STUDIA MATHEMATICA, T. LIX. (1976)

Sur les équations du type: $\Psi(x, h) = 0$ (I)

T. LEŻAŃSKI (Lublin)

Résumé. Soient: H un espace hilbertien, $\Psi(x, h)$ une fonctionnelle linéaire et bornée par rapport à h; x et h parcourent H. On considère dans ce travail l'équation: $\Psi(x, h) = 0$ pour tout $h \in H$; on donne quelques méthodes effectives de la solution de celle-ci, et enfin on présente quelques applications aux équations différentielles quasi-linéaires ordinaires et partielles du type elliptique.

Introduction.

Soient: H un espace réel de Hilbert, M un sous-ensemble linéaire de H, $\Psi(x, h)$ une fonctionnelle à deux variables $x, y \in M$, linéaire par rapport à h. Considérons le problème suivant:

Trouver un $x \in M$ tel que

(A) $$\Psi(x, h) = 0 \quad \textit{pour tout } h \in M.$$

Plusieurs équations différentielles de la Physique Mathématique ont pour origine une équation du type (A); telles sont p.ex. les équations de l'équilibre élastique (si l'on désigne par x le déplacement cherché, par h le déplacement virtuel et par $\Psi(x, h)$ le travail virtuel).

Dans ce travail nous présentons une contribution à la théorie générale de l'équation du type (A), quelques méthodes numériques de solution de celle-ci, des applications aux équations différentielles et partielles et à la théorie non linéaire de l'élasticité.

1. Traits de la théorie générale.

1.1. Soient: H un espace réel de Hilbert, avec les éléments $x, y, h, \ldots$, et le produit scalaire (x, y), H_1 un sous-ensemble linéaire dense dans H. Dans H_1 supposons défini un autre produit scalaire $(x, y)_1$, tel que H_1 soit complet au sens de $\|\ \|_1$; supposons qu'il existe un $\gamma > 0$ tel que

(1.1.1) $$\|x\|_1^2 \geqslant \gamma \|x\|^2 \qquad (x \in H_1).$$

Soit $x \in H$; alors (x, h) est une fonctionnelle linéaire bornée par rapport à h parcourant H_1, car, en vertu de (1.1.1): $|(x, h)| \leqslant \|x\| \cdot \|h\| \leqslant \gamma^{-1/2} \|x\| \, \|h\|_1$;

il existe alors un élément $Gx \in H_1$ tel que

(1.1.2) $$(Gx, h)_1 = (x, h) \quad (x \in H,\ h \in H_1).$$

C'est la construction bien connue de Friedrichs, exposée dans [11], N° 124, p. 327; nous en citons ici les résultats les plus importants:

(1.1.3) $$\|Gx\|_1 \leqslant \big(\sqrt{\gamma}\big)^{-1}\|x\| \quad \text{pour } x \in H,$$

(1.1.4) $$(Gx, y) = (x, Gy) \quad (x, y \in H),$$
$$(Gx, y)_1 = (x, Gy)_1 \quad (x, y \in H_1),$$

(1.1.5) $$Gx = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Cette dernière implication entraîne l'existence de $A \overset{\mathrm{df}}{=} G^{-1}$. On sait que

(1.1.6)
$A^* = A$, $D(A) = R(G) \subset H_1$, $D(A)$ est dense dans H_1 au sens de $\|\ \|_1$,

(1.1.7) $$R(A) = D(G) = H.$$

1.2. Soit $\Psi(x, h)$ une fonctionnelle réelle, définie pour $x, y \in H_1$, linéaire par rapport à h et vérifiant les inégalités:

(1.2.1) $$|\Psi(x_0, h)| \leqslant C_0\|h\|_1 \quad \text{pour un certain } x_0 \in H_1,$$

(1.2.2) $$|\Psi(x+f, h) - \Psi(x, h) \leqslant \beta\|f\|_1\,\|h\|_1,$$

(1.2.3) $$\Psi|(x+h, h) - \Psi(x, h)| \geqslant \alpha\|h\|_1 \quad (x, f, h \in H_1),$$

α, β étant des constantes positives. Il s'ensuit que $\Psi(x, h)$ est, pour x fixé, une fonctionnelle linéaire bornée de h; il existe alors, en vertu du théorème de Riesz, un $F(x) \in H_1$ tel que

(1.2.4) $$\Psi(x, h) = \big(F(x), h\big)_1 \quad (x, h \in H_1).$$

De (1.2.2) et (1.2.3) on tire facilement:

(1.2.5) $$\|F(x) - F(y)\|_1 \leqslant \beta\|x-y\|_1,$$

(1.2.6) $$\big(F(x+h) - F(x), h\big)_1 \geqslant \alpha\|h\|_1^2.$$

Il s'ensuit que $F_1(x) \overset{\mathrm{df}}{=} x - \alpha\beta^{-2}\big(F(x) - y_0\big)$ est une contraction (pour y_0 fixé); F est alors un homéomorphisme de H_1 en lui-même. Il vient de (1.2.6)

(1.2.7) $$\|F^{-1}(u) - F^{-1}(v)\|_1 \leqslant \alpha^{-1}\|u-v\|_1 \quad (u, v \in H_1).$$

Définissons maintenant deux opérations U et V; posons d'abord:

(1.2.8) $$U \overset{\mathrm{df}}{=} G^{-1}F = AF, \quad x \in D(U) \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} x \in H_1 \quad \text{et} \quad F(x) \in R(G) = D(A)$$

où $A = G^{-1}$ a été défini au N° 1.1. On a:

(1.2.9) $D(U) = F^{-1}\big(G(H)\big)$ est dense dans H_1 (au sens de $\|\ \|_1$).

En effet, $G(H)$ est dense dans H_1 (voir [11], N° 124) et F^{-1} est un homéomorphisme de H_1; il s'ensuit que $D(U)$ est dense dans H_1:

(1.2.10) $$R(U) \overset{\mathrm{df}}{=} U\big(D(U)\big) = D(U^{-1}) = D(F^{-1}G) = H,$$

car $G \in L(H, H_1)$ et $D(F^{-1}) = H_1$.

Passons à la construction de V; définissons M comme l'ensemble des $x \in H_1$ pour lesquels $\Psi(x, h)$ est une fonctionnelle bornée de h au sens de $\|\ \|$. Notons-le comme il suit:

(1.2.11) $$x \in M \overset{\mathrm{df}}{\equiv} x \in H_1 \quad \text{et} \quad \bigvee_{C>0}\ \bigwedge_{h \in H_1} |\Psi(x, h)| \leqslant C\|h\|,$$

Si x est fixé, la fonctionnelle $\psi(x, \cdot)$ peut donc être étendue à H tout entier „par continuité". Il existe alors un $V(x)$ tel que:

(1.2.12) $$\big(V(x), h\big) = \Psi(x, h) \quad (x \in M,\ h \in H_1),$$

cette définition est univoque, H_1 étant dense dans H;

Lemme 1.2.13. *Sous les conditions énoncées plus haut on a: $U = V$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $U \subset V$. Or, si $x \in D(U) = F^{-1}\big(G(H)\big)$ et $h \in H_1$, alors $\Psi(x, h) = \big(F(x), h\big)_1 = \big(G^{-1}F(x), h\big) = \big(U(x), h\big)$ et $|\Psi(x, h)| \leqslant \|G^{-1}F(x)\|\cdot\|h\|$, d'où $x \in D(U)$ et $V(x) = U(x)$.

D'autre part, V admet une réciproque, car $V(x) = V(y)$ implique, en vertu de (1.2.12) et (1.2.3):

$$\|x-y\|_1^2 \leqslant \alpha^{-1}[\Psi(x, x-y) - \Psi(y, x-y)] = \alpha^{-1}\big(V(x) - V(y), x-y\big) = 0.$$

Or, $R(U)$ étant égal à H (en vertu de (1.2.10)), U ne peut être prolongé à l'opération réversible V; donc $U = V$, c.q.f.d.

1.3. Existence d'une solution. Comme $\Psi(x, h) = \big(F(x), h\big)_1$ en vertu de (1.2.4), l'équation (A) équivaut à $F(x) = 0$; mais cette dernière a une seule solution, car l'opération $x - \alpha\beta^{-2}F(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante $(1-\alpha^2\beta^{-2})^{1/2} < 1$. Nous établirons les rapports entre les équations $F(x) = 0$ et $U(x) = V(x) = 0$.

