in V$, $j \in \mathrm{Kern}\, e \cap \mathrm{Kern}\, f$, so ist $j = 0$*).

Beweis. Sei etwa $p \leqslant \infty$, $q < \infty$. Nutzt man für die Gleichungen $ev = fw + j$, $ev - j = fw$ die entsprechenden Normzerlegungen aus, so folgt

$$\|ev\|^q = \|fw\|^q + \|j\|^q \quad \text{sowie} \quad \|fw\|^p = \|ev\|^p + \|j\|^p$$

(bzw. $\|fw\| = \max\{\|ev\|, \|j\|\}$), also $\|ev\| = \|fw\|$ und folglich $j = 0$.

2.5. Satz. *Sei V ein $\mathbf{K}$-Banachraum, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $(p, q) \neq (\infty, \infty)$, $e\colon V \to V$ eine L^p-Projektion, $f\colon V \to V$ eine L^q-Projektion. Mit*

$$J := \mathrm{Bild}\, e \cap \mathrm{Bild}\, f + \mathrm{Bild}\, e \cap \mathrm{Kern}\, f + \mathrm{Kern}\, e \cap \mathrm{Bild}\, f + \mathrm{Kern}\, e \cap \mathrm{Kern}\, f$$

gilt dann

(i) *J ist ein abgeschlossener Unterraum von V;*

(ii) *Die wie in 2.3 definierten Abbildungen $\hat{e}, \hat{f}\colon V/J \to V/J$ sind eine L^p-Projektion bzw. eine L^q-Projektion;*

(iii) $\mathrm{Bild}\, \hat{e} \cap \mathrm{Bild}\, \hat{f} = \mathrm{Bild}\, \hat{e} \cap \mathrm{Kern}\, \hat{f} = \mathrm{Kern}\, \hat{e} \cap \mathrm{Bild}\, \hat{f} = \mathrm{Kern}\, \hat{e} \cap \mathrm{Kern}\, \hat{f} = 0$;

(iv) *Äquivalent sind* 1) $ef = fe$,
2) $\hat{e}\hat{f} = \hat{f}\hat{e}$,
3) $J = V$, *d.h.* $V/J = 0$.

Beweis. (i): Anwendung von 2.3 (i) für f sichert die Abgeschlossenheit von

$$\mathrm{Bild}\, e \cap \mathrm{Bild}\, f + \mathrm{Bild}\, e \cap \mathrm{Kern}\, f \quad (\subset \mathrm{Bild}\, e)$$

sowie

$$\mathrm{Kern}\, e \cap \mathrm{Bild}\, f + \mathrm{Kern}\, e \cap \mathrm{Kern}\, f \quad (\subset \mathrm{Kern}\, e).$$

Daraus folgt die Abgeschlossenheit von J durch nochmalige Anwendung von 2.3 (i), diesmal für e.

(ii): Wird direkt auf 2.3 (ii)(iii) zurückgeführt, indem man die Summanden von J geeignet zusammenfaßt.

(iii): Es ist nur $\mathrm{Bild}\, \hat{e} \cap \mathrm{Bild}\, \hat{f} = 0$ zu zeigen, da sich die anderen Gleichungen aus Symmetriegründen analog ergeben (evtl. Übergang zu $\mathrm{Id} - e$, $\mathrm{Id} - f$). Sei also $[v] \in \mathrm{Bild}\, \hat{e} \cap \mathrm{Bild}\, \hat{f}$, d.h. $[v] = [ev] = [fv]$, d.h. $v = ev + j = fv + j^0$ mit gewissen $j, j^0 \in J$. Schreibt man $j = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$, $j^0 = j_1^0 + j_2^0 + j_3^0 + j_4^0$, wobei die j_i, j_i^0 aus den Summanden von J in obiger Reihenfolge sind, so ist zunächst (wegen $j \in \mathrm{Kern}\, e$, $j^0 \in \mathrm{Kern}\, f$) $j_1 = j_2 = j_1^0 = j_3^0 = 0$, so daß die obige Gleichung als $ev + j_3 + j_4 = fv + j_2^0 + j_4^0$ bzw. (wegen $ej_2^0 = j_2^0$, $fj_3 = j_3$)

$$e(v - j_2^0) = f(v - j_3) + (j_4^0 - j_4)$$

geschrieben werden kann. Beachtet man $j_4^0 - j_4 \in \mathrm{Kern}\, e \cap \mathrm{Kern}\, f$, so folgt aus 2.4 $j_4^0 - j_4 = 0$, also

$$j_1' := e(v - j_2^0) = f(v - j_3) \in \mathrm{Bild}\, e \cap \mathrm{Bild}\, f$$

und damit

$$v = ev + j_3 + j_4 = j_1' + j_2^0 + j_3 + j_4 \in J, \qquad \text{d.h.} \quad [v] = 0.$$

(iv): „$1 \Rightarrow 2$“, „$3 \Rightarrow 2$“ ist trivialerweise richtig.

„2⇒1": Nach Voraussetzung ist für jedes $v \in V$

$$efv = fev + j_1 + j_2 + j_3 + j_4,$$

wo die j_i Elemente der Summanden von J (obige Reihenfolge) sind. Es folgt

$$e(fv - j_2) = f(ev + j_1 + j_3) + j_4,$$
$$e\big((\mathrm{Id} - f)v + j_1\big) = (\mathrm{Id} - f)(ev - j_2 - j_4) - j_3,$$
$$(\mathrm{Id} - e)(fv + j_3 + j_4) = f\big((\mathrm{Id} - e)v - j_1\big) - j_2,$$
$$(\mathrm{Id} - e)\big((\mathrm{Id} - f)v + j_3 + j_4\big) = (\mathrm{Id} - f)\big((\mathrm{Id} - e)v + j_2\big) + j_1,$$

und daraus mit 2.4 (beachte: $\mathrm{Id} - e$ ist L^p-Projektion, $\mathrm{Id} - f$ ist L^q-Projektion) $j_1 = j_2 = j_3 = j_4 = 0$ bzw. insgesamt $ef = fe$.

