Contents of volume LVII, number 2

The journal prints original papers in English, French, German and Russian, mainly of functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The papers submitted should be typed on one side only and they should be accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies, one of them being the typed, not Xerox copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
ul. Śniadeckich 8
00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to:

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
ul. Śniadeckich 8
00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller or at

ARS POLONA
Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

STUDIA MATHEMATICA, T. LVII. (1976)

Opérateurs uniformément convexifiants

par

B. BEAUZAMY (Paris)

Résumé. Nous étendons aux opérateurs entre espaces de Banach des notions propres à la géométrie des espaces de Banach, comme l'uniforme convexité. A partir d'une généralisation de la propriété d'arbre fini, nous démontrons d'abord un théorème de représentation et un théorème d'uniforme convexité. Ceux-ci sont ensuite utilisés pour démontrer un certain nombre de propriétés des opérateurs introduits. Enfin, nous intéressant aux espaces d'interpolation, nous obtenons, en appliquant les résultats précédents, plusieurs caractérisations de la géométrie de ces espaces.

INTRODUCTION

Dans les pages qui suivent, nous montrerons comment des notions propres à la géométrie des espaces de Banach, telle l'uniforme convexité, s'étendent de façon naturelle au cadre plus large des opérateurs entre espaces de Banach. Nous démontrerons ainsi des analogues de certains théorèmes classiques. Mais ce nouveau cadre apparaît vite comme beaucoup plus vaste: par exemple, factorisation par un espace uniformément convexe et factorisation par un opérateur uniformément convexe s'y distinguent de façon essentielle, alors qu'ils se réduisaient à une même question. De même, si le problème des rapports entre B-convexité et super-réflexivité a été longtemps ouvert pour les espaces, il est immédiatement résolu pour les opérateurs, car les deux classes sont complètement distinctes. De tels exemples sont nombreux.

Les opérateurs que nous allons introduire ne pourront donc posséder que certaines des propriétés généralisant celles des espaces; elles seront toutefois assez nombreuses pour permettre quelques applications. Nous montrerons en outre par des contre-exemples que les autres ne sont pas vraies.

Dans un premier chapitre, après avoir donné les définitions nécessaires, nous démontrerons un théorème de représentation (théorème I.1) et un théorème d'uniforme convexité (théorème I.2). Celui-ci permettra, au chapitre II, d'étudier quelques propriétés des opérateurs introduits, principalement composition, somme, transposition et action sur $l^p(E)$.

Le chapitre III sera surtout consacré aux espaces d'interpolation, dont nous examinerons d'abord la réflexivité, puis l'uniforme convexité et l'uniforme convexifiabilité. Nous donnerons pour terminer une application du théorème I.2.

Je tiens à remercier les Professeurs P. Enflo et L. Schwartz pour leurs conseils et pour l'intérêt qu'ils ont porté aux questions traitées ici. Je tiens en outre à remercier tout particulièrement M. B. Maurey pour ses nombreuses remarques et suggestions, qui ont été d'un grand profit.

NOTATIONS ET RAPPELS

Dans ce qui suit, si E est un espace de Banach, $\mathscr{B}_E$ désigne sa boule unité. Si W est un convexe borné équilibré dans E, j_W désigne sa jauge. Elle est définie par

$$j_W(x) = \inf\{\lambda,\ \lambda W \ni x\} \quad \text{si } x \text{ peut être absorbé par } W,$$
$$= +\infty \quad \text{sinon.}$$

Puisque W est borné, il y a une constante C telle que

$$\|x\|_E \leqslant C j_W(x) \quad \text{pour tout} \quad x \text{ de } E.$$

Dans la suite, "opérateur" signifiera "opérateur linéaire continu".

CHAPITRE I

DÉFINITIONS ET PREMIÈRES CARACTÉRISATIONS

Les définitions que nous allons donner dans ce chapitre permettent d'étendre au cadre des opérateurs entre espaces de Banach les notions d'uniforme convexité et d'uniforme convexifiabilité. La propriété d'arbre est au centre de l'étude de ces questions dans les espaces de Banach; nous en ferons notre point de départ. Nous rappelons d'abord les définitions usuelles.

Définition ([5] et [4]). Soit F un espace de Banach et $\|\ \|$ sa norme. Nous dirons qu'un couple (x_1, x_2) de points de F forme une $(1, \varepsilon)$ branche dans F si $\|x_1 - x_2\| \geqslant \varepsilon$.

Supposons définie une $(n-1, \varepsilon)$ branche dans F; nous dirons que le 2^n-uple $(x_1, \ldots, x_{2^n})$ forme une (n, ε) branche dans F si

$$\|x_{2i} - x_{2i-1}\| \geqslant \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, 2^{n-1},$$

et si le 2^{n-1}-uple $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \ldots, \dfrac{x_{2^n-1}+x_{2^n}}{2}\right)$ forme une $(n-1, \varepsilon)$ branche dans F.

Nous dirons que F possède la propriété d'arbre fini si, pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut trouver, pour tout n, une (n, ε) branche dans F dont tous les points sont dans la boule unité de F.

Nous allons étendre cette définition:

Définition 1. Soit W un convexe borné de F. Nous dirons que W *possède la propriété d'arbre fini dans* F, si, pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut trouver, pour tout n, une (n, ε) branche dans F dont tous les points sont dans W.

Cette définition se réduit évidemment à la définition usuelle lorsque l'on prend pour W la boule unité de F.

Nous utiliserons aussi la notion d'arbre infini, introduite dans [5]:

Définition. On dit que F *possède la propriété d'arbre infini* si, pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut, pour tout n, trouver dans la boule unité de F un 2^n-uple $x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$, avec $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$, tel que

— pour chaque n, les 2^n points $x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, forment une (n, ε) branche dans F;

— pour chaque n, pour chaque choix de $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1} = \pm 1$, on a

$$x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}} = \frac{x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}-1} + x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}+1}}{2}.$$

Nous généraliserons cette définition comme la précédente:

Définition 2. Soit W un convexe borné dans F; nous dirons que W *possède la propriété d'arbre infini dans* F si, pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut trouver une suite de 2^n-uples vérifiant les conditions précédentes, dont tous les points sont dans W.

Nous nous intéresserons surtout, par la suite, aux convexes qui ne possèdent pas la propriété d'arbre fini dans F. Nous allons démontrer une première propriété de ces convexes.

Proposition I.1. *Si W, convexe borné de F, ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F, W est relativement faiblement compact dans F.*

Nous aurons besoin d'un lemme, dont la démonstration est évidente.

Lemme. *Si W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F, il en est de même de $\overline{W}$.*

Démontrons maintenant la proposition: supposons que $\overline{W}$ ne soit pas faiblement compact. D'après un théorème de R. C. James [6], th. 3, on peut trouver, pour un certain $\theta \in]0, 1[$, une suite de points de $\overline{W}$, $z_1, \ldots, z_n, \ldots$, et une suite de formes linéaires continues sur F, $g_1, \ldots, g_n, \ldots$, avec $\|g_i\| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$, telles que

$$g_n(z_k) = 0 \quad \text{si} \quad n > k,$$
$$g_n(z_k) = \theta \quad \text{si} \quad n \leqslant k.$$

Il en résulte que pour $n = 1, 2, \ldots$

$$\left| g_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i - \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i z_i\right)\right| = \left|\sum_{n+1}^{\infty} \beta_i\right| \theta$$

et donc

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i z_i - \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i z_i\right\| \geqslant \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i\right| \theta.$$

Si l'on choisit les a_i, β_i positifs, avec $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, $\sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i = 1$, on obtient, pour tout n:

(I.1) $$\operatorname{dist}\big(\operatorname{conv}(z_1, \ldots, z_n), \operatorname{conv}(z_{n+1}, \ldots, \ldots)\big) \geqslant \theta$$

(en notant "conv" l'enveloppe convexe).

Pour $n = 1$, cette condition implique $\|z_1 - z_2\| \geqslant \theta$, et les points z_1, z_2 forment une $(1, \theta)$ branche dans F. Suppons que l'on ait montré que les points $(z_1, \ldots, z_{2m})$ formaient une (m, θ) branche dans F. En choisissant $n = 1, 3, 5, \ldots, 2^{m+1}-1$, dans (I.1), on obtient:

$$\|z_1 - z_2\|_F \geqslant \varepsilon, \ldots, \|z_{2^{m+1}-1} - z_{2^{m+1}}\|_F \geqslant \theta.$$

D'autre part, (I.1) implique que pour tout k,

$$\operatorname{dist}\left(\operatorname{conv}\left(\frac{z_1+z_2}{2}, \frac{z_3+z_4}{2}, \ldots, \frac{z_{2k-1}+z_{2k}}{2}\right), \operatorname{conv}\left(\frac{z_{2k+1}+z_{2k+2}}{2}, \ldots,\right)\right) \geqslant \theta$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence, les points

$$\left(\frac{z_1+z_2}{2}, \ldots, \frac{z_{2^{m+1}-1}+z_{2^{m+1}}}{2}\right)$$

forment une (m, θ) branche. Nous avons donc montré que pour tout m, les points $(z_1, \ldots, z_{2^m})$ formaient une (m, θ) branche. Comme tous ces points sont dans $\overline{W}$ celui-ci possède la propriété d'arbre fini dans F; il en est de même de W d'après le lemme.

La définition qui suit permettra d'énoncer le théorème de représentation.

Définition 3. Soient F et F_1 deux espaces de Banach, W et W_1 deux convexes équilibrés bornés dans F et F_1 respectivement. Nous dirons que (W_1, F_1) est finiment représentable dans (W, F) si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace de dimension finie F_1^0 de F_1, on peut trouver un sous-espace de même dimension F^0 de F et un isomorphisme T_ε^0 de F_1^0 sur F^0, avec

(I.2) $$\|T_\varepsilon^0\| \leqslant 1+\varepsilon, \ \|(T_\varepsilon^0)^{-1}\| \leqslant 1+\varepsilon \quad \text{et} \quad T_\varepsilon^0(W_1 \cap F_1^0) \subset (1+\varepsilon)\, W.$$

Cette définition se réduit à la définition usuelle de la finie représentabilité si $W = \mathscr{B}_F$ et $W_1 = \mathscr{B}_{F_1}$.

Proposition I.2. *Soit W un convexe équilibré borné dans F. W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F si et seulement si, pour tout fouple (W_1, F_1) finiment représentable dans (W, F), W_1 est relativement caiblement compact dans F_1.*

Démonstration. a) *Condition nécessaire.* Au vu de la proposition I.1, il suffit de montrer que si W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F et si (W_1, F_1) est finiment représentable dans (W, F), W_1 ne la possède pas non plus.

Supposons donc le contraire: soit $\varepsilon > 0$, et $x_1^1, \ldots, x_{2^n}^1$ des points de W_1 formant une (n, ε) branche dans F_1. Notons F_1^0 le sous-espace engendré par ces points. On peut, par définition, trouver un sous-espace F^0 de F, de même dimension, et un isomorphisme T_ε^0 de F_1^0 sur F vérifiant (I.2). Notons $x_1, \ldots, x_{2^n}$ les images de $x_1^1, \ldots, x_{2^n}^1$ par T_ε^0. Puisque x_i^1 est dans $W_1 \cap F_1^0$, x_i est dans $(1+\varepsilon)\, W$, pour $i = 1, \ldots, 2^n$. D'autre part, les inégalités définissant la propriété d'arbre, par exemple

$$\|x_{2i}^1 - x_{2i-1}^1\|_{F_1} \geqslant \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, 2^{n-1}$$

impliquent

$$\|x_{2i} - x_{2i-1}\|_F \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad i = 1, \ldots, 2^{n-1}.$$

En remplaçant les points x_i par leurs homothétiques de rapport $\dfrac{1}{1+\varepsilon}$, on obtient 2^n points dans W qui forment une $\left(n, \dfrac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\right)$ branche dans F.