Lemme 1.3.1. *Si $x \in D(U)$, l'équation $F(x) = 0$ est équivalente à $U(x) = V(x) = 0$.*

En effet, pour $x \in D(U)$ on a, d'après (1.2.8): $F(x) = A^{-1}U(x) = GU(x)$ d'où la conclusion, puisque $A^{-1} = G$ est réversible, c.q.f.d.

Comme $D(U) \in H_1$ (v. (1.2.9)), $U(x) = 0$ implique $F(x) = 0$; on peut appeler la solution de $F(x) = 0$ solution généralisée de $U(x) = 0$. Dans la plupart des applications U et A sont des opérations différentielles.

2. Méthodes de solution de l'équation $F(x) = 0$.

Bien que l'équation $F(x) = 0$ ait toujours une seule solution, le problème de la solution effective reste ouvert. En effet, on obtient l'élément $\bar{x}$ satisfaisant à $F(\bar{x}) = 0$ comme la limite (au sens de $\|\ \|_1$) d'une suite définie par récurrence: x_0 — arbitraire, $x_{n+1} = x_n - \alpha\beta^{-2}F(x_n)$. Or, cet algorithme est inutile dans la plupart des cas, car $F(x) = A^{-1}U(x)$ est impossible à calculer. Dans ce qui suit, nous établissons quelques conditions suffisantes pour que la solution effective de $F(x) = 0$ soit possible.

2.1. Solution immédiate de l'équation $\Psi(x, h) = 0$ $(h \in H_1)$. Soit: $a_1, a_2, \ldots$ une suite orthonormale et complète dans H_1 au sens de $(\,,\,)_1$. Posons: $Z_n = \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_n) =$ ensemble des sommes $\sum_1^n \xi_i a_i$. Alors il existe un (seul) élément $x_n \in Z_n$ tel que

(2.1.1) $$\Psi(x_n, h) = 0 \quad \text{pour tout } h \in Z_n.$$

On a alors: $\|x_n - \bar{x}\|_1 \to 0$ et $F(\bar{x}) = 0$. Cette méthode a été décrite dans [4], N° 2, p. 135, et suiv.

2.2. Calcul approché de $F(y)$. Dans [3], p. 379, et suiv., on a exposé la méthode suivante: soient: $x_0, x_1, \ldots, x_n \in H_1$; h_n un élément de H_1 tel que

(2.2.1) $$\|h_n - F(x_n)\|_1 \leqslant \gamma\|h\|_1, \quad 0 < \gamma < \alpha/\beta.$$

Posons: $x_{n+1} = x_n - \vartheta h_n$, $\vartheta = \dfrac{1}{\beta^2}(\alpha - \beta\gamma)$. Alors $\|x_n - \bar{x}\|_1 \to 0$ et $F(\bar{x}) = 0$.

2.3. Méthode de l'opération „presque inverse". D'après [5] nous appellerons G_0 opération presque inverse de A si

(2.3.1) $$\|G_0Ay - y\|_1 \leqslant \gamma\|y\|_1, \quad \text{avec } \gamma < 1, \quad \text{pour tout } y \in D(A).$$

Or, si G_0 est connue, on peut poser dans (2.2.1)

(2.3.2) $$h_n \overset{\mathrm{df}}{=} G_0U(x_n), \quad \text{si } x_n \in D(U),$$

car

$$\begin{aligned}\|h_n - F(x_n)\|_1 &= \|G_0U(x_n) - A^{-1}U(x_n)\|_1 \\ &= \|G_0AA^{-1}U(x_n) - A^{-1}U(x_n)\|_1 \leqslant \gamma_0\|A^{-1}U(x_n)\|_1 = \gamma_0\|F(x_n)\|_1 \leqslant \gamma\|h_n\|_1\end{aligned}$$

où $\gamma = \gamma_0/(1-\gamma_0)$.

La méthode a été décrite dans [3].

2.4. Les séries presque nucléaires. Soient $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ deux suites d'éléments de H_1 telles que la somme infinie

(2.4.1) $$\Phi(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}(x, b_i)_1 a_i$$

converge pour tout $x \in H_1$ au sens de la norme $\|\ \|_1$. L'opération Φ est donc linéaire bornée dans H_1; si Φ satisfait à l'inégalité

(2.4.2) $$\|\Phi(x) - x\|_1\gamma_0\|x\|_1 \quad \text{avec} \quad \gamma_0 < 1, \ x \in H_1,$$

on appelle la série 2.4.1 presque nucléaire (seulement dans ce travail).

Soient: φ une fonctionnelle linéaire bornée dans H_1, $e \in H_1$ tel que $\varphi(x) = (x, e)_1$ pour tout $x \in H_1$. Alors on a:

(2.4.3) $$\Big\|e - \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(b_i)a_i\Big\|_1 = \Big\|e - \sum_{i=1}^{\infty}(e, b_i)a_i\Big\|_1 = \|e - \Phi(e)\|_1 \leqslant \gamma\|e\|_1.$$

En particulier, pour Ψ et F définis aux numéros précédents, on a:

(2.4.4) $$\Big\|F(x) - \sum_{i=1}^{\infty}\Psi(x, b_i)a_i\Big\|_1 \leqslant \gamma_0\|F(x)\|.$$

On peut donc remplacer h_n par $\sum_{i=1}^{\infty}\Psi(x, b_i)a_i$ dans (2.2.1), si γ_0 est suffisamment petit.

Le lemme suivant permettra la construction d'une série presque nucléaire avec le nombre γ arbitrairement petit, si l'on connaît une série (2.4.1) avec $\gamma_0 < 1$.

LEMME 2.4.5. *Admettons que a_i, b_i, Φ, γ satisfont aux relations* (2.4.1) *et* (2.4.2). *Posons $\Phi_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi$, $\Phi_{k+1} = -\Phi_k^2 + 2\Phi_k$, $B_0 = I$, $B_{n+1} = -B_n\Phi_0B_n + 2B_n$. Alors on vérifie aisément par récurrence que $\Phi_n = B_n\Phi_0$ et que, par conséquent*:

(2.4.5) $$\Phi_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(x, b_i)B_na_i.$$

Montrons que Φ_n, définie par (2.4.5), est une série presque nucléaire avec la constante $\gamma = \gamma_0^{(2^n)}$. En effet, B_n étant borné dans H_1, la série (2.4.5) converge en norme $\|\ \|_1$ pour tout $x \in H_1$; de plus, on a, en vertu de (2.4.2):

$$\|\Phi_0 - I\|_1 = \|\Phi - I\|_1 \leqslant \gamma_1 < 1,$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\Phi_{n+1} - I\|_1 &= \|-\Phi_n^2 + 2\Phi_n - I\|_1 \\ &= \|(\Phi_n - I)^2\|_1 \leqslant \|\Phi_n - I\|^2 \leqslant \|\Phi_0 - I\|_1^{(2^n)} \leqslant \gamma_0^{(2^n)},\end{aligned}$$

c.q.f.d.

2.5. La méthode des fonctions nucléaires et presque nucléaires. Supposons dans ce numéro que les éléments de H soient des fonctions réelles définies sur un ensemble quelconque Ω. Admettons la convention suivante: pour la fonction $G(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta \in \Omega)$ on pose $G(\xi, \cdot)(\eta) \overset{\mathrm{df}}{=} G(\xi, \eta)$.

DÉFINITION. La fonction réelle $G(\xi, \eta)$, définie sur $\Omega \times \Omega$, sera appelée *fonction nucléaire sur H_1* si

(2.5.1) $$\begin{aligned}&\text{(a)} \quad g(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} G(\xi, \cdot) \in H_1 \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega\ (\Omega \ni \xi \to g(\xi) \in H_1), \\ &\text{(b)} \quad (g(\xi), x)_1 = x(\xi) \quad \text{pour} \quad x \in H_1,\ \xi \in \Omega.\end{aligned}$$

Une fonction nucléaire existe si et seulement si, pour $\xi \in \Omega$, l'expression $x(\xi)$ est une fonctionnelle linéaire bornée de x dans H_1 (voir [6]).