„2⇒3": Nach Voraussetzung und (iii) ist

$$\mathrm{Bild}\,\hat{e}\hat{f} = \mathrm{Bild}\,\hat{f}\hat{e} \subset \mathrm{Bild}\,\hat{e} \cap \mathrm{Bild}\,\hat{f} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \hat{e}\hat{f} = 0$$

und analog

$$\hat{e}(\mathrm{Id} - \hat{f}) = (\mathrm{Id} - \hat{e})\hat{f} = (\mathrm{Id} - \hat{e})(\mathrm{Id} - \hat{f}) = 0.$$

Damit ist auf V/J

$$\mathrm{Id} = \big(\hat{e} + (\mathrm{Id} - \hat{e})\big)\big(\hat{f} + (\mathrm{Id} - \hat{f})\big) = 0, \quad \text{d.h.} \quad V/J = 0.$$

2.6. Definition. Sei V ein $\boldsymbol{K}$-Banachraum, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Ein (p, q)-*Stern* auf V ist dann ein Paar (e, f), wo e eine L^p-Projektion, f eine L^q-Projektion auf V ist und die Räume $\mathrm{Bild}\,e$, $\mathrm{Kern}\,e$, $\mathrm{Bild}\,f$, $\mathrm{Kern}\,f$ paarweise den Durchschnitt 0 haben. Äquivalent dazu ist ein (p, q)-Stern durch die Angabe zweier Zerlegungen $X \oplus_p X^\perp = V = Y \oplus_q Y^\perp$ von V mit $0 = X \cap Y = X \cap Y^\perp = X^\perp \cap Y = X^\perp \cap Y^\perp$ definiert. Ein (p, q)-Stern heißt *trivial*, wenn $V = 0$ ist.

Wegen 2.5 ist die Untersuchung von L^p-, L^q-Projektionen im Falle $(p, q) \neq (\infty, \infty)$ auf das Studium von (p, q)-Sternen reduziert. Das hat zur Folge, daß in den folgenden Abschnitten die Beweise nicht durch Fallunterscheidungen verkompliziert werden.

2.7. Satz. *Sind p, q, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ so vorgelegt, daß es keine nichttrivialen (p, q)-Sterne gibt, so gilt für jeden $\boldsymbol{K}$-Banachraum V und jedes Paar e, f (e L^p-Projektion auf V, f L^q-Projektion auf V) $ef = fe$. Für $p \neq q$ gilt darüberhinaus: Ist e eine L^p-Projektion, f eine L^q-Projektion auf einem $\boldsymbol{K}$-Banachraum V, so ist e oder f trivial (d.h. gleich 0 oder Id).*

Beweis. Da zwei L^∞-Projektionen stets kommutieren (Alfsen–Effros [1], [2], 110, 140) und der Satz folglich für $(p, q) = (\infty, \infty)$ richtig ist, darf im folgenden $(p, q) \neq (\infty, \infty)$ angenommen werden. Bei vorgelegten e, f konstruiere man zunächst $\hat{e}, \hat{f}: V/J \to V/J$ gemäß 2.5. Wegen 2.5 (iii) ist $(\hat{e}, \hat{f})$ ein (p, q)-Stern auf V/J, der nach Voraussetzung trivial ist. Also kommutieren e und f wegen 2.5 (iv). Sei nun $p \neq q$. Wir beginnen mit der Bemerkung, daß zwei von 0 verschiedene (o.B.d.A. normierte) Vektoren x, y nicht gleichzeitig bezüglich der Norm p- und q-Zerlegungseigenschaft haben können, denn andernfalls wäre

$$\|x+y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p = 2 = \|x\|^q + \|y\|^q = \|x+y\|^q, \quad \text{d.h.} \quad 2^{1/p} = 2^{1/q}$$

(bzw. im Falle $p = \infty$: $2 = \|x\|^q + \|y\|^q = \|x+y\|^q = (\max\{\|x\|, \|y\|\})^q = 1$). Es folgt, daß unter den Räumen $\mathrm{Bild}\,e \cap \mathrm{Bild}\,f$, $\mathrm{Bild}\,e \cap \mathrm{Kern}\,f$, $\mathrm{Kern}\,e \cap \mathrm{Bild}\,f$, $\mathrm{Kern}\,e \cap \mathrm{Kern}\,f$ höchstens zwei gleichzeitig von 0 verschieden sein können und daß die Fälle

$$\mathrm{Bild}\,e \cap \mathrm{Bild}\,f \neq 0 \neq \mathrm{Kern}\,e \cap \mathrm{Kern}\,f,$$
$$\mathrm{Kern}\,e \cap \mathrm{Bild}\,f \neq 0 \neq \mathrm{Bild}\,e \cap \mathrm{Kern}\,f$$

nicht möglich sind. Das bedeutet, daß die Summe dieser vier Räume, d.h. J in 2.5, schon aus zweien dieser Räume gebildet wird, und zwar $J = \mathrm{Bild}\,e \cap \mathrm{Bild}\,f + \mathrm{Bild}\,e \cap \mathrm{Kern}\,f$ oder $J = \mathrm{Bild}\,e \cap \mathrm{Bild}\,f + \mathrm{Kern}\,e \cap \mathrm{Bild}\,f$ oder $J = \mathrm{Bild}\,e \cap \mathrm{Kern}\,f + \mathrm{Kern}\,e \cap \mathrm{Kern}\,f$ oder $J = \mathrm{Kern}\,e \cap \mathrm{Bild}\,f + \mathrm{Kern}\,e \cap \mathrm{Kern}\,f$. Insbesondere ist $J \subset \mathrm{Bild}\,e$ oder $J \subset \mathrm{Bild}\,f$ oder $J \subset \mathrm{Kern}\,f$ oder $J \subset \mathrm{Kern}\,e$. Da nach Voraussetzung $V = J$ ist, folgt

