STUDIA MATHEMATICA, T. LIX. (1976)

# Quelques inégalités concernant les martingales

par

D. LEPINGLE (Orléans)

**Résumé.** La recherche des inégalités de distribution entre opérateurs de martingales a permis à Burkholder et Gundy d'obtenir de nombreuses inégalités intégrales entre ces opérateurs (voir notamment [3]). On tire parti de cette méthode pour approfondir les résultats connus concernant les relations entre:

— un processus croissant prévisible et son potentiel;

— la valeur maximale d'une martingale et sa "fonction dièse";

— deux opérateurs maximaux s'introduisant naturellement dans l'étude des martingales à valeurs dans $l^r$ $(0 < r < \infty)$.

Outre l'intêret propre de ces inégalités de distribution, les inégalités intégrales qui en sont la conséquence améliorent bien souvent celles de Garsia [6] et de Stein [11].

**Plan.** Après avoir rappelé en (1) les principaux outils de la théorie, nous montrons en (2) une inégalité de distribution entre un processus croissant prévisible et la valeur maximale de son potentiel. En (3), nous étudions diverses propriétés de deux processus croissants associés à une martingale de $L^p$, retrouvant notamment les résultats de Brown [2] et d'autres théorèmes sur les espaces de Banach de martingales. On s'intéresse dans (4) à une inégalité de distribution entre la fonction maximale et la fonction dièse de Fefferman–Stein [5]. Enfin, en (5), l'adaptation de la décomposition de Davis à des martingales vectorielles permet de montrer l'analogue probabiliste d'une inégalité obtenue par A. Bonami [1] dont par ailleurs les multiples remarques et suggestions ont joué un rôle capital dans l'élaboration du présent travail.

**(1) Généralités.** On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ muni d'une suite croissante $(\mathscr{B}_n, n \geqslant 0)$ de sous-tribus de $\mathscr{A}$. Si $f = (f_n, n \geqslant 0)$ est une martingale uniformément intégrable, on note $f_\infty$ la variable aléatoire mesurable pour la tribu $\mathscr{B}_\infty = V(\mathscr{B}_n, n \geqslant 0)$, telle que $f_n$ tende vers $f_\infty$ p.s. et dans $L^1$ lorsque $n$ tend vers l'infini. On note $E_n$ l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathscr{B}_n$ $(0 \leqslant n \leqslant \infty)$, et de même $E_\mu$ l'opérateur correspondant à la tribu $\mathscr{B}_\mu$ où $\mu$ est un temps d'arrêt de $(\mathscr{B}_n)$ non nécessairement fini.

Ce qu'on appelle ici un opérateur de martingales est simplement une application qui à toute martingale $f = (f_n)$ associe une variable aléatoire positive, finie ou infinie. Voici les opérateurs que nous allons étudier:

$$f^* = \sup\{|f_n|;\ n \geqslant 0\},$$

$$f^\# = \sup\{E_n[|f_m - f_{n-1}|];\ m \geqslant n \geqslant 1\},$$

$$s^p(f) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{k-1}[|f_k - f_{k-1}|^p] \quad \text{où} \quad 0 < p < \infty,$$

$$d^p(f) = \sup\{E_n[\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|^p];\quad n \geqslant 0\} \quad \text{où} \quad 0 < p < \infty,$$

$$t^p(f) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{k-1}[|f_k|^p - |f_{k-1}|^p] \quad \text{où} \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

On dit qu'une fonction $\Phi$ sur $R_+$ est à croissance lente si $\Phi$ est croissante, continue, nulle en 0, et telle que

$$\sup_{t>0} \frac{\Phi(at)}{\Phi(t)} < \infty \quad \text{pour un } a > 1.$$

Remarquons que la convexité de $\Phi$ n'est pas exigée. Le lemme suivant, utilisé par Burkholder en [3], va être d'une utilité constante.

LEMME 1. *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires positives telles que pour au moins un $\beta > 1$ et pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon(\beta, \delta)$ tendant vers 0 lorsque $\delta$ tend vers 0 et vérifiant pour tout $\lambda > 0$*

$$P(X > \beta\lambda,\ Y < \delta\lambda) \leqslant \varepsilon(\beta, \delta) P(X > \lambda).$$

*Alors, pour toute fonction $\Phi$ à croissance lente, il existe une constante $c$ positive telle que*

$$E[\Phi \circ X] \leqslant c E[\Phi \circ Y].$$

D'une manière générale, nous allons rencontrer de nombreuses inégalités de ce type, avec des constantes $c$ qu'on ne cherche pas à expliciter et qui pourront varier de ligne en ligne au cours d'un même calcul. A l'inverse, il est toujours intéressant d'améliorer la fonction $\varepsilon(\beta, \delta)$. Par exemple, si $\varepsilon(\beta, \delta) = \delta/(\beta - 1)$, on peut en déduire:

— en faisant tendre $\beta$ vers l'infini, que $X < \infty$ p.s. là où $Y < \infty$ p.s.;

— en prenant $\beta = 1 + \frac{1}{p}$, $\delta = 1/e'p$ (où $e' > e$), que $E[X^p] \leqslant \frac{ee'}{e'-e} e'^p p^p E[Y^p]$, donc qu'il existe $a > 0$ tel que $\exp aX \in L^1$ si $Y \in L^\infty$.

Mais si $\varepsilon(\beta, \delta) = c_1 \exp\left(-\frac{\beta - 1}{c_2 \delta}\right)$, alors, par intégration en $\beta$, nous obtenons mieux: $\exp \lambda X$ est intégrable sur tout ensemble où $Y \leqslant \delta$ dès que $\lambda < 1/c_2\delta$.

Voici maintenant un autre lemme utilisé par Burkholder. Tout d'abord, si $f$ est une martingale et $\tau$ un temps d'arrêt, notons $f^\tau$ la martingale $f$ arrêtée au temps $\tau$. Rappelons aussi qu'un processus croissant adapté $(A_n, n \geqslant 0)$ est dit prévisible si $A_{n+1}$ est $\mathscr{B}_n$-mesurable pour tout $n \geqslant 0$; on pose alors $A_\infty = \lim A_n$ p.s. lorsque $n$ tends ver l'infini.



LEMME 2. *Soient $U$ et $V$ deux opérateurs de martingales tels que:*

(a) *pour toute martingale $f$ et tout couple $(\tau, \tau')$ de temps d'arrêt, on ait $U(f^\tau) = U(f^{\tau'})$ et $V(f^\tau) = V(f^{\tau'})$ sur l'ensemble $\{\tau = \tau'\}$;*

(b) *pour toute martingale $f$, $(V(f^n),\ 0 \leqslant n \leqslant \infty)$ soit un processus croissant prévisible, nul pour $n = 0$.*

*Supposons qu'il existe une constante $a$ telle que pour toute martingale $f$,*

$$E[U(f)] \leqslant a E[V(f)].$$

*Alors, pour toute fonction $\Phi$ à croissance lente et concave,*

$$E[\Phi \circ U(f)] \leqslant (a+1) E[\Phi \circ V(f)].$$

**(2) Potentiels et processus croissants.** Neveu en [10] et Garsia en [6] on montré le résultat suivant:

PROPOSITION 1. *Soit $(A_n, n \geqslant 0)$ un processus croissant prévisible nul pour $n = 0$. S'il existe une variable aléatoire positive $Y$ telle que pour tout $n \geqslant 0$,*

$$E_n[A_\infty - A_n] \leqslant E_n[Y],$$

*alors, pour toute fonction $\Phi$ convexe à croissance lente, il existe une constante $c$ ne dépendant que de $\Phi$ telle que*

$$E[\Phi \circ A_\infty] \leqslant c E[\Phi \circ Y].$$

De plus, Meyer [9] et Garsia [6] ont prouvé que si le potentiel $Z_n = E_n[A_\infty - A_n]$ est borné par une constante $M$ uniformément en $n$, alors pour tout $\lambda < 1/M$, $\exp\{\lambda A_\infty\}$ est intégrable. On va approfondir ces deux résultats au moyen d'une inégalité de distribution, après avoir posé

$$Z^* = \sup\{Z_n;\ n \geqslant 0\} = \sup\{E_n[A_\infty - A_n];\ n \geqslant 0\}.$$