Tout pareillement, on appelle une fonction réelle $G_0(\xi, \eta)$ *fonction presque nucléaire*, si

(2.5.2)
(a) $g_0(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} G_0(\xi, \cdot)$ appartient à H_1,
(b) l'opération G_0, définie par: $(G_0 x)(\xi) = (g_0(\xi), x)_1$ satisfait à: $\|G_0 x - x\|_1 \leqslant \gamma_0 \|x\|_1$ pour $x \in H_1$, avec $\gamma_0 < 1$.

Si la fonction nucléaire $G(\xi, \eta)$ (si donc $g(\xi)$ satisfait à (2.5.1)) est connue, on peut exprimer l'opération $F(x)$, définie par (1.2.4), par la formule:

$$\big(F(x)\big)(\xi) = \big(F(x),\ g(\xi)\big)_1 = \Psi\big(x,\ g(\xi)\big). \tag{2.5.3}$$

D'une façon analogue, si les fonctions $G_0(\xi, \eta)$ et $g_0(\xi)$, satisfaisant à 2.5.2, sont données, l'élément h, défini par la formule: $h(\xi) = \Psi\big(x, g_0(\xi)\big)$, satisfait à

$$\|h - F(x)\|_1 \leqslant \gamma_0 \|F(x)\|_1. \tag{2.5.4}$$

En effet, on a, d'après (2.5.2) et (1.2.4):

$$h(\xi) = \Psi\big(x, g_0(\xi)\big) = \big(F(x), g_0(\xi)\big)_1 = \big(G_0 F(x)\big)(\xi),$$

donc $h = G_0 F(x)$; on obtient (2.5.4) de (2.5.2)(b) en y remplaçant x_0 par $F(x)$. On peut alors substituer h au lieu de h_n dans (2.2.1), si γ_0 est suffisamment petit; en rapport avec ce que nous venons de dire, nous allons démontrer le

LEMME 2.5.5. *Soit $g_0(\xi)$ une fonction abstraite satisfaisant à* (2.5.2) (b); *supposons que l'opération correspondante G_0 soit symétrique dans H_1 (au sens de $(\ ,\ )_1$). Posons:*

$$B_0 = I, \quad B_{n+1} = -B_n G_0 B_n + 2B_n,$$

$$g_n(\xi) = B_n g_0(\xi), \quad \big(G_n(x)\big)(\xi) = \big(x, g_n(\xi)\big)_1.$$

Alors on a

$$\|G_n x - x\|_1 \leqslant \gamma_0^{(2^n)} \|x\|_1 \quad \textit{pour} \quad x \in H_1. \tag{2.5.6}$$

Démonstration. Les opérations B_n sont bornées symétriques comme polynômes en l'opération bornée symétrique G_0; pour la même raison elles sont permutables avec G_0. On a

$$(G_n x)(\xi) = \big(g_n(\xi), x\big)_1 = \big(B_n g_0(\xi), x\big)_1 = \big(g_0(\xi), B_n x\big)_1 = (G_0 B_n x)(\xi),$$

donc $G_n = G_0 B_n = B_n G_0$.

Par suite on a, conformément à la définition de B_n:

$$\begin{aligned}\|G_{n+1} - I\|_1 &= \|B_{n+1} G_0 - I\|_1 = \|-B_n G_0 B_n G_0 + 2B_n G_0 - I\|_1 \\ &= \|(B_n G_0 - I)^2\|_1 \leqslant \|B_n G_0 - I\|_1^2 \leqslant \|B_0 G_0 - I\|_1^{(2^{n+1})} = \|G_0 - I\|_1^{(2^n)} \\ &\leqslant \gamma_0^{(2^{n+1})}, \quad \text{c.q.f.d.}\end{aligned}$$

3. Applications aux équations différentielles ordinaires avec des conditions aux limites.

3.1. Définitions et hypothèses. Posons: $H = L^2_{\langle 0,1\rangle}$, $(x, y) = \int_0^1 x(t) y(t)\, dt$. Soit $p(t)$ une fonction continue non négative telle que

$$C \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^1 \frac{dt}{p(t)} < +\infty. \tag{3.1.1}$$

Définissons un sous-ensemble de H:

$$\text{Définition: } x \in M \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} x \in C^1, \quad p(t)\frac{d}{dt}x(t) \in C^1 \quad \text{et} \quad x(0) = x(1) = 0 \tag{3.1.2}$$

(M est évidemment dense dans $H = L^2_{\langle 0,1\rangle}$).

Posons pour $x, y \in M$:

(3.1.3)

$$(x, y)_1 = \int_0^1 p(t)\dot{x}(t)\dot{y}(t)\, dt, \quad A_0 x(t) = -\frac{d}{dt}(p\dot{x}), \quad \|x\|_1^2 = (x, x)_1.$$

Il est évident que $\|\ \|_1$ est une norme et que A_0 est symétrique sur M, car $(Ax, y) = (x, y)_1 = (x, Ay)$ pour $x, y \in M$. Nous allons montrer que:

$$\|x\|_1^2 \geqslant C^{-1}\|x\|^2 \quad (x \in M). \tag{3.1.4}$$

En effet, on a:

$$|x(t)| = |x(t) - x(0)| \leqslant \int_0^t |\dot{x}(s)|\, ds \leqslant \int_0^t \frac{1}{\sqrt{p}} |\sqrt{p}\dot{x}|\, ds$$

$$\leqslant \Big\{\int_0^1 p\, ds\Big\}^{1/2} \times \Big\{\int_0^1 p\dot{x}\, ds\Big\}^{1/2} = \sqrt{C}\, \|x\|_1, \quad \text{d'où} \quad \|x\|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt \leqslant C\, \|x\|_1^2$$

c.q.f.d.

En vertu de la théorie de K. Friedrichs existent: l'espace H_1 — le complément de M en norme $\|\ \|_1$, et le prolongement auto-adjoint A de A_0.

Déduisons la formule pour A_0^{-1}; posons:

$$(3.1.5)\qquad K(t,s)=\int\limits_s^t\frac{da}{p(a)},\qquad K_1(t,s)=\begin{cases}K(t,s), & 0\leqslant s\leqslant t,\\ 0, & t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}$$

$$K_2(t,s)=\frac{1}{C}K(t,0)K(1,s),\qquad G(t,s)=-K_1(t,s)+K_2(t,s),$$

$$(3.1.6)\qquad (Gy)(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)y(s)\,ds.$$

Alors on a, pour $y,h\in C_{(0,1)}$;

$$(3.1.7)\quad \text{(a)}\quad Gy\in M=D(A_0),\qquad \text{(b)}\quad (Gy,h)_1=(y,h)\qquad (y\in C_{(0,1)},\ h\in M).$$

D é m o n s t r a t i o n. Posons $x=Gy$, c'est-à-dire

$$x(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)y(s)\,ds=-\int\limits_0^t K(t,s)y(s)\,ds+\frac{1}{C}\int\limits_0^1 K(1,s)K(t,0)y(s)\,ds.$$

Alors, comme $\dfrac{\partial}{\partial t}K(t,s)=\dfrac{1}{p(t)}$ et $K(1,0)=C$, on a:

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{1}{p(t)}\Big[-\int\limits_0^t y(s)\,ds+\frac{1}{C}\int\limits_0^1 K(1,s)y(s)\,ds\Big],\qquad \text{d'où}\qquad p\dot x\in C^1,$$

et $x\in M$, puisque $x(0)=x(1)=0$. De plus, on a:

$$(x,h)_1=\int\limits_0^1 p\dot x\dot h\,dt=\int\limits_0^1\Big[-\int\limits_0^t y(s)\,ds+\frac{1}{C}\int\limits_0^1 K(1,s)y(s)\,ds\Big]\dot h\,dt$$

$$=\int\limits_0^1\frac{d}{dt}\Big[\int\limits_0^t y(s)\,ds-\frac{1}{C}\int\limits_0^1 K(1,s)y(s)\,ds\Big]h(t)\,dt$$

$$=\int\limits_0^1 y(t)h(t)\,dt=(y,h),$$

car $h(0)=h(1)=0$, c.q.f.d.