Ce raisonnement peut être fait pour chaque n; il montre donc que W possède la propriété d'arbre fini dans F.

b) *Condition suffisante.* Nous supposons maintenant que W possède la propriété d'arbre fini dans F. Nous faisons la même construction que R. C. James dans [5]. Notons $x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}^{(n)}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$, les éléments de la (n, ε) branche qui, pour tout n, existe par hypothèse dans W. Posons, si $k \leqslant n$,

$$x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}^{(n)} = \frac{1}{2^{n-k}} \sum_{\tilde{\varepsilon}_i = \pm 1} x^{(n)}{}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \tilde{\varepsilon}_{k+1} \ldots \tilde{\varepsilon}_n}.$$

Désignons par $(\xi_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n})$ une suite de symboles indexée par les 2^n-uples de ± 1, $n = 1, 2, \ldots$ Ordonnons la suite des 2^n-uples de nombres rationnels, indexés de la même façon. Pour le premier, soit $a_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k_1}}^1$, on peut, puisque W est borné, trouver une suite d'entiers k_n^1 telle que les quantités

$$\left\| \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ j = 1, \ldots, K_1}} a_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k_j}}^1 x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k_j}}^{(k_n^1)} \right\|$$

aient une limite lorsque $n\to\infty$. Pour le second 2^n-uple de rationnels, on extraira une sous-suite des (k_n^1), et ainsi de suite. Prenant enfin la suite diagonale extraite, on obtient une suite d'entiers, (k_n), pour laquelle les quantités

$$\Big\| \sum_{\substack{\varepsilon_i=\pm 1\\ j=1,\dots,k}} a_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{l_j}} x^{(k_n)}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{l_j}} \Big\|$$

ont une limite lorsque n tend vers l'infini, pour n'importe quel l entier, n'importe quel 2^l-uple $a_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_l}$ de nombres rationnels. On pose alors

$$\lim_{n=\pm\infty} \Big\| \sum_{\substack{\varepsilon_i=\pm 1\\ j=1,\dots,K}} a_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{l_j}} x^{(k_n)}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{l_j}} \Big\| = \Big| \sum_{\substack{\varepsilon_i=\pm 1\\ j=1,\dots,K}} a_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{l_j}} \xi_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{l_j}} \Big|$$

et on étend la définition de $|\cdot|$ aux suites finies de réels; on a ainsi défini une semi-norme. Soit Y l'espace obtenu. Pour obtenir une norme, on passe au quotient: si N désigne l'ensemble des combinaisons de symboles (ξ) pour lesquelles

$$\Big| \sum_{\substack{\xi_i=\pm 1\\ j=1,\dots,K}} a_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{k_j}} \xi_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{k_j}} \Big| = 0,$$

on posera $F_1 = Y/N$. On obtient ainsi un espace normé. Cet espace F_1 est finiment représentable dans F, et les $(\xi_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_k})$ y forment un arbre infini: ces propriétés sont démontrées dans [5] (voir aussi [2]).

Si maintenant nous posons $W_1 = \operatorname{conv}\big((\xi_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_k})\big)$, nous obtenons un convexe possédant la propriété d'arbre infini dans F_1, et le couple (W_1, F_1) est finiment représentable dans (W, F). W_1 ne peut être relativement faiblement compact dans F_1 d'après un lemme d'Asplund et Namioka déjà utilisé dans [5]. Ceci achève la démonstration de la proposition.

Remarque. Si W est relativement compact dans F, et si (W_1, F_1) est finiment représentable dans (W, F), W_1 est relativement compact dans F_1, comme on le voit en utilisant la précompacité.

Proposition I.3. *Soit W un convexe équilibré borné de F. W possède la propriété d'arbre fini dans F si et seulement si l'on peut trouver un nombre θ, $0<\theta<1$, et, pour tout K entier, pour tout $\varepsilon>0$, des points $x_1,\dots,x_K$ dans W, des formes linéaires $h_1,\dots,h_K$ sur F, de norme au plus égale à 1, tels que:*

$$h_n(x_k) \geqslant \theta(1-\varepsilon) \quad si \quad n\leqslant k, \qquad |h_n(x_k)| \leqslant \varepsilon \quad si \quad k<n\leqslant K. \tag{I.3}$$

Démonstration. a) Supposons que W possède la propriété d'arbre fini dans F. Au cours de la démonstration de la propriété précédente, nous avons construit un espace F_1 et un convexe W_1, avec (W_1, F_1) finiment représentable dans (W, F), tels que $\overline{W}_1$ ne soit pas faiblement compact dans F_1. D'après un théorème de James déjà invoqué, on peut alors trouver, pour un certain θ, $0<\theta<1$, une suite de points $z_1,\dots$ de $\overline{W}_1$, une suite de formes linéaires $g_1,\dots$ sur F_1 uniformément bornées, telles que:

$$g_n(z_k) = \theta \quad \text{si} \quad n\leqslant k,$$
$$g_n(z_k) = 0 \quad \text{si} \quad n>k.$$

On peut évidemment, quitte à changer θ, supposer $\|g_n\|\leqslant 1$ pour tout n. Soit $\varepsilon>0$ fixé. Choisissons des points y_k dans W_1 pour que

$$\|y_k - z_k\| \leqslant \varepsilon\theta, \qquad k=1,2,\dots$$

Si $n\leqslant k$, on a:

$$g_n(y_k) \geqslant g_n(z_k) - |g_n(y_k-z_k)| \geqslant g_n(z_k) - \|y_k-z_k\| \geqslant \theta(1-\varepsilon)$$

et si $n>k$:

$$|g_n(y_k)| \leqslant \|y_k-z_k\| \leqslant \varepsilon.$$

Notons H_K le sous-espace de F_1 engendré par les K premiers points (y_i); par définition, il est isomorphe à un sous-espace F_K de F. Soit A_K l'isomorphisme. On a également, par définition,

$$A_K(y_k) \in (1+\varepsilon)\, W, \qquad k=1,\dots,K.$$

Notons

$$x_k = A_K(y_k), \qquad k=1,\dots,K.$$

On a:

$$g_n\circ A_K^{-1}(x_k) \geqslant \theta(1-\varepsilon) \quad \text{si} \quad n\leqslant k,$$
$$|g_n\circ A_K^{-1}(x_k)| \geqslant \varepsilon \quad \text{si} \quad k<n\leqslant K.$$

On prolonge les formes linéaires $g_n\circ A_K^{-1}$, définies sur F_K et de norme $1+\varepsilon$ au plus, en des formes linéaires h_n définies sur F et de même norme. Les points $\dfrac{1}{1+\varepsilon}x_k$, $k=1,\dots,K$, appartiennent à W et possèdent, relativement à ces formes linéaires, les propriétés voulues.

b) Supposons qu'inversement la propriété (I.3) soit satisfaite pour $K=1,2,\dots$ Alors, pour tout $k=1,2,\dots,K-1$, on a:

$$\Big| h_{k+1}\Big(\sum_1^k a_i x_i - \sum_{k+1}^K a_i x_i\Big)\Big| \geqslant \theta(1-\varepsilon)\Big|\sum_1^k a_i\Big| - \varepsilon\Big|\sum_{k+1}^K a_i\Big|$$

et donc, si $\sum\limits_1^k a_i = 1$ et $\sum\limits_{k+1}^K a_i = 1$,

$$\Big| h_{k+1}\Big(\sum_1^k a_i x_i - \sum_{k+1}^K a_i x_i\Big)\Big| \geqslant \theta(1-\varepsilon) - \varepsilon$$

et, puisque $\|h_{k+1}\| \leqslant 1+\varepsilon$,

$$\Big\| \sum_{1}^{k} a_i x_i - \sum_{k+1}^{K} a_i x_i \Big\| \geqslant \frac{\theta(1-\varepsilon)-\varepsilon}{1+\varepsilon} > \theta/2,$$

si ε a été choisi suffisamment petit.

Il en résulte que

$$\operatorname{dist}\big(\operatorname{conv}(x_1 \dots x_k), \operatorname{conv}(x_{k+1}, \dots, x_K)\big) \geqslant \theta/2.$$

En choisissant pour K une puissance de 2, $K = 2^N$, on en déduit, comme on l'a déjà vu, que les points $(x_1, \dots, x_{2^N})$ forment une $(N, \theta/2)$ branche dans F. Il en résulte que W possède la propriété d'arbre fini dans F.

Nous allons maintenant donner quelques définitions permettant de traduire ces résultats en termes d'opérateurs.

Définition 4. Soient E et F deux espaces de Banach, T un opérateur de E dans F. Nous dirons que T est *uniformément convexifiant* si $W = T(\mathscr{B}_E)$ ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F.

Remarque. Si $E = F$ et $T = \mathrm{Id}$, cette définition signifie, d'après P. Enflo [4], que l'espace est uniformément convexifiable. L'application identique d'un espace uniformément convexifiable constitue donc notre premier exemple d'opérateur uniformément convexifiant.

Remarquons d'autre part que le noyau de T n'intervient pas dans la définition donnée: si $\tilde{T}$ est défini, par passage au quotient, de $E/\operatorname{Ker} T$ dans F, $\tilde{T}$ est uniformément convexifiant si et seulement si T l'est.

Définition 5. Soient T de E dans F et T_1 de E_1 dans F_1 deux opérateurs. Nous dirons que T_1 est *finiment représentable* dans T si, posant $W = T(\mathscr{B}_E)$, $W_1 = T_1(\mathscr{B}_{E_1})$, le couple (W_1, F_1) est finiment représentable dans (W, F).

Il résulte de la remarque précédente que T_1 est finiment représentable dans T si et seulement si $\tilde{T}_1$ l'est dans $\tilde{T}$.

Dans le cas où W et W_1 sont totaux dans F et F_1 respectivement, la définition 5 admet une formulation équivalente:

Lemme. *Supposons que W soit total dans F et que W_1 soit total dans F_1. Posons $\tilde{E} = E/\operatorname{Ker} T$, $\tilde{E}_1 = E_1/\operatorname{Ker} T_1$. T_1 est finiment représentable dans T si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace de dimension finie $\tilde{E}_1^0$ de $\tilde{E}_1$, on peut trouver un sous-espace de dimension finie $\tilde{E}^0$ de E et une application $\mathscr{U}_\varepsilon^0$ de $\tilde{E}_1^0$ sur $\tilde{E}^0$ tels que, pour tout x de $\tilde{E}_1^0$, on ait*

$$\text{(I.4)} \qquad \|\mathscr{U}_\varepsilon^0\| \leqslant 1+\varepsilon \quad \text{et} \quad \big|\|\tilde{T}_1 x\| - \|\tilde{T}\mathscr{U}_\varepsilon^0 x\|\big| \leqslant \varepsilon \|x\|.$$

Démonstration. a) Supposons la condition (I.4) satisfaite. Soit F_1^0 un sous-espace de dimension finie de F_1. On peut l'approcher, à ε près, par un sous-espace de dimension finie de l'espace vectoriel engendré par W_1, noté encore F_1^0 pour simplifier. On définit un opérateur de F_1^0 sur un sous-espace de même dimension de F en posant

$$A_\varepsilon^0 = \tilde{T}\mathscr{U}_\varepsilon^0(\tilde{T}^{-1}|_{F_1^0}).$$

Il est clair que $A_\varepsilon^0(W_1 \cap F_1^0) \subset (1+\varepsilon)W$. Par ailleurs, pour tout y de $F_1^0 \cap W_1$, on a, d'après (I.4):

$$\big|\|y\| - \|Ay\|\big| \leqslant \varepsilon.$$

b) Supposons maintenant que T_1 soit finiment représentable dans T. Soit $\tilde{E}_1^0$ un sous-espace de dimension finie de $\tilde{E}_1$. Il est l'antécédent d'un sous-espace de dimension finie de F_1, F_1^0. Par hypothèse, il existe un opérateur A_ε^0 de F_1^0 sur un sous-espace F^0 de F, avec

$$\|A_\varepsilon^0\| \, \|(A_\varepsilon^0)^{-1}\| \leqslant 1+\varepsilon, \quad \text{et} \quad A_\varepsilon^0(W_1 \cap F_1^0) \subset (1+\varepsilon)W.$$

On pose alors

$$\mathscr{U}_\varepsilon^0 = \tilde{T}^{-1} A_\varepsilon^0 \tilde{T}_1.$$

On a alors:

$$\|\mathscr{U}_\varepsilon^0\| \leqslant 1+\varepsilon, \quad \text{et} \quad \big|\|\tilde{T}_1 x\| - \|\tilde{T}\mathscr{U}_\varepsilon^0 x\|\big| = \big|\|\tilde{T}_1 x\| - \|A_\varepsilon^0 \tilde{T}_1 x\|\big| \leqslant \varepsilon \|x\|,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de représentation:

Théorème I.1. *Un opérateur T est uniformément convexifiant si et seulement si tout opérateur qui est finiment représentable dans T se factorise par un espace réflexif.*

Si T est uniformément convexifiant, ceci signifie que pour tout opérateur T_1, de E_1 dans F_1, finiment représentable dans T, on peut trouver un espace réflexif Y_1 et deux opérateurs u_1, de E_1 dans Y_1, et v_1, de Y_1 dans F_1, avec $T_1 = v_1 \circ u_1$.

Démonstration. a) Supposons que T soit uniformément convexifiant, et soit T_1 finiment représentable dans T. Alors (W_1, F_1) est finiment représentable dans (W, F); d'après la proposition I.2, W_1 est relativement faiblement compact dans F_1, et donc T_1 est faiblement compact et se factorise par un espace réflexif d'après un théorème de Davis–Figiel–Johnson–Pełczyński [3].

Nous verrons au chapitre III que l'on peut choisir pour cet espace un espace d'interpolation; nous obtiendrons ainsi toute une famille d'espaces réflexifs convenant pour la factorisation.

b) Supposons inversement que tout opérateur T_1 finiment représentable dans T se factorise par un espace réflexif. Alors, pour tout couple (W_1, F_1) finiment représentable dans (W, F), W_1 est relativement faiblement compact dans F_1. Ceci implique, d'après la proposition I.2, que W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F, et donc que T est uniformément convexifiant, ce qui prouve le théorème.

