[5] F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebn. Math. 9 (1956), S. 1–165.
[6] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, New York–St.Luis–SanFrancisco–Toronto–London–Sydney 1966.
[7] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Berlin–Heidelberg–New York 1966.
[8] N. H. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology 3(1) (1965), S. 19–30.
[9] A. Pietsch, *Zur Theorie der σ-Transformationen in lokalkonvexen Vektorräumen*, Math. Nachr. 21 (1960), S. 347–369.
[10] P. Saphar, *Contribution a l-etude des applications lineaires dans un espace de Banach I*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), S. 363–384.
[11] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Москва 1971.
[12] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Основные положения о дефекных числах и индексах линейных операторов*, Успехи Мат. Наук 12, вып. 2 (1957), S. 44–118.
[13] И. Ц. Гохберг и Ю. Лайтерер, *Факторизация оператор-функций относительно контура. II. Каноническая факторизация оператор-функций, близких к единичной*, Math. Nachr. 54 (1972), S. 41–74.
[14] — — *О голоморфных вектор-функциях одного переменного, I. Функции на компакте*, Матем. исслед. Кишинев, 7, вып. 4 (1973), S. 60–84. *II. Функции в области*, ibid. 8, вып. I (1973), S. 37–58.
[15] — — *О коциклах, оператор-функциях и семействах подпространств*, ibid. 8, вып. 2 (1973), S. 23–56.
[16] И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, *Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства*, Успехи Матем. Наук 14, вып. 5 (1959), S. 135–140.
[17] М. Г. Зайденберг, *Замечание о голоморфных оператор-функциях, осуществляющих эволюцию подпространств*, Сборник трудов аспирантов матем. факультета Воронежского университета. Воронеж 1971, S. 39–41.
[18] — *О фредгольмовых операторах, голоморфно зависящих от параметра*, Матем. исслед. Кишинев, 6, вып. 2 (1971), S. 142–149.
[19] А. С. Маркус, *О некоторых свойствах линейных операторов, связанных с понятием раствора*, Учёные записки Кишиневского Госуниверситета 39 (1959), S. 265–272.
[20] Б. С. Митягин, *Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства*, Успехи Матем. Наук 25, вып. 5 (1970), S. 63–106.
[21] М. А. Шубин, *О голоморфных семействах подпространств банахова пространства*, Матем. исслед. Кишинев, 5, вып. 4 (1970), S. 153–165.

Received April 22, 1974 (817)

STUDIA MATHEMATICA, T. LVII. (1976)

Une formule asymptotique du type Melher–Heine pour les zonoles d'un espace riemannien symétrique

par

JEAN LOUIS CLERC (Nancy)

Résumé. On généralise la formule classique de Melher–Heine reliant les polynômes de Legendre à la fonction de Bessel J_0 dans le cadre des fonctions zonales des espaces riemanniens symétriques. On en déduit un théorème de passage entre multiplicateurs des séries de Fourier–Peter–Weyl d'un espace riemannien symétrique de type compact et multiplicateurs yes transformées de Fourier sur l'espace euclidien tangent á l'origine.

La formule asymptotique de Melher–Heine affirme que:

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\cos\frac{\theta}{n}\right) = J_0(\theta),$$

où P_n désigne le polynome de Legendre de degré n, et J_0 la fonction de Bessel d'indice 0. Cette formule admet une interprétation dans le cadre de la théorie des espaces riemanniens symétriques. D'abord, on peut étendre la formule pour obtenir:

$$\lim_{R\to\infty} P_{[R\lambda]}\left(\cos\frac{\theta}{R}\right) = J_0(\lambda\theta),$$

où λ est un réel positif fixé et $[x]$ désigne la partie entière de x. Les fonctions, indexées par n dans $N, \xi\mapsto P_n(\cos d(\xi, \mathbf{1}))$, où d est la distance géodésique sur la sphère S^2 et $\mathbf{1}$ le pôle nord, sont exactement les fonctions sphériques élémentaires de l'espace symétrique $SO(3)/SO(2)\approx S^2$. Les fonctions, $x\mapsto J_0(\lambda|x|)$ $(\lambda\geqslant 0)$ sont les fonctions sphériques élémentaires de type positif du plan euclidien $R^2\approx D(2)/SO(2)$, où $D(2)$ est le groupe des déplacements du plan. La formule ci-dessus montre alors que l'analyse harmonique d'une sphère de rayon R devient à la limite quand R tend vers l'infini l'analyse harmonique du plan euclidien, si le lecteur nous permet ce langage imprécis.