3.2. Définition de la fonctionnelle $\Psi(x,h)$. Soient: $f(s)$ une fonction réelle, $a\in H$; supposons $f\in C^1$ et

$$(3.2.1)\qquad 0<\alpha\leqslant f'(s)\leqslant\beta,\qquad \alpha,\beta\ \text{étant des constantes},$$

et enfin posons pour $x,h\in M$:

$$(3.2.2)\quad \Psi_0(x,h)=\int\limits_0^1[f(p\dot x,t)\dot h\,dt],\qquad \Psi(x,h)=\Psi_0(x,h)+(a,h).$$

Nous établirons les inégalités:

$$(3.2.3)\qquad |\Psi(x+g,h)-\Psi(x,h)|\leqslant\beta\|g\|_1\cdot\|h\|_1,$$

$$(3.2.4)\qquad \Psi(x+h,h)-\Psi(x,h)\geqslant\alpha\|h\|_1^2\qquad (g,h\in M).$$

En effet, on a, en vertu de (3.2.1), pour $g,h\in M$:

$$|\Psi(x+g,h)-\Psi(x,h)|\leqslant\int\limits_0^1|f(p\dot x+p\dot g,t)-f(p\dot x,t)|\,|\dot h|\,dt$$

$$\leqslant\int\limits_0^1\beta|p\dot g|\cdot|\dot h|\,dt=\beta\int\limits_0^1|\sqrt{p}\,\dot g|\,|\sqrt{p}\,\dot h|\,dt\leqslant\beta\Big[\int\limits_0^1[p(\dot g)^2dt]\Big]^{1/2}\cdot\Big[\int\limits_0^1 p(\dot h)^2dt\Big]^{1/2}$$

$$=\beta\|g\|_1\|h\|_1.$$

D'une façon analogue:

$$\Psi(x+h,h)-\Psi(x,h)=\int\frac{1}{p}[f(p\dot x+p\dot h)-f(p\dot x)]p\dot h\,dt\geqslant\alpha\int\limits_0^1\frac{1}{p}(p\dot h)^2dt$$

$$=\alpha\|h\|_1^2,$$

c.q.f.d.

La théorie générale assure l'existence du prolongement de Ψ, défini sur H_1 tout entier, et d'un élément $u\in H_1$ tel que (A): $\Psi(u,h)=0$ pour tout $h\in H_1$. La dernière équation équivaut à: $F(x)=0$ ou $\big(F(x),h\big)_1=\Psi(x,h)$ (v. (1.2.4)). Nous déduirons maintenant une méthode effective pour la solution de (A).

3.3. Formule directe pour l'opération F. En conservant les notations de 3.1 posons:

$$(3.3.1)\quad \big(F_0(x)\big)(t)\overset{\mathrm{df}}{=}\int\limits_0^t\frac{1}{p(s)}f\big(p(s)\dot x(s),s\big)ds-\frac{1}{C}\int\limits_0^1\frac{1}{p(s)}f(p\dot x,s)\,ds\cdot K(t,0)$$

et montrons que:

$$(3.3.2)\qquad \big(F_0(x),h\big)_1=\Psi_0(x,h)\qquad (\text{pour } x,h\in M).$$

En effet, en désignant le second membre de (3.3.1) par $z(t)$, on obtient pour $x\in M$:

$$\dot z(t)=\frac{1}{p(t)}f\big(p(t)\dot x(t),t\big)-\frac{1}{C}\int\limits_0^1 f(p\dot x,s)\,ds\cdot\frac{1}{p(t)}=\frac{1}{p(t)}[f(p\dot x,t)-C_1],$$

où

$$C_1\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{C}\int\limits_0^1 f(p\dot x,t)\,dt.$$

Alors on a: $p\dot{z} = f(p\dot{x}, t) - C_1 \in C^1$; de plus, on vérifie facilement que $z(0) = z(1) = 0$. Récapitulant, on a donc $z \in M$ et, pour $h \in M$:

$$(z, h)_1 = \int_0^1 p\dot{z}\dot{h}\,dt = \int_0^1 \big(f(p\dot{x}, t) - C_1\big)\dot{h}\,dt = \int_0^1 f(p\dot{x}, t)\dot{h}\,dt$$
$$= \psi_0(x, h), \quad \text{c.q.f.d.}$$

On tire de (3.2.2) et (3.1.5), (3.1.6) et (3.1.7):

$$\big(F(x), h\big)_1 = \Psi(x, h) = \Psi_0(x, h) + (a, h) = \big(F_0(x), h\big)_1 + (Ga, h)_1,$$

d'où $F(x) = F_0(x) + Ga$. Nous avons montré en même temps que

$$F(x) \in M \quad \text{si} \quad x \in M. \tag{3.3.3}$$

Par conséquent, pour résoudre l'équation (A) (ou bien, ce qui est le même, $F(x) = 0$) il suffit de poser:

$$x_0 \in M, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{a}{\beta^2}\big(F_0(x_n) + Ga\big) = x_n - \frac{a}{\beta}F(x_n);$$

l'opération $I - (\alpha/\beta^2)F$ étant une contraction (avec le coefficient $(1 - \alpha^2/\beta^2)^{-1/2}$), il existe un élément $u \in H_1$ tel que $\|x_n - u\| \to 0$ et $F(u) = 0$, c.q.f.d.

4. Application aux équations elliptiques quasi-linéaires.

4.1. Notations, définitions et hypothèses. Soient: R^m l'espace des suites $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $\xi_i \in R$, avec le produit scalaire

$$\xi \circ \eta = \sum_{i=1}^m \xi_i \eta_i, \qquad |\xi|^2 = (\xi, \xi), \tag{4.1.1}$$

Ω un sous-ensemble de R^m, simplement connexe et borné, dont le bord $S = \partial\Omega$ satisfait aux conditions de Lapounoff (voir p.ex. [10], p. 42).

Définition 4.1.2. $H = L^2_\Omega$, $(x, y) = \int_\Omega x(\xi)y(\xi)\,d\xi$ $(d\xi \overset{\mathrm{df}}{=} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m)$.

Définition 4.1.3. $u \in M \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} u \in C^2_\Omega$, $u|S = 0$ (par $u \in C^k_\Omega$ on entend ici que u admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre k, uniformément continues sur Ω).

Définition 4.1.4. $(u, v)_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega \operatorname{grad} u \circ \operatorname{grad} v\,d\xi = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial \xi_i}\frac{\partial v}{\partial \xi_i}\,d\xi$, $\|u\|_1^2 = (u, u)$.

Il est évident que $\|u\|_1$ est une norme sur M et que M est dense dans H (v. [7], § 16, p. 71, Théorème 3), mais M n'est pas complet au sens de $\|\ \|_1$. Pour compléter M (en $\|\ \|_1$) de sorte que le complément H_1 de M soit un sous-ensemble de H, nous appliquerons la théorie de Friedrichs ([11], N°124, p. 327, et suiv.). Posons:

Définition 4.1.5. $A_0 u = -\Delta u$,

$$(A_0 u)(\xi) = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} \quad \text{pour} \quad u \in M.$$

A_0 est symétrique sur M, car $(A_0 u, v) = (u, v)_1$ (pour $u, v \in M$); de plus, en vertu de l'inégalité bien connue de Friedrichs:

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega |\operatorname{grad} u(\xi)|^2 d\xi \geqslant \gamma \int_\Omega |u(\xi)|^2 d\xi = \gamma\|u\|^2 \quad (u \in M) \tag{4.1.6}$$

(la constante γ étant convenablement choisie).