THÉORÈME 1. *Soit $(A_n, n \geqslant 0)$ un processus croissant prévisible nul en 0, de potentiel $(Z_n)$. Alors, pour tous $\beta > 1$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$ et $\varrho > 1$,*

$$P(A_\infty > \beta\lambda,\ Z^* \leqslant \delta\lambda) \leqslant \frac{\varrho}{\varrho - 1} \exp\left(-\frac{\beta - 1}{\varrho\delta}\right) P(A_\infty > \lambda).$$

*De plus, pour toute fonction $\Phi$ à croissance lente, il existe une constante $c$ ne dépendant que de $\Phi$ telle que*

$$E[\Phi \circ A_\infty] \leqslant c E[\Phi \circ Z^*]$$

Preuve. Posons

$$\begin{aligned} \mu &= \inf\{n \geqslant 0:\ A_{n+1} > \lambda\}, \\ \tau &= \inf\{n \geqslant 0:\ Z_n > \delta\lambda\}, \\ B_n &= A_{n \wedge \tau} \text{ pour tout } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Le processus croissant prévisible $(B_n, n \geqslant 0)$ est de potentiel borné. En effet,

$$E_n[B_\infty - B_n] = E_n[1(n<\tau)(A_\tau - A_n)]$$
$$\leqslant 1(n<\tau)E_n[A_\infty - A_n] \leqslant \delta\lambda.$$

On en déduit (voir [6], p. 66) que

$$E_\sigma\left[\exp\left(\frac{B_\infty - B\sigma}{\varrho\delta\lambda}\right)\right] \leqslant \frac{\varrho}{\varrho-1} \quad \text{pour tout temps d'arrêt } \sigma \text{ et tout } \varrho > 1.$$

Sur l'ensemble $\{A_\infty > \beta\lambda,\ Z^* \leqslant \delta\lambda\}$,

$$\beta\lambda < A_\infty - A_\mu + A_\mu \leqslant \lambda + B_\infty - B_\mu,$$

donc

$$P(A_\infty > \beta\lambda, Z^* \leqslant \delta\lambda) \leqslant P(\mu<\tau, B_\infty - B_\mu > (\beta-1)\lambda)$$
$$\leqslant \exp\left(-\frac{\beta-1}{\varrho\delta}\right) E\left[1(\mu<\tau)E_\mu\left[\exp\left(\frac{B_\infty - B_\mu}{\varrho\delta\lambda}\right)\right]\right]$$
$$\leqslant \frac{\varrho}{\varrho-1}\exp\left(-\frac{\beta-1}{\varrho\delta}\right)P(\mu<\infty).$$

L'inégalité intégrale s'en déduit par application du lemme 1.

Remarques. 1. Une démonstration un peu plus simple donnerait la constante $\delta/(\beta-1)$ au lieu de la constante exponentielle dans l'inégalité de distribution; on en déduit l'intégrabilité de $\exp\lambda A_\infty$ pour tout $\lambda$ plus petit que $1/e^2\delta$ si $Z^*$ est borné par $\delta$. Enfin, en arrêtant $(A_n)$ au premier instant où $(Z_n)$ dépasse $\delta$, on obtient le résultat local: $\exp\lambda A_\infty$ est intégrable sur tout ensemble où $Z^* \leqslant \delta$ dès que $\lambda < 1/e^2\delta$. La constante exponentielle du théorème donne le même résultat pour tout $\lambda < 1/\delta$. Rappelons aussi que si $Z^*$ est borné, $A_\infty$ n'est pas nécessairement borné.

2. Si nous comparons avec le résultat du lemme 1, la condition de convexité a été supprimée, mais en revanche $Z^*$ ne peut être remplacé par $Y$, si $E_n[Y]$ est une martingale majorant $Z_n$. Montrons-le sur un exemple.

Si $f$ est une martingale, posons pour tout $0 \leqslant n \leqslant \infty$

$$s_n^2(f) = \sum_{k=1}^{n} E_{k-1}[(f_k - f_{k-1})^2],$$

$$S_n^2(f) = \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1})^2.$$

Alors,

$$E_n[s_\infty^2(f) - s_n^2(f)] = E_n[S_\infty^2(f) - S_n^2(f)] \leqslant E_n[S_\infty^2(f)],$$



mais pour $\Phi(x) = \sqrt{x}$, il n'existe pas de constante $c$ telle que

$$E[\Phi\circ s_\infty^2(f)] \leqslant cE[\Phi\circ S_\infty^2(f)],$$

car le premier membre peut être infini sans que le second le soit.

3. Il n'existe pas d'inégalité de distribution en sens inverse entre $A_\infty$ et $Z^*$, ainsi que le montre l'exemple suivant.

Soit $\Omega = [0,1]$, muni de la mesure de Lebesgue $P$. Posons $I_i = ]2^{-i}, 2^{1-i}]$ pour tout $i \geqslant 1$; soient alors $\mathscr{B}_0$ la tribu grossière et $\mathscr{B}_i$ pour $i \geqslant 1$ la tribu engendrée par les $I_j$, pour $j \leqslant i$. Posons encore

$$A_0 = 0, \quad A_{n+1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{2^m}{m^2} 1_{I_m} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Un calcul simple montre alors que $E[A_\infty] < \infty$ et $E[Z^*] = \infty$; il n'y a donc pas d'inégalité intégrale, ni par conséquent d'inégalité de distribution dans le sens inverse du théorème. L'inégalité $Z_n \leqslant E_n[A_\infty]$ entraîne néanmoins grâce au théorème maximal des martingales que

$$E[(Z^*)^p] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[A_\infty^p] \quad \text{pour tout } p > 1.$$

Corollaire. *Soit $\Phi$ une fonction à croissance lente. Si $(X_n, n \geqslant 0)$ est une surmartingale positive, on pose $X^* = \sup\{X_n, n > 0\}$ et on note $X = M - A$ sa décomposition de Doob en une martingale positive et un processus croissant prévisible nul en 0. Alors,*

$$E[\Phi\circ M_\infty] \leqslant cE[\Phi\circ X^*].$$

Preuve. On reprend l'argumentation de Meyer ([9], p.50). Pour $m$ fixé, la suite définie par

$$Y_n = X_n \quad \text{si} \quad n \leqslant m,$$
$$Y_{m+1} = X_\infty,$$
$$Y_n = 0 \quad \text{si} \quad n > m+1$$

est, pour la famille de tribus définie par $\mathscr{C}_n = \mathscr{B}_n$ si $n \leqslant m$, $\mathscr{C}_n = \mathscr{B}_\infty$ si $n > m$, le potentiel d'un processus croissant prévisible $(B_n)$ tel que

$$B_\infty = A_m + E_m[X_m - X_\infty] + X_\infty \geqslant A_m + X_\infty.$$

Il vient comme conséquence du théorème précédent

$$E[\Phi(A_m + X_\infty)] \leqslant cE[\Phi\circ X^*],$$

d'où le résultat cherché en faisant tendre $m$ vers l'infini.