Remarque. Il résulte de la remarque faite après la proposition I.2 que tout opérateur compact est uniformément convexifiant.

De même que les espaces super-réflexifs sont uniformément convexifiables, les opérateurs que nous venons d'introduire possèdent des propriétés d'uniforme convexité. Ces propriétés vont être l'objet principal de notre étude. Il sera commode d'utiliser la notion d'arbre fini dans un nouveau cadre.

Soit E un espace de Banach, et soit q une semi-norme sur E. Nous supposons en outre q continue sur E: il existe alors une constante C telle que

$$q(x) \leqslant C\|x\|_E \quad \text{pour tout } x \text{ de } E.$$

Définition 6. Nous dirons que deux points (x_1, x_2) de E forment une $(1, \varepsilon)$ q-branche dans E si $q(x_1 - x_2) \geqslant \varepsilon$.

Supposons définie une $(n-1, \varepsilon)$ q-branche dans E; nous dirons que le 2^n-uple $(x_1, \ldots, x_{2^n})$ forme une (n, ε) q-branche dans E si

$$q(x_{2i} - x_{2i-1}) \geqslant \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, 2^{n-1},$$

et si le 2^{n-1}-uple $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{2^n-1}+x_{2^n}}{2}\right)$ forme une $(n-1, \varepsilon)$ q-branche dans E.

Nous dirons que E possède la propriété de q-arbre fini si, pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut, pour tout n, trouver une (n, ε) q-branche dans la boule unité de E.

Le théorème qui suit sera l'outil essentiel pour les applications. Il généralise le résultat de P. Enflo [4].

Théorème I.2. *E ne possède pas la propriété de q-arbre fini si et seulement si l'on peut trouver sur E une nouvelle norme, notée $|\cdot|$, équivalente à la précédente, possédant la propriété suivante:*

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que, pour tout couple (x, y) de points de E, les conditions

$$|x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1, \quad q(x-y) \geqslant \varepsilon$$

impliquent $\left|\frac{x+y}{2}\right| \leqslant 1-\delta$.

Démonstration. a) *Condition suffisante.* Les trois premiers lemmes qui suivent utilisent, pour l'essentiel, les idées de [4], et les démonstrations ne sont que des adaptations de celles de [4], aussi n'en donnerons-nous pas les détails.

Remarquons que, quitte à remplacer q par un homothétique, nous pouvons supposer q de norme au plus égale à 1, c'est-à-dire $q(x) \leqslant \|x\|$ pour tout x de E, sans modifier la propriété de q-arbre fini. Nous ferons cette hypothèse dans la suite.

Définition. Soit z un point de E. Nous dirons que le couple (x_1, x_2) de points de E forme une $(1, \varepsilon)$ q-partition de z si

$$x_1 + x_2 = z,$$
$$\|x_1\| = \|x_2\|,$$
$$q\left(\frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|}\right) \geqslant \varepsilon.$$

Supposons définie une $(n-1, \varepsilon)$ q-partition de z; nous dirons que le 2^n-uple $(x_1, \ldots, x_{2^n})$ de points de E forme une (n, ε) q-partition de z si

$$\|x_{2j}\| = \|x_{2j-1}\|, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1},$$
$$q\left(\frac{x_{2j}}{\|x_{2j}\|} - \frac{x_{2j-1}}{\|x_{2j-1}\|}\right) \geqslant \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1},$$

et si le 2^{n-1}-uple $(x_1+x_2, \ldots, x_{2^n-1}+x_{2^n})$ forme une $(n-1, \varepsilon)$ q-partition de z.

Lemme 1. *Si E ne possède pas la propriété de q-arbre fini, il existe un entier n et un nombre $\delta > 0$ tels que, pour tout z de E et toute (n, ε) q-partition de z, $(x_1, \ldots, x_{2^n})$, on ait:*

$$\sum^{2^n} \|x_j\| \geqslant (1+\delta)\|z\|.$$

Démonstration. Soit $(x_1, \ldots, x_{2^m})$ une (m, ε) q-partition de z. Les deux vecteurs $x_1 + \ldots + x_{2^{m-1}}$, $x_{2^{m-1}+1} + \ldots + x_{2^m}$ ont une somme de norme 1 (on suppose $\|z\| = 1$ pour simplifier) et sont de même norme. Par conséquent les normes de ces deux vecteurs sont au moins égales à $1/2$. On a donc

$$q\big(2(x_1 + \ldots + x_{2^{m-1}}) - 2(x_{2^{m-1}+1} + \ldots + x_{2^m})\big) \geqslant \varepsilon,$$

et la norme de chacun des vecteurs est au moins égale à 1. On a donc obtenu une $(1, \varepsilon)$ q-branche dont tous les vecteurs ont une norme au moins égale à 1. On montre alors par récurrence que les vecteurs $2^m x_1, \ldots, 2^m x_{2^m}$ forment une (m, ε) q-branche et ont tous une norme au moins égale à 1. Mais puisque E ne possède pas la propriété de q-arbre fini, il existe un n et un $\delta > 0$ tels que les (n, ε) q-branches ainsi formées aient au moins un vecteur de norme supérieure à $1 + 2^n \cdot \delta$. Le lemme 1 en résulte aussitôt.

On définit un écart comme dans [4].

Lemme 2. *Soit E ne possédant pas la propriété de q-arbre fini, et soit $\varepsilon > 0$. Soient n, δ donnés par le lemme 1; on suppose $0 < \delta < \varepsilon < 1/8$.*

Il existe un écart sur E, noté $!\cdot!$, et un nombre $\delta_1 > 0$ tels que

a) $(1-\delta)\|x\| \leqslant !x! \leqslant \|x\|$ *pour tout x de E,*

b) *les conditions $\|x\| = \|y\| = 1$, $q(x-y) \geqslant \varepsilon$ impliquent*

$$!x+y! \leqslant !x!+!y!-\delta_1.$$

Démonstration. Pour tout z de E, on pose

$$!z! = \inf \frac{\sum_1^{2^m} \|u_j\|}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^m}\right)}$$

l'infimum étant pris sur $m = 0, 1, \ldots, n$, et toutes les (m, ε) q-partitions de z. Le calcul est analogue à celui de [4].

Lemme 3. *Soit E ne possédant pas la propriété de q-arbre fini, et soit $\varepsilon > 0$. Soient n, δ comme précédemment. Il existe une norme $|\cdot|_{5\varepsilon}$ sur E avec*

a) $(1-\delta)\|x\| \leqslant |x|_{5\varepsilon} \leqslant \|x\|$ *pour tout x de E,*

b) *les conditions*

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad q(x-y) \geqslant 5\varepsilon$$

impliquent

$$|x+y|_{5\varepsilon} \leqslant |x|_{5\varepsilon} + |y|_{5\varepsilon} - \varepsilon\delta_1$$

où δ_1 est le nombre donné par le lemme 2.

Démonstration. On définit $|x|_{5\varepsilon}$ comme l'infimum des longueurs, dans l'écart introduit au lemme 2, des polygones reliant 0 à x. Le calcul est analogue à celui de [4].

On déduit du lemme 3:

Lemme 3bis. *Si E ne possède pas la propriété de q-arbre fini, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver une norme $|\cdot|_\varepsilon$ sur E et un nombre $\delta > 0$ tels que*

a) $\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\|x\| \leqslant |x|_\varepsilon \leqslant \|x\|$ *pour tout x de E,*

b) *Pour tous points (x, y) de E, les conditions $\|x\| = \|y\| = 1$, $q(x-y) \geqslant \varepsilon$ impliquent $|x+y|_\varepsilon \leqslant |x|_\varepsilon + |y|_\varepsilon - \delta$.*

Lemme 4. *Si E ne possède pas la propriété de q-arbre fini, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver une norme $|\cdot|_\varepsilon$ sur E, et un nombre $\delta > 0$ tels que*

a) $\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\|x\| \leqslant |x|_\varepsilon \leqslant \|x\|$ *pour tout x de E,*

b) *les conditions $|x|_\varepsilon = |y|_\varepsilon = 1$, $q(x-y) \geqslant \varepsilon$ impliquent*

$$|x+y|_\varepsilon \leqslant |x|_\varepsilon + |y|_\varepsilon - \delta.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la norme $|\cdot|_{\varepsilon/4}$ du lemme 3bis vérifie la condition b). On la prendra pour norme $|\cdot|_\varepsilon$. Soient x, y deux points de E avec $|x|_\varepsilon = |y|_\varepsilon = 1$, $q(x-y) \geqslant \varepsilon$. On peut trouver deux scalaires α et β avec:

$$\|\alpha x\| = \|\beta y\| = 1$$

et, d'après a):

$$1-\frac{\varepsilon}{4} \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 1-\frac{\varepsilon}{4} \leqslant \beta \leqslant 1.$$

On peut écrire:

$$\begin{aligned} q(\alpha x - \beta y) &= q\big(x-y+(\alpha-1)x-(\beta-1)y\big) \\ &\geqslant q(x-y)-(1-\alpha)q(x)-(1-\beta)q(y) \end{aligned}$$

et on sait que

$$q(x) \leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{4}},$$

et de même

$$q(y) \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{4}},$$

et que $1-\alpha \leqslant \varepsilon/4$, $1-\beta \leqslant \varepsilon/4$.

On en déduit

$$q(\alpha x - \beta y) \geqslant \varepsilon - \frac{\frac{2\varepsilon}{4}}{1-\frac{\varepsilon}{4}} \geqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Le lemme 3bis permet donc d'écrire:

$$|\alpha x + \beta y|_\varepsilon \leqslant |\alpha x|_\varepsilon + |\beta y|_\varepsilon - \delta \leqslant \alpha + \beta - \delta.$$

Mais d'autre part, on a

$$\begin{aligned} |\alpha x + \beta y|_\varepsilon &= |x+y+(\alpha-1)x+(\beta-1)y|_\varepsilon \\ &\geqslant |x+y|_\varepsilon - (1-\alpha)|x|_\varepsilon - (1-\beta)|y|_\varepsilon \\ &\geqslant |x+y|_\varepsilon - (1-\alpha) - (1-\beta). \end{aligned}$$

et donc

$$|x+y|_\varepsilon \leqslant 1-\alpha+1-\beta+\alpha+\beta-\delta = 2-\delta.$$

Ce qui démontre le lemme 4.

Lemme 5. *Si E ne possède pas la propriété d'arbre fini, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver une norme $|\cdot|_\varepsilon$ sur E, et, pour tout p avec $1 < p < \infty$,* *un nombre* $\delta_p > 0$, *tels que*

a) $\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\|x\|_E \leqslant |x|_\varepsilon \leqslant \|x\|_E$ *pour tout* x *de* E,

b) *Pour tous points* x, y *de* E, *la condition*

$$q(x-y) \geqslant \varepsilon \sup(|x|_\varepsilon, |y|_\varepsilon)$$

implique

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_\varepsilon^p \leqslant \frac{1}{2}(1-\delta_p)(|x|_\varepsilon^p + |y|_\varepsilon^p). \tag{I.3}$$

Démonstration. Prenons pour $|\cdot|_\varepsilon$ la norme $|\cdot|_{\varepsilon/2}$ du lemme précédent. Compte tenu de l'homogénéité de la condition (I.3), il suffit de montrer qu'elle est réalisée, pour tous points x, y de E, dès que $|x|_\varepsilon \leqslant 1$, $|y|_\varepsilon \leqslant 1$, $q(x-y) \geqslant \varepsilon$.

Supposons que ceci ne soit pas vrai. On pourrait alors, pour tout n, trouver des points x_n, y_n dans E avec

$$|x_n|_\varepsilon \leqslant 1, \quad |y_n|_\varepsilon \leqslant 1, \quad q(x_n - y_n) \geqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } n,$$

et

$$\frac{\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|_\varepsilon^p}{\frac{1}{2}(|x_n|_\varepsilon^p + |y_n|_\varepsilon^p)} \to 1, \quad n \to \infty. \tag{a}$$

Un argument semblable a été utilisé dans [7], p. 357, pour caractériser l'uniforme convexité d'un espace.

On peut évidemment, dans (a), supposer $|x_n|_\varepsilon = 1$, $|y_n|_\varepsilon \leqslant 1$, pour tout n. Montrons d'abord que (a) implique que $|y_n|_\varepsilon \to 1$, lorsque $n \to \infty$. En effet, si ceci n'était pas vrai, on aurait, pour un certain $\mu < 1$,

$$|y_n| \leqslant \mu < 1, \quad \text{pour tout } n.$$

On en déduirait que pour un certain $\varrho < 1$,

$$\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|_\varepsilon^p \leqslant [\tfrac{1}{2}(1+|y_n|_\varepsilon)]^p \leqslant \varrho/2(1+|y_n|_\varepsilon^p)$$

car la fonction

$$\frac{(\frac{1}{2}(1+t))^p}{\frac{1}{2}(1+t^p)}$$

prend son maximum, entre 0 et 1, pour $t = 1$, et ce maximum est 1. Ceci contredirait (a). Donc (a) implique que $|y_n|_\varepsilon \to 1$, $n \to \infty$.