A_0 est positivement définie. Les hypothèses du théorème de Friedrichs étant ainsi vérifiées, il en résulte qu'il existe un sous-ensemble $H_1 \subset H$, le complément de M au sens de $\|\ \|_1$, et le prolongement A de A_0, auto-adjoint et tel que

$$M \subset D(A) \subset H_1 \subset H. \tag{4.1.7}$$

M est dense dans H_1 au sens de $\|\ \|_1$. Notons encore l'inégalité connue de Sobolev ([7], § 22):

$$\int_S |u(\xi)|^2 dS \leqslant C_1\Big[\int_\Omega |u(\xi)|^2 d\xi + \int_\Omega |\operatorname{grad} u(\xi)|^2 d\xi\Big] \quad (u \in C^2). \tag{4.1.8}$$

De (4.1.8) et (4.1.6) on tire:

$$\int_S |u(S)|^2 dS \leqslant C_2\|u\|_1^2 \quad (u \in M). \tag{4.1.9}$$

4.2. Définition de la fonctionnelle $\Psi(u, h)$. Soient: $a_i(t_1, t_2, \ldots, t_m, \xi)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, des fonctions de classe C^1, $t_i \in R^1$, $\xi \in \Omega$; posons:

$$a_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial t_k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.2.1}$$

Supposons qu'il existe des constantes α, β, positives et telles que:

$$\Big|\sum_{i,j=1}^m a_{ij} s_i r_j\Big|^2 \leqslant \beta \sum_{i=1}^m s_i^2 \cdot \sum_{j=1}^m r_j^2, \tag{4.2.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} s_i s_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^m s_i^2 \quad (s_i, r_j \in R). \tag{4.2.3}$$

Soit enfin $a \in H = L^2_\Omega$; posons:

Définition 4.2.4.

$$\Psi_0(u, h) = \int_\Omega \sum_{i=1}^m a_i(u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_m}, \xi) h_{\xi_i}\,d\xi;$$
$$\Psi(u, h) = \Psi_0(u, h) + (a, h).$$

Montrons que Ψ vérifie (1.2.2) et (1.2.3); en effet, on a d'abord

$$\Psi(u+f,h)-\Psi(u,h) = \Psi_0(u+f,h)-\Psi_0(u,h) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\psi_0(u+tf,h)\,dt$$

$$= \int_\Omega\int_0^1 \sum_{i=1}^m a_i\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}+t\frac{\partial f}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_m}+t\frac{\partial f}{\partial\xi_m},\xi\right)\frac{\partial h}{\partial\xi_i}\,dt\,d\xi$$

$$= \int_\Omega\int_0^1 \sum_{i,k=1}^m a_{ik}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}+t\frac{\partial f}{\partial\xi_1},\ldots\right)\frac{\partial f}{\partial\xi_k}\frac{\partial h}{\partial\xi_i}\,dt\,d\xi,$$

d'où, en vertu de (4.2.2), on obtient pour $u, f, h \in M$:

$$|\Psi(u+f,h)-\Psi(u,h)| \leqslant \int_\Omega \beta\left[\sum_{i=1}^m\left|\frac{\partial f}{\partial\xi_k}\right|^2\right]^{1/2}\cdot\left[\sum_{i=1}^m\left|\frac{\partial h}{\partial\xi_i}\right|^2\right]^{1/2} d\xi \leqslant \beta\|f\|_1\cdot\|h\|_1$$

en vertu de l'inégalité de Schwarz.

La démonstration de (1.2.3) est analogue et s'appuie sur (4.2.3). Il existe donc (v. N° 1) un (et un seul) $u\in H_1$ tel que $\Psi(u,h)=0$ pour tout $h\in H_1$.

4.3. Rapports entre (A): $\Psi(u,h)=0$ **et les équations différentielles.**

THÉORÈME 4.3.1. *Admettons que* $u\in H_1$ *et*

(i) $$\Psi(u,h)=0 \quad (h\in H_1)$$

et supposons que $u\in C^2_\Omega$. *Posons, pour abréger*:

(ii) $$w_i = a_i\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_i},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_m},\xi\right) \quad (i=1,2,\ldots,m),$$

(iii) $$\vec{w} = (w_1,w_2,\ldots,w_m).$$

Alors on a:

(iv) $$\operatorname{div}\vec{w}+a = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial\xi_i}a_i\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_m},\xi\right)+a(\xi)=0 \quad (\xi\in\Omega),$$

(v) $$u(\xi)=0 \quad (\xi\in S).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que les conditions $u\in H_1$ et $u\in C^2_\Omega$ entraînent, en vertu de (4.1.8) et (4.1.6), que $u(\xi)=0$ pour $\xi\in S$ (voir d'ailleurs [7]). En effet, posons pour $x\in C^2_\Omega$: $g_0(x)\overset{\text{df}}{=}\int_S(x(\xi))^2dS$; g_0 étant quadratique est continue en vertu de (4.1.9): $g_0(x)\leqslant C_1\|x\|_1^2$ — sur $C^2_\Omega\cap H_1$ au sens de $\|\ \|_1$. Puisque, par la définition de M, $g_0(x)=0$ pour $x\in M$, on a aussi $g_0(x)=0$ pour $x\in C^2_\Omega\cap H_1$ — M étant dense dans H_1 (au sens de $\|\ \|_1$), d'où résulte la conclusion (v).

Par hypothèse on a:

(a) $$0=\Psi(u,h)=\Psi_0(u,h)+(a,h)=\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^m w_i\frac{\partial h}{\partial\xi_i}+ah\right]d\xi$$
$$=\int_\Omega[-\operatorname{div}\vec{w}+a]h\,d\xi+\int_S(\vec{w}\cdot\nu)h\,dS$$

(ν désignant le verseur extérieur normal à S).

Mais $h(\xi)=0$ pour $\xi\in S$, d'où:

(b) $$\int_\Omega(-\operatorname{div}w+a)h\,d\xi=0 \quad \text{pour} \quad h\in H_1,$$

ce qu'on peut écrire: $(-\operatorname{div}\vec{w}+a,h)=0$ pour $h\in H_1$, d'où (iv), puisque H_1 est dense dans H.

4.4. Le cas linéaire. Posons dans (4.2.4) $a_i(t_1,\ldots,t_m,\xi)=\sum_{k=1}^m a_{ik}(\xi)t_k$, où les a_{ik} satisfont à (4.2.2) et (4.2.3). Alors l'équation $\Psi(u,h)=0$ $(h\in H_1)$ entraîne comme conséquence:

(4.4.1)
(a) $$\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial\xi_i}\sum_{k=1}^m a_{ik}(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_k}+a(\xi)=0 \quad (\xi\in\Omega),$$
(b) $$u(\xi)=0 \quad (\xi\in S).$$

Remarquons que nous ne supposons pas $a_{ik}=a_{ki}$, ce qu'on fait d'habitude.

5. Le problème quasi-linéaire de Neumann.

5.1. Définitions et hypothèses. Conservant pour les symboles: R^m, $\xi\circ\eta$, Ω, S, L^2_Ω, (u,v) les mêmes significations qu'au N° 4, définissons encore quelques ensembles.

DÉFINITION 5.1.1. $u\in H \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} u\in L^2_\Omega$ et $\int_\Omega u(\xi)d\xi=0$, en abrégé $(u,1)=0$.

DÉFINITION 5.1.2. $u\in M\Leftrightarrow u\in C^2_\Omega$ et $(u,1)=0$.

DÉFINITION 5.1.3. $u\in M_0\Leftrightarrow u\in M$ et $\dfrac{\partial u}{\partial v}|S=0$.

DÉFINITION 5.1.4. $u\in M_1\Leftrightarrow u\in C^\infty_\Omega$ et $\bigvee_{\delta>0}\xi\in\Omega\wedge\operatorname{dist}(\xi,S)<\delta\Rightarrow u(\xi)=0$ (u s'annule sur une certaine bande frontière).

DÉFINITION 5.1.5. $u\in M_2\Leftrightarrow u\in M_1$ et $(u,1)=0$.

On a évidemment: $M_2\subset M_0\subset M\in H$.

LEMME 5.1.6. *L'ensemble* M_2 *est dense dans* H.