$$V \in \{\mathrm{Bild}\,e, \mathrm{Bild}\,f, \mathrm{Kern}\,f, \mathrm{Kern}\,e\},$$

d. h. e oder f ist trivial. In den Abschnitten 3 und 4 wird gezeigt, daß die Voraussetzungen von 2.7 für $(p, q) \neq (2, 2)$ erfüllt sind (es ist sehr leicht, z.B. in einem Hilbertraum nichttriviale $(2, 2)$-Sterne anzugeben, so daß eine weitere Verschärfung nicht zu erwarten ist), daß also für $p \neq 2$ je zwei L^p-Projektionen kommutieren und ein Banachraum für höchstens ein p nichttriviale L^p-Projektionen haben kann. Eine Sonderstellung nimmt dabei als einzige Ausnahme der $\boldsymbol{R}^2$ mit der L^∞- oder L^1-Norm ein, der offensichtlich gleichzeitig nichttriviale L^∞-und L^1-Projektionen hat.

Da L^p-Projektionen eines $\boldsymbol{C}$-Banachraumes auch L^p-Projektionen für den zugrunde liegenden $\boldsymbol{R}$-Banachraum sind, reicht es, die Nichtexistenz von nichttrivialen (p, q)-Sternen für $\boldsymbol{R}$-Banachräume nachzuweisen.

3. (p, ∞)-Sterne, $1 \leqslant p < \infty$. In diesem und im folgenden Abschnitt erweist es sich als günstig, mit orthonormierten Elementen zu rechnen. Für $v \in V = X \oplus_p X^\perp$, $\|v\| = 1$, $v \notin X \cup X^\perp$ ist v eindeutig darstellbar als

$$v = x_0 + x_0^\perp \quad \text{mit} \quad x_0 \in X,\ x_0^\perp \in X^\perp,\ x_0 \neq 0 \neq x_0^\perp,$$

also auch im Falle $p < \infty$ als

$$v = \sqrt[p]{\lambda}\, x + \sqrt[p]{1-\lambda}\, x^\perp \quad \text{mit} \quad x \in X,\ x^\perp \in X^\perp, \|x\| = \|x^\perp\| = 1,\ \lambda \in]0, 1[$$

(setze $\lambda := \|x_0\|^p$, $x := x_0/\|x_0\|$, $x^\perp := x_0^\perp/\|x_0^\perp\|$) und analog im Falle $p = \infty$ als

$$v = \lambda x + \mu x^\perp \quad \text{mit} \quad x \in X,\ x^\perp \in X^\perp,\ \|x\| = \|x^\perp\| = 1,$$
$$\lambda, \mu > 0,\ \max\{\lambda, \mu\} = 1.$$

Die Voraussetzung $v \notin X \cup X^\perp$ ist bei einem (p, q)-Stern insbesondere für $v \in Y \cup Y^\perp$ erfüllt. Obige Darstellung ist mit $\lambda \in [0, 1]$ (bzw. $\lambda, \mu \geqslant 0$) trivialerweise auch für $v \in X \cup X^\perp$ möglich, wenn $X \neq 0 \neq X^\perp$ gilt (dann natürlich nicht eindeutig).

3.1. LEMMA. *Sei V ein $\boldsymbol{R}$-Banachraum und $X \oplus_p X^\perp = V = Y \oplus_\infty Y^\perp$ ein (p, ∞)-Stern mit $1 \leqslant p < \infty$. Dann hat jedes $x_0 \in X$ eine Darstellung $x_0 = y + y^\perp$ mit $y \in Y$, $y^\perp \in Y^\perp$, $\|x_0\| = \|y\| = \|y^\perp\|$, d.h. die L^∞-Projektionen f, $\mathrm{Id}\text{-}f$ von X nach Y und X nach $Y^\perp$ sind isometrisch. Aus Symmetriegründen gilt eine entsprechende Aussage auch für jedes $x_0^\perp \in X^\perp$.*

Beweis. Für $x_0 = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $x_0 \neq 0$ und o.B.d.A. $\|x_0\| = 1$. Stelle x_0 gemäß Vorbemerkung dar als $x_0 = \lambda y + \mu y^\perp$. O.B.d.A. sei $\lambda = 1$, d.h. es ist nur noch $\mu = 1$ zu zeigen. Dazu wird die Annahme $0 < \mu < 1$ auf einen Widerspruch geführt. Stelle dazu die Elemente $y, y^\perp$ bzgl. der Zerlegung $X \oplus_p X^\perp$ dar, d.h.

$$y = \sqrt[p]{\lambda_1}\, x + \sqrt[p]{1-\lambda_1}\, x^\perp, \qquad y^\perp = \sqrt[p]{\lambda_2}\, \bar{x} + \sqrt[p]{1-\lambda_2}\, \bar{x}^\perp,$$

wo

$$\lambda_1, \lambda_2 \in]0, 1[, \quad x, \bar{x} \in X, \quad x^\perp, \bar{x}^\perp \in X^\perp, \quad \|x\| = \|\bar{x}\| = \|x^\perp\| = \|\bar{x}^\perp\| = 1.$$

Wegen $x_0 = y + \mu y^\perp$ folgt

$$x_0 = \left(\sqrt[p]{\lambda_1}\, x + \mu \sqrt[p]{\lambda_2}\, \bar{x}\right) + \left(\sqrt[p]{1-\lambda_1}\, x^\perp + \mu \sqrt[p]{1-\lambda_2}\, \bar{x}^\perp\right).$$