Mais puisque

$$\frac{\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|_\varepsilon^p}{\frac{1}{2}(1+|y_n|_\varepsilon^p)} \to 1, \quad n \to \infty,$$

il en résulte que

$$\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|_\varepsilon \to 1, \quad n \to \infty,$$

et que

$$\left|\frac{x_n + \frac{y_n}{|y_n|_\varepsilon}}{2}\right|_\varepsilon \to 1, \quad n \to \infty,$$

ce qui contredit le lemme 4, car:

$$|x_n|_\varepsilon = 1, \quad \frac{|y_n|_\varepsilon}{|y_n|_\varepsilon} = 1,$$

et

$$q\left(x_n - \frac{y_n}{|y_n|_\varepsilon}\right) \geqslant q(x_n - y_n) - q\left(y_n - \frac{y_n}{|y_n|_\varepsilon}\right)$$

$$\geqslant \varepsilon - \left\|y_n - \frac{y_n}{|y_n|_\varepsilon}\right\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

dès que n est assez grand.

Ceci achève la démonstration du lemme 5.

Lemme 6. *Si* E *ne possède pas la propriété de* q*-arbre fini, on peut, pour tout* $\eta > 0$, *trouver une norme* $|\cdot|$ *sur* E, *avec*:

a) $\left(1-\frac{\eta}{4}\right)\|x\|_E \leqslant |x| \leqslant \|x\|_E$ *pour tout* x *de* E,

possédant la propriété suivante,

b) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, *tel que, pour tout couple* (x, y) *de points de* E, *les conditions*

$$|x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1, \quad q(x-y) \geqslant \varepsilon$$

impliquent

$$\left|\frac{x+y}{2}\right| \leqslant 1-\delta.$$

Démonstration. Choisissons un réel p, avec $1 < p < \infty$. Pour tout $\eta > 0$, définissons, pour chaque point x de E:

$$|x|^p = \frac{1}{2}|x|_1^p + \frac{1}{2}|x|_2^p + \ldots + \frac{1}{2^k}|x|_k^p + \ldots$$

où l'on a posé

$$|x|_k = |x|_{\frac{C}{2^k}}, \quad C = \left(1-\frac{\eta}{4}\right)\eta,$$

et $|x|C/2^k$ est la norme donnée par le lemme 5 pour la valeur de ε égale à $C/2^k$.

On a
$$\left(1-\frac{C}{4\cdot 2^k}\right)\|x\| \leqslant |x|_{C/2^k} \leqslant \|x\| \quad \text{pour tout } x \text{ de } E,$$
et donc
$$|x| \leqslant \|x\|$$
et
$$|x|^p \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{C}{4\cdot 2^k}\right)^p\|x\|^p \geqslant \left(1-\frac{C}{4}\right)^p\|x\|^p$$
$$\geqslant \left(1-\frac{\eta}{4}\right)^p\|x\|^p.$$
Ce qui prouve a).

Pour la condition b), il est clair qu'il suffit de la vérifier en prenant pour ε une suite de nombres tendant vers 0, par exemple $\eta\cdot 2^{-n}$, $n=1,2,\ldots$

Soit donc n_0 un entier, et soient x, y deux points de E avec
$$|x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1, \quad q(x-y) \geqslant 2^{-n_0}\cdot\eta.$$
Puisque $|x| \leqslant 1$, on a $\|x\| \leqslant \dfrac{1}{1-\eta/4}$, et donc
$$|x|_k \leqslant \frac{1}{1-\eta/4}, \quad |y|_k \leqslant \frac{1}{1-\eta/4}.$$
De la condition
$$q(x-y) \geqslant 2^{-n_0}\cdot\eta$$
on déduit donc
$$q(x-y) \geqslant 2^{-n_0}\left(1-\frac{\eta}{4}\right)\cdot\eta\cdot\sup(|x|_k, |y|_k)$$
et donc
$$q(x-y) \geqslant \frac{\eta\left(1-\dfrac{\eta}{4}\right)}{2^k}\sup(|x|_k, |y|_k)$$
dès que $k \geqslant n_0$.

Pour $k \geqslant n_0$, on peut écrire, d'après le lemme 5:
$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_k^p \leqslant \tfrac{1}{2}(1-\delta_p)(|x|_k^p+|y|_k^p)$$
où δ_p est le nombre donné par le lemme 5 pour la valeur $C/2^k$ de ε. Pour les autres termes, on utilisera le lemme suivant.

LEMME. *Soit p, $1<p<\infty$. Pour tous points x, y d'un espace normé E, on a*
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p \leqslant \tfrac{1}{2}(\|x\|^p+\|y\|^p)$$
(en effet, $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| \leqslant 2^{1/p'}\cdot(\|x\|^p+\|y\|^p)^{1/p}$).

On a donc
$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leqslant \sum_{k\neq n_0}\frac{1}{2^k}\,\frac{1}{2}(|x|_k^p+|y|_k^p)+\frac{1}{2}(1-\delta_p)|x|_{n_0}^p+|y|_{n_0}^p$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_k\frac{1}{2^k}(|x|_k^p+|y|_k^p)-\frac{\delta}{2}(|x|_{n_0}^p+|y|_{n_0}^p)$$
$$\leqslant 1-\frac{\delta}{2}(|x|_{n_0}^p+|y|_{n_0}^p).$$
Par ailleurs, *si* $1/p+1/p'=1$, *on a*:
$$(|x|_{n_0}^p+|y|_{n_0}^p)^{1/p} \geqslant 2^{-1/p'}(|x|_{n_0}+|y|_{n_0})$$
$$\geqslant 2^{-1/p'}\left(1-\frac{C}{4\cdot 2^{n_0}}\right)\|x-y\|$$
$$\geqslant 2^{-1/p'}\left(1-\frac{\eta}{4}\right)q(x-y)$$
$$\geqslant 2^{-1/p'}\left(1-\frac{\eta}{4}\right)\varepsilon$$
et donc
$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leqslant 1-\varepsilon^p 2^{-p/p'}\left(1-\frac{\eta}{4}\right)^p\frac{\delta_p}{2} = 1-\frac{\varepsilon^p}{2^p}\left(1-\frac{\eta}{4}\right)^p\delta_p.$$
Ce qui achève la démonstration du lemme 6, et celle de la première partie du théorème.

b) *Condition nécessaire.* La démonstration de cette partie est simple; elle reprend une idée de R. C. James dans [5].

Supposons que l'on puisse trouver une norme $|\cdot|$ équivalente à la norme de E, vérifiant la conclusion du théorème. Il existe deux constantes C_1 et C_2, avec:
$$C_1\|x\| \leqslant |x| \leqslant C_2\|x\|$$
pour tout x de E.

Supposons en outre que E possède la propriété de q-arbre fini. On peut alors, pour un certain $\varepsilon>0$, trouver, pour tout n, des points $x_1,\ldots,x_{2^n}$ dans la boule unité de E, formant une (n, ε) q-branche dans E.

On a alors
$$|x_i| \leqslant C_2, \quad i = 1, \ldots, 2^n,$$
et
$$q\left(\frac{x_{2i}}{C_2} - \frac{x_{2i-1}}{C_2}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{C_2}, \quad i = 1, \ldots, 2^{n-1},$$
et donc
$$\left|\frac{x_{2i}+x_{2i-1}}{2C_2}\right| \leqslant 1-\delta, \quad i = 1, \ldots, 2^{n-1}.$$
En réitérant ce procédé on obtient:
$$\left|\frac{x_1+\ldots+x_{2^{n-1}}}{2^{n-1}C_2}\right| \leqslant (1-\delta)^{n-1},$$
$$\left|\frac{x_{2^{n-1}+1}+\ldots+x_{2^n}}{2^{n-1}C_2}\right| \leqslant (1-\delta)^{n-1}$$
ce qui contredit
$$\begin{aligned}\left|\frac{x_1+\ldots+x_{2^{n-1}}}{2^{n-1}C_2} - \frac{x_{2^{n-1}+1}+\ldots+x_{2^n}}{2^{n-1}C_2}\right| & \\ \geqslant C_1 & \left\|\frac{x_1+\ldots+x_{2^{n-1}}}{2^{n-1}C_2} - \frac{x_{2^{n-1}+1}+\ldots+x_{2^n}}{2^{n-1}C_2}\right\| \\ \geqslant \frac{C_1}{C_2} & q\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^{n-1}}}{2^{n-1}} - \frac{x_{2^{n-1}+1}+\ldots+x_{2^n}}{2^{n-1}}\right) \\ \geqslant \varepsilon & \frac{C_1}{C_2}\end{aligned}$$
dès que n a été choisi assez choisi assez grand. Cette contradiction montre que E ne peut posséder la propriété de q-arbre fini, et achève la démonstration du théorème.

Remarque 1. Dans la démonstration du lemme 6, nous avons obtenu toute une famille de normes possédant la propriété d'uniforme convexité cherchée, arbitrairement proches de la norme de E (entre $(1-\varepsilon)\|x\|$ et $\|x\|$). Nous n'avons mentionné qu'une seule norme dans l'énoncé du théorème, car il est connu qu'à partir d'une norme équivalente à celle de E, possédant les propriétés d'uniforme convexité mentionnées, on peut reconstituer toute une famille, arbitrairement proche de la norme d'origine de E, qui a encore les mêmes propriétés: il suffit de prendre $(\|x\|_E^p + \alpha|x|^p)^{1/p}$, pour les $\alpha > 0$.

Remarque 2. Par un raisonnement analogue à celui fait au lemme 5, on peut mettre la conclusion du théorème I.2 sous la forme suivante, que nous appellerons forme homogène:

E ne possède pas la propriété de q-arbre fini si et seulement si on peut trouver une norme $|\cdot|$, équivalente à celle de E, et, pour tout p avec $1 < p < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, un nombre $\delta_p > 0$ tels que, pour tout couple (x, y) de points de E, la condition
$$q(x-y) \geqslant \varepsilon \sup(|x|, |y|),$$
implique
$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leqslant \tfrac{1}{2}(1-\delta_p)(|x|^p + |y|^p).$$

Avant d'appliquer ce théorème aux opérateurs uniformément convexifiants, donnons une définition:

DÉFINITION 7. Soient E et F deux espaces de Banach, T un opérateur de E dans F. Nous dirons que T est uniformément convexe si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que, pour tout couple (x, y) de points de E, les conditions
$$\|x\|_E \leqslant 1, \quad \|y\|_E \leqslant 1, \quad \|Tx - Ty\|_F \geqslant \varepsilon$$
impliquent
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_E \leqslant 1-\delta.$$

COROLLAIRE DU THÉORÈME I.2. *T est uniformément convexifiant si et seulement si l'on peut trouver une nouvelle norme sur E, notée $|\cdot|$, équivalente à la norme de E, telle que T soit uniformément convexe de E muni de $|\cdot|$ dans F.*

Démonstration. La première partie résulte du fait, que l'on constate aisément, qu'un opérateur uniformément convexe est convexifiant.

La seconde résulte du théorème I.2, si l'on prend pour semi norme
$$q(x) = \|Tx\|_F.$$
On vérifie en effet sur les définitions que E ne possède pas la propriété de q-arbre fini si et seulement si $W = T(\mathscr{B}_E)$ ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F.

Remarque. La condition "T uniformément convexifiant" est nécessaire, mais non suffisante, pour que T se factorise par un espace super-réflexif.

a) La condition est nécessaire. Si T se factorise par un espace Y super-réflexif, soient u, de E dans Y, v, de Y dans F, tels que $T = v \circ u$. Soient $W = T(\mathscr{B}_E)$, $V = u(\mathscr{B}_E)$. Si l'on pouvait trouver, pour tout n, despoints $(x_1, \ldots, x_{2^n})$ formant une (n, ε) branche dans F, avec $x_i \in W$, $i = 1, \ldots, 2^n$, leurs antécédents par v, $y_1, \ldots, y_{2^n}$, formeraient une (n, ε) branche dans Y, et $\|y_i\|_Y \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, 2^n$. La boule unité de Y contiendrait, pour tout n, une (n, ε) branche dans Y, ce qui contredirait le fait que Y fût super-réflexif.

b) La condition n'est pas suffisante. Considérons l'espace d'Orlicz $L^\varphi([0,1], dt)$, avec $\varphi(t) = t\big(1+\operatorname{Log}(1+t)\big)$. Puisque $\varphi(t) \geqslant t$, il y a une injection continue de L^φ dans L^1, notée i. L'image de la boule unité de L^φ par i est l'ensemble W des fonctions de L^1 qui vérifient

$$\int_0^1 |f(t)|\big(1+\operatorname{Log}(1+|f(t)|)\big)\,dt \leqslant 1.$$

LEMME. *W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans L^1.*

Démonstration du lemme. Supposons la conclusion fausse; soient $f_1, \ldots, f_{2^n}$ des points de W formant une (n, ε) branche dans L^1. Il résulte de la définition de W que l'on peut trouver un nombre $M > 0$ tel que, pour toute fonction f de W, on ait

$$\int_{|f|>M} |f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon/4.$$

Posons $\tilde{f} = f$ si $|f| < M$, $\tilde{f} = 0$ sinon. On a donc $\|f-\tilde{f}\|_{L^1} \leqslant \varepsilon/4$ et il est aisé de vérifier que les $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{2^n})$ forment une $(n, \varepsilon/2)$ branche dans L^1. Mais $\|\tilde{f}_i\|_{L^2} \leqslant \sqrt{M}$, et, puisque les conditions définissant une branche sont satisfaites dans $L^1([0,1], dt)$, elles le sont a fortiori dans $L^2([0,1], dt)$. Les fonctions $\frac{1}{\sqrt{M}}\tilde{f}_i$, $i = 1, \ldots, 2^n$, forment donc une $\left(n, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{M}}\right)$ branche dans la boule unité de L^2; il est impossible que ceci se produise pour tout n, car L^2 est uniformément convexe. Ceci prouve le lemme.