Démonstration. Soit $x_0\in H$, c'est-à-dire $x_0\in L^2_\Omega$ et $\int_\Omega x_0(\xi)d\xi=0$, et soit $\varepsilon>0$. Il existe évidemment (voir [7], § 16) une fonction $a\in M_1$

icm©

telle que $(a, 1) > 0$. Comme M_1 est dense dans L^2_Ω, il existe un $x_1 \in M_1$ tel que:

(a) $$\|x_0 - x_1\| \leqslant \varepsilon_1 \stackrel{\text{df}}{=} [1+\sqrt{\operatorname{mes}(\Omega)}\,\|a\|(a, 1)^{-1}]^{-1}\varepsilon.$$

Puisque $(x_0, 1) = 0$, on a:

$$|(x_1, 1)| = |(x_1 - x_0, 1)| \leqslant \|x_1 - x_0\|(\operatorname{mes}(\Omega))^{1/2} \leqslant \varepsilon_1(\operatorname{mes}(\Omega))^{1/2}.$$

Posons: $x_2 = x_1 - (x_1, 1)(a, 1)^{-1}a$. Alors on a: $x_2 \in M_1$ et $(x_2, 1) = 0$, donc $x_2 \in M_2$. On voit facilement que

$$\|x_2 - x_0\| \leqslant [1+\sqrt{\operatorname{mes}(\Omega)}\cdot\|a\|(a, 1)^{-1}]\cdot\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \text{c.q.f.d.}$$

COROLLAIRE. *Les ensembles M_0 et M sont denses dans H.*

Notons encore l'inégalité de Poincaré:

(5.1.7) $$\int_\Omega |u(\xi)|^2 d\xi \leqslant C_4\Big\{\Big[\int_\Omega u(\xi)\,d\xi\Big]^2 + \int_\Omega |\operatorname{grad} u(\xi)|^2 d\xi\Big\}.$$

5.2. Définition et propriétés de l'espace H_1. Posons pour $u, v \in M$ (v. (5.1.2)):

(5.2.1) $$(u, v)_1 \stackrel{\text{df}}{=} \int_\Omega \operatorname{grad} u(\xi)\operatorname{grad} v(\xi)\,d\xi, \qquad \|u\|_1^2 = (u, u)_1.$$

En vertu de 5.1.7 (qu'on peut écrire: $\|u\|^2 \leqslant C_4[(u, 1)^2 + \|u\|_1^2]$):

(5.2.2) $$\|u\|^2 \leqslant C_4\|u\|_1^2 \quad (\text{pour } u \in M)$$

c'est-à-dire que $\|u\|_1$ est une norme dans M. Posons:

(5.2.3) $$A_0 u \stackrel{\text{df}}{=} -\Delta u \quad \text{pour} \quad u \in M_0 \ (D(A_0) \stackrel{\text{df}}{=} M_0).$$

Comme $(A_0 u, v) = (u, v)_1$ pour $u, v \in M_0$, A_0 est symétrique et, en vertu de (5.2.2), positivement définie. Il existe donc ([4], N° 124) un ensemble $H_1 \subset H$, complet au sens de $\|\ \|_1$ et tel que M_0 est dense dans H_1 (au sens de $\|\ \|_1$).

LEMME 5.2.4. *L'ensemble M_0 est dense dans M au sens de la norme $\|\ \|_1$.*

Démonstration. Soit H_2 le complément de M en norme $\|\ \|_1$, et supposons que M_0 ne soit pas dense dans M au sens de $\|\ \|_1$. Alors il existe un $u_0 \in M$ tel que $u_0 \notin H_1 =$ la fermeture de M_0 dans M_2 (au sens de $\|\ \|_1$). Soit u_1 la projection de u_0 sur H_1 dans M_2, c'est-à-dire que $u_1 \in H_1$ et

(a) $$(u_0 - u_1, h)_1 = 0 \quad \text{pour} \quad h \in M_0.$$

Mais on a: $(u_0, h)_1 = -\int_\Omega u_0 \Delta h\,d\xi$, car $u_0 \in C^2_\Omega$ et $\frac{\partial h}{\partial \nu}|S = 0$. D'autre part, en vertu de la théorie générale de Friedrichs (v. [11], N° 124) on a:

$(u_1, h)_1 = (u_1, A_0 h) = (u_1, -\Delta h)$, car $u_1 \in H_1$ et $h \in M_0 = D(A_0)$. Récapitulant, on a: $0 = (u_0 - u_1, h)_1 = (u_0 - u_1, -\Delta h)$ pour $h \in M_0$. Mais les fonctions de la forme Δh, où $h \in M_0$, forment un ensemble dense dans H (v. [10]), car l'équation $\Delta h = f$, $\frac{\partial h}{\partial \nu}|S = 0$, admet une solution pour toute fonction $f \in C^\infty_\Omega$ telle que $\int_\Omega f d\xi = 0$, c'est-à-dire pour toute fonction de l'ensemble M_2 (5.1.5), qui est dense dans H. Nous aboutissons ainsi à l'équation: $u_0 - u_1 = 0$, en contradiction avec l'hypothèse. Par conséquent M_0 est dense dans M en norme $\|\ \|_1$, c.q.f.d.

Du lemme 5.2.4 on tire comme conclusion immédiate:

(5.2.5) $$M \subset H_1.$$

Notons encore l'inégalité suivante, qui est une conséquence de (4.1.8) et (5.2.2):

(5.2.6) $$\int_S |u(\xi)|^2 dS \leqslant C_5\|u\|_1^2 \quad \text{pour} \quad u \in M_0, \quad \text{où} \quad C_5 = C_1(C_4+1).$$

5.3. Définition de la fonctionnelle $\Psi(u, h)$ et propriétés de la solution de l'équation: $\Psi(u, h) = 0$ ($h \in H_1$). Soient: $a \in L^2_\Omega$, $b \in L^2_\Omega$ telles que

(5.3.1) $$\int_\Omega a(\xi)\,d\xi + \int_S b(\xi)\,dS = 0.$$

Posons, pour $u, h \in M_0$:

(5.3.2) $$\Psi(u, h) = \Psi_0(u, h) + \varphi(h) + \psi(h),$$

où Ψ_0 est définie par (4.2.4) et

(5.3.3) $$\varphi(h) \stackrel{\text{df}}{=} \int_\Omega a(\xi)h(\xi)\,d\xi, \qquad \psi(h) \stackrel{\text{df}}{=} \int_S b(\xi)h(\xi)\,dS.$$

De (5.2.1) et (5.2.6) il résulte que φ et ψ sont linéaires et bornées dans H_1; d'après le N° 4.2 ψ_0 vérifie (1.2.2) et (1.2.3), de sorte que ψ satisfait aussi à ces inégalités. En désignant par le même symbole $\psi(u, h)$ le prolongement continu de ψ_0 (qui est unique, en vertu de (1.2.2)), on déduit de la théorie générale qu'il existe un seul élément $u \in H_1$ tel que:

(5.3.4) $$\Psi(u, h) = 0 \quad \text{pour tout} \quad h \in H_1.$$

THÉORÈME 5.3.5. *Supposons que $u \in H_1$ satisfasse à (5.3.4) et posons, comme dans (4.3.1):*

(i) $$w_i = a_i\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_m}, \xi\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

(ii) $$\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m).$$

icm©

Alors on a:

(iii) $$-\operatorname{div}\vec{w}(\xi)+a(\xi) = 0 \quad (\xi\in\Omega),$$

(iv) $$\sum_{i=1}^{m} w_i\cdot\cos(\nu,\xi_i)+b(\xi) = 0 \quad (\xi\in S).$$

Démonstration. D'après (5.3.4) et la définition de $\psi(u,h)$ on a:

(a) $$\int_\Omega [-\operatorname{div}\vec{w}+a]h\,d\xi+\int_S [\vec{w}\circ\nu+b)h\,d\xi$$
$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} w_i\frac{\partial h}{\partial\xi_i}\,d\xi+\int_\Omega ah\,d\xi+\int_S bh\,dS = \psi(u,h) = 0$$

pour tout $h\in H_1$, en particulier pour $h\in M_2$, d'où:

(b) $$\int_\Omega [-\operatorname{div}\vec{w}+a]h\,d\xi = 0 \quad \text{pour} \quad h\in M_2,$$

car $h(\xi) = 0$ pour $h\in M_2$ et $\xi\in S$. Par conséquent, comme w_i est de classe C^1_Ω et $a\in L^2_\Omega$, le premier membre de (b) représente une fonctionnelle linéaire bornée par rapport à $h\in H$; (b) reste donc en vigueur aussi pour $h\in H$. De là et de (a) on tire:

(c) $$\int_S [\vec{w}\circ\nu+b]h\,d\xi = 0 \quad (h\in H_1)$$

en particulier pour tout $h\in M\subset H_1$. Mais toute fonction g définie et continue sur S peut être représentée sous la forme: $h|S$, où $h\in M$; il en découle (iv) (en vertu du lemme fondamental du calcul des variations).