Also ist

$$\sqrt[p]{1-\lambda_1}\, x^\perp + \mu \sqrt[p]{1-\lambda_2}\, \bar{x}^\perp \in X \cap X^\perp = 0$$

und folglich

$$\sqrt[p]{1-\lambda_1}\, x^\perp + \mu \sqrt[p]{1-\lambda_2}\, \bar{x}^\perp = 0,$$

was wegen $\|x^\perp\| = \|\bar{x}^\perp\| = 1$, $\bar{x}^\perp = -x^\perp$ sowie $\sqrt[p]{1-\lambda_1} = \mu \sqrt[p]{1-\lambda_2}$ impliziert. Es ist also

$$y = \sqrt[p]{\lambda_1}\, x + \sqrt[p]{1-\lambda_1}\, x^\perp, \qquad y^\perp = \sqrt[p]{\lambda_2}\, \bar{x} - \sqrt[p]{1-\lambda_2}\, x^\perp.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß unter der Annahme $\mu < 1$ die Einheitskugel von V mit dem von $x, \bar{x}$ erzeugten Raum einen nicht konvexen

Schnitt hat und folglich $\mu = 1$ gelten muß. Definiere dazu für $0 \leqslant a \leqslant 1$ $y(a) := y + a y^\perp$ (d.h. $y(\mu) = x_0$) und stelle $y(a)$ bzgl. $X \oplus_p X^\perp$ dar. Es ist

$$y(a) = \sqrt[p]{\lambda_1}\, x + a \sqrt[p]{\lambda_2}\, \bar{x} + \left(\sqrt[p]{1-\lambda_1} - a \sqrt[p]{1-\lambda_2}\right) x^\perp,$$

d.h. (mit $\|y(a)\| = \max\{\|a y^\perp\|, \|y\|\} = 1$)

$$1 = \|y(a)\|^p = \|\sqrt[p]{\lambda_1}\, x + a \sqrt[p]{\lambda_2}\, \bar{x}\|^p + \|(\sqrt[p]{1-\lambda_1} - a \sqrt[p]{1-\lambda_2})\, x^\perp\|^p$$
$$= \|\sqrt[p]{\lambda_1}\, x + a \sqrt[p]{\lambda_2}\, \bar{x}\|^p + |\sqrt[p]{1-\lambda_1} - a \sqrt[p]{1-\lambda_2}|^p.$$

Für jedes $a \in [0, 1]$ ist also der Vektor

$$x(a) := \left(1 - |\sqrt[p]{1-\lambda_1} - a \sqrt[p]{1-\lambda_2}|^p\right)^{-1/p} \left(\sqrt[p]{\lambda_1}\, x + a \sqrt[p]{\lambda_2}\, \bar{x}\right)$$

ein Einheitsvektor in dem von $x, \bar{x}$ erzeugten Unterraum. Setzt man noch zur Abkürzung

$$N(a) := \left(1 - |\sqrt[p]{1-\lambda_1} - a \sqrt[p]{1-\lambda_2}|^p\right)^{1/p}$$

und wählt $\varepsilon > 0$ so, daß $\mu \pm \varepsilon \in [0, 1]$, so ist

$$x_0 = \tfrac{1}{2}\left(N(\mu+\varepsilon)\, x(\mu+\varepsilon) + N(\mu-\varepsilon)\, x(\mu-\varepsilon)\right),$$

aber wegen $N(\mu \pm \varepsilon) < 1$ folgt der Widerspruch

$$\|x_0\| \leqslant \tfrac{1}{2}\left(N(\mu+\varepsilon) + N(\mu-\varepsilon)\right) < 1.$$

3.2. SATZ. *Es gibt keine nichttrivialen (p, ∞)-Sterne für $1 < p < \infty$.*

Beweis. Sei zunächst $1 \leqslant p < \infty$ und $X \oplus_p X^\perp = V = Y \oplus_\infty Y^\perp$ ein nichttrivialer (p, ∞)-Stern. Wähle $y \in Y$ mit $\|y\| = 1$ und schreibe

$$y = \sqrt[p]{\lambda}\, x + \sqrt[p]{1-\lambda}\, x^\perp \quad \text{mit} \quad \lambda \in]0, 1[,\ x \in X,\ x^\perp \in X^\perp,\ \|x\| = \|x^\perp\| = 1.$$

Sind $x = y_1 + y_1^\perp$, $x^\perp = y_2 + y_2^\perp$ die Zerlegungen gemäß 3.1, so folgt

$$y = \left(\sqrt[p]{\lambda}\, y_1 + \sqrt[p]{1-\lambda}\, y_2\right) + \left(\sqrt[p]{\lambda}\, y_1^\perp + \sqrt[p]{1-\lambda}\, y_2^\perp\right),$$

d.h. $\sqrt[p]{\lambda}\, y_1^\perp + \sqrt[p]{1-\lambda}\, y_2^\perp \in Y \cap Y^\perp = 0$, d.h. $\lambda = 1/2$. Jedes $y \in Y$ (und analog dazu jedes $y^\perp \in Y^\perp$) hat also die Darstellung $y = \sqrt[p]{\frac{1}{2}}(x + x^\perp)$ mit $x \in X$, $x^\perp \in X^\perp$, $\|y\| = \|x\| = \|x^\perp\|$. Beginnt man nun noch einmal die Konstruktion von 3.1 mit einem $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$, so wird mit den Bezeichnungen von 3.1

$$x_0 = y + y^\perp, \qquad y = \sqrt[p]{\tfrac{1}{2}}(x + x^\perp), \qquad y^\perp = \sqrt[p]{\tfrac{1}{2}}(\bar{x} - x^\perp).$$

Das Element $y-y^\perp$ hat wegen $\|y-y^\perp\| = \max\{\|y\|, \|y^\perp\|\} = 1$ Norm 1 und ist andererseits gleich $\sqrt[p]{\frac{1}{2}}(x-\bar{x}+2x^\perp)$, d.h. es ist

$$1 = \|y-y^\perp\|^p = \tfrac{1}{2}(\|x-\bar{x}\|^p+2^p) = \tfrac{1}{2}\|x-\bar{x}\|^p+2^{p-1}.$$

Das ist für $p>1$ nicht möglich, woraus die Behauptung folgt. Zusätzlich ergibt sich, daß für $p=1$ $x=\bar{x}$ gilt, d.h. jedes $x_0\in X$ eine Darstellung $x_0 = y+y^\perp$ mit $y-y^\perp\in X^\perp$ hat ($y\in Y$, $y^\perp\in Y^\perp$, $\|x_0\| = \|y\| = \|y^\perp\|$).