Supposons maintenant que l'injection $i\colon L^\varphi \to L^1$ se factorise par un espace Y super-réflexif. Puisque Y ne contient pas l_n^1 uniformément, Y est de type p-stable, pour un $p > 1$ (d'après [12]). Par conséquent, d'après [9], on peut trouver une fonction ψ telle que

$$\left(\int\left|\frac{i(f)}{\psi}\right|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \|f\|_{L^\varphi} \quad \text{pour tout } f \text{ de } L^\varphi.$$

Il existe un nombre N tel que l'ensemble

$$A = \{t,\ |\psi(t)| < N\}$$

soit de mesure non nulle. On a donc

$$\frac{1}{N}\left(\int_A |i(f)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant \|f\|_{L^\varphi}$$

et ceci prouverait que toutes les fonctions de L^φ ont des moments d'ordre p, $p > 1$, sur un même ensemble A de mesure non nulle; ceci est impossible pour la fonction φ choisie.

Remarque. Il résulte du critère de Dunford–Pettis que, pour un opérateur T d'un espace de Banach E dans un espace $L^1(\Omega, \mu)$, où μ est une probabilité, les conditions suivantes sont équivalentes:

a) T est faiblement compact;

b) T est uniformément convexifiant;

c) On peut trouver une fonction Φ, convexe, avec $\Phi(t)/t$ tendant vers l'infini lorsque t tend vers l'infini, telle que T se factorise par l'injection de L^Φ dans L^1.

Nous avons vu que les opérateurs compacts étaient uniformément convexifiants, et que ces derniers étaient faiblement compacts. Il en résulte que, pour des opérateurs partant de c_0, ou à valeurs dans l^1, uniformément convexifiant est équivalent à faiblement compact et à compact.

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES OPÉRATEURS UNIFORMÉMENT CONVEXIFIANTS

Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques propriétés des opérateurs introduits au chapitre I. La première sera la composition:

PROPOSITION II.1. *Soient E, F, G trois espaces de Banach, et u, de E dans F, v, de F dans G, deux opérateurs linéaires continus. Si u ou v est uniformément convexifiant, le composé $v \circ u$ l'est aussi.*

Démonstration. Posons $V = u(\mathscr{B}_E)$, $W = v\circ u(\mathscr{B}_E)$. Si $v\circ u$ n'est pas uniformément convexifiant, W possède la propriété d'arbre fini dans G: on peut, pour tout n, trouver dans W des points $z_1, \ldots, z_{2^n}$, formant une (n, ε) branche dans G. Mais ces points sont dans $v(V)$, et donc dans $\|u\|\cdot v(\mathscr{B}_F)$. Donc les points $\frac{1}{\|u\|}\cdot z_i$, $i = 1, \ldots, 2^n$, sont dans $v(\mathscr{B}_F)$ et forment une $(n, \varepsilon/\|u\|)$ branche dans G; v ne peut donc être uniformément convexifiant.

Soient $y_1, \ldots, y_{2^n}$ des antécédents de $z_1, \ldots, z_{2^n}$ par v; y_i est dans V et on a

$$\|y_{2i}-y_{2i-1}\|_F\|v\| \geqslant \|z_{2i}-z_{2i-1}\|_G \geqslant \varepsilon$$

et donc $\|y_{2i}-y_{2i-1}\|_F \geqslant \varepsilon/\|v\|$; les autres inégalités définissant une branche s'obtiennent de la même façon. On obtient donc des points de V formant une $(n, \varepsilon/\|v\|)$ branche dans F; il en résulte que u ne peut être uniformément convexifiant.

Il résulte évidemment de cette proposition que des opérateurs à valeurs dans un espace super-réflexif, ou partant d'un espace superréflexif, sont uniformément convexifiants.

Proposition II.2. *Si T_1 et T_2 sont deux opérateurs uniformément convexifiants de E dans F, la somme T_1+T_2 est uniformément convexifiante.*

Démonstration. On peut supposer sans restriction $\|T_1\| \leqslant 1$, $\|T_2\| \leqslant 1$. Soit p, $1<p<\infty$. Soient $|x|_1$ et $|x|_2$ les normes sur E données, pour T_1 et T_2, par le théorème I.2. La somme $(|x|_1^p+|x|_2^p)^{1/p} = |x|$ est équivalente à la norme de E. Soit $\varepsilon>0$ et soient x, y deux points de E, avec

$$|x| \leqslant 1, \qquad |y| \leqslant 1, \qquad \|(T_1+T_2)(x-y)\| \geqslant \varepsilon.$$

On a:

$$\|T_1(x-y)\| + \|T_2(x-y)\| \geqslant \varepsilon$$

et donc

(1) $$\|T_1(x-y\| \geqslant \varepsilon/2$$

ou

(2) $$\|T_2(x-y)\| \geqslant \varepsilon/2$$

supposons que (1) soit vérifié; on a alors

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_1^p \leqslant \tfrac{1}{2}(1-\delta_1)(|x|_1^p+|y|_1^p)$$

où δ_1 est donné par le théorème I.2, et on écrit

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_2^p \leqslant \tfrac{1}{2}(|x|_2^p+|y|_2^p)$$

d'où

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leqslant \tfrac{1}{2}(|x|_1^p+|x|_2^p+|y|_1^p+|y|_2^p) - \frac{\delta}{2}(|x|_1^p+|y|_1^p),$$

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leqslant 1-\frac{\delta_1}{2}(|x|_1^p+|y|_1^p).$$

Or

$$(|x|_1^p+|y|_1^p)^{1/p} \geqslant |x-y|_1 \geqslant C_1\|x-y\| \geqslant C_1\|T_1(x-y)\| \geqslant C_1\frac{\varepsilon}{2}$$

où C_1 est la constante telle que

$$|x|_1 \geqslant C_1\|x\| \quad \text{pour tout } x \text{ de } E.$$

On a donc

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leqslant 1-\frac{\delta_1}{2}C_1^p\frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

Si la condition (2) avait été vérifiée, on aurait obtenu de la même façon

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leqslant 1-\frac{\delta_2}{2}C_2^p\frac{\varepsilon^p}{2^p} = 1-\delta_2 C_2^p\frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}}.$$

Ce qui prouve la proposition.

Nous allons donner une autre application du théorème I.2. Auparavant, nous allons démontrer:

Proposition II.3. *Si T est uniformément convexe de E dans F, il l'est également de $L^p(\Omega,\mu;E)$ dans $L^p(\Omega,\mu;F)$, si $1<p<\infty$ et si (Ω,μ) désigne un espace mesuré.*

Démonstration. Nous noterons simplement $L^p(E)$ l'espace $L^p(\Omega, \mu; E)$. Soient $x, y \in L^p(E)$, avec

$$\|x\|_{L^p(E)} \leqslant 1, \qquad \|y\|_{L^p(E)} \leqslant 1, \qquad \|Tx-Ty\|_{L^p(F)} \geqslant \varepsilon\cdot 4^{1/p}.$$

L'idée de la démonstration est voisine de celle de [7], p. 357. Nous pouvons supposer $\|T\| \leqslant 1$. Notons M l'ensemble des ω pour lesquels

$$\|Tx(\omega)-Ty(\omega)\|_F^p \geqslant \varepsilon^p\big(\|x(\omega)\|_E^p+\|y(\omega)\|_E^p\big) \geqslant \varepsilon^p \sup\big(\|x(\omega)\|_E^p, \|y(\omega)\|_E^p\big).$$

Si $\omega\in M$, on va utiliser le lemme suivant:

Lemme. *Si T est uniformément convexe de E dans F, pour tout $\varepsilon>0$, pour tout p, avec $1<p<\infty$, on peut trouver un nombre $\delta_p>0$, tel que, pour tout couple (x, y) de points de E, la condition*

$$\|T(x-y)\|_F \geqslant \varepsilon \sup(\|x\|_E, \|y\|_E)$$

implique

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_E^p \leqslant \tfrac{1}{2}(1-\delta_p)(\|x\|_E^p+\|y\|_E^p).$$

Cette caractérisation homogène de l'uniforme convexité d'un opérateur à partir de la caractérisation de définition s'obtient comme pour un espace (voir [7] p. 357); une démonstration voisine a été donnée au lemme 5, chapitre I.

Donc, si $\omega\in M$, on a

$$\left\|\frac{x(\omega)+y(\omega)}{2}\right\|^p \leqslant \tfrac{1}{2}(1-\delta_p)\big(\|x(\omega)\|^p+\|y(\omega)\|^p\big)$$

et si $\omega \in M' = \complement M$, on a

$$\|Tx(\omega)-Ty(\omega)\|_F^p \leqslant \varepsilon^p\big(\|x(\omega)\|_E^p+\|y(\omega)\|_E^p\big)$$

et donc

$$\int_{M'} \|Tx(\omega)-Ty(\omega)\|_F^p d\mu \leqslant \varepsilon^p\Big(\int \|x(\omega)\|^p d\mu + \int \|y(\omega)\|^p d\mu\Big) \leqslant 2\varepsilon^p$$

et donc

$$\int_M \|Tx(\omega)-Ty(\omega)\|_F^p d\mu \geqslant 2\varepsilon^p.$$

On en déduit

$$\sup\Big(\int_M \|Tx(\omega)\|_F^p d\mu, \int_M \|Ty(\omega)\|_F^p d\mu\Big) \geqslant \frac{\varepsilon^p}{2^{p-1}}.$$

Or on sait (démonstration du lemme 6, chap. I) que, pour tout ω de Ω, on a:

$$\tfrac{1}{2}\left(\|x(\omega)\|^p+\|y(\omega)\|^p\right)-\left\|\frac{x(\omega)+y(\omega)}{2}\right\|^p\geqslant 0$$

et par conséquent

$$\int_\Omega\left(\tfrac{1}{2}\left(\|x(\omega)\|^p+\|y(\omega)\|^p\right)-\left\|\frac{x+y}{2}(\omega)\right\|^p\right)d\mu$$
$$\geqslant\int_M\left(\tfrac{1}{2}\left(\|x(\omega)\|^p+\|y(\omega)\|^p\right)-\left\|\frac{x(\omega)+y(\omega)}{2}\right\|^p\right)d\mu$$
$$\geqslant\tfrac{1}{2}\delta_p\sup\left(\int_M\|x(\omega)\|^p d\mu,\ \int_M\|y(\omega)\|^p d\mu\right)$$
$$\geqslant\tfrac{1}{2}\delta_p\sup\left(\int_M\|Tx(\omega)\|^p d\mu,\ \int_M\|Ty(\omega)\|^p d\mu\right)$$
$$\geqslant\tfrac{1}{2}\delta_p\frac{\varepsilon^p}{2^{p-1}}=\frac{\varepsilon^p}{2^p}\delta_p$$

et donc

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{L^p(E)}\leqslant\left(1-\frac{\varepsilon^p}{2^p}\delta_p\right)^{1/p},$$

ce qui prouve la proposition.

Corollaire. *Il résulte du théorème* I.2 *et de cette proposition que si T est uniformément convexifiant de E dans F, il l'est également de $L^p(E)$ dans $L^p(F)$, si $1<p<\infty$.*

Si en effet $|\cdot|$ est la norme sur E qui rend T uniformément convexe, la norme $[\![x]\!]=\left(\int|x(\omega)|^p d\mu\right)^{1/p}$ sera équivalente à la norme de $L^p(E)$ et rendra T uniformément convexe de $L^p(E)$ dans $L^p(F)$.

Remarque. Ces résultats valent aussi pour $l^p(E)$ et $l^p(F)$, si $1<p<\infty$.

Il est connu qu'un espace est uniformément convexifiable si et seulement si son dual l'est (voir, par exemple [5]). La proposition que nous démontrons généralise cette propriété.