**(3) Processus croissants associés aux martingales.** Pour toute martingale $f$ et tout $n \geqslant 0$, posons

$$s_n^p(f) = s^p(f^n) = \sum_{k=1}^{n} E_{k-1}[|f_k - f_{k-1}|^p] \quad \text{où} \quad 0 < p < \infty,$$

$$t_n^p(f) = t^p(f^n) = \sum_{k=1}^{n} E_{k-1}[|f_k|^p - |f_{k-1}|^p] \quad \text{où} \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Ces deux processus $(s_n^p)$ et $(t_n^p)$ sont croissants, prévisibles, nuls en 0, tels que $s_\infty^p(f) = s^p(f)$ et $t_\infty^p(f) = t^p(f)$. Ils coïncident dans le cas habituel $p = 2$. Pour $p$ entier pair $\geqslant 2$, ils ont été considérés par Brown [2] qui montre que $t^p(f) \in L^1$ si pour tout entier $r = 2, 3, \ldots, p$, $s^r(f) \in L^{p/r}$.

En fait, la relation de convexité

$$s^r(f) \leqslant [s^p(f)]^\alpha [s^q(f)]^\beta,$$

où $0 < q < r < p < \infty$, $r = \alpha p + \beta q$, $\alpha + \beta = 1$, permet de montrer que les conditions $s^2(f) \in L^{p/2}$ et $s^p(f) \in L^1$ entraînent les conditions intermédiaires. Nous allons généraliser le résultat de Brown à l'aide des outils de Burkholder.

Proposition 2. *Soit $2 \leqslant p < \infty$, et soit $\Phi$ une fonction à croissance lente concave. Il existe alors des constantes $c$ telles que pour toute martingale $f$ nulle en 0,*

$$E[\Phi \circ (f^*)^p] \leqslant cE\big[\Phi \circ \big(s^2(f)\big)^{p/2}\big] + cE[\Phi \circ s^p(f)],$$

$$E[\Phi \circ t^p(f)] \leqslant cE\big[\Phi \circ \big(s^2(f)\big)^{p/2}\big] + cE[\Phi \circ s^p(f)].$$

Preuve. D'après le lemme 2 et l'inégalité $\Phi(\lambda_1 + \lambda_2) \leqslant \Phi(\lambda_1) + \Phi(\lambda_2)$, il suffit de montrer qu'il existe des constantes $c$ telles que

$$E[(f^*)^p] \leqslant cE\big[\big(s^2(f)\big)^{p/2}\big] + cE[s^p(f)].$$

Posons

$$d^* = \sup\{|f_k - f_{k-1}|;\ k \geqslant 1\}.$$

alors ([3], p. 39),

$$E[(f^*)^p] \leqslant cE\big[\big(s^2(f)\big)^{p/2}\big] + cE[(d^*)^p],$$

et de

$$(d^*)^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|^p,$$

on tire

$$E[(d^*)^p] \leqslant E[s^p(f)].$$

Enfin, de

$$E[t^p(f)] = \lim_{n\to\infty} E[|f_n|^p] \leqslant E[(f^*)^p],$$

n déduit l'autre inégalité.



Il est intéressant de comparer pour chaque $p$ les opérateurs $(f^*)^p$, $s^p(f)$ et $t^p(f)$.

Proposition 3. *Soit $\Phi$ une fonction à croissance lente concave. Il existe alors des constantes $c$ telles que pour toute martingale $f$ nulle en 0,*

$$\text{si} \quad 1 < p < \infty, \quad E[\Phi \circ (f^*)^p] \leqslant cE[\Phi \circ t^p(f)],$$

$$\text{si} \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \quad E[\Phi \circ t^p(f)] \leqslant cE[\Phi \circ s^p(f)],$$

$$\text{si} \quad 0 < p \leqslant 2, \quad E[\Phi \circ (f^*)^p] \leqslant cE[\Phi \circ s^p(f)].$$

Preuve. Il suffit encore de montrer ces inégalités pour $\Phi(\lambda) = \lambda$. Si $1 < p < \infty$,

$$E[(f^*)^p] \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \lim_{n\to\infty} E[|f_n|^p] = \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E[t^p(f)].$$

Si $1 \leqslant p \leqslant 2$,

$$\begin{aligned} E[t^p(f)] &= \lim_{n\to\infty} E[|f_n|^p] \\ &\leqslant cE\Big(\Big[\sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|^2\Big)^{p/2}\Big] \quad \text{(inégalité de Burkholder–Gundy)} \\ &\leqslant cE\Big[\sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|^p\Big] \\ &\leqslant cE[s^p(f)]. \end{aligned}$$

Si $1 < p \leqslant 2$, la troisième inégalité à démontrer est conséquence des deux premières. Si maintenant $0 < p \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} E[(f^*)^p] &\leqslant E\Big[\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|\Big)^p\Big] \\ &\leqslant E\Big[\sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|^p\Big]. \end{aligned}$$

Proposition 4. *Soit $\Phi$ une fonction à croissance lente convexe. Alors, pour toute martingale $f$ bornée dans $L^p$,*

$$\text{si} \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad E[\Phi \circ t^p(f)] \leqslant cE[\Phi \circ |f_\infty|^p],$$

$$\text{si} \quad 2 \leqslant p < \infty, \quad E[\Phi \circ s^p(f)] \leqslant cE[\Phi \circ |f_\infty|^p].$$

Preuve. Si $1 \leqslant p < \infty$, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} E_n[t^p(f) - t_n^p(f)] &= E_n[|f_\infty|^p - |f_n|^p] \\ &\leqslant E_n[|f_\infty|^p]. \end{aligned}$$

Si $2 \leqslant p < \infty$, pour tout $n \geqslant 0$,

$$E_n[s^p(f) - s_n^p(f)] = E_n\Big[\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|^p\Big]$$
$$\leqslant E_n\Big[\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|^2\Big)^{p/2}\Big]$$
$$\leqslant cE_n[|f_\infty - f_n|^p].$$

On a utilisé ici une forme conditionnelle de l'autre volet de l'inégalité de Burkholder–Gundy. Enfin, on remarque que

$$E_n[|f_\infty - f_n|^p] \leqslant 2^p E_n[|f_\infty|^p].$$

Dans les deux cas de l'énoncé, la proposition 1 donne alors le résultat désiré.

On vient d'utiliser le potentiel du processus $(s_n^p(f))$, potentiel dont la valeur maximale est par définition $d^p(f)$. En vertu du théorème 1,

$$E[\Phi \circ s^p(f)] \leqslant cE[\Phi \circ d^p(f)]$$

pour toute fonction $\Phi$ à croissance lente et tout $0 < p < \infty$. Il existe bien sûr aussi une inégalité analogue entre le processus $(t_n^p(f))$ et son potentiel.

