STUDIA MATHEMATICA, T. LVII. (1976)

Constructions des ensembles déterminants pour les fonctions analytiques

par

JAN CHMIELOWSKI (Katowice)

Résumé. On donne ici trois constructions de suites convergentes qui ne peuvent pas être des zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle. Deux de ces constructions sont faites en dimension infinie et une construction en dimension infinie.

I. Notations et définitions. Soient E, F des espaces vectoriels topologiques (e.v.t.) sur le corps $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$), localement convexe. Pour un ouvert U dans E, désignons par $\mathscr{A}(U, F)$ l'espace des fonctions analytiques dans U à valeurs dans F (cf. [1]). Nous allons utiliser les notations suivantes:

$H_k(E, F)$ — espace des polynômes homogènes continus de degré $k \geqslant 1$;

$H_0(E, F) = F$;

$P_k(E, F)$ — espace des polynômes continus de degré $\leqslant k$;

$P(E, F)$ — espace des polynômes continus;

$\boldsymbol{Z}$ — ensemble des nombres entiers; $\boldsymbol{Z}_+$ — ensemble des entiers non négatifs;

$\boldsymbol{Z}_+^n$ — ensembles des n-indices.

D'abord nous allons rappeler quelques définitions (cf. [2]).

DÉFINITION 1. Un ensemble $A \subset E$ sera dit *localement déterminant* en $a \in E$ pour les fonctions analytiques (resp. pour les polynômes continus) si pour tout voisinage connexe U de $a \in E$ et pour tout $f \in \mathscr{A}(U, F)$ (resp. $f \in P(E, F)$), on a l'implication suivante:

$$f|_{A \cap U} = 0 \Rightarrow f = 0.$$

DÉFINITION 2. Un ensemble $A \subset E$ sera dit *globalement déterminant* pour les fonctions analytiques (pour $P(E, F), P_k(E, F), H_k(E, F)$ resp.) si pour tout voisinage connexe U de A et pour tout $f \in \mathscr{A}(U, F)$ ($f \in P(E, F)$, $f \in P_k(E, F), f \in H_k(E, F)$ respectivement), on a l'implication suivante:

$$f|_A = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Remarque 1. Comme la propriété "être un ensemble déterminant (localement ou globalement) pour les familles considérées" ne dépend pas de l'espace des valeurs F (cf. [2]), nous poserons $F = \boldsymbol{K}$.

Remarque 2. Dans le cas où $\dim E = 1$, le théorème de Weierstrass sur la décomposition implique directement qu'un ensemble A est globalement déterminant pour les fonctions analytiques si et seulement si A est localement déterminant en un point d'accumulation de A pour les fonctions analytiques. Il est évident qu'un ensemble localement déterminant en un point est toujours globalement déterminant, mais le théorème inverse n'est pas vrai (cf. [2]).

Remarque 3. Dans le cas où $\dim E = 1$, un ensemble A est localement déterminant en $a \in E$ pour les fonctions analytiques si et seulement si A est localement déterminant en $a \in E$ pour $P(E, F)$. Dans le cas où $\dim E > 1$, cette propriété est en défaut. Or un raisonnement standard nous amène à la conclusion que si un polynôme $h \in P(\boldsymbol{K}^2, \boldsymbol{K})$ s'annule sur l'ensemble analytique $S = \{(x, y) \in \boldsymbol{K}^2 \colon y = \sin x\}$ (ou sur chaque partie $S \cap U$, où U est un voisinage de $0 \in \boldsymbol{K}^2$) alors $h = 0$.

II. Maintenant, en utilisant le lemme 1 et le corollaire 1 (qui sont bien connus) nous allons démontrer le corollaire 2.

Lemme 1. *Si $\mathscr{R}$ est une famille de sous-espaces vectoriel de $\boldsymbol{K}^n$ telle que $\bigcap_{V \in \mathscr{R}} V = \{0\}$, on peut choisir $V_1, \ldots, V_r \in \mathscr{R}$ tels que $V_1 \cap \ldots \cap V_r = 0$.*

Corollaire 1. *Si A est un ensemble globalement déterminant pour $P_k(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$, il existe un sous-ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset A$ qui est aussi globalement déterminant pour $P_k(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$.*

Tout d'abord rappelons une démonstration du corollaire 1. Pour tout $x \in \boldsymbol{K}^n$ l'ensemble $V_x = \{f \in P_k(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K}) \colon f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $P_k(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$. Comme $\bigcap_{a \in A} V_a = \{0\}$, d'après le lemme 1 il existe un nombre fini d'éléments $a_1, \ldots, a_r \in A$ tels que $V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_r} = \{0\}$. ∎