Proposition II. 4. *Un opérateur T est uniformément convexifiant si et seulement si son transposé l'est.*

Démonstration. a) Soit T un opérateur de E dans F; supposons qu'il ne soit pas convexifiant. Alors $W=T(\mathscr{B}_E)$ possède la propriété d'arbre fini dans F. D'après la proposition I.3, on peut trouver un nombre $\theta\in\,]0,1[$ et, pour tout entier $K\geqslant 1$, pour tout $\varepsilon>0$, des points $y_1,\dots,y_K$ de W, des formes linéaires $h_1,\dots,h_K$ sur F, de norme au plus égale à 1, vérifiant:

$$h_n(y_k)\geqslant\theta(1-\varepsilon)\quad\text{si}\quad n\leqslant k,$$
$$|h_n(y_k)|\leqslant\varepsilon\quad\text{si}\quad K\geqslant n>k.$$

Les points y_k sont les images de points x_k de la boule unité de E, pour lesquels on a donc

$$h_n(Tx_k)\geqslant\theta(1-\varepsilon),\quad n\leqslant k,$$
$$|h_n(Tx_k)|\leqslant\varepsilon,\quad k<n\leqslant K.$$

Si on désigne par $\tilde{x}_k$ l'image de x_k par l'injection canonique de E dans E'':

$$\tilde{x}_k({}^tTh_n)\geqslant\theta(1-\varepsilon),\quad n\leqslant k,$$
$$|\tilde{x}_k({}^tTh_n)|\leqslant\varepsilon,\quad k<n\leqslant K.$$

Il suffit maintenant de modifier la numérotation; on pose:

$$\xi_k=\tilde{x}_{K-k},\quad\text{et}\quad\xi_k\in\mathscr{B}_{E''},$$
$$e_l={}^tT\cdot h_{K-l},\quad\text{et}\quad e_l\in{}^tT(\mathscr{B}_{E'}).$$

Si $k\leqslant l$, on a $K-k\geqslant K-l$, et $\tilde{x}_{K-l}({}^tTh_{K-l})\geqslant\theta(1-\varepsilon)$, et $\xi_k(e_l)\geqslant\theta(1-\varepsilon)$ si $k\leqslant l$. Si $l<k\leqslant K$, $K-k<K-l$, et $|\tilde{x}_{K-k}({}^tTh_{K-l})|\leqslant\varepsilon$ et donc

$$|\xi_k(e_l)|\leqslant\varepsilon\quad\text{si}\quad l<k\leqslant K.$$

Ceci, d'après la proposition I.3, implique que ${}^tT(\mathscr{B}_{F'})$ possède la propriété d'arbre fini dans E', et donc que ${}^tT$ n'est pas convexifiant.

b) Supposons inversement que ${}^tT$ ne soit pas convexifiant. Utilisant la même caractérisation, nous pouvons trouver un $\theta\in\,]0,1[$, et, pour tout $K\geqslant 1$ et tout $\varepsilon>0$, des points $\xi_1,\dots,\xi_K$ dans F', de norme au plus égale à 1, et des formes linéaires $\eta_1,\dots,\eta_K$ sur E', avec $\|\eta_i\|_{E''}\leqslant 1$, $i=1,\dots,K$, vérifiant:

$$\eta_n({}^tT\xi_k)\geqslant\theta(1-\varepsilon),\quad\text{si}\quad n\leqslant k,$$
$$|\eta_n({}^tT\xi_k)|\leqslant\varepsilon,\quad\text{si}\quad k<n\leqslant K.$$

On sait que la boule unité de E est dense dans celle de E'' pour $\sigma(E'',E')$. On peut donc trouver des points $\eta_1',\dots,\eta_K'$ dans E, de norme au plus égale à 1, tels que

$$|\eta_i'({}^tT\xi_j)-\eta_i({}^tT\xi_j)|<\varepsilon\theta\quad\text{pour}\quad i=1,\dots,K,\quad\text{et}\quad j=1,\dots,K.$$

Il en résulte que si $n\leqslant k$,

$$\eta_n'({}^tT\xi_k)\geqslant\eta_n({}^tT\xi_k)-|\eta_n'({}^tT\xi_k)-\eta_n({}^tT\xi_k)|$$
$$\geqslant\theta(1-\varepsilon)-\varepsilon\theta=\theta(1-2\varepsilon)$$

et si $k < n \leqslant K$,

$$|\eta_n'({}^tT\xi_k)| \leqslant |\eta_n({}^tT\xi_k)| + |\eta_n'({}^tT\xi_k) - \eta_n({}^tT\xi_k)|$$
$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon\theta \leqslant 2\varepsilon.$$

Comme au paragraphe a), nous changeons la numérotation, en posant:

$$a_k = \eta'_{K-k}, \quad \text{et} \quad a_k \in \mathscr{B}_E,$$
$$f_n = \xi_{K-n}, \quad \text{et} \quad f_n \in \mathscr{B}_{E'}.$$

Nous obtenons

$$f_n(Ta_k) \geqslant \theta(1-2\varepsilon) \quad \text{si} \quad n \leqslant k,$$
$$|f_n(Ta_k)| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{si} \quad k < n \leqslant K$$

et ceci assure d'après la proposition I.3, que T n'est pas convexifiant, et termine la démonstration.

Nous allons maintenant donner un autre exemple d'opérateurs uniformément convexifiants:

EXEMPLE. Soit p un réel positif. Tout opérateur p-sommant, $p < \infty$, est uniformément convexifiant.

En effet, puisqu'un opérateur p-sommant est aussi q-sommant si $q > p$, nous pouvons nous restreindre au cas $1 < p < \infty$. D'après la factorisation de Pietsch (voir [11]), l'opérateur se factorise par un sous-espace d'un espace $L^p(K, \mu)$, $1 < p < \infty$. Celui-ci est uniformément convexe; la proposition II.1 implique que l'opérateur est uniformément convexifiant.

Un cas particulier de cet exemple est celui des opérateurs de rang fini, qui sont uniformément convexifiants.

Il résulte des propositions que l'ensemble des opérateurs uniformément convexifiants constitue un idéal, au sens de A. Pietsch (voir [11]). Cet idéal est fermé pour la norme d'opérateurs, comme on le vérifie aisément. Il contient l'idéal des opérateurs compacts et est contenu dans l'idéal des opérateurs faiblement compacts, les deux inclusions étant strictes.

CHAPITRE III

OPÉRATEURS UNIFORMÉMENT CONVEXIFIANTS ET ESPACES INTERMÉDIAIRES

Rappelons d'abord ce que l'on entend par espace intermédiaire. Si E et F sont deux espaces de Banach entre lesquels existe une injection continue i, un espace Y sera dit *intermédiaire entre E et F* si l'on peut trouver deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\|x\|_F \leqslant C_1\|x\|_Y \quad \text{pour tout } x \text{ de } Y,$$
$$\|x\|_Y \leqslant C_2\|x\|_E \quad \text{pour tout } x \text{ de } E.$$

Si F est un espace de Banach et W un convexe borné dans F, nous dirons qu'un convexe V est *intermédiaire entre W et $\mathscr{B}_F$* si l'on peut trouver deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\frac{1}{C_1}W \subset V, \quad \frac{1}{C_2}V \subset \mathscr{B}_F.$$

Les jauges vérifient alors

$$j_V(x) \leqslant C_1 j_W(x), \quad \|x\|_F \leqslant C_2 j_V(x) \quad \text{pour tout } x.$$

Nous nous intéressons d'abord à une classe particulière d'espaces intermédiaires: les espaces d'interpolation. Ceux que nous utiliserons ont été introduits par J. L. Lions et J. Peetre dans [8]. Il sera commode de rappeler ici les définitions et principales propriétés de ces espaces. Nous adoptons pour cette présentation les notations de [8]; nous serons obligés de les modifier par la suite pour revenir à nos notations antérieures.

Rappels sur les espaces d'interpolation. Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach contenus, avec injection continue, dans un même espace vectoriel topologique localement convexe séparé A.

On définit $A_0 \cap A_1$ et $A_0 + A_1$ par leur norme:

$$\|a\|_{A_0\cap A_1} = \max(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}),$$
$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a_0+a_1=a} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}).$$

Si ξ_0 et ξ_1 sont deux nombres réels, et $p \in [1, \infty]$, on définit $W(p; \xi_0, A_0; \xi_1, A_1)$ comme l'ensemble des fonctions u de $\boldsymbol{R}$ dans A telles que

$$e^{\xi_0 x}u(x) \in L^p(A_0), \quad e^{\xi_1 x}u(x) \in L^p(A_1)$$

et on munit cet espace de la norme

$$\|u\|_W = \max(\|e^{\xi_0 x}u(x)\|_{L^p(A_0)}, \|e^{\xi_1 x}u(x)\|_{L^p(A_1)}).$$

Si l'on suppose $\xi_0\xi_1 < 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$ converge dans $A_0 + A_1$, comme on le constate en décomposant u en $u = u_+ + u_-$. On désigne alors par $S(p; \xi_0, A_0; \xi_1, A_1)$ l'espace parcouru par $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)$ lorsque u parcourt W. On le munit de la norme

$$\|a\|_S = \inf_{a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx} \max(\|e^{\xi_0 x}u(x)\|_{L^p(A_0)}, \|e^{\xi_1 x}u(x)\|_{L^p(A_1)}).$$

S est un espace intermédiaire entre $A_0 \cap A_1$ et $A_0 + A_1$. Nous allons rappeler les autres définitions des espaces d'interpolation; nous renvoyons à [8] pour l'équivalence de ces définitions.

DÉFINITION 2. Les notations et hypothèses étant les mêmes que précédemment, on pose

$$\|a\|_{S_2} = \inf_{u(x)+v(x)=a} \max\left(\|e^{\xi_0 x}u(x)\|_{L^p(A_0)},\ \|e^{\xi_1 x}v(x)\|_{L^p(A_1)}\right)$$

l'infimum portant sur les fonctions u, v telles que $u(x)+v(x) = a$ pour presque tout x.

Les autres définitions sont des définitions discrètes; on remplace les hypothèses faites par leurs analogues.

DÉFINITION 3.

$$\|a\|_{s_1} = \inf_{\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n = a} \max\left(\|(e^{\xi_0 n}u_n)\|_{l^p(A_0)},\ \|(e^{\xi_1 n}u_n)\|_{l^p(A_1)}\right)$$

l'infimum portant sur les suites (u_n), $n \in \boldsymbol{Z}$, telles que $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n = a$.

DÉFINITION 4.

$$\|a\|_{S_2} = \inf_{u_n+v_n=a} \max\left(\|(e^{\xi_0 n}u_n)\|_{l^p(A_0)},\ \|(e^{\xi_1 n}v_n)\|_{l^p(A_1)}\right)$$

l'infimum portant sur les suites (u_n), (v_n), $n \in \boldsymbol{Z}$, telles que

$$u_n + v_n = a \quad \text{pour tout } n.$$

Notons maintenant quelques propriétés essentielles de ces espaces, démontrées dans [8]:

— on a, si $\theta = \dfrac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}$

$$\text{(III.1.a)} \qquad \|a\|_{S_1} = \inf_{\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx=a} \|e^{\xi_0 x}u(x)\|_{L^p(A_0)}^{1-\theta} \cdot \|e^{\xi_1 x}u(x)\|_{L^p(A_1)}^{\theta},$$

$$\text{(III.1.b)} \qquad \|a\|_{S_2} = \inf_{u(x)+v(x)=a} \|e^{\xi_0 x}u(x)\|_{L^p(A_0)}^{1-\theta} \cdot \|e^{\xi_1 x}v(x)\|_{L^p(A_1)}^{\theta},$$

$$\text{(III.1.c)} \qquad \|a\|_{s_1} \leqslant e^{\frac{-\xi_0\xi_1}{\xi_0-\xi_1}} \inf_{a=\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n} \|(e^{\xi_0 n}u_n)\|_{l^p(A_0)}^{1-\theta} \cdot \|(e^{\xi_1 n}u_n)\|_{l^p(A_1)}^{\theta},$$

$$\text{(III.1.d)} \qquad \|a\|_{s_2} \leqslant e^{\frac{-\xi_0\xi_1}{\xi_0-\xi_1}} \inf_{u_n+v_n=a} \|(e^{\xi_0 n}u_n)\|_{l^p(A_0)}^{1-\theta} \cdot \|(e^{\xi_1 n}v_n)\|_{l^p(A_1)}^{\theta}.$$

— Propriété d'interpolation: si T est continu de A_0 dans B_0 et de A_1 dans B_1, il l'est de $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ dans $(B_0, B_1)_{\theta,p}$, et

$$\|T\|_{\theta,p} \leqslant \|T\|_0^{1-\theta}\|T\|_1^{\theta}.$$

— Propriété de réitération: si A_{θ_0,p_0} et A_{θ_1,p_1} sont des espaces d'interpolation entre A_0 et A_1, les espaces d'interpolation entre A_{θ_0,p_0} et A_{θ_1,p_1} s'obtiennent comme espaces d'interpolation entre A_0 et A_1. Nous utiliserons aussi le résultat suivant démontré par J. Peetre dans [10]:

— A un isomorphisme près, l'espace $S(p;\ \xi_0, A_0, \xi_1, A_1)$ ne dépend que de p, A_0, A_1, et $\theta = \xi_0/(\xi_0 - \xi_1)$. On le note souvent $(A_0, A_1)_{\theta,p}$.