Revenons à (b) et montrons que $y_0\overset{\text{df}}{=}\operatorname{div}\vec{w}+a\in H$, c'est-à-dire $(y_0,1) = 0$. En vertu de (iv) (que nous venons de démontrer) et de (5.3.1) nous avons:

(d) $$\int_\Omega \operatorname{div}\vec{w}\,d\xi = \int_S \vec{w}\circ\nu\,dS = -\int_S b\,dS = \int_\Omega a\,dS,$$

d'où $(y_0,1) = \int_\Omega(\operatorname{div}\vec{w}-a)\,d\xi = 0$. Par conséquent, en vertu de (b): $-\operatorname{div}\vec{w}+a = 0$, puisque M_2 est dense dans H, c.q.f.d.

6. Application à la théorie non linéaire de l'élasticité.

6.1. Définitions et notations. Soient: Ω un sous-ensemble simplement connexe, ouvert et borné de R^3, $S = \partial\Omega$ la frontière de Ω, satisfaisant aux conditions de Lapounoff. Soit H l'ensemble des suites $u = (u_1,u_2,u_3)$ telles que chaque $u_i\in L^2_\Omega$. Posons:

(6.1.1) $$(u,v) = \int_\Omega u(\xi)\circ v(\xi)\,d\xi = \int_\Omega\sum_{i=1}^{3} u_i(\xi)v_i(\xi)\,d\xi.$$

Pour $u,v\in C^2_\Omega$ posons:

(6.1.2) $$\varepsilon_{ik}(u) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\xi_k}+\frac{\partial u_k}{\partial\xi_i}\right), \quad i,k = 1,2,3, \quad \bar\varepsilon(u)\overset{\text{df}}{=}\operatorname{div}(u),$$

(6.1.3) $$\sigma_{ik}(u) = 2\mu\varepsilon_{ik}(u)+\lambda\bar\varepsilon(u)\,\delta_{ik},$$

où λ,μ sont certaines constantes positives (coefficients de Lamé). Posons ensuite:

(6.1.4) $$e_{ij}(u) = \varepsilon_{ij}(u)-\tfrac{1}{3}\bar\varepsilon(u)\,\delta_{ij}.$$

On vérifie facilement que:

(6.1.5) $$\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v) = \sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(u) = 2\mu\sum_{i,j=1}^{3}e_{ij}(u)e_{ij}(v)+$$
$$+K\operatorname{div}(u)\cdot\operatorname{div}(v), \quad K\overset{\text{df}}{=}\lambda+\tfrac{2}{3}\mu.$$

Définissons encore certaines opérations différentielles:

(6.1.6) $$\sigma_i(u) = \big(\sigma_{i,1}(u),\sigma_{i,2}(u),\sigma_{i,3}(u)\big), \quad i = 1,2,3;\ u\in C^2_\Omega,\ \xi\in\Omega,$$

(6.1.7) $$Au = v\overset{\text{df}}{\Leftrightarrow}v = (v_1,v_2,v_3), \quad v_i = \operatorname{div}\sigma_i(u), \quad i = 1,2,3,$$

(6.1.8) $$\mathfrak{t}_i(u) = \sigma_i(u)\circ\nu = \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\cos(\nu,\xi_j) \quad (\xi\in S),$$

(6.1.9) $$\mathfrak{t}(u) = \big(\mathfrak{t}_1(u),\mathfrak{t}_2(u),\mathfrak{t}_3(u)\big),$$

où $\nu(\xi)$ désigne le verseur normal extérieur à S au point $\xi\in S$.

6.2. Inégalités et identités fondamentales. Pour $u,v\in C^2$ on a l'identité suivante de Betti:

(6.2.1) $$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,d\xi = -\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}\operatorname{div}\sigma_i(u)v_i\,d\xi+\int_S\sum_{i=1}^{3}[\sigma_i(u)\circ\nu]v_i\,dS.$$

En effet, en vertu de l'identité évidente $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, on a:

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,d\xi = \int_\Omega\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\left(\frac{\partial v_i}{\partial\xi_j}+\frac{\partial v_j}{\partial\xi_i}\right)d\xi$$
$$= \int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\frac{\partial u_i}{\partial\xi_j}\,d\xi = \int_\Omega\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(u)\circ\operatorname{grad}v_i\,d\xi$$
$$= -\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}\operatorname{div}\big(\sigma_i(u)\big)\cdot v_i\,d\xi+\int_S\sum_{i=1}^{3}\big(\sigma_i(u)\circ\nu\big)v_i\,dS,$$

c.q.f.d.

Supposons maintenant que S soit formée de trois parties disjointes mesurables: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ et que $\operatorname{mes}(S_1) > 0$. Définissons ensuite l'ensemble $M \subset H$ comme il suit:

DÉFINITION 6.2.2. $u \in M \Leftrightarrow u \in C^2_\Omega$ et (a) $u(\xi) = 0$ $(\xi \in S_1)$, (b) $\mathfrak{t}(u) = 0$ $(\xi \in S_2)$, (c) $u_\nu(\xi) = 0$ et $\mathfrak{t}(u)_S = 0$ $(\xi \in S_3)$, où a_ν (resp. a_S) désigne la composante du vecteur a normale (resp. tangente) à S et $\mathfrak{t}(u)$ a été définie par (6.1.9). Posons pour $u, v \in M$:

DÉFINITION 6.2.3. $(u, v)_a = \lambda\mu \int\limits_\Omega \sum\limits_{i,j=1}^{3} e_{ij}(u) e_{ij}(v)\, d\xi,$

$$(u, v)_b = k \int\limits_\Omega \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v)\, d\xi \quad (\text{où } k = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu).$$

On voit facilement que:

$$(6.2.4)\qquad (u, v)_a + (u, v)_b = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, d\xi = (u, v)_1.$$

La formule (6.2.1) prend alors la forme (v. (6.1.7) et (6.1.9)):

$$(6.2.5)\qquad (u, v)_1 = (Au, v) + \int\limits_S \mathfrak{t}(u) \circ v\, dS \quad (u, v \in C^2_\Omega),$$

d'où l'on obtient immédiatement:

$$(6.2.6)\qquad (Au, v) = (u, v)_1 \quad (u, v \in M)$$

puisque $f(u) \circ v = 0$ sur S pour $u, v \in M$. L'opération A est donc symétrique sur M. Pour montrer qu'elle est aussi positivement définie, remarquons que pour $u \in M$ l'inégalité suivante de Korn a lieu ([7], § 43):

$$(6.2.7)\qquad \|u\|^2 = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} |u_i(\xi)|^2 d\xi \leqslant C_1 D(u) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}\right) d\xi$$

$$\leqslant C_2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} |\varepsilon_{ij}(u)|^2 d\xi \leqslant C_3 \|u\|_1^2$$

(C_i étant des constantes). Notons encore l'inégalité (6.2.8), qui découle facilement de celle de Sobolev ([7], § 22):

$$(6.2.8)\qquad \int\limits_S |u(\xi)|^2 d\xi = \int\limits_S \sum_{i=1}^{3} |u_i(\xi)|^2 d\xi \leqslant C_5 D(u) \leqslant C_6 \|u\|_1^2,$$

où C_5, C_6 sont des nombres constants.

6.3. Théorie non linéaire de l'élasticité — la fonctionnelle $\Psi(u, h)$ du travail virtuel. Soient $m(s)$, $k(s)$ deux fonctions réelles, définies pour $s \geqslant 0$ et vérifiant les inégalités suivantes:

(6.3.1) (a) $0 \leqslant 2|m'(s)|s + m(s) \leqslant 2\beta\mu$; (b) $-2|m'(s)|s + m(s) \geqslant 2\alpha\mu$,

(6.3.2) (a) $0 \leqslant 2|k'(s)|s + k(s) \leqslant \beta K$; (b) $-2|k'(s)|s + k(s) \geqslant \alpha K$

où $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ et λ, μ sont des constantes données.