3.3. Satz. *Für $1<p<\infty$ gibt es keine nichttrivialen $(p,1)$-Sterne.*

Beweis. Wäre (e,f) ein nichttrivialer $(p,1)$-Stern, so wäre wegen 2.5(iv) $ef\neq fe$, also auch $e'f'\neq f'e'$. Folglich ist der gemäß 2.5 aus (e',f') entstehende $(p',1')$-Stern (d.h. (p',∞)-Stern) nichttrivial im Widerspruch zu 3.2.

3.4. Satz. *Sei V ein $\mathbf{R}$-Banachraum und $V = X\oplus_1 X^\perp = Y\oplus_\infty Y^\perp$, wobei beide Zerlegungen nichttrivial sind. Dann gilt:*

(i) *Die Zerlegung $X\oplus_1X^\perp = V = Y\oplus_\infty Y^\perp$ ist bereits ein Stern, d.h. $X\cap Y = X\cap Y^\perp = X^\perp\cap Y = X^\perp\cap Y^\perp = 0$.*

(ii) $\dim V = 2$.

Insbesondere gibt es auf einem Banachraum V mit $\dim V>2$ (Dimension als $\mathbf{R}$-Vektorraum) nicht gleichzeitig nichttriviale L^1-Summanden und nichttriviale L^∞-Summanden.

Beweis. (i) Sei etwa $X\cap Y\neq 0$. Dann ist (vgl. den Beweis von 2.7) notwendig $X^\perp\cap Y^\perp = 0$. Wir zeigen zunächst $Y^\perp\subset X$. Sei dazu $y\in X\cap Y$, $\|y\|=1$ fest gewählt und $y^\perp\in Y^\perp$ mit $\|y^\perp\|=1$ vorgelegt. Dann ist $\|y\pm y^\perp\| = \max\{\|y\|, \|y^\perp\|\} = 1$. Schreibt man

$$y^\perp = \lambda x+(1-\lambda)x^\perp \quad \text{mit} \quad x\in X,\ x^\perp\in X^\perp,\ \|x\| = \|x^\perp\| = 1,\ \lambda\in[0,1],$$

so ist wegen $X^\perp\cap Y^\perp = 0$ $\lambda>0$. Zerlege nun $y\pm y^\perp = (y\pm\lambda x)\pm(1-\lambda)x^\perp$ bzgl. $X\oplus_1X^\perp$:

$$1 = \|y\pm y^\perp\| = \|y\pm\lambda x\|+(1-\lambda).$$

Es folgt $\|y\pm\lambda x\| = \lambda$, d.h. $\|y/\lambda\pm x\| = 1$, d.h.

$$\|y/\lambda\| = \|\tfrac{1}{2}(y/\lambda+x)+\tfrac{1}{2}(y/\lambda-x)\| \leqslant 1,$$

d.h. $\lambda\geqslant 1$. Also ist $\lambda=1$ und damit $y^\perp = x\in X$. Wegen $Y^\perp\neq 0$ ist insbesondere $X\cap Y^\perp\neq 0$, so daß die gleichen Überlegungen wie oben (man vertausche die Rollen von Y und $Y^\perp$) zu $Y\subset X$ führen, was insgesamt $V = Y+Y^\perp\subset X$ und damit einen Widerspruch zu $X\neq 0\neq X^\perp$ impliziert.

Völlig analog wird gezeigt, daß notwendig $X\cap Y^\perp = X^\perp\cap Y = X^\perp\cap$ p$\cap^\perp Y = 0$ gelten muß.

(ii) Zunächst soll gezeigt werden, daß im Falle $\dim V>2$ ein vierdimensionaler Unterraum von V angebbar ist, auf dem die Zerlegung $X\oplus_1X^\perp = V = Y\oplus_\infty Y^\perp$ einen Stern induziert (das ist nicht trivialerweise erfüllbar, da für einen Unterraum J im allgemeinen $X\cap J+X^\perp\cap J\subsetneqq J$ gilt). Anschließend muß dann noch bewiesen werden, daß auf einem vierdimensionalen Raum (d.h. auf dem $\mathbf{R}^4$) kein $(1,\infty)$-Stern existieren kann.

Sei also $\dim V>2$. Wegen $V = X+X^\perp$ ist $\max\{\dim X, \dim X^\perp\}\geqslant 2$, etwa $\dim X\geqslant 2$. Wähle $x_1, x_2\in X$ mit $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $x_1\pm x_2\neq 0$. Am Ende des Beweises von 3.2 wurde bemerkt, daß Elemente $y_i\in Y$, $y_i^\perp\in Y^\perp$, $\|y_i\| = \|y_i^\perp\| = 1$ existieren, so daß $x_i = y_i+y_i^\perp$, $x_i^\perp := y_i-y_i^\perp\in X^\perp$ gilt ($i=1,2$). Die Paare $\{y_1,y_2\}$, $\{y_1^\perp, y_2^\perp\}$ sind linear unabhängig. Da alle Vektoren normiert sind, ist nur $y_1\pm y_2\neq 0\neq y_1^\perp\pm y_2^\perp$ zu zeigen. Wäre aber etwa $y_1+y_2=0$, so folgte $0\neq x_1+x_2 = y_1^\perp+y_2^\perp\in X\cap Y^\perp$ im Widerspruch zu (i). Folglich erzeugen die $y_1, y_2, y_1^\perp, y_2^\perp$ einen vierdimensionalen Raum, in dem

$$\mathscr{L}\{y_1,y_2\}\oplus_\infty\mathscr{L}\{y_1^\perp,y_2^\perp\} = \mathscr{L}\{y_1,y_2,y_1^\perp,y_2^\perp\} = \mathscr{L}\{x_1,x_2\}\oplus_1\mathscr{L}\{x_1^\perp,x_2^\perp\}$$

gilt. Identifiziert man diesen Raum mit dem $\mathbf{R}^4$ und wählt die y als Basis, so wird

$$y_1 = (1,0,0,0),\quad y_2 = (0,1,0,0),\quad y_1^\perp = (0,0,1,0),\quad y_2^\perp = (0,0,0,1),$$
$$x_1 = (1,0,1,0),\quad x_2 = (0,1,0,1),\quad x_1^\perp = (1,0,-1,0),\quad x_2^\perp = (0,1,0,-1).$$