Nous allons maintenant nous inspirer très largement de Herz ([8]) pour montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Soit $1 < p < \infty$ et soit $q = p/(p-1)$.*

*L'espace de Banach des martingales $f$ nulles en 0 telles que $E\big[(s^p(f))^{1/p}\big] < \infty$, muni de cette norme, a pour dual l'espace des martingales $\varphi$ nulles en 0 telles que $d^q(\varphi)$ soit dans $L^\infty$, la formule de dualité étant*

$$\langle f, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} E[f_n\varphi_n].$$

*On a, de plus, pour tout $N \geqslant 0$*

$$|E[f_N\varphi_N]| \leqslant 4E\big[(s^p(f))^{1/q}(d^q(\varphi))^{1/q}\big]$$

*pour toutes martingales $f, \varphi$ vérifiant $E[f_0\varphi_0] = 0$, dès que le membre de droite est fini.*

Preuve. a) Montrons d'abord, en reprenant une démonstration connue pour $p = 2$, que pour toute forme linéaire continue $F$ sur cet espace de Banach, il existe une martingale $\varphi$ unique vérifiant $\varphi_0 = 0$, $d^q(\varphi) \in L^\infty$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} E[f_n\varphi_n] = F(f).$$

Soit $N > 0$, et considérons la restriction $F_N$ de $F$ au sous-espace des martingales telles que $f_\infty$ existe et soit $\mathscr{B}_N$-mesurable (c'est aussi le sous-espace des martingales arrêtées au temps $N$; on voit aisément que l'ensemble des martingales arrêtées en des instants finis non aléatoires forment un sous-espace dense de l'espace de Banach considéré). Il existe alors $\varphi \in L^q(\mathscr{B}_N)$ unique vérifiant $F_N(f) = E[f_N\varphi]$. Soient $n \in \{0, \ldots, N\}$ et $A \in \mathscr{B}_n$ avec $P(A) > 0$; posons pour tout $k \in \{n+1, \ldots, N\}$

$$e_k = E_k[\varphi] - E_{k-1}[\varphi],$$

et pour tout $B \in \mathscr{B}_N$,

$$Q(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Alors,

$$\int_A \sum_{k=n+1}^{N} |e_k|^q dP = P(A)\sup\left\{\frac{\big|\sum_{k=n+1}^{N}\int 1_A e_k h_k dQ\big|^q}{\big(\int\sum_{k=n+1}^{N}|h_k|^p dQ\big)^{q/p}};\ h_k \in L^p(\Omega, \mathscr{B}_N, Q)\right\}$$

Posons encore pour tout $k \in \{n+1, \ldots, N\}$,

$$g_k = E_k[h_k] - E_{k-1}[h_k].$$

$$\sum_{k=n+1}^{N}\int 1_A e_k h_k dQ = \frac{1}{P(A)}\sum_{k=n+1}^{N}\int_A e_k h_k dP$$
$$= \frac{1}{P(A)} F_N\Big(1_A\sum_{k=n+1}^{N} g_k\Big)$$
$$\leqslant \frac{c}{P(A)} E\Big[1_A\Big(\sum_{k=n+1}^{N} E_{k-1}[1_A|g_k|^p]\Big)^{1/p}\Big]$$
$$\leqslant c(P(A))^{-1/p}\Big(\sum_{k=n+1}^{N} E[1_A|g_k|^p]\Big)^{1/p}$$
$$\leqslant c(P(A))^{-1/p}2\Big(\sum_{k=n+1}^{N} E[1_A|h_k|^p]\Big)^{1/p}$$
$$\leqslant 2c\Big(\int\sum_{k=n+1}^{N}|h_k|^p dQ\Big)^{1/p}.$$

Ceci montre que $E_n[\sum_{k=n+1}^{N}|e_k|^q] \leqslant (2c)^q$ pour tout $n \leqslant N$. L'unicité de $\varphi$ pour chaque $N$ permet de définir une suite $(\varphi_N)$, dont on vérifie qu'elle est une martingale et que pour tout $n \geqslant 0$,

$$E_n\Big[\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k - \varphi_{k-1}|^q\Big] \leqslant (2c)^q.$$

b) Soient maintenant deux martingales $f$ et $\varphi$ vérifiant les conditions de l'inégalité du théorème. L'hypothèse $E[f_0\varphi_0] = 0$ permet, en remplaçant $f_n$ par $f_n - f_0$, de supposer $f_0 = 0$, ce que nous ferons.

Soit $N > 0$. On pose, pour tout $k \in Z$,

$$\tau_k = \begin{cases} \inf\{n \geqslant 0 \colon\ s^p_{n+1}(f) > 2^{(k-1)p}\} & \text{si} \quad s^p_N(f) > 2^{(k-1)p}, \\ N & \text{si} \quad s^p_N(f) \leqslant 2^{(k-1)p}. \end{cases}$$

Posons encore

$$I = \begin{cases} \sup\{k \in Z \colon\ s^p_N(f) > 2^{(k-1)p}\} & \text{si} \quad s^p_N(f) > 0, \\ -\infty & \text{si} \quad s^p_N(f) = 0. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse, $s^p(f)\,d^q(\varphi)$ est fini p.s., donc si $I = +\infty$, $d^q(\varphi) = 0$ et $\varphi_N = 0$. Par conséquent

$$f_N\varphi_N = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f_{\tau_{k+1}} - f_{\tau_k})\varphi_N 1(\tau_k < \tau_{k+1})$$

$$E[f_N\varphi_N] = E\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f_{\tau_{k+1}} - f_{\tau_k})(\varphi_N - \varphi_{\tau_k}) 1(\tau_k < \tau_{k+1})\Big]$$

$$\leqslant E\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{l=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} |f_l - f_{l-1}|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{l=\tau_k+1}^{N} |\varphi_l - \varphi_{l-1}|^q\Big)^{1/q} 1(\tau_k < \tau_{k+1})\Big]$$

$$\leqslant E\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(E_{\tau_k}\Big[\sum_{l=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} |f_l - f_{l-1}|^p\Big]\Big)^{1/p} \Big(E_{\tau_k}\Big[\sum_{l=\tau_k+1}^{N} |\varphi_l - \varphi_{l-1}|^q\Big]\Big)^{1/q} 1(\tau_k < \tau_{k+1})\Big]$$

$$\leqslant E\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big(E_{\tau_k}[s^p_{\tau_{k+1}}(f)]\big)^{1/p} \big(d^q(\varphi)\big)^{1/q} 1(\tau_k < \tau_{k+1})\Big]$$

$$\leqslant \Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k 1(\tau_k < \tau_{k+1}) \big(d^q(\varphi)\big)^{1/q}\Big] \leqslant E\Big[\sum_{k=-\infty}^{I} 2^k \big(d^q(\varphi)\big)^{1/q}\Big]$$

$$\leqslant E\big[2^{I+1}\big(d^q(\varphi)\big)^{1/q}\big] \leqslant 4E\big[\big(s^p_N(f)\big)^{1/p}\big(d^q(\varphi)\big)^{1/q}\big],$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque. Pour $p = 2$, le résultat de dualité a été démontré par Herz, à qui est due également l'utilisation des temps d'arrêt $\tau_k$ dans un cadre voisin. Pour $p = 1$, on retrouve ce qu'il appelle l'espace AM, dont



le dual est l'espace BD des martingales $\varphi$ nulle en 0 telles que

$$\sup\{|\varphi_k - \varphi_{k-1}|;\ k \geqslant 1\} \in L^\infty.$$

**(4) Fonction maximale et fonction dièse.** Dans [5], Fefferman et Stein ont montré que si $f \in L^{p_0}(\boldsymbol{R}^n)$ pour un $p_0 \geqslant 1$ et si

$$f^*(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\,dy,$$

$$f^{\#}(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|\,dy \quad \text{où} \quad f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy$$

et où les deux bornes supérieures sont prises sur l'ensemble des cubes à côtés parallèles aux axes de $\boldsymbol{R}^n$, alors pour $1 < p < \infty$ et $p_0 \leqslant p$,

$$\|f^*\|_p \leqslant A_p \|f^{\#}\|_p.$$

Reprenant leur méthode, Garsia ([6]) a obtenu que pour toute martingale $f$ nulle en 0 vérifiant

$$E_n[|f_\infty - f_{n-1}|] \leqslant E_n[\gamma] \quad \text{où} \quad \gamma \in L^p,\ p > 1,$$

alors

$$\|f^*\|_p \leqslant 3\frac{p^2}{p-1} e \|\gamma\|_p.$$

Le théorème suivant améliore ce résultat en même temps qu'il simplifie la démonstration.