Nous serons amenés, par la suite, à introduire d'autres définitions des espaces d'interpolation. Remarquons que, bien évidemment, le choix de la définition n'a pas d'importance lorsqu'il s'agit de propriétés stables par isomorphisme, mais doit être précisé lorsque, par exemple, on parle d'uniforme convexité.

Dans plusieurs des propositions qui suivent, nous nous limiterons au cas où il existe une injection continue de A_0 dans A_1 ($A_0 \subset A_1$). Dans ce cas, $A_0 \cap A_1 = A_0$, $A_0 + A_1 = A_1$, et les espaces d'interpolation sont intermédiaires entre A_0 et A_1.

La première proposition que nous démontrerons se situe dans ce cadre; elle concerne la réflexivité des espaces d'interpolation lorsque $A_0 \subset A_1$ et répond à une question posée par L. Schwartz. Nous l'avons déjà évoquée au chapitre I, théorème 1. Hors ce fait, nous ne l'utiliserons pas dans les questions qui nous occupent ici, mais elle peut avoir en elle même un certain intérêt.

PROPOSITION III.1. *Si l'injection i de A_0 dans A_1 est faiblement compacte, les espaces d'interpolation $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ sont réflexifs, pour tout θ, $0 < \theta < 1$, et tout p, $1 < p < \infty$. Inversement, si l'un de ces espaces est réflexif, l'injection i est faiblement compacte.*

Démonstration. Il sera commode de choisir la norme s_2:

$$\|a\|_{s_2} = \inf_{u_n+v_n=x} \max\left(\|(e^{\xi_0 n}u_n)\|_{l^p(A_0)},\ \|(e^{\xi_1 n}v_n)\|_{l^p(A_1)}\right).$$

On choisira également $\xi_0 > 0$, $\xi_1 < 0$. Par ailleurs, remplacer la norme de A_0 ou de A_1 par une norme équivalente conduit à faire de même sur $(A_0, A_1)_{\theta,p} = A$. Nous ne changerons donc pas l'espace A, à un isomorphisme près, si nous remplaçons $\|\ \|_{A_0}$ par $C\|\ \|_{A_0}$; ceci permet de supposer que l'injection de A_0 dans A_1 est de norme 1.

Notons B_0, B_1, B les boules unité de A_0, A_1, A. B_0 est donc un sous-convexe de B_1. Puisque A est intermédiaire entre A_0 et A_1, on peut trouver deux constantes C_0 et C_1 telles que

$$C_0 A_0 \subset A \subset C_1 A_1.$$

Nous allons maintenant donner une définition équivalente de la norme de A.

LEMME. *La norme de A est équivalente à la norme*

$$|a| = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \|a\|_n^p\right)^{1/p}$$

où $\| \ \|_n$ *désigne la jauge du convexe*

$$\mathscr{U}_n = e^{-\xi_0 n} B_0 + e^{-\xi_1 n} B_1.$$

Démonstration. Dans ce qui suit, nous écrirons $\sim$ pour noter l'équivalence de deux normes.

Tout d'abord, il est clair que:

$$\|a\|_{s_2} \sim \inf_{u_n+v_n=a} [\|(e^{\xi_0 n} u_n)\|^p_{l^p(A_0)} + \|(e^{\xi_1 n} v_n)\|^p_{l^p(A_1)}]^{1/p}. \tag{1}$$

L'infimum étant pris dans (1) sur chaque terme de la somme, on obtient:

$$\|a\|_{s_2} \sim \Big[\sum_n \inf_{u_n+v_n=a} (\|e^{\xi_0 n} u_n\|^p_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|^p_{A_1})\Big]^{1/p},$$

$$\|a\|_{s_2} \sim \Big[\sum_n [\inf_{u_n+v_n=a} (\|e^{\xi_0 n} u_n\|^p_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|^p_{A_1})^{1/p}]^p\Big]^{1/p}. \tag{2}$$

Il nous reste donc à montrer que

$$\inf_{u_n+v_n=a} (\|e^{\xi_0 n} u_n\|^p_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|^p_{A_1})^{1/p} \sim \|a\|_n, \tag{3}$$

avec des constantes d'équivalence indépendentes de n. Or on a

$$(\|e^{\xi_0 n} u_n\|^p_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|^p_{A_1})^{1/p} \leqslant \|e^{\xi_0 n} u_n\|_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|_{A_1}$$

et

$$\|e^{\xi_0 n} u_n\|_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|_{A_1} \leqslant 2^{1/p'} (\|e^{\xi_0 n} u_n\|^p_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|^p_{A_1})^{1/p}.$$

Pour montrer (3), il nous suffira donc de montrer que

$$\inf_{u_n+v_n=a} (\|e^{\xi_0 n} u_n\|_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|_{A_1}) \sim \|a\|_n. \tag{4}$$

Supposons maintenant $\|a\|_n \leqslant 1$. Alors $a \in \mathscr{U}_n = e^{-\xi_0 n} B_0 + e^{-\xi_1 n} B_1$.

Pour tout $\eta > 0$, on peut donc trouver u_n, v_n, avec

$$u_n + v_n = a,$$
$$u_n \in (1+\eta) e^{-\xi_0 n} B_0,$$
$$v_n \in (1+\eta) e^{-\xi_1 n} B_1.$$

Et en particulier pour $\eta = \frac{1}{2}$. On a donc

$$\tfrac{2}{3} e^{\xi_0 n} u_n \in B_0, \quad \tfrac{2}{3} e^{\xi_1 n} v_n \in B_1,$$

d'où

$$\|e^{\xi_0 n} u_n\|_{A_0} \leqslant \tfrac{3}{2}, \quad \|e^{\xi_1 n} v_n\|_{A_1} \leqslant \tfrac{3}{2},$$
$$\|e^{\xi_0 n} u_n\|_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|_{A_1} \leqslant 3.$$

Ce qui montre la première partie de (4). Inversement, si

$$\inf_{u_n+v_n=a} \|e^{\xi_0 n} u_n\|_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|_{A_1} \leqslant 1,$$

on peut trouver u_n, v_n, avec $u_n + v_n = x$ et

$$\|e^{\xi_0 n} u_n\|_{A_0} + \|e^{\xi_1 n} v_n\|_{A_1} \leqslant 2$$

et donc

$$\|e^{\xi_0 n} u_n\|_{A_0} \leqslant 2, \quad \|e^{\xi_1 n} v_n\|_{A_1} \leqslant 2,$$

donc

$$u_n \in 2 \cdot e^{-\xi_0 n} B_0, \quad v_n \in 2 \cdot e^{-\xi_1 n} B_1$$

$$a = u_n + v_n \in 2 \cdot \mathscr{U}_n.$$

Donc $\|a\|_n \leqslant 2$.

Ceci montre la seconde partie de (4) et achève la démonstration du lemme. Nous prendrons désormais cette norme comme définissant A.

Nous avons ainsi obtenu pour l'espace d'interpolation $(A_0, A_1)_{\theta_1 p}$ une définition semblable à celle de l'espace construit par Davis–Figiel–Johnson–Pełczyński [3] pour la factorisation d'un opérateur faiblement compact. Il est dès lors possible d'adapter leurs arguments. Nous n'en donnerons que les grandes lignes, en renvoyant à [3] (voir également [2]) pour les détails.

La boule unité B de A est, d'après ce qui précède, l'ensemble des a de A_1 tels que $\big(\sum_{-\infty}^{+\infty} \|a\|^p_n\big)^{1/p} \leqslant 1$. Notons $A_{1,n}$ l'espace A_1 muni de la norme $\| \ \|_n$. Pour chaque n, cette norme est équivalente à la norme de A_1. En effet

$$e^{-\xi_1 n} B_1 \subset e^{-\xi_0 n} B_0 + e^{-\xi_1 n} B_1 \subset (e^{-\xi_0 n} + e^{-\xi_1 n}) B_1.$$

Désignons par Z l'ensemble des suites (z_n), $n \in \mathbf{Z}$, $z_n \in A_1$, muni de la norme

$$\|(z_n)\|_Z = (\Sigma \|z_n\|^p_n)^{1/p}.$$

On notera $Z = (\Sigma A_{1,n})_p$.

Notons également j l'injection de A dans A_1. On définit une application linéaire φ de A dans Z en posant

$$\varphi(y) = (\ldots, jy, jy, \ldots)$$

(l'image de y est une suite constante dont tous les termes valent jy).

On a $\|\varphi(y)\|_Z = \big(\sum_n \|jy\|^p_n\big)^{1/p} = |y|$ par définition, et φ est donc un plongement isométrique de A dans Z. On vérifie aisément que l'image de φ est un sous-espace fermé de Z. Puisque $Z = (\Sigma A_{1,n})_p$ et $1 < p < \infty$, on a $Z' = (\Sigma A'_{1,n})_{p'}$, $Z'' = (\Sigma A''_{1,n})_p$. On montre comme dans [3] que $\varphi''(A'')$ est constitué d'élements de la forme $(\ldots, z'', z'', \ldots)$, $z'' \in A''_1$, et que si $y \in A$, $\varphi''(y'') = (\ldots, j''y'', j''y'', \ldots)$.

On en déduit

$$\varphi''^{-1}(0) = \{0\}, \quad \varphi''^{-1} \circ \varphi(A) = A,$$

et

(1) $$j''^{-1}(A_1) = A.$$

Par ailleurs, on constate aisément que l'adhérence de B dans A_1'', pour $\sigma(A_1'', A_1')$, est $j''(\mathscr{B}_{A''})$.

Si maintenant l'injection de A_0 dans A_1 est faiblement compacte, $\bar{B}_0$ est $\sigma(A_1, A_1')$ compact, donc $\sigma(A_1'', A_1')$ compact. Or les ensembles $e^{-\xi_0 n}\bar{B}_0 + e^{-\xi_1 n}B_1''$, $n \in \boldsymbol{Z}$, contiennent B (car si $a \in B$, $\|a\|_n \leqslant 1$ pour tout n) et sont fermés pour $\sigma(A_1'', A_1')$. Ils contiennent donc $j''(B_{A''})$ d'après ce qui précède. Mais on a:

$$\bigcap_{n \leqslant 0} (e^{-\xi_0 n}\bar{B}_0 + e^{-\xi_1 n}B_1'') \subset \bigcap_{n \leqslant 0} (A_1 + e^{-\xi_1 n}B_1'') = A_1$$

car $\xi_1 < 0$. Donc

$$j''(\mathscr{B}_{A''}) \subset A'',$$

ce qui implique, d'après (1), que $\mathscr{B}_{A''} \subset A$, et A est réflexif.

Réciproquement, si l'un des espaces $A_{\theta,p}$ est réflexif ($0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$), l'injection de A_0 dans A_1, qui se factorise par cet espace, est faiblement compacte.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés d'uniforme convexité et convexifiabilité des espaces d'interpolation.

Proposition III.2. *Soient (A_0, A_1), (B_0, B_1) deux couples d'espaces de Banach. Soit T un opérateur continu de A_0 dans B_0 et de A_1 dans B_1. Si T est uniformément convexe de A_0 dans B_0, ou de A_1 dans B_1, il est uniformément convexe de $S_1(p;\xi_0, A_0;\xi_1, A_1)$ dans $S_1(p;\xi_0, B_0;\xi_1, B_1)$, et de $S_2(p;\xi_0, A_0;\xi_1, A_1)$ dans $S_2(p;\xi_0, B_0;\xi_1, B_1)$, pourvu que $1 < p < \infty$.*

Démonstration. Nous ne la donnons que pour S_1, l'autre étant similaire. Nous pouvons supposer sans restriction que T est de norme au plus égale à 1, de A_0 dans B_0 et de A_1 dans B_1.