Des formules analogues ont été obtenues pour des groupes de Lie compacts semi-simples (voir [2], [5]). On se propose ici d'énoncer et de démontrer un résultat analogue pour tout espace riemannien symétrique de type compact. Notre démonstration repose essentiellement sur la formule d'Harish-Chandra pour les zonales d'un espace symétrique de type non-compact.

1. Notations. Les notations sont à peu de chose près celles du livre d'Helgason ([4], ch. V, § 5). Soit $\mathfrak{u}$ une algèbre de Lie semi-simple sur R, de type compact et θ un automorphisme involutif de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{g}$ la complexifiée de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{g}_0$ la forme réelle associée, avec les décompositions en sous-espaces propres de l'extension de θ à $\mathfrak{g}$ (notée encore θ):

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0, \qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_*.$$

On désigne par $\mathfrak{a}_*$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}_*$, et soit $K^* = \operatorname{Int}(\mathfrak{g}_0) \cap \operatorname{Int}(\mathfrak{u})$. $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_* + i\mathfrak{a}_*$. Soient (U, K) et (G, K_2) des paires riemanniennes symétriques associées à $(\mathfrak{u}, \theta)$ et $(\mathfrak{g}_0, \theta)$. On munit les espaces vectoriels et les espaces quotients U/K et G/K_2 des produits scalaires (ou hermitiens) et des métriques riemanniennes associées à la forme de Killing.

On peut encore associer une algèbre de Lie symétrique de type euclidien. Soit $\mathfrak{e}$ un espace vectoriel isomorphe à $\mathfrak{p}_*$, et soit $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{e}$, muni de la structure d'algèbre de Lie suivante:

$$[[X_1 X_2]] = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1, X_2 \text{ appartiennent à } \mathfrak{e}, \\ [X_1 X_2] & \text{si } X_1, X_2 \text{ appartiennent à } \mathfrak{k}, \\ \operatorname{ad} X_1(\overline{X}_2) & \text{si } X_1 \text{ appartient à } \mathfrak{k} \text{ et } X_2 \text{ appartient} \\ & \quad \text{à } \mathfrak{e}, \text{ où } X_2 \to \overline{X}_2 \end{cases}$$

désigne l'isomorphisme de $\mathfrak{e}$ sur $\mathfrak{p}_*$. Il est clair que $\mathfrak{e}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{l}$. On lui associe la paire symétrique suivante: L est le produit semi-direct de K^* et de $\mathfrak{e}$ où l'on fait agir K^* par la représentation adjointe, et r est l'automorphisme $r(k^* X) = (k^*(-X))$, de sorte que $\mathfrak{e} \approx L/K^*$. Dans la suite, nous identifierons $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{p}^*$, ainsi que $[[\ ]]$ et $[\ ]$.

Les fonctions sphériques élémentaires de la paire (U, K) sont associées aux représentations unitaires de classe un de U, et sont donc indexées par un sous-ensemble (en fait un sous-réseau) du réseau des poids dominants entiers de $(\mathfrak{u}, \mathfrak{k}_0)$. Mais il est classique (voir [3]) que les poids correspondants aux représentations de classe un sont identiquement nuls sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}_0$, de sorte qu'ils sont uniquement determinés par leur restriction à $\mathfrak{a}_*$. Pour toute forme linéaire λ de ce type, on note Z_λ la fonction sphérique élémentaire associée.

Les fonctions sphériques élémentaires de la paire (G, K_2) ont été déterminées par Harish-Chandra. Elles sont indexées (modulo l'action du groupe de Weyl) par les formes linéaires à valeurs complexes sur $\mathfrak{a}_0$,

et si λ est une telle forme linéaire, alors la zonale associée est donnée par:

$$x \mapsto \int_{K_2} e^{\lambda(H(xk))}\, dk,$$

où $H(g)$ est l'unique élément de $\mathfrak{a}_0$ tel que $g \in K_2 \exp H(g) N$ (décomposition d'Iwasawa).