Corollaire 2. *Soit $A \subset \boldsymbol{K}^n$ un ensemble localement déterminant en $0 \in \boldsymbol{K}^n$ pour $P_k(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$. Alors il existe un sous-ensemble dénombrable $A_0 \subset A$ tel que:*

(i) *A_0 est localement déterminant en $0 \in \boldsymbol{K}^n$ pour $P_k(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$;*

(ii) *$0 \in \boldsymbol{K}^n$ est le seul point d'accumulation de A_0.*

Démonstration. Soit k un nombre naturel. Comme, en particulier, l'ensemble $A \cap \{\|x\| < 1/k\}$ est globalement déterminant pour $P_k(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$, il existe un sous-ensemble fini $A_k = \{a_1^{(k)}, \ldots, a_r^{(k)}\} \subset A \cap \{\|x\| < 1/k\}$ globalement déterminant pour $P_k(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$, d'après le corollaire 1. Sans diminuer la généralité on peut supposer que $\|a_j^{(k)}\| \neq 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$. Soit $r_k > 0$ un nombre tel que $r_k \leqslant \min\left(\frac{1}{k+1}, \|a_1^{(k)}\|, \ldots, \|a_r^{(k)}\|\right)$. Puisque l'ensemble $A \cap \{\|x\| < r_k\}$ est globalement déterminant pour $P_{k+1}(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$, en répétant le raisonnement précédent on voit qu'il existe un sous-ensemble fini $A_{k+1} \subset A \cap \{\|x\| < r_k\}$ globalement déterminant pour $P_{k+1}(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$. Comme plus haut on peut extraire par récurrence une suite de positifs $\{r_j\}_{j>k}$ strictement décroissante vers 0 et une suite d'ensembles finis $A_j \subset A \cap \{\|x\| < r_j\}$ globalement déterminant pour $P_j(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$ où $j \geqslant k$. L'ensemble $A_0 = \bigcup_{j \geqslant k} A_j$ satisfait aux propriétés (i) et (ii). ∎

Remarque 4. Le lemme 1 et le corollaire 1 ne sont plus valables dans le cas où la dimension de E est infinie. Or pour tout sous-ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset E$, le sous-espace fermé T engendré par $a_1, \ldots, a_k$ est différent de E. Donc, il existe une forme linéaire continue $u \in E'$ non identiquement nulle telle que $u|_T = 0$.

III. Construction 1. Soit $A_k \subset \boldsymbol{K}^n$ un ensemble fini et globalement déterminant pour $P_k(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K})$ (il existe d'après le corollaire 1). Désignons $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{b_i \colon i = 1, 2, \ldots\}$ et sur toute droite $l_i \colon x = tb_i$, $t \in \boldsymbol{K}$, choisissons une suite non constante $\{a_j^{(i)}\}_{j \in \boldsymbol{N}}$, telle que:

(a) $\lim_{j \to \infty} a_j^{(i)} = 0$ pour tout $i \in \boldsymbol{N}$;

(b) $\sup_{j \in \boldsymbol{N}} \|a_j^{(i)}\| < \frac{1}{i}$ pour tout $i \in \boldsymbol{N}$.

L'ensemble $A = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} \{a_j^{(i)}\}$ possède un seul point d'accumulation, à savoir $0 \in \boldsymbol{K}^n$, d'après les conditions (a) et (b). Nous allons démontrer que A est un ensemble localement déterminant en $0 \in \boldsymbol{K}^n$ pour les fonctions analytiques. En effet, si f est une fonction analytique dans un voisinage connexe U de $0 \in \boldsymbol{K}^n$ telle que $f|_{A \cap U} = 0$, alors d'après le théorème d'identité classique, la fonction f s'annule sur chaque intersection $l_i \cap U$. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ un développement de f en série de polynômes homogènes qui converge normalement dans un voisinage de 0. Alors à tout $a \in A$ correspond un positif $r(a) > 0$ tel que la fonction analytique d'une variable $g(t) = f(ta) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_k(a)$ s'annule sur $\{|t| < r(a)\}$. Ainsi pour tout $k \geqslant 0$ et pour tout $a \in A$ on a $f_k(a) = 0$, et ceci implique que $f_k = 0$ pour $k \geqslant 0$. ∎

Construction 2. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n$ des réels positifs tels que

$$(0) \qquad k_1\theta_1 + \ldots + k_n\theta_n = 0, \quad k_j \in \boldsymbol{Z} \Rightarrow k_1 = \ldots = k_n = 0.$$

Soit $\{t_i\} \subset \boldsymbol{K}$ une suite non constante, convergente vers $0 \in \boldsymbol{K}$ et telle que $t_i \neq 0$ pour tout $i \in \boldsymbol{N}$. Nous allons montrer que la suite $x^{(i)} =$

$(t_i^{\theta_1}, \ldots, t_i^{\theta_n})$ [1], $i \in N$ convergente vers $0 \in K^n$ est localement déterminante en $0 \in K^n$ pour les fonctions analytiques.