Théorème 3. *Pour toute fonction $\Phi$ à croissance lente, il existe une constante $c$ telle que pour toute martingale $f$ nulle en* 0,

$$E[\Phi \circ f^*] \leqslant cE[\Phi \circ f^{\#}].$$

Preuve. Il suffit d'obtenir une inégalité de distribution convenable. Soient $\beta > 1$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$, et posons

$$\mu = \inf\{n \geqslant 0 \colon\ |f_n| > \lambda\},$$

$$\tau = \inf\{n \geqslant 1 \colon\ \sup\{E_n[|f_m - f_{n-1}|];\ m \geqslant n\} > \delta\lambda\},$$

$$h_n = 1(\mu < \tau)[f_{n+\mu} - f_{\mu-1}] \quad \text{pour tout } n \geqslant 0,$$

ce qui est bien défini puisque, sur $\{\mu < \tau\}$, $\mu$ est fini. Pour la famille $(\mathscr{C}_n = \mathscr{B}_{n+\mu},\ n \geqslant 0)$, $h = (h_n)$ est une martingale. Sur l'ensemble $\{f^* > \beta\lambda,\ f^{\#} \leqslant \delta\lambda\}$,

$$\beta\lambda < \sup\{|f_n|;\ n \geqslant 0\}$$

$$< \sup\{|f_n|;\ n \geqslant 0\} - \sup\{|f_n|;\ 0 \leqslant n < \mu\} + \lambda$$

$$< \sup\{|h_n|;\ n \geqslant 0\} + \lambda.$$

Mais

$$P\left(h^* > (\beta-1)\lambda\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{E[|h_m|]}{(\beta-1)\lambda}$$

et

$$E[|h_m|] = E[1(\mu<\tau)E_\mu[|f_{m+\mu}-f_{\mu-1}|] \leqslant \delta\lambda P(\mu<\infty)$$

pour tout $m \geqslant 0$. De là, découle l'inégalité

$$P(f^* > \beta\lambda,\, f^{\#} \leqslant \delta\lambda) \leqslant \frac{\delta}{\beta-1} P(f^* > \lambda)$$

qui donne le résultat grâce au lemme 1.

D'après la remarque faite précédemment sur la valeur $\delta/(\beta-1)$ de la fonction $\varepsilon(\beta,\delta)$, on en déduit que si $f^{\#}$ est borné par $\delta$, alors $\exp\lambda f^*$ est intégrable pour tout $\lambda < 1/e^2\delta$. On retrouve ainsi une conséquence de l'inégalité de John-Nirenberg. C'est d'ailleurs cette inégalité qui va nous permettre d'améliorer le résultat ci-dessus dans un cas particulier qui comprend le cas dyadique.

PROPOSITION 5. *Soit $f$ une martingale nulle en 0 telle que pour tout $n \geqslant 0$, $|f_{n+1}-f_n|$ soit $\mathscr{B}_n$-mesurable. Alors, pour tous $\delta > 0$, $\beta > 1+\delta$, $\lambda > 0$ et $\varrho > 1$*

$$P(f^* > \beta\lambda,\, f^{\#} \leqslant \delta\lambda) \leqslant \frac{\varrho}{\varrho-1} \exp\left(-\frac{\beta-\delta-1}{8\varrho\delta}\right) P(f^* > \lambda).$$

Preuve. On pose

$$\mu = \inf\{n \geqslant 0:\ |f_n| > \lambda\}$$

$$\tau = \inf\{n \geqslant 1:\ \sup\{E_n[|f_m-f_{n-1}|];\ m \geqslant n\} \vee |f_{n+1}-f_n| > \delta\lambda\}$$

$$h_n = 1(\mu<\tau)[f_{(n+\mu)\wedge\tau}-f_\mu] \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

La suite $h = (h_n)$ est une martingale BMO pour la famille $(\mathscr{C}_n = \mathscr{B}_{n+\mu},\ n \geqslant 0)$ car, pour tous $m \geqslant n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} E_{n+\mu}[|h_m-h_{n-1}|] &= E_{n+\mu}[1(n+\mu \leqslant \tau)|f_{(m+\mu)\wedge T}-f_{n-1+\mu}|] \\ &\leqslant 1(n+\mu<\tau)E_{n+\mu}[|f_{m+\mu}-f_{n-1+\mu}|]+1(n+\mu=\tau)|f_\tau-f_{\tau-1}| \leqslant \delta\lambda. \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'en vertu d'une forme du théorème de John–Nirenberg (voir, par exemple [6], p. 79),

$$E_{\mu+1}\left[\exp\left(\frac{h^*}{8\varrho\delta\lambda}\right)\right] \leqslant \frac{\varrho}{\varrho-1}.$$

Sur l'ensemble $\{f^* > \beta\lambda,\, f^{\#} < \delta\lambda\}$,

$$\begin{aligned} \beta\lambda < f^* &- \sup\{|f_n|;\ 0 \leqslant n \leqslant \mu\} + |f_\mu - f_{\mu-1}| + \sup\{|f_n|;\ 0 \leqslant n < \mu\} \\ &< h^* + \delta\lambda + \lambda. \end{aligned}$$



Il vient enfin

$$\begin{aligned} P(f^* > \beta\lambda,\, f^{\#} \leqslant \delta\lambda) &\leqslant P\left(h^* > (\beta-\delta-1)\lambda,\ \mu<\tau\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{\beta-\delta-1}{8\delta\lambda}\right) E\left[1(\mu<\tau)E_\mu\left[\exp\left(\frac{h^*}{8\varrho\delta\lambda}\right)\right]\right] \\ &\leqslant \frac{\varrho}{\varrho-1} \exp\left(-\frac{\beta-\delta-1}{8\delta\lambda}\right) P(\mu<\infty). \end{aligned}$$

On a donc dans ce cas un résultat exponentiel local comme pour le théorème 1. Voici encore une inégalité analogue à celle du théorème 2, mais avec une condition supplémentaire.

PROPOSITION 6. *Il existe une constante $c$ telle que pour toutes martingales $f$, $\varphi$ vérifiant*

(a) $E[f_0\varphi_0] = 0$,

(b) $|\varphi_{k+1}-\varphi_k|$ *est $\mathscr{B}_k$-mesurable pour tout $k \geqslant 0$,*

*on ait*

$$|E[f_N\varphi_N]| \leqslant cE[f^*\varphi^{\#}] \quad \textit{pour tout } N \geqslant 0$$

*dès que le membre de droite est fini.*

Preuve. L'hypothèse (a) permet de supposer $\varphi_0 = 0$. Soit $N > 0$, et posons pour tout $k \in \boldsymbol{Z}$,

$$\tau_k = \begin{cases} \inf\{n\in\{1,\ldots,N\}:\ E_n[|\varphi_N-\varphi_{n-1}|] > 2^{k-1}\} \wedge \inf\{n\in\{0,\ldots \\ \qquad\qquad \ldots, N-1\}:\ |\varphi_{n+1}-\varphi_n| > 2^{k-1}\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si} \quad (\varphi^N)^{\#} > 2^{k-1}, \\ N \qquad\qquad\qquad\quad\ \ \text{si} \quad (\varphi^N)^{\#} \leqslant 2^{k-1}. \end{cases}$$