Enfin les fonctions sphériques élémentaires de la paire (L, K^*) sont obtenues de la façon suivante: si ν est une forme linéaire complexe sur $\mathfrak{p}_*$, alors

$$\tilde{Z}_\nu(X) = \int_{K^*} e^{-\nu(Adk\cdot X)}\, dk.$$

Si ν prend des valeurs imaginaires pures, alors $\tilde{Z}_\nu$ est de type positif. De plus, si ν et μ sont images l'une de l'autre par un élément de AdK^*, alors $\tilde{Z}_\mu = \tilde{Z}_\nu$. Mais tout élément de $\mathfrak{p}_*$ est conjugué par K^* d'un élément de $\mathfrak{a}_*$. Par suite, on peut toujours supposer que ν est identiquement nulle sur l'orthogonal $\mathfrak{q}_*$ de $\mathfrak{a}_*$ dans $\mathfrak{p}_*$, et s'identifie par conséquent à une forme linéaire sur $\mathfrak{a}_*$.

2. Théorème principal. Soit $\pi_1, \ldots, \pi_l$ $(l = \dim \mathfrak{a}_*)$ une base du réseau des poids des représentations de classe un de (U, K_1). Si λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{a}_*$ à valeurs imaginaires pures, alors $\lambda = \sum \lambda_i \pi_i$. Quitte à remplacer λ par une conjuguée par le groupe de Weyl, on peut supposer $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant l$. On pose par définition:

$$[\lambda] = \sum [\lambda_i] \pi_i.$$

THÉORÈME 1. $Z_{[R\lambda]}\left(\exp \dfrac{X}{R}\right) \to \tilde{Z}_\lambda(X)$, $X \in \mathfrak{p}_*$, *uniformément sur tout compact* (¹), *lorsque R tend vers l'infini.*

Soit G_c le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et notons encore θ l'automorphisme involutif de G_c dans lui-même dont la différentielle à l'origine est θ. Soit K_c l'ensemble des points fixes de θ, A_c et N_c les sous-groupes de Lie connexes d'algebres de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$. Comme le centre de G est contenu dans K_2 et que les fonctions sphériques sont biinvariantes par K_2, on peut toujours supposer que G est le sous-groupe de G_c d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$, et K_2 le sous-groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_0$. Enfin, U est localement isomorphe au sous-groupe de G_c d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$, de sorte que si g est un élément de U suffisamment proche de l'identité, g peut être regardé sans ambiguïté comme un élément de G_c.

LEMME 1. *Il existe un voisinage V du neutre dans G_c invariant par* $\operatorname{ad} K_2$, *et une application analytique $H: V \to \mathfrak{a}$, telle que*

(i) *tout g dans V s'écrit $k \exp H(g) n$, où $k \in K_c$ et $n \in N_c$.*

(ii) $H(e) = 0$.

(¹) On identifie $\mathfrak{p}_*$ au plan tangent de U/K_1 au point eK_1.

On utilise le fait que l'application $(k, a, n) \mapsto kan$ de $K_c \times A_c \times N_c$ dans G_c a pour différentielle en (e, e, e) l'identité, le fait que la carte exponentielle est un difféomorphisme local de $\mathfrak{a}$ sur A_c et la compacité de K_2. Cette application H coïncide sur $G \cap V$ avec l'application H habituelle de la décomposition d'Iwasawa.

LEMME 2. *Soit, pour k appartenant à K_2, H_k l'application definie pour $H \in \mathfrak{a}_*$ suffisamment voisin de 0 par*

$$H_k(H) = H(k \exp H k^{-1}).$$

Alors

$$dH_k(0) = \operatorname{proj} \mathfrak{a}_* \circ Ad k,$$

ou $\operatorname{proj} \mathfrak{a}_*$ *désigne la projection orthogonale de $\mathfrak{p}_*$ sur $\mathfrak{a}_*$, pour le produit scalaire associé à la forme de Killing.*