Posons pour $u, h \in M$:

DÉFINITION 6.3.3. $\Psi_a(u, h) = 2 \int\limits_\Omega m\Big(\sum\limits_{i,j=1}^{3} \big(e_{ij}(u)\big)^2\Big) \sum\limits_{k,n=1}^{3} e_{k,n}(u) e_{k,n}(h)\, d\xi.$

DÉFINITION 6.3.4. $\Psi_b(u, h) = \int\limits_\Omega k\big((\operatorname{div}(u))^2\big) \operatorname{div}(u) \cdot \operatorname{div}(v)\, d\xi.$

Nous allons démontrer les inégalités suivantes:

$$(6.3.5)\qquad |\Psi_a(u+f, h) - \Psi_a(u, h)| \leqslant \beta \|f\|_a \cdot \|h\|_a,$$

$$(6.3.6)\qquad \Psi_a(u+h, h) - \Psi_a(u, h) \geqslant \alpha \|h\|_a^2,$$

$$(6.3.7)\qquad |\Psi_b(u+f, h) - \Psi_b(u, h)| \leqslant \beta \|f\|_b \cdot \|h\|_b,$$

$$(6.3.8)\qquad \Psi_b(u+h, h) - \Psi_b(u, h) \geqslant \alpha \|h\|_b^2.$$

Admettons, pour abréger, les notations suivantes:

$$(6.3.9)\qquad \begin{gathered} e(u) = e_{ij}(u), \quad i, j = 1, 2, 3; \quad e(u) \circ e(v) = \sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}(u) e_{ij}(v), \\ |e(u)|^2 = e(u) \circ e(u) = \sum_{i,j=1}^{3} |e_{ij}(u)|^2. \end{gathered}$$

Nous avons alors:

$$\Psi_a(u+f, h) - \Psi_a(u, h) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \Psi_a(u+tf, h)\, dt$$

$$= \int_0^1 \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \big\{2m\big(|e(u)+te(f)|^2\big) \cdot [e(u)+te(f)] \circ e(h)\big\}\, d\xi\, dt$$

$$= \int_0^1 \int\limits_\Omega \big\{4m^2\big(|e(u)+te(f)|^2\big) \cdot [e(u)+te(f)] \circ e(f)\, [e(u)+te(f)] \circ e(u) +$$

$$+ 2m\big(|e(u)+te(f)|^2\big)\, e(f) \circ e(h)\big\}\, d\xi\, dt,$$

d'où, en appliquant l'inégalité de Schwarz au produit scalaire $e(u) \circ e(v)$ et l'inégalité (6.3.1.)(a), où l'on substitue $|e(u)+te(f)|^2$ pour s, on obtient:

$$\Psi_a(u+f, h) - \Psi_a(u, h) \leqslant 2 \int_0^1 \int\limits_\Omega \big\{\big|2m'\big(|e(u)+te(f)|^2\big)\big|\, |e(u)+te(f)|^2 +$$

$$+ m\big(|e(u)+te(f)|^2\big) |e(u)| \cdot |e(f)|\big\}\, d\xi\, dt$$

$$\leqslant 2\beta\mu \int_0^1 \int\limits_\Omega |e(f)| \cdot |e(h)|\, d\xi\, dt \leqslant 2\beta\mu \Big\{\int\limits_\Omega |e(f)|^2 d\xi\Big\}^{1/2} \Big\{\int\limits_\Omega |e(h)|^2 d\xi\Big\}^{1/2}$$

$$= \beta \|f\|_a \|f\|_b.$$

L'inégalité (6.3.5) est ainsi démontrée. Pour démontrer (6.3.6), (6.3.7) et (6.3.8), on procède de façon analogue, en s'appuyant sur (6.3.1)(b), (6.3.2)(a) et (b).

Passons à la définition de $\Psi(u, h)$. Soient $a(\xi)$ $(\xi \in \Omega)$ et $b(\xi)$ $(\xi \in S)$ des champs vectoriels tels que: $\int_{\Omega} |a(\xi)|^2 d\xi < +\infty$, $\int_{S} |b(\xi)|^2 dS < +\infty$.

Posons:

$$\varphi(h) = \int_{\Omega} a(\xi) \circ h(\xi)\, d\xi = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} a_i(\xi) h_i(\xi)\, d\xi, \tag{6.3.10}$$

$$\Psi(h) = \int_{S} b(\xi) \circ h(\xi)\, d\xi = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} b_i(\xi) h_i(\xi)\, d\xi, \tag{6.3.11}$$

$$\Psi(u, h) \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi_a(u, h) + \Psi_b(u, h) + \varphi(h) + \psi(h). \tag{6.3.12}$$

La formule (6.3.12) représente ce qu'on appelle le travail virtuel des forces élastiques (le long du déplacement virtuel), effectué sur le corps Ω qui se trouve dans l'état de déformation $\varepsilon_{ik}(u)$. Plus exactement, $\Psi_a(u, h)$ (resp. $\Psi_b(u, h)$) est le travail de déformation de la forme (resp. du volume) effectué sur le corps Ω; $\varphi(h)$ (resp. $\psi(h)$) est le travail des forces extérieures du volume (p.ex. la force de gravitation), resp. les forces superficielles. Enfin, $|e(u)|^2$ est appelé intensité de la déformation de la forme. D'autre part, on sait par la théorie générale de l'élasticité qu'un vecteur de déplacement u décrit l'état d'équilibre d'un corps Ω si et seulement si le travail virtuel total $\Psi(u, h)$ est nul pour tout déplacement admissible (virtuel) h, c'est-à-dire si l'équation (A): $\Psi(u, h) = 0$ a lieu.

Des formules (6.3.12), (6.3.3) et (6.3.4) il ressort immédiatement que la différence entre la théorie non linéaire, exposée dans ce N°, et la théorie linéaire classique consiste en ce que les coefficients λ, k ont été remplacés par certaines fonctions de l'intensité de déformation de la forme $\left(\sum_{i,j=1}^{3} (e_{ij}(u))^2\right)$ ou du volume $\left((\mathrm{div}(u))^2\right)$ respectivement.

Passons à la solution de l'équation (A);

Nous avons d'abord:

$$\begin{aligned}
&|\Psi(u+f, h) - \Psi(u, h)| \\
&\leqslant |\Psi_a(u+f, h) - \Psi_a(u, h)| + |\Psi_b(u+f, h) - \Psi_b(u, h)| \\
&\leqslant \beta[\|f\|_a \|h\|_a + \|f\|_b \|h\|_b) \leqslant \beta[\|f\|_a^2 + \|f\|_b^2]^{1/2} \cdot [\|h\|_a^2 + \|h\|_b^2]^{1/2} = \beta \|f\|_1 \|h\|_1
\end{aligned}$$

en vertu de (6.3.5) et (6.3.7). D'une façon analogue (en s'appuyant sur (6.3.6) et (6.3.8)) on obtient:

$$\begin{aligned}
\Psi(u+h, h) - \Psi(u, h) &= \Psi_a(u+h, h) - \Psi_a(u, h) + \Psi_b(u+h, h) - \Psi_b(u, h) \\
&\geqslant \alpha[\|h\|_a^2 + \|h\|_b^2] = \alpha \|h\|_1^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, φ et ψ sont, en vertu de (6.2.8) et (6.2.7), des fonctionnelles linéaires bornées sur M au sens de $\| \;\|_1$; la fonctionnelle $\Psi(u, h)$ satisfait donc aux inégalités fondamentales (1.2.1)–(1.2.3) et peut être prolongée à tout l'espace H_1, de sorte que (1.2.1)–(1.2.3) restent en vigueur. En vertu de la théorie générale (N° 1) il existe un seul élément $u \in H_1$ tel que $\Psi(u, h) = 0$ pour tout $h \in H_1$, c'est-à-dire que u est le point cherché d'équilibre élastique, c.q.f.d.

Travaux cités

[1] R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin 1931.
[2] H. Kanderer, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.
[3] T. Leżański, *Eine effektive Lösungsmethode nichtlinearer Gleichungen in Hilbertschen Räumen*, Math. Ann. 158 (1965), pp. 377–386.
[4] — *Sur les solutions généralisées des équations quasi-linéaires*, Studia Math. 29 (1968), pp. 133–142.
[5] — *Sur les opérations presque inverses*, ibidem 58 (1976), pp. 89–108.
[6] H. Meschkowski, *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion*, Berlin 1962.
[7] С. Г. Михлин, *Проблема минимума квадратичецкого функционала*, Москва 1952.
[8] — *Вариационные методы в математической физике*, Москва 1957.
[9] W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, Warszawa 1970.
[10] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, T. II, Warszawa 1958.
[11] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1952.

Received July 17, 1975 (1049)