Soit encore

$$I = \begin{cases} \sup\{k\in\boldsymbol{Z}:\ (\varphi^N)^{\#} > 2^{k-1}\} & \text{si} \quad (\varphi^N)^{\#} > 0, \\ -\infty & \text{si} \quad (\varphi^N)^{\#} = 0; \end{cases}$$

$$E[f_N\varphi_N] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[(f_{\tau_{k+1}}-f_{\tau_k})(\varphi_{\tau_{k+1}}-\varphi_{\tau_k})].$$

Mais, pour tout $k\in\boldsymbol{Z}$ et tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} E_n[|\varphi_{\tau_k}-\varphi_{\tau_k\wedge(n-1)}|] &= 1(n<\tau_k)E_n[|\varphi_{\tau_k}-\varphi_{n-1}|]+1(n=\tau_k)|\varphi_n-\varphi_{n-1}| \\ &\leqslant 1(n<\tau_k)E_n[|\varphi_N-\varphi_{n-1}|]+1(n=\tau_k)2^{k-1} \\ &\leqslant 2^{k-1}\,1(n\leqslant\tau_k), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(\varphi^{\tau_k})^{\#} \leqslant 2^{k-1}.$$

Le théorème de dualité entre $H^1$ et BMO montre l'existence d'une constante $c_0$ telle que pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$E[(f_{\tau_{k+1}}-f_{\tau_k})(\varphi_{\tau_{k+1}}-\varphi_{\tau_k})] \leqslant c_0 E[(f^{\tau_{k+1}}-f^{\tau_k})^*]3\cdot 2^{k-1}.$$

Alors, comme $(f^{\tau_{k+1}}-f^{\tau_k})^* \leqslant 2f^* 1(\tau_k < \tau_{k+1})$,

$$E[f_N\varphi_N] \leqslant 3c_0 E\Big[f^* \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k 1(\tau_k<\tau_{k+1})\Big]$$

$$\leqslant 3c_0 E\Big[f^* \sum_{k=-\infty}^{I} 2^k\Big]$$

$$\leqslant 12 c_0 E[f^*\varphi^{\#}].$$

Garsia ([6], p. 133) obtient un résultat voisin sous des hypothèset différentes: si pour tout $n \geqslant 1$, $|f_n| \leqslant \lambda_n$ où $(\lambda_n)$ est un processus croissan prévisible, alors

$$E[f_N\varphi_N] \leqslant cE[\lambda_\infty \varphi^{\#}].$$

Il a donc lui aussi une hypothèse de prévisibilité, mais la sienne porte sur $f$ et non sur $\varphi$, et elle est de nature un peu moins stricte.

**(5) Martingales dans les espaces $l^r$.** Soit $0<r<\infty$. Considérons pour tout $m \geqslant 0$ une suite $f^m = (f_n^m, n \geqslant 0)$ de variables aléatoires adaptées à la suite croissante $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$. Notons $F = (f^m, m \geqslant 0)$ et introduisons les deux opérateurs maximaux

$$F^* = \sup\Big\{\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|f_n^m|^r\Big)^{1/r};\ n \geqslant 0\Big\},$$

$$F^{**} = \Big(\sum_{m=0}^{\infty}[(f^m)^*]^r\Big)^{1/r}.$$

On pose naturellement pour tout $n \geqslant 0$

$$F_n^* = \sup\Big\{\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|f_k^m|^r\Big)^{1/r};\ 0 \leqslant k \leqslant n\Big\},$$

$$F_n^{**} = \Big(\sum_{m=0}^{\infty}[\sup\{|f_k^m|;\ 0 \leqslant k \leqslant n\}]^r\Big)^{1/r}.$$

Si $G = (g_m, m \geqslant 0)$ est une suite de variables aléatoires, notons

$$|G| = \Big(\sum_{m=0}^{\infty}|g_m|^r\Big)^{1/r}.$$

a) *Le cas* $1<r<\infty$.

Dans un premier temps, chaque $f^m$ est une martingale uniformément



intégrable. On pose alors

$$|F| = \Big(\sum_{m=0}^{\infty}|f_\infty^m|^r\Big)^{1/r}$$

et on s'intéresse aux relations entre les trois opérateurs $|F|$, $F^*$ et $F^{**}$. Evidemment, $|F| \leqslant F^* \leqslant F^{**}$.

Stein ([11], p. 105) a montré que si $1<r<\infty$ et $1<p\leqslant r$, il existe une constante $c_p$ telle que

$$E[(F^{**})^p] \leqslant c_p E[|F|^p].$$

Il se demande ensuite si la même chose est vraie pour $p>r$. La réponse, positive, est fournie par la proposition suivante.

PROPOSITION 7. *Si* $1<r<\infty$, *pour toute fonction* $\Phi$ *à croissance lente convexe*,

$$E[\Phi\circ(F^{**})^r] \leqslant cE[\Phi\circ|F|^r].$$

Preuve. En application du théorème maximal des martingales,

$$E_0[(F^{**})^r] \leqslant \Big(\frac{r}{r-1}\Big)^r E_0[|F|^r].$$

Soit maintenant $k$ fixé, et posons pour tout $m \geqslant 0$,

$$g^m = (f_{n+k}^m, n \geqslant 0).$$

C'est une martingale adaptée à la suite $(\mathcal{C}_n = \mathcal{B}_{n+k}, n \geqslant 0)$, et par conséquent

$$E_k[(G^{**})^r] \leqslant \Big(\frac{r}{r-1}\Big)^r E_k[|G|^r].$$

Mais, pour tout $k \geqslant 1$,

$$(F^{**})^r-(F_{k-1}^{**})^r \leqslant (G^{**})^r \quad \text{et} \quad |F|^r = |G|^r.$$

Si nous posons

$$A_0 = 0, \quad A_k = F_{k-1}^{**} \quad \text{pour} \quad k \geqslant 1,$$

la proposition 1 montre que

$$E[\Phi\circ A_\infty] \leqslant cE[\Phi\circ|F|^r].$$

Nous allons maintenant regrouper ces deux résultats en un seul théorème dont la démonstration ne fait plus appel aux inégalités de convexité de Riesz comme l'avait fait Stein. Il est nécessaire de procéder en deux étapes, et de prouver d'abord une inégalité de distribution pour certaines martingales vectorielles dont les sauts sont contrôlés.

PROPOSITION 8. *Soit $1 < r < \infty$, et soit $F = (f^m)$ une suite de martingales uniformément intégrables telle qu'il existe un processus croissant prévisible $(W_n, n \geqslant 0)$ vérifiant*

$$W_0 = 0, \quad W_{n+1} \geqslant |F_{n+1} - F_n| \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0.$$

*Alors, pour tous $\beta > 1$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$,*

$$P(F^{**} > \beta\lambda,\ F^* \vee W_\infty \leqslant \delta\lambda) \leqslant \left(\frac{2r}{r-1}\right)^r \frac{\delta^r}{\beta^r - 1} P(F^{**} > \lambda).$$

Preuve. Posons

$$\begin{aligned} \mu &= \inf\{n \geqslant 0 : F_n^{**} > \lambda\} \\ \sigma &= \inf\{n \geqslant 0 : F_n^* \vee W_{n+1} > \delta\lambda\} \\ h_n^m &= 1(\mu < \sigma) f^m_{(n+\mu)\wedge\sigma} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0 \text{ et tout } m \geqslant 0. \end{aligned}$$

Pour tout $m \geqslant 0$, $h^m$ est une martingale adaptée à la famille $(\mathscr{C}_n = \mathscr{B}_{n+\mu})$. Sur l'ensemble $\{F^{**} > \beta\lambda,\ F^* \vee W_\infty \leqslant \delta\lambda\}$,

$$\beta^r \lambda^r < (F^{**})^r \leqslant \lambda^r + (H^{**})^r,$$

donc

$$P(F^{**} > \beta\lambda,\ F^* \vee W_\infty \leqslant \delta\lambda) \leqslant \frac{E[(H^{**})^r]}{(\beta^r - 1)\lambda^r} \leqslant \left(\frac{r}{r-1}\right)^r \frac{E[|H|^r)}{(\beta^r - 1)\lambda^r}.$$