En effet, si H est tel que $\exp H$ appartienne à V, l'application est bien définie. De plus, $k \exp H k^{-1} = \exp(Ad k \cdot H)$. Comme l'application $(k, a, n) \to kan$ a pour différentielle l'identité en (e, e, e) et que l'application exponentielle de $\mathfrak{a}$ dans A_c a pour différentielle l'identité en 0, il suffit de montrer que la composante sur $\mathfrak{a}_*$ de $Ad k \cdot H$ dans sa decomposition sur $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ est égale à $\operatorname{proj} \mathfrak{a}_*(Ad k \cdot H)$. Mais comme $Ad k \cdot H$ appartient à $\mathfrak{p}_*$, il suffit de montrer que l'orthogonal dans $\mathfrak{p}_*$ de $\mathfrak{a}_*$ est contenu dans $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}$. Mais d'après [4], ch. VI, lemme 3.6, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_* + i\mathfrak{q}_*$ est engendré par des éléments de la forme $X_\alpha - \theta X_\alpha$, ou α est une racine positive non identiquement nulle sur $\mathfrak{a}_0$. Or, écrivant $X_\alpha - \theta X_\alpha = (X_\alpha + \theta X_\alpha) - 2X_\alpha$, on voit que cet élément appartient bien à $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}$.

Soit (π, V) une représentation unitaire irréductible (donc de dimension finie) de classe un, de poids dominant μ. La différentielle de π fournit une représentation de l'algèbre $\mathfrak{u}$, qui s'étend par complexification à $\mathfrak{g}$. Notons encore π la représentation de G_c obtenue par intégration. Soit v_0 un élément unitaire de V, invariant par K_1 (il est unique à un scalaire de module 1 près), et soit $\psi_\pi \colon G_c \to C$ la fonction definie par $\psi_\pi(g) = \langle \pi(g) e_0, e_0 \rangle$. C'est une fonction analytique (au sens complexe) et elle coïncide au voisinage du neutre dans U avec Z_μ. Si g est un élément de G, on a, d'après [3],

$$\psi_\mu(g) = \int_{K_2} e^{\mu(H(gk))} dk$$

(le point important est que μ est exactement le poids dominant de la représentation π).

LEMME 3. *Si H appartient à $\mathfrak{a}_*$ et est suffisamment proche de 0, alors*

$$Z_\mu(\exp H) = \int_{K_2} e^{\mu H(k^{-1} \exp H k)} dk.$$

En effet, on considère les deux applications définies dans V:

$$g \mapsto \langle \pi(g) e_0, e_0 \rangle,$$

$$g \mapsto \int_{K_2} e^{\mu(H(k^{-1} g k))} dk.$$

Ce sont applications analytiques qui coïncident sur $G \cap V$, donc sont égales dans V. D'ou le résultat.

La démonstration du théorème est maintenant aisée. En effet, les deux membres de l'égalité du théorème sont invariants par l'action de K^*. Il suffit donc de faire la démonstration lorsque X appartient à $\mathfrak{a}_*$. Par suite,

$$Z_{[R\lambda]}\left(\exp \frac{X}{R}\right) = \int_{K_2} e^{-[R\lambda](H(\exp Ad k \frac{X}{R}))} dk$$

et d'après le lemme 2,

$$H\left(\exp Ad k \frac{X}{R}\right) = \frac{1}{R} \operatorname{proj} \mathfrak{a}_*(Ad k \cdot X) + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

D'ou

$$[R\lambda]\left(H\left(\exp Ad k \frac{X}{R}\right)\right) = \lambda\left(\operatorname{proj} \mathfrak{a}_*(Ad k \cdot X)\right) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Etendant λ par 0 sur $\mathfrak{q}_*$, on voit que

$$Z_{[R\lambda]}\left(\exp \frac{X}{R}\right) \to \int_{K_2} e^{-\lambda(Ad k \cdot X)} dk = \int_{K^*} e^{-\lambda(Ad k \cdot X)} dk,$$

puisque $Ad K_2 = Ad K^*$.

3. Applications aux operateurs U-invariants de $L^p(U/K_1)$. U opère sur $L^2(U/K_1)$ par la représentation quasi-regulière τ

$$\left(\tau(u_0) f\right)(uK_1) = f(u_0 u K_1).$$

Par conséquent l'espace $L^2(U/K_1)$ se décompose en somme hilbertienne de sous-espaces invariants minimaux, soit $f = \sum H_\lambda f$. Chaque sous-espace fournit une représentation de classe un de U, et on montre que le projecteur H_λ sur ce sous-espace n'est autre que la convolution avec la fonction sphérique élémentaire associée. De plus, si T est un opérateur de $L^2(U/K_1)$, qui commute à l'action de U, alors T est scalaire sur chaque sous-espace, soit $f = \sum H_\lambda f$, $Tf = \sum m_\lambda H_\lambda f$, avec $\sup |m_\lambda| < +\infty$. Raisonnant comme dans [1], on montre aisément à partir du théorème 1 le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Soit m une fonction continue et bornée sur $\mathfrak{p}_*$, invariante par K^*. A chaque $\varepsilon > 0$, on associe l'opérateur $T_\varepsilon \colon L^2(U/K_1) \to L^2(U/K_1)$*