Démonstration. Soit

$$f(x) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{1}$$

une série convergente normalement dans une boule fermée $\overline{B(0, r)}$. Sans diminuer la généralité on peut supposer que $\|x^{(i)}\| \leqslant r$ pour tout $i \in N$. Posons $\varkappa_k = \alpha_{1k}\theta_1 + \ldots + \alpha_{nk}\theta_n$, $b_k = a_{\alpha^k}$, où $\alpha^k = (\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{nk})$ et supposons que la suite des n-indices $\{\alpha^k\}_{k \in N}$ est ordonnée de manière que $\varkappa_{k+1} > \varkappa_k$ pour $k \in N$. Donc le développement (1) admet la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\alpha^k} \quad \text{pour} \quad x \in \overline{B(0, r)}.$$

Si $f(x^{(i)}) = 0$ pour tout $i \in N$, alors $b_0 = 0$, en vertu de la continuité de f. Pour la démonstration par récurrence supposons que $b_1 = \ldots = b_{p-1} = 0$. On a ainsi:

$$|b_p| = \left|\frac{f(x^{(i)})}{t_i^{\varkappa_p}} - b_p\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} |b_k|\, |t_i|^{\varkappa_k - \varkappa_p} = |t_i|^{\varkappa_{p+1} - \varkappa_p} \sum_{k=p+1}^{\infty} |b_k|\, |t_i|^{\varkappa_k - \varkappa_{p+1}}$$

pour tout $i \in N$. Pour achever la démonstration il suffit de trouver une constante $M > 0$ et un indice i_0 tels que:

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |b_k|\, |t_i|^{\varkappa_k - \varkappa_{p+1}} < M \quad \text{pour tout} \quad i \geqslant i_0.$$

Dans ce but remarquons que la série $g(t) = \sum_{k=p+1}^{\infty} |b_k|\, |t_i|^{\varkappa_k}$ est convergente uniformément dans $|t| \leqslant r_0 = r/\sqrt{n}$, car la série $f(t, \ldots, t) - b_p t^{\varkappa_p} = \sum_{k=p+1}^{\infty} b_k t^{\varkappa_k}$ converge absolument et uniformément dans $|t| \leqslant r_0$. Ainsi la série $\sum_{k=p+1}^{\infty} |b_k|\, |t|^{\varkappa_k - \varkappa_{p+1}}$ converge vers $h(t) = |t|^{-\varkappa_{p+1}} g(t)$, uniformément dans $|t| \leqslant r_0$. Alors on peut poser $M = h(r_0)$ et pour i_0 un indice tel que $|t_i| \leqslant r_0$ pour $i \geqslant i_0$. ∎

Remarque 5. L'hypothèse (0) dans la construction 2 est essentielle. En effet, si $k_1, \ldots, k_n \in Z$ sont tels que $k_1\theta_1 + \ldots + k_n\theta_n = 0$ et $k_1^2 + \ldots + k_n^2 > 0$, alors le polynôme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{k_1} \ldots x_j^{k_j} - x_{j+1}^{-k_{j+1}} \ldots x_n^{-k_n},$$

[1] Dans le cas complexe $t_j^{\theta_k}$ désigne la valeur principale de la puissance.

où $k_s \geqslant 0$ pour $s = 1, \ldots, j$ et $k_s < 0$ pour $s = j+1, \ldots, n$, s'annule sur toute suite de la forme $(x^{(i)}) = (t_i^{\theta_1}, \ldots, t_i^{\theta_n})$, $i \in N$, où $\{t_i\}$ est une suite quelconque dans K, bien que $f \neq 0$.

Remarque 6. Pour θ_j on peut choisir dans la construction 2 e^j ou bien $(\sqrt[n]{2})^j$, $j = 1, \ldots, n$.

Construction 3. Soit E un e.v.t. sur K, normé et à base de Schauder $\{e_i\}_{i \in N}$, c'est-à-dire que tout élément $x \in E$ s'écrit d'une manière unique: $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$, où $x_i \in K$.

Pour tout $n \in N$ désignons par E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $e_1, \ldots, e_n$. Dans chaque E_n choisissons une suite $\{a_j^{(n)}\}_{j \in N}$ localement déterminante en $0 \in E_n$ pour les fonctions analytiques définies dans des ouverts de E_n et telle que:

(i) $\lim_{j \to \infty} a_j^{(n)} = 0$ pour tout $n \in N$;

(ii) $\sup_{j \in N} \|a_j^{(n)}\| < 1/n$ pour tout $n \in N$.