Sur $\{\mu \geqslant \sigma\}$, $|H|^r = 0$, et sur $\{\mu < \sigma\}$,

$$\begin{aligned} |H|^r = |F_\sigma|^r &\leqslant 2^{r-1}[|F_{\sigma-1}|^r + |F_\sigma - F_{\sigma-1}|^r] \\ &\leqslant 2^{r-1}[(F^*_{\sigma-1})^r + W_\sigma^r] \leqslant 2^r \delta^r \lambda^r, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Si pour tout $n \geqslant 0$, $|F_{n+1} - F_n|$ est $\mathscr{B}_n$-measurable, on peut poser $W_n = \sup\{|F_k - F_{k-1}|;\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$, et comme $W_\infty \leqslant 2F^*$, on en déduit une inégalité de distribution entre $F^{**}$ et $F^*$ qui donne une inégalité intégrale du type $E[\Phi\circ F^{**}] \leqslant cE[\Phi\circ F^*]$ pour toute fonction $\Phi$ à croissance lente. C'est le résultat trouvé par A. Bonami ([1]) dans un cadre fonctionnel.

Revenant au cas général où les sauts des martingales vectorielles ne sont pas nécessairement contrôlés, nous allons utiliser la décomposition de B. Davis ([4]) pour isoler les grands sauts, comme on le fait pour comparer la fonction maximale d'une martingale et sa variation quadratique.

THÉORÈME 4. *Soit $1 < r < \infty$. Pour toute fonction $\Phi$ convexe à croissance lente, il existe une constante $c$ telle que pour toute martingale vectorielle $F$,*

$$E[\Phi\circ F^*] \leqslant E[\Phi\circ F^{**}] \leqslant cE[\Phi\circ F^*]$$



Preuve. On pose, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} D_k &= F_k - F_{k-1}, \\ D_k^* &= \sup\{|D_l|;\ 1 \leqslant l \leqslant k\}, \\ A_k &= \{|D_k| \leqslant 2D^*_{k-1}\} \ (\text{avec } D_0^* = 0), \\ Y_k &= D_k 1_{A_k}, \\ Z_k &= D_k 1_{A_k^c}, \end{aligned}$$

puis, pour tout $n \geqslant 0$,

$$G_n = F_0 + \sum_{k=1}^n [Y_k - E_{k-1}[Y_k]],$$

$$H_n = \sum_{k=1}^n [Z_k - E_{k-1}[Z_k]].$$

De $|Y_k| \leqslant 2D^*_{k-1}$, on tire

$$|Y_k - E_{k-1}[Y_k]| \leqslant |Y_k| + E_{k-1}[|Y_k|] \leqslant 4D^*_{k-1}$$

et par ailleurs

$$|H| \leqslant \sum_{k=1}^\infty |Z_k| + \sum_{k=1}^\infty E_{k-1}|Z_k|$$

avec

$$\sum_{k=1}^\infty |Z_k| \leqslant 2D^*_\infty \leqslant 4F^*.$$

D'après la proposition précédente,

$$\begin{aligned} E[\Phi\circ G^{**}] &\leqslant cE[\Phi\circ G^*] + cE[\Phi\circ D^*_\infty] \\ &\leqslant cE[\Phi\circ G^*] + cE[\Phi\circ F^*] \end{aligned}$$

Mais $F^{**} \leqslant G^{**} + H^{**}$ et de même $G^* \leqslant F^* + H^*$. Or

$$H^* \leqslant H^{**} \leqslant \sum_{k=1}^\infty |Z_k| + \sum_{k=1}^\infty E_{k-1}[|Z_k|],$$

et en appliquant la proposition 1 au processus croissant prévisible $\sum_{k=1}^n E_{k-1}[|Z_k|]$ il vient pour terminer

$$E\Big[\Phi\circ \sum_{k=1}^\infty E_{k-1}[|Z_k|]\Big] \leqslant cE\Big[\Phi\circ \sum_{k=1}^\infty |Z_k|\Big] \leqslant cE[\Phi\circ F^*].$$

b) *Une inégalité de type faible.*

Sous les conditions précédentes, il existe, comme dans le cas d'une seule martingale réelle, une inégalité de type faible entre $F^{**}$ et $|F|$.

PROPOSITION 9. *Soient $1 < r < \infty$ et $F$ une suite de martingales uniformément intégrables. Il existe alors une constante $c$ ne dépendant que de $r$ telle que*

$$P(F^{**} > \lambda) \leqslant \frac{c}{\lambda} E[|F|].$$

Preuve. C'est une décomposition de martingales due à Gundy ([7]) qui nous donne la clef de la démonstration. Posons

$$\mu = \inf\{n \geqslant 0:\ |F_n| > \lambda\},$$

$$\sigma = \inf\Big\{n \geqslant 0:\ \sum_{k=1}^{n+1} E_{k-1}[|F_k - F_{k-1}|\, 1(\mu = k)] > \lambda\Big\},$$

$$X_n = F_0 1(\mu > 0) + \sum_{k=1}^{n\wedge\sigma} [(F_k - F_{k-1})\, 1(\mu > k) - E_{k-1}[(F_k - F_{k-1})\, 1(\mu > k)]],$$

$$Y_n = F_0 1(\mu = 0) + \sum_{k=1}^{n\wedge\sigma} [(F_k - F_{k-1}) 1(\mu = k) - E_{k-1}[(F_k - F_{k-1}) 1(\mu = k)]],$$

$$Z_n = F_n - F_{n\wedge\mu\wedge\sigma}.$$

On vérifie facilement que $(X_n)$, $(Y_n)$ et $(Z_n)$ sont des martingales vectorielles à composantes uniformément intégrables, et que $F = X + Y + Z$. Par conséquent,

$$P(F^{**} > \lambda) \leqslant P(X^{**} > \lambda/2) + P(Y^{**} > \lambda/2) + P(Z^{**} > 0).$$

Majorons successivement chacun des trois termes.

(i) $$P(X^{**} > \lambda/2) \leqslant \frac{2^r}{\lambda^r} E[(X^{**})^r] \leqslant \frac{c}{\lambda^r} E[|X|^r].$$

Mais pour tout $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned} E_{k-1}[(F_k - F_{k-1})\, 1(\mu > k)] + E_{k-1}[(F_k - F_{k-1})\, 1(\mu = k)] \\ = E_{k-1}[(F_k - F_{k-1})\, 1(\mu \geqslant k)] = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|X| \leqslant |F_{(\mu-1)\wedge\sigma}|\, 1(\mu > 0) + \sum_{k=1}^{\sigma} E_{k-1}[|F_k - F_{k-1}|\, 1(\mu = k)] \leqslant 2\lambda,$$

et comme $\max\{|F_{(\mu-1)\wedge\sigma}|,\ |F_{\mu-1}|\} \leqslant \lambda < |F_\mu|$ sur $\{0 < \mu < \infty\}$

$$\begin{aligned} E[|X|] &= E[|F_\mu|\, 1(\mu < \infty)] + E[|F_\sigma|\, 1(\mu = \infty)] + \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} E[|F_\mu - F_{\mu-1}|\, 1(\mu = k)] \\ &\leqslant E[|F_\mu|] + E[|F_\sigma|] + 2E[|F_\mu|] \\ &\leqslant 4E[|F|]. \end{aligned}$$