défini par

$$T_\varepsilon f = \sum m(\varepsilon\lambda) H_\lambda f.$$

Supposons que T *s'étende en un opérateur de* $L^p(U/K_1)$ (²), *et que la norme d'opérateur de* T *reste uniformément bornée quand* ε *tend vers* 0. *Alors l'opérateur*

$$T: L^2(\mathfrak{p}_*) \to L^2(\mathfrak{p}_*), \quad f \mapsto Tf(x) = \int m(\xi)\hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi$$

s'étend en un opérateur borné de $L^p(\mathfrak{p}_*)$ *dans lui-même.*

Ce théorème s'applique en particulier aux fonctions radiales, puisque K^* respecte le produit scalaire, et permet d'obtenir des résultats négatifs pour la convergence des sommes de Riesz (cf. [2]).

Ajouté á la correction des épreuves: Les résultats de cet article ont été obtenus de maniére indépendante par R. Stanton (Cornell University).

References

[1] A. Bonami et J. L. Clerc, *Sommes de Cesàro et multiplicateurs des développements en harmoniques sphériques*, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1973), p. 223–263.

[2] J. L. Clerc, *Sommes de Riesz et multiplicateurs sur un groupe de Lie compact*, Ann. Inst. Fourier 24 (1974), p. 149–172.

[3] Harish-Chandra, *Spherical functions on a semisimple Lie group*, *I*, Amer. J. Math. 80 (1958), p. 241–310.

[4] Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, New York 1962.

[5] R. Strichartz, *Multiplier transformations on compact Lie groups and algebras*, à paraître.

Received May 14, 1974 (830)

(²) p est un nombré fixé, $1 \leqslant p < +\infty$.

STUDIA MATHEMATICA, T. LVII. (1976)

On Λ-bounded variation

by

DANIEL WATERMAN (Syracuse, N.Y.)

Abstract. If $\Lambda = \{\lambda_n\}$ is an increasing sequence of positive numbers such that $\sum 1/\lambda_n$ diverges, the functions of *Λ-bounded variation* (ΛBV) are those f for which $\sum_1^\infty |f(I_n)|/\lambda_n < \infty$ for every sequence $\{I_n\}$ of non-overlapping intervals. These were introduced previously and various results on the summability and convergence of the Fourier series of functions of this class were proven. Here equivalent definitions are given and the point and interval variation functions are defined. The continuity properties of the variation functions are established. An analogue of Helly's theorem is given and it is shown that ΛBV is a Banach space with a suitable norm. Some open questions are indicated.

The concept of bounded variation has been generalized in many ways. In most instances, these new notions have been introduced because of their applicability to the study of Fourier series. The present generalization, Λ-bounded variation, is no exception to this rule.

Let us suppose that f is a real function defined on an interval I. We let $\{I_n\}$ denote a sequence of non-overlapping intervals $I_n = [a_n, b_n] \subset I$ and write $f(I_n) = f(b_n) - f(a_n)$. Throughout this paper, when we consider a collection of intervals, they will be assumed to be non-overlapping without further reference to that fact. Let Λ denote a non-decreasing sequence $\{\lambda_n\}$ of positive real numbers such that $\sum 1/\lambda_n$ diverges. The following definition was introduced by us previously [9].

DEFINITION. A function f is said to be of *Λ-bounded variation* (ΛBV) if, for every $\{I_n\}$, we have

$$\sum |f(I_n)|/\lambda_n < \infty.$$

The special case $\Lambda = \{n\}$ gives rise to the class of functions of *harmonic bounded variation* (HBV). The notion of HBV has its genesis in the work of Goffman and Waterman on everywhere convergence of Fourier series and everywhere convergence of Fourier series for every change of variable [3]–[5].

In our previous paper [9] we have shown that the functions of class HBV satisfy the Lebesgue test for convergence of their Fourier series