D'après (i) et (ii), l'ensemble $A = \bigcup_{j, n=1}^{\infty} \{a_j^{(n)}\}$ ne possède qu'un point d'accumulation, à savoir $0 \in E$. Nous allons montrer que A est localement déterminant pour les fonctions analytiques définies dans des ouverts de E. En effet, si f est une fonction analytique dans un voisinage connexe U de $0 \in E$ telle que $f|_{A \cap U} = 0$, alors $f|_{U \cap E_n} = 0$ pour tout $n \in N$. Puisque pour tout $x \in U$ on a $\lim_{n \to \infty} f|_{U \cap E_n} \circ \pi_n(x) = f(x)$, où π_n est la projection de E sur E_n, donc $f = 0$. ∎

IV. Questions ouvertes.

1. Le corollaire 2 est-il valable dans un e.v.t. métrisable et séparable?

2. Soit $A \subset K^n$ un ensemble localement déterminant en $0 \in K^n$ pour les fonctions analytiques. Existe-t-il une sous-suite $\{a_j\} \subset A$ convergente vers $0 \in K^n$ et localement déterminante en $0 \in K^n$ pour les fonctions analytiques?

3. Question 2 dans le cas où E est un e.v.t. métrisable et séparable.

L'idée de la construction 2 m'a été indiquée par le Professeur J. Siciak, ce dont je le remercie avec plaisir.

Bibliographie

[1] J. Bochnak et J. Siciak, *Analytic functions in topological vector spaces*, Studia Math. 39 (1971), pp. 77–112.

[2] C. Carathéodory, *Ein dem Vitalischen analoger Satz für analytische Funktionen von mehreren Veränderlichen*, J. f. die reine u. angew. Math., Bd 165 (1931), pp. 180–183.

[3] J. Chmielowski, *Ensembles déterminants pour les fonctions analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris 279 (1974), Sér. A, pp. 639–641.
[4] F. Leja, *Sur les points zéros des fonctions analytiques de plusieurs variables*, Ann. Soc. Polon. Math. 17 (1939), pp. 227–230.
[5] — *Funkcje zespolone*, Warszawa 1967 (J. Siciak, *Wstęp do teorii funkcji analitycznych wielu zmiennych*).
[6] B. Levi, *Sul teorema d'identità per le funzioni analitiche di più variabili*, Boll. Un. Mat. Ital. 13 (1934), pp. 1–5.
[7] — *Sur les ensembles des points qui ne peuvent pas être ensembles de zéros d'une fonction analytique de plusieurs variables*, C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), pp. 1734–1736.
[8] P. Montel, *Leçons sur les familles des fonctions analytiques et leurs applications*, Paris 1927.
[9] W.E. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie II*, 1929.
[10] M. T. Viola, *Sur le théorème d'identité pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables*, C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), pp. 705–707.

INSTYTUT MATEMATYKI UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO
KATOWICE

Received January 21, 1975 (938)

STUDIA MATHEMATICA, T. LVII. (1976)

Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces

by

N. ARONSZAJN (Lawrence, Kan.)

Table of contents

Introduction 147
Chapter I. THE EXCEPTIONAL CLASS $\mathfrak{A}$
1. Definition and elementary properties of the class $\mathfrak{A}$. 150
2. Complete biorthogonal systems and generalized bases. 152
3. Class $\mathfrak{A}$ and supports of measures. 154
4. Class $\mathfrak{A}^0$ 156
Chapter II. DIFFERENTIALS OF LIPSCHITZIAN MAPPINGS
1. Different notions of differentials. Elementary properties. 158
2. The main theorem. 165
3. Some counter examples. 167
Chapter III. APPLICATIONS
1. Compositions of Lipschitzian mappings with linear compact operators 170
2. Convex functions. 171
3. Convex mappings and generalizations. 174
4. Distance from a point to a subset. 178
Chapter IV. BOREL MEASURES ABSOLUTELY CONTINUOUS REL. $\mathfrak{A}$
1. Structure of measures absolutely continuous rel. $\mathfrak{A}$ 183
2. Cylindrical measures. 184
3. Measures absolutely continuous rel. $\mathfrak{A}\{e_n\}$. 188
References 190

INTRODUCTION

In 1919 H. Rademacher [9] proved the theorem that for any Lipschitzian mapping of an open set $G \subset \boldsymbol{R}^m$ into $\boldsymbol{R}^n$ the differential (Stoltz-differential) exists a.e. in G. This theorem became a standard tool in analysis and it was obviously of interest to extend it to Lipschitzian mappings between Banach spaces. There were, however, two difficulties in obtaining such extension. The most basic and immediately obvious difficulty was the