Il en résulte que

$$E[|X|^r] \leqslant 2^{r-1}\lambda^{r-1} 4E[|F|]$$

et donc

$$P(X^{**} > \lambda/2) \leqslant \frac{c}{\lambda} E[|F|].$$

(ii) Pour la martingale vectorielle $Y$, on utilise l'inégalité

$$Y^{**} \leqslant |Y_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |Y_k - Y_{k-1}|.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P\left(Y^{**} > \frac{\lambda}{2}\right) &\leqslant \frac{2}{\lambda} E\Big[|Y_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |Y_k - Y_{k-1}|\Big] \\ &\leqslant \frac{2}{\lambda} E\Big[|F_0|\, 1(\mu = 0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} |F_k - F_{k-1}|\, 1(\mu = k)\Big] \\ &\leqslant \frac{4}{\lambda} E[|F_\mu|\, 1(\mu = 0) + |F_\mu - F_{\mu-1}|\, 1(\mu > 0)] \\ &\leqslant \frac{8}{\lambda} E[|F|]. \end{aligned}$$

(iii) Enfin,

$$\begin{aligned} P(Z^{**} > 0) &\leqslant P(\mu < \infty) + P(\sigma < \infty) \\ &\leqslant P(F^* > \lambda) + P\Big(\sum_{k=1}^{\infty} E_{k-1}[|F_k - F_{k-1}|\, 1(\mu = k)] > \lambda\Big) \\ &\leqslant \frac{E[|F|]}{\lambda} + 2\frac{E[|F|]}{\lambda}. \end{aligned}$$

c) *Le cas $0 < r < 1$.*

Supposons maintenant que pour tout $m \geqslant 0$, $f^m$ soit une surmartingale positive. Montrons d'abord un lemme facile.

LEMME 3. *Soit $(X_n, n \geqslant 0)$ une surmartingale positive. Pour tout $0 < r < 1$,*

$$E_0[\sup[X_n^r;\ n \geqslant 0]] \leqslant \frac{1}{1-r} X_0^r.$$

Preuve. On sait (voir par exemple, [10] p. 23) que pour tout $a > 0$,

$$P_0(\sup_n X_n > a) \leqslant \min\left(\frac{X_0}{a}, 1\right)$$

Par intégration,

$$E_0[\sup_n X_n^r] \leqslant \int_0^\infty \min\left(\frac{X_0}{a}, 1\right) r a^{r-1}\, da$$

$$\leqslant \int_0^{X_0} r a^{r-1}\, da + \int_{X_0}^\infty X_0 r a^{r-1}\, da \leqslant \frac{1}{1-r} X_0^r.$$

THÉORÈME 5. *Soit $0 < r < 1$. Si $\Phi$ est une fonction à croissance lente, il existe une constante $c$ telle que pour toute suite $F$ de surmartingales, positives,*

$$E[\Phi \circ F^*] \leqslant E[\Phi \circ F^{**}] \leqslant c E[\Phi \circ F^*].$$

Preuve. Posons

$$\mu = \inf\{n \geqslant 0 : F_n^{**} > \lambda\}$$
$$\sigma = \inf\{n \geqslant 0 : F_n^* > \delta\lambda\}$$
$$h_n^m = 1(\mu < \sigma) f_{n+\mu}^m \quad \text{pour tout } n \geqslant 0 \text{ et tout } m \geqslant 0.$$

C'est pour tout $m \geqslant 0$ une surmartingale positive adaptée à la famille $(\mathscr{C}_n = \mathscr{B}_{n+\mu})$. Sur l'ensemble $\{F^{**} > \beta\lambda,\ F^* \leqslant \delta\lambda\}$

$$\beta^r \lambda^r < \lambda^r + (H^{**})^r.$$

Mais $E[(H^{**})^r] \leqslant \dfrac{1}{1-r} E[|H_0|^r]$ en vertu du lemme 3, et

$$|H_0|^r = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad \{\mu = \infty\}, \\ |F_\mu|^r 1(\mu < \sigma) \leqslant \delta^r \lambda^r & \text{sur} \quad \{\mu < \infty\}, \end{cases}$$

donc

$$P(F^{**} > \beta\lambda, \quad F^* \leqslant \delta\lambda) \leqslant \frac{1}{1-r} \frac{\delta^r}{\beta^r - 1} P(F^{**} > \lambda)$$

d'où l'on tire l'inégalité intégrale cherchée sans, cette fois-ci, de condition de convexité sur la fonction $\Phi$.

d) *Etude d'un exemple.*

Soit $k$ un entier fixé pour l'instant, et soit $F = (f^m)$ une suite de martingales positives définies sur les tribus dyadiques de $[0, 1]$ par

$$f_\infty^m = \begin{cases} 1_{]m2^{-k},\,(m+1)2^{-k}]} & \text{si} \quad 0 \leqslant m < 2^k, \\ 0 & \text{si} \quad m \geqslant 2^k. \end{cases}$$



Chaque tribu $\mathscr{B}_n$ est engendrée par les intervalles $]p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$ où $0 \leqslant p < 2^n$. On vérifie alors que

$$|F|^r = 1,$$
$$(F^*)^r = \max\{2^{l(1-r)};\ 0 \leqslant l \leqslant k\},$$
$$(F^{**})^r = 1 + 2^{-r}\Big(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{l(1-r)}\Big).$$

Si $r > 1$,

$$(F^*)^r = 1, \qquad (F^{**})^r = 1 + 2^{-r}\frac{1 - 2^{(1-r)k}}{1 - 2^{1-r}} \leqslant 1 + \frac{1}{2^r - 2}.$$

Si $r < 1$,

$$(F^*)^r = 2^{k(1-r)}, \qquad (F^{**})^r = 1 + 2^{-r}\frac{2^{(1-r)k} - 1}{2^{1-r} - 1} \leqslant 1 + \frac{2^{k(1-r)}}{2 - 2^r}.$$

Si $r = 1$,

$$F^* = 1, \qquad F^{**} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Quand maintenant $k$ tend vers l'infini, on constate que $F^*$ et $F^{**}$ sont comparables si $r \neq 1$, mais non si $r = 1$. On ne peut donc espérer avoir une inégalité intégrale, ni à fortiori une inégalité de distribution pour $r = 1$.

**Bibliographie**


[1] A. Bonami, *Opérateurs maximaux et fonctions à valeurs dans $l^r$, $1 < r < \infty$* (à paraître).
[2] B. M. Brown, *Moments of a stopping rule related to a central limit theorem*, Ann. Math. Stat. 40 (1969), pp. 1236–1249.
[3] D. L. Burkholder, *Distribution function inequalities for martingales*, Ann. Prob. 1 (1973), p. 19–42.
[4] B. Davis, *On the integrability of the martingale square function*, Israel J. Math. 8 (1970), p. 187–190.
[5] C. Fefferman and E. M. Stein, *$H^p$ spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), p. 137–194.
[6] A. M. Garsia, *Martingale inequalities*, Benjamin, 1973.
[7] R. F. Gundy, *A decomposition for $L^1$-bounded martingales*, Ann. Math. Satt. Stat. 39 (1968), p. 134–138.
[8] C. Herz, *Bounded mean oscillation and regulated martingales*, Trans. A. M. S. 193 (1974), pp. 199–215.
[9] P. A. Meyer, *Martingales and stochastic integrals*, I (1972), Lecture Notes 284, Springer Verlag.
[10] J. Neveu, *Martingales à temps discret*, Masson, 1972.
[11] E. M. Stein, *Topics in harmonic analysis*, Princeton, 1970.


DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

*Received April 9, 1975* (1025)