Bezeichnet man noch mit $\|\ \|$ die von V auf dem $\mathbf{R}^4$ induzierte Norm (d.h. $\|(a,b,c,d)\| := \|ay_1+by_2+cy_1^\perp+dy_2^\perp\|$), so folgt zunächst wegen $\|x+x^\perp\| = \|x\|+\|x^\perp\| = \|x-x^\perp\|$ (alle $x\in X$, $x^\perp\in X^\perp$)

$$\begin{aligned}\|(a,b,0,0)\| &= \|ay_1+by_2\| = \tfrac{1}{2}\|(ax_1+bx_2)+(ax_1^\perp+bx_2^\perp)\|\\ &= \tfrac{1}{2}\|(ax_1+bx_2)-(ax_1^\perp+bx_2^\perp)\| = \|ay_1^\perp+by_2^\perp\|\\ &= \|(0,0,a,b)\|\end{aligned}$$

d.h. $\mathscr{L}\{y_1,y_2\}$ und $\mathscr{L}\{y_1^\perp,y_2^\perp\}$ sind isometrisch isomorph). Andererseits ist stets $\|(a,b,c,d)\| = \max\{\|(a,b,0,0)\|, \|(0,0,c,d)\|\}$, d.h. mit $\|(a,b)\|^* := \|(a,b,0,0)\|$ wird

$$\begin{aligned}\max\{\|(a,b)\|^*, \|(c,d)\|^*\} &= \|(a,b,c,d)\|\\ &= \tfrac{1}{2}\|(a+c)x_1+(b+d)x_2+(a-c)x_1^\perp+(b-d)x_2^\perp\|\\ &= \tfrac{1}{2}\|(a+c)x_1+(b+d)x_2\|+\tfrac{1}{2}\|(a-c)x_1^\perp+(b-d)x_2^\perp\|\\ &= \tfrac{1}{2}\|(a+c,b+d,a+c,b+d)\|+\tfrac{1}{2}\|(a-c,b-d,-(a-c),-(b-d))\|\\ &= \tfrac{1}{2}\big(\|(a+c,b+d)\|^*+\|(a-c,b-d)\|^*\big).\end{aligned}$$

Setzt man insbesondere $(a,b,c,d) = (1,1,1,-1)$, so folgt

$$\max\{\|(1,1)\|^*, \|(1,-1)\|^*\} = 2 \quad (\text{beachte } \|(1,0)\|^* = \|(0,1)\|^* = 1),$$

woraus sich nun mit $(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 1)$ der Widerspruch

$$1 = \max\{\|(1,0)\|^*, \|(0,1)\|^*\} = \tfrac{1}{2}\left(\|(1,1)\|^* + \|(1,-1)^*\|\right)$$
$$> \tfrac{1}{2}\max\{\|(1,1)\|^*, \|(1,-1)\|^*\} = 1$$

ergibt.

Das folgende Theorem faßt die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen:

3.5. THEOREM. *Ist $1 < p < \infty$, so können auf einem $\mathbf{K}$-Banachraum nicht gleichzeitig nichttriviale L^p- und L^∞-Summanden bzw. gleichzeitig nichttriviale L^p- und L^1-Summanden existieren. Ist die $\mathbf{R}$-Dimension von V größer als zwei, so können nicht gleichzeitig nichttriviale L^∞- und L^1-Summanden existieren.*

4. (p, q)-Sterne, $1 < p, q < \infty$.

4.1. SATZ. *Sei $V \neq 0$ ein $\mathbf{R}$-Banachraum. Ist dann $X \oplus_p X^\perp = V = Y \oplus_q Y^\perp$ ein (p, q)-Stern mit $1 < p, q < \infty$, so ist notwendig $p = q = 2$. Folglich gibt es keine nichttrivialen (p, q)-Sterne für $(p, q) \neq (2, 2)$.*

Beweis (alle auftretenden Vektoren seien zu 1 normiert). Man wähle ein $x_0 \in X$ und schreibe in Analogie zu 3.1

$$x_0 = \sqrt[q]{\lambda_0}\, y + \sqrt[q]{1-\lambda_0}\, y^\perp,$$
$$y = \sqrt[p]{\lambda_1}\, x + \sqrt[p]{1-\lambda_1}\, x^\perp,$$
$$y^\perp = \sqrt[p]{\lambda_2}\, \bar{x} + \sqrt[p]{1-\lambda_2}\, \bar{x}^\perp,$$

wobei (bei gleichem Beweis wie in 3.1) wieder $\bar{x}^\perp = -x^\perp$ ist. Anders als in 3.1 werden nun die $x, \bar{x}, x^\perp$ ebenfalls bzgl. $Y \oplus_q Y^\perp$ dargestellt:

$$x = \sqrt[q]{\alpha}\, y_1 + \sqrt[q]{1-\alpha}\, y_1^\perp,$$
$$(1) \qquad \bar{x} = \sqrt[q]{\beta}\, y_2 + \sqrt[q]{1-\beta}\, y_2^\perp,$$
$$x^\perp = \sqrt[q]{\gamma}\, y_3 + \sqrt[q]{1-\gamma}\, y_3^\perp.$$