Supposons donc T uniformément convexe de A_0 dans B_0. Soit $\varepsilon > 0$, et soient x, y deux points de S_1, de norme au plus égale à 1, avec $\|Tx - Ty\|_{S_1'} \geqslant \varepsilon$. On a posé

$$S_1 = S_1(p;\xi_0, A_0;\xi_1, A_1),$$
$$S_1' = S_1(p;\xi_0, B_0;\xi_1, B_1).$$

Pour tout $\eta > 0$, on peut trouver deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$ avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt = x, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,dt = y,$$

et

(III.2) $$\|e^{\xi_0 t}u(t)\|_{L^p(A_0)} \leqslant 1+\eta, \qquad \|e^{\xi_1 t}u(t)\|_{L^p(A_1)} \leqslant 1+\eta,$$
$$\|e^{\xi_0 t}v(t)\|_{L^p(A_0)} \leqslant 1+\eta, \qquad \|e^{\xi_1 t}v(t)\|_{L^p(A_1)} \leqslant 1+\eta.$$

Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} T\big(u(t)-v(t)\big)\,dt = Tx - Ty$, on a, d'après (III.1.a), avec

$$\theta = \frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}, \qquad \varepsilon \leqslant \|e^{\xi_0 t}\big(Tu(t) - Tv(t)\big)\|_{L^p(B_0)}^{1-\theta} \cdot \|e^{\xi_1 t}\big(Tu(t) - Tv(t)\big)\|_{L^p(B_1)}^{\theta}.$$

Mais d'après (III.2)

$$\|e^{\xi_1 t}\big(Tu(t) - Tv(t)\big)\|_{L^p(B_1)}^{\theta} \leqslant 2^\theta(1+\eta)^\theta$$

et donc

$$\|e^{\xi_0 t}\big(Tu(t) - Tv(t)\big)\|_{L^p(B_0)} \geqslant \left[\frac{\varepsilon}{2^\theta(1+\eta)^\theta}\right]^{1/(1-\theta)}$$

et donc

(III.3) $$\left\| e^{\xi_0 t}\left(\frac{Tu(t)}{1+\eta} - \frac{Tv(t)}{1+\eta}\right)\right\|_{L^p(B_0)} \geqslant \frac{1}{2^{\theta/(1-\theta)}}\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)^{1/(1-\theta)}.$$

Mais on a vu que si T était uniformément convexe de A_0 dans B_0, il l'était aussi de $L^p(A_0)$ dans $L^p(B_0)$ (proposition II.3). On a donc, d'après (III.2) et (III.3):

$$\left\| e^{\xi_0 t}\frac{u(t)+v(t)}{2(1+\eta)}\right\|_{L^p(A_0)} \leqslant 1 - \delta_p\left(\frac{1}{2^{\theta/(1-\theta)}}\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)^{1/(1-\theta)}\right)$$

et donc certainement, si on a choisi $\eta \leqslant 2^{1-\theta} - 1$,

$$\left\| e^{\xi_0 t}\frac{u(t)+v(t)}{2}\right\|_{L^p(A_0)} \leqslant (1+\eta)\left[1 - \delta_p\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/(1-\theta)}\right)\right].$$

Mais on a:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{S_1} \leqslant \left\| e^{\xi_0 t}\frac{u(t)+v(t)}{2}\right\|_{L^p(A_0)}^{1-\theta} \cdot \left\| e^{\xi_1 t}\frac{u(t)+v(t)}{2}\right\|_{L^p(A_1)}^{\theta}$$

et donc

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{S_1} \leqslant \left[1 - \delta_p\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/(1-\theta)}\right)\right]^{1-\theta}$$

ce qui prouve la proposition.

Nous allons déduire de la proposition III.2 plusieurs corollaires; le premier donne une condition suffisante pour que les espaces d'interpolation soient uniformément convexes.

COROLLAIRE 1. *Si A_0 et A_1 sont deux espaces de Banach, si $1 < p < \infty$, les espaces $S_1(p; \xi_0, A_0; \xi_1, A_1)$ et $S_2(p; \xi_0, A_0; \xi_1, A_1)$ sont uniformément convexes dès que A_0 ou A_1 l'est.*

Démonstration. On prendra $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, $T = \mathrm{Id}$ *dans la proposition* III.2.

COROLLAIRE 2. *Soient (A_0, A_1), (B_0, B_1) deux couples d'espaces de Banach. Soit T un opérateur continu de A_0 dans B_0 et de A_1 dans B_1. Si T est uniformément convexifiant de A_0 dans B_0 ou de A_1 dans B_1, il l'est de $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ dans $(B_0, B_1)_{\theta,p}$, si $0 < \theta < 1, 1 < p < \infty$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème I.2: si T est uniformément convexifiant de A_0 dans B_0, on peut trouver sur A_0 une nouvelle norme, équivalente à la première, qui rende T uniformément convexe. On obtient sur les espaces d'interpolation une norme équivalente à la première, et, d'après la proposition précédente, T est uniformément convexe de S_1 dans S_1', donc uniformément convexifiant de $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ dans $(B_0, B_1)_{\theta,p}$.

COROLLAIRE 3. *Il résulte de chacun des corollaires précédents que si A_0 ou A_1 est uniformément convexifiable, $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ l'est aussi, lorsque $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$.*

Bien évidemment, cette condition est loin d'être nécessaire, puisque L^p s'obtient comme interpolé entre L^1 et L^∞.

Avant de tirer les autres conséquences de la proposition III.2, donnons une définition.

DÉFINITION. Si A_0 et A_1 sont deux espaces de Banach avec $A_0 \subset A_1$, nous dirons que A_0 est *uniformément convexe dans* A_1 si l'injection $i: A_0 \to A_1$ est uniformément convexe, et que A_0 est *uniformément convexifiable* dans A_1 si elle est uniformément convexifiable.

COROLLAIRE 4. *Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach avec $A_0 \subset A_1$. Si l'injection i de A_0 dans A_1 est uniformément convexifiante, il en est de même des injections i_1, de A_0 dans $(A_0, A_1)_{\theta,p}$, et i_2, de $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ dans A_1, pourvu que $0 < \theta < 1, 1 < p < \infty$ (et bien évidemment, si i_1 ou i_2 est uniformément convexifiante, i l'est aussi).*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire 2 à i, continue de A_0 dans A_1 et de A_0 dans A_0 pour obtenir le résultat pour i_1; pour obtenir le résultat pour i_2, on considérera que i est continue de A_0 dans A_1 et de A_1 dans A_1.

Il en résulte que l'espace $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ est uniformément convexifiable dans A_1, et que A_0 est uniformément convexifiable dans $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ si et seulement si A_0 est uniformément convexifiable dans A_1, dès que $0 \leqslant \theta < 1$, $1 < p < \infty$.

COROLLAIRE 5. *Si $(A_0, A_1)_{\theta,p}$, $(A_0, A_1)_{\sigma,q}$ sont deux espaces d'interpolation avec $0 < \theta < \sigma < 1$, $1 < p, q < \infty$, les injections*

$$i_1: A_0 \to (A_0, A_1)_{\theta,p}, \quad i_2: (A_0, A_1)_{\theta,p} \to (A_0, A_1)_{\sigma,q}, \quad i_3: (A_0, A_1)_{\sigma,q} \to A_1,$$

sont uniformément convexifiantes dès que $i: A_0 \to A_1$ l'est.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le corollaire 4 et le théorème de réitération, car $(A_0, A_1)_{\sigma,q}$ s'obtient comme interpolé entre $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ et A_1.

Nous allons, pour terminer, donner une dernière application du théorème I.2.

DÉFINITION. Soit F un espace de Banach et W un convexe borné dans F. Nous dirons que deux points (x_1, x_2) forment une (ε_1)-branche si $\|x_1 - x_2\|_F \geqslant \varepsilon_1 \sup\big(j_W(x_1), j_W(x_2)\big)$. Supposons définie une $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ branche; nous dirons que les points $(x_1, \ldots, x_{2^n})$ forment une $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ branche si

$$\|x_{2i} - x_{2i-1}\|_F \geqslant \varepsilon_n \sup\big(j_W(x_{2i}), j_W(x_{2i-1})\big), \quad i = 1, \ldots, 2^{n-1},$$

et si les points

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{2^n-1} + x_{2^n}}{2}\right)$$

forment une $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ branche.

PROPOSITION III.3. *Soit F un espace de Banach, W un convexe équilibré borné de F. La condition $(\mathscr{C})$ ci-dessous est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un convexe V, équivalent à W (c'est-à-dire $C_1 W \subset V \subset C_2 W$) et uniformément convexe dans F.*

$(\mathscr{C})$ On peut trouver une constante C et une fonction $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) > 0$ si $\varepsilon > 0$, telles que, pour tout n-uple $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, toute $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2^n})$ branche $(x_1, \ldots, x_{2^n})$, on ait

$$\left\|\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n}\right\|_F^2 \leqslant \frac{C}{2^n}\big(1 - \delta(\varepsilon_1)\big) \times \ldots \times \big(1 - \delta(\varepsilon_n)\big) \sum_1^{2^n} j_W(x_i)^2.$$

Démonstration. a) *Condition suffisante.* Nous allons montrer que si $(\mathscr{C})$ est réalisée, W ne peut posséder la propriété d'arbre fini dans F; ceci impliquera le résultat au vu du théorème I.2. En effet, si E désigne l'espace engendré par W dans F, normé par j_W, et si l'on prend $q(x) = \|x\|_F$, il est équivalent de dire que W ne possède pas la propriété d'arbre fini dans F ou que E n'a pas la propriété de q-arbre fini; l'ensemble des points

x de E tels que $|x| \leqslant 1$, $|\cdot|$ étant la norme donnée par le théorème I.2, sera le convexe V cherché.

Supposons donc au contraire que W possède la propriété d'arbre fini: soit $\varepsilon > 0$, $(x_1, \ldots, x_{2^{n+1}})$ formant une $(n+1, \varepsilon)$ branche dans F. Les points $(x_1, \ldots, x_{2^n})$, $(x_{2^n+1}, \ldots, x_{2^{n+1}})$ forment deux $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ branches avec $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = \varepsilon$, puisque les conditions

$$\|x_{2i} - x_{2i-1}\| \geqslant \varepsilon \geqslant \varepsilon \sup\left(j_W(x_{2i}), j_W(x_{2i-1})\right)$$

sont satisfaites. On a donc

$$\left\| \frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n} \right\|_F^2 \leqslant C \frac{1}{2^n} \left(1 - \delta(\varepsilon)\right)^n \cdot 2^n = C\left(1 - \delta(\varepsilon)\right)^n,$$

$$\left\| \frac{x_{2^n+1} + \ldots + x_{2^{n+1}}}{2^n} \right\|_F^2 \leqslant C\left(1 - \delta(\varepsilon)\right)^n.$$

Mais on a, puisque les points $(x_1, \ldots, x_{2^{n+1}})$ forment une $(n+1, \varepsilon)$ branche:

$$\left\| \frac{(x_1 + \ldots + x_{2^n})}{2^n} - \frac{(x_{2^n+1} + \ldots + x_{2^{n+1}})}{2^n} \right\|_F \geqslant \varepsilon$$

et donc

$$\varepsilon \leqslant 2\sqrt{C}\left(1 - \delta(\varepsilon)\right)^{n/2},$$

ce qui est impossible pour n assez grand.

b) *Condition nécessaire.* Supposons que l'on puisse trouver V, uniformément convexe dans F, avec

$$C_1 j_W(x) \leqslant j_V(x) \leqslant C_2 j_W(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } F.$$

Il existe donc une fonction $\delta(\varepsilon)$, $\delta > 0$ si $\varepsilon > 0$, telle que la condition

$$\|x - x'\|_F \geqslant \sup\left(j_V(x), j_V(x')\right)$$

implique

$$j_V\left(\frac{x + x'}{2}\right)^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\left(1 - \delta(\varepsilon)\right)\left(j_V(x)^2 + j_V(x')^2\right).$$

Soit $(x_1, \ldots, x_{2^n})$ une $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ branche; on a

$$j_V\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n}\right)^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\left(1 - \delta(\varepsilon_n)\right)\left(j_V\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + j_V\left(\frac{x_{2^{n-1}+1} + \ldots + x_{2^n}}{2^{n-1}}\right)^2\right)$$

$$\leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{2^n}\left(1 - \delta(\varepsilon_n)\right)\left(1 - \delta(\varepsilon_{n-1})\right)\ldots\left(1 - \delta(\varepsilon_1)\right) \sum_1^{2^n} j_V(x_i)^2$$

et donc

$$\left\| \frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n} \right\|_F^2 \leqslant \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{1}{2^n} \left(1 - \delta(\varepsilon_1)\right)\ldots\left(1 - \delta(\varepsilon_n)\right) \sum_1^{2^n} j_W(x_i)^2,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

Bibliographie

[1] B. Beauzamy, Note de Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 278 (5 Juin 1974).

[2] — Séminaire Maurey–Schwartz 1973–1974, Ecole Polytechnique Paris, exposés XIII, XIV, XVII.

[3] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson and A. Pełczyński; *Factoring weakly compact operators*, à paraître.

[4] P. Enflo, *Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm*, Israël J. Math. 13 (1972), pp. 281–288.

[5] R. C. James, *Some self dual properties of normed linear spaces*, Ann. Math. Studies 69, pp. 159–175.

[6] — *Weak compactness and reflexivity*, Israël J. Math. 80 (1964), pp. 542–550.

[7] G. Köthe, *Topological vector spaces*, Springer Verlag.

[8] J. L. Lions et J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, I.H.E.S., Publications mathématiques, n° 19 (1964), pp. 5–68.

[9] B. Maurey, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans L^p*, Astérisque n° 11.

[10] J. Peetre, *Sur le nombre de paramètres intervenant dans la définition des espaces d'interpolation*, Ric. di Mat. 12 (1963), pp. 248–261.

[11] A. Pietsch, *Absolute p-summierende Abbildungen in normierten Raümen*, Studia Math. 28 (1967), pp. 333–353.

[12] G. Pisier, Séminaire Maurey–Schwartz 1973–1974, Ecole Polytechnique, Paris, exposé VII.

Received January 14, 1975 (934)