Wie oben die Identität $\bar{x}^\perp = -x^\perp$ ergibt sich hier $y_1^\perp = -y_3^\perp$, $y_3 = y_2$, so daß sich (1) vereinfacht zu

$$x = \sqrt[q]{\alpha}\, y_1 - \sqrt[q]{1-\alpha}\, y_3^\perp,$$
$$(1)^* \qquad \bar{x} = \sqrt[q]{\beta}\, y_3 + \sqrt[q]{1-\beta}\, y_2^\perp,$$
$$x^\perp = \sqrt[q]{\gamma}\, y_3 + \sqrt[q]{1-\gamma}\, y_3^\perp.$$

Setzt man zur Abkürzung für $a, b \in \mathbf{R}$

$$\|(a, b)\|_1 := \|ay_1 + by_3\|, \qquad \|(a, b)\|_2 := \|ay_2^\perp + by_3^\perp\|$$

($\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ sind Halbnormen auf dem $\mathbf{R}^2$; man kann zeigen, daß es sich sogar um Normen handelt, doch wird von dieser Tatsache im folgenden kein Gebrauch gemacht), so folgt wegen $V = Y \oplus_q Y^\perp$ für alle $a, b, c \in \mathbf{R}$

$$\|ax + b\bar{x} + cx^\perp\|^q = \|(a\sqrt[q]{\alpha}, b\sqrt[q]{\beta} + c\sqrt[q]{\gamma})\|_1^q + \|(b\sqrt[q]{1-\beta}, c\sqrt[q]{1-\gamma} - a\sqrt[q]{1-\alpha})\|_2^q$$

und daraus mit $\|ax + b\bar{x} + cx^\perp\|^p = \|ax + b\bar{x}\|^p + |c|^p$

$$(2) \qquad |c|^p + \|ax + b\bar{x}\|^p = \left(\|(a\sqrt[q]{\alpha}, b\sqrt[q]{\beta} + c\sqrt[q]{\gamma})\|_1^q + \|(b\sqrt[q]{1-\beta}, c\sqrt[q]{1-\gamma} - a\sqrt[q]{1-\alpha})\|_2^q\right)^{p/q}.$$

Indem man in dieser Identität speziell $b = 0$ bzw. $a = 0$ setzt, folgt

$$|c|^p + |a|^p = \left(\|(a\sqrt[q]{\alpha}, c\sqrt[q]{\gamma})\|_1^q + |c\sqrt[q]{1-\gamma} - a\sqrt[q]{1-\alpha}|^q\right)^{p/q},$$
$$|c|^p + |b|^p = \left(|b\sqrt[q]{\beta} + c\sqrt[q]{\gamma}|^q + \|(b\sqrt[q]{1-\beta}, c\sqrt[q]{1-\gamma})\|_2^q\right)^{p/q},$$

woraus sich die explizite Gestalt von $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ gewinnen läßt, nämlich

$$\|(a\sqrt[q]{\alpha}, c\sqrt[q]{\gamma})\|_1^q = (|c|^p + |a|^p)^{q/p} - |c\sqrt[q]{1-\gamma} - a\sqrt[q]{1-\alpha}|^q,$$
$$(3)$$
$$\|(b\sqrt[q]{1-\beta}, c\sqrt[q]{1-\gamma})\|_2^q = (|c|^p + |b|^p)^{q/p} - |b\sqrt[q]{\beta} + c\sqrt[q]{\gamma}|^q.$$

Setzt man nach entsprechenden Substitutionen (3) in (2) ein, so folgt

$$(4) \qquad |c|^p + \|ax + b\bar{x}\|^p = \Bigg\{\left(|a|^p + \frac{1}{\gamma^{p/q}}|b\sqrt[q]{\beta} + c\sqrt[q]{\gamma}|^p\right)^{q/p} +$$
$$+ \left(|b|^p + \frac{1}{(1-\gamma)^{p/q}}|a\sqrt[q]{1-\alpha} - c\sqrt[q]{1-\gamma}|^p\right)^{q/p} -$$
$$- \left|a\sqrt[q]{1-\alpha} - \sqrt[q]{\frac{1-\gamma}{\gamma}}(b\sqrt[q]{\beta} + c\sqrt[q]{\gamma})\right|^q -$$
$$- \left|b\sqrt[q]{\beta} + \sqrt[q]{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(c\sqrt[q]{1-\gamma} - a\sqrt[q]{1-\alpha})\right|^q\Bigg\}^{p/q}$$
$$= \Bigg\{\left(|a|^p + \frac{1}{\gamma^{p/q}}|b\sqrt[q]{\beta} + c\sqrt[q]{\gamma}|^p\right)^{q/p} +$$
$$+ \left(|b|^p + \frac{1}{(1-\gamma)^{p/q}}|a\sqrt[q]{1-\alpha} - c\sqrt[q]{1-\gamma}|^p\right)^{q/p} -$$
$$- \frac{1}{1-\gamma}\left|\left(a\sqrt[q]{1-\alpha} - b\sqrt[q]{\beta\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) - c\sqrt[q]{1-\gamma}\right|^q\Bigg\}^{p/q}.$$

Wähle nun a, b mit $a, b > 0$, $a\sqrt[q]{1-a} > b\sqrt[q]{\beta\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ und betrachte (4) als Funktionsgleichung für c. Für genügend kleine c können auf der rechten Seite die Betragsstriche durch Klammern ersetzt werden. Insbesondere steht auf der rechten Seite eine bei $c = 0$ beliebig oft differenzierbare Funktion (man beachte, daß der Ausdruck in der Klammer bei $c = 0$ strikt positiv ist). Wegen (4) ist damit auch $|c|^p$ bei $c = 0$ beliebig oft differenzierbar, was $p \in 2\mathbf{N}$, insbesondere $p \geqslant 2$ impliziert.

Vertauscht man in den vorstehenden Überlegungen die Rollen von p und q, so folgt ebenfalls $q \geqslant 2$. Ist schließlich e die L^p-Projektion auf X, f die L^q-Projektion auf Y, so ist wegen 2.5 (iii) $ef \neq fe$, also auch $e'f' \neq f'e'$. Folglich ist der gemäß .25 entstehende (p', q')-Stern nichttrivial, was nach dem ersten Teil des Beweises $p', q' \geqslant 2$ zur Folge hat. Zusammen mit $p, q \geqslant 2$ bedeutet das $p = q = 2$.

4.2. THEOREM. *Auf einem $\mathbf{K}$-Banachraum können nicht gleichzeitig nichttriviale L^p- und L^q-Summanden für $p \neq q$ existieren. Für $p \neq 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ kommutieren je zwei L^p-Projektionen.*

Beweis. 2.7 und 4.1 ergeben den ersten Teil der Behauptung und die Kommutativität der L^p-Projektionen für $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Die Kommutativität von L^1-Projektionen und L^∞-Projektionen ist schon lange bekannt (s.z.B. [1], [2]).

5. Folgerungen. Es sollen hier nur einige unmittelbare Folgerungen aus den obigen Resultaten zusammengestellt werden. Die in der Einleitung erwähnten Ergebnisse werden gesondert veröffentlicht.

5.1. SATZ. *Sei V ein $\mathbf{K}$-Banachraum mit $\mathbf{R}$-$\dim V > 2$. Gibt es dann ein $V^{(n)}$ $(V^{(0)} := V,\ V^{(n+1)} := (V^{(n)})')$, so daß $V^{(n)}$ nichttriviale L^p-Summanden für ein p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ hat, so hat V keine nichttrivialen L^q-Summanden für $q \neq p_0$, wo $p_0 = p$ für gerades n und $p_0 = p'$ für ungerades n.*

Beweis: 2.2, 3.5, 4.2.

5.2. KOROLLAR. *Ist V ein $\mathbf{K}$-Banachraum mit $\mathbf{R}$-$\dim V > 2$, der ein nichttriviales M-Ideal enthält (ein M-Ideal ist ein abgeschlossener Unterraum, dessen Annihilator in V' ein L^1-Summand ist;* [1], [2]*), so enthält V keine L^p-Summanden für $1 \leqslant p < \infty$.*

5.3. KOROLLAR ([3]). *Da für kompaktes K die M-Ideale in $\mathscr{C}K$ den abgeschlossenen Teilmengen von K entsprechen* ([2], 6.18]*, enthält der Raum $\mathscr{C}K$ im Falle $\text{Cz } K > 2$ keine L^p-Summanden* $(1 \leqslant p < \infty)$.

5.4. KOROLLAR. *Ist (S, Σ, μ) ein Maßraum und $1 \leqslant p \leqslant \infty$, so enthält der $L^p(S, \Sigma, \mu)$ keine L^q-Summanden für $p \neq q$ (für $p = 1$ und $p = \infty$ ist zusätzlich $\dim L^p(S, \Sigma, \mu) > 2$ zu fordern).*

Beweis. Abgesehen von eindimensionalen Fall existieren nichttriviale L^p-Summanden, nämlich die Annihilatoren meßbarer Mengen (R. Evans [7] hat bewiesen, daß im Fall lokalisierbarer Maße alle L^p-Summanden auf diese Weise entstehen).

5.5. KOROLLAR. *Ist V ein Banachraum mit $\mathbf{R}$-$\dim V > 2$ und ist für ein n der Raum $V^{(n)}$* (vgl. 5.1) *ein abstrakter L-Raum, so enthält V keine L^p-Summanden für $1 < p \leqslant \infty$ bei geradem n und $1 \leqslant p < \infty$ bei ungeradem n.*

Beweis. 5.4, 5.1.

5.6. KOROLLAR ([3]). *Prädnale V von abstrakten L-Räumen (sog. Lindenstrauß-Räume) mit $\dim V > 2$ enthalten keine L^p-Summanden für $1 \leqslant p < \infty$. Insbesondere gilt diese Aussage für abstrakte M-Räume, so daß sich noch einmal 5.3 ergibt.*

Literatur

[1] E.M. Alfsen and E.G. Effros, *Structure in real Banach spaces I*, Ann. of Math. 96 (1972), S. 98–128.
[2] — — *Structure in real Banach spaces II*, Ann. of Math. 96 (1972), S. 129–173.
[3] E. Behrends, *Über die L^p-Struktur in $A(K)$-Räumen* Math. Z. 139 (1974), pp. 15-22.
[4] F. Cunningham, *L-structure in L-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), S. 274–299.
[5] — *M-structure in Banach spaces*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 63 (1967), S. 613–629.
[6] — E. G. Effros, and N. Roy, *M-structure in dual Banach spaces*, Israel J. Math. 14 (1973), pp. 304–308.
[7] R. Evans, *Boolesche Algebren von L^p-Projektionen*, Dissertation FU Berlin, 1974.
[8] Hirsberg, *M-ideals in complex function spaces and algebras*, Israel J. Math. 12 (1972), pp. 133–146.
[9] F. E. Sullivan, *Norm characterizations of real L^p-spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), S. 153–154.
[10] — *Structure of real L^p-spaces*, Journal Math. Anal. Appl. 32 (1970), S. 621–629.
[11] Arbeitspapiere der Arbeitsgruppe „Strukturtheorie reeller und komplexer Banachräume", Fachbereich 19 der FU Berlin:
(a) *Über die L^p-Struktur der Räume $C(K)$ und $C_0(L)$*,
(b) *Die Cunningham-p-Algebra eines reellen Banachraumes*,
(c) *Über die L^p-Struktur in reellen Banachräumen*,
(d) *L^p-Struktur in Produkten von reellen Banachräumen*,
(e) *Über die L^r-Struktur der Räume $l^p(I)$*,
(f) *Über die L^p-Struktur in $A(K)$-Räumen.*

I. MATHEMATISCHES INSTITUT
DER FREIEN UNIVERSITÄT BERLIN

Received July 2, 1974 (854)