STUDIA MATHEMATICA, T. LXI. (1977)

Пространства $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ и гиперсингулярные интегралы

С. Г. САМКО (Ростов-на-Дону, СССР)

Abstract. The spaces $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n) = \{f\colon f \in L_r, \boldsymbol{D}^{\alpha} f \in L_p\}$, $\boldsymbol{D}^{\alpha}$ being the Riesz differentiation operator defined by the finite differences, are introduced. These spaces generalize the spaces $L^{\alpha}_p(\boldsymbol{R}^n)$ of Bessel potentials and coincide with $L^{\alpha}_p(\boldsymbol{R}^n)$ when $r = p$. The spaces of this type have appeared in the one-dimensional case in the author's investigations in the theory of first kind integral equations with a kernel of a power type.

The connection between $L^{\alpha}_{p,r}$ and Riesz potentials is investigated and the hypersingular integrals $\boldsymbol{D}^{\alpha}_{\lambda} f$ are studied in the frames of the spaces $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$.

The main result concerning the spaces $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ assert that

$$L^{\alpha}_{p,r} = L_r \cap I^{\alpha}(L_p)$$

if $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$, $1/p - \alpha/n \leqslant 1/r \leqslant 1/p$. Here $I^{\alpha}(L_p)$ is the range of the Riesz integration operator: $I^{\alpha}(L_p) = \{f\colon f = k_{\alpha} * \varphi, \varphi \in L_p\}$, where $k_{\alpha}(x) = |x|^{\alpha-n}$ if $\alpha - n \neq 0, 2, 4, 6, \ldots$ and $k_{\alpha}(x) = |x|^{\alpha-n} \ln |x|$ if $\alpha - n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ The space $I^{\alpha}(L_p)$ is understood in the usual sense when $1 < p < n/\alpha$ (accordingly with Sobolev' theorem) and in the sense of Φ-distributions introduces by P.I. Lizorkin, when $p \geqslant n/\alpha$.

The convergence both in $L_p(\boldsymbol{R}^n)$ and p.p. (a.e.) of the hypersingular integrals $\boldsymbol{D}^{\alpha}_{\lambda}(f)$ is shown, $f \in L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$. The hypersingular integrals are considered under assumptions on $\lambda = \lambda(t)$ or $\lambda = \lambda(x, t)$ different from those used in the known investigations of the hypersingular integrals in $L^{\alpha}_p(\boldsymbol{R}^n)$. The assumptions used here allow to consider the question of the inverse imbedding of the space $\lambda L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n) = \{f\colon f \in L_r, \boldsymbol{D}^{\alpha}_{\lambda} f \in L_p\}$ into the space $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$. The sufficient conditions for equivalence of the spaces $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ and $\lambda L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ are given in the terms of the symbol $\sigma(x)$ of the operator A generated by the representation $\boldsymbol{D}^{\alpha}_{\lambda} f = A \boldsymbol{D}^{\alpha} f$. In the case of Bessel potentials ($r = p$) the condition sufficient for the equality $\lambda L^{\alpha}_p = L^{\alpha}_p$ is $\lambda(0) \neq 0$.

The proofs use the technique of the normed Wiener ring $\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ of Fourier transforms of L_1-functions, completed by a unit.

Введение. Мы введем здесь пространства $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n) = \{f\colon f \in L_r, \boldsymbol{D}^{\alpha} f \in L_p\}$, $\boldsymbol{D}^{\alpha}$ — оператор риссова дифференцирования, являющиеся некоторым обобщением соболевских пространств L^{α}_p типа бесселевых потенциалов ([7]–[11], [15]–[17] и др.) и совпадающие с ними при $r = p$. Вводимые пространства, в отличие от $L^{\alpha}_p(\boldsymbol{R}^n)$, связаны в образах Фурье скорее с умножением на $|x|^{-\alpha}$, чем с умножением на $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$ и для них не справедливы обычные вложения по параметру α при фиксированных p и r, как в случае $r = p$. Пространства $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ возникли в случае $n = 1$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, $r = p/(1-\alpha p)$ в исследова-

icm©

ниях автора [12]–[14] по теории интегральных уравнений первого рода со степенным ядром.

Целью работы является изучение связи вводимых пространств $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ с пространствами типа риссовых потенциалов и исследование так называемых гиперсингулярных интегралов в рамках пространств $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$.

В § 1 приведены вспомогательные утверждения. Основной результат § 2, содержащего исследование пространств $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$, утверждает, что

$$L^{\alpha}_{p,r} = L_r \cap I^{\alpha}(L_p)$$

для всех $\alpha>0$, $1<p<\infty$, $1<r<\infty$ и $1/p-\alpha/n \leqslant 1/r \leqslant 1/p$, где $I^{\alpha}(L_p)$ — пространство риссовых потенциалов. В § 3 дается доказательство сходимости почти всюду риссовых производных $\boldsymbol{D}^{\alpha}f$ (простейших гиперсингулярных интегралов) для $f\in L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ вместе с некоторой оценкой этой сходимости. В §§ 4–6 для гиперсингулярных интегралов

$$(1)\qquad (\boldsymbol{D}^{\alpha}_{\lambda}f)(x) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}\frac{(\Delta^m_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\lambda(x,t)\,dt, \qquad m>\alpha,$$

при некоторых предположениях относительно $\lambda(x,t)$ установлена сходимость как в L_p, так и почти всюду, для $f(x)\in L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ (в частности, для бесселевых потенциалов). Особое внимание уделено (§§ 4–5) случаю $\lambda=\lambda(t)$.

Укажем, что идея описания пространств дифференцируемых функций в терминах риссова дифференцирования $\boldsymbol{D}^{\alpha}$ принадлежит Е. Стейну [21] в частном случае и П. И. Лизоркину [8]–[10] в наибольшей общности. Отметим, что ряд результатов настоящей статьи получен под влиянием последних работ. В частности, в § 2 и в п.п. 3°–4° § 4 мы существенно используем введенное в [7]–[8] пространство Φ бесконечно дифференцируемых функций, ортогональных многочленам.

Гиперсингулярные интегралы вида (1), в которых разность $(\Delta^m_t f)(x)$ заменена соответствующим m-ым остатком ряда Тейлора, изучались Р. Уиденом в работах [24]–[25] в случае, когда $\lambda=\lambda(t)$ — однородная функция нулевой степени, в рамках пространств $L^{\alpha}_{p}(\boldsymbol{R}^n)$, $m-1<\alpha<m+1$, и в работе [27] в случае интегралов вида

$$\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}[f(x-t)-f(x)]\,d\mu(t), \qquad \text{где} \qquad \int\limits_{|t|>\varepsilon}|d\mu(t)| = O(\varepsilon^{-\alpha}),$$

в рамках пространств L^{p}_{α} квазиоднородных бесселевых потенциалов при $0<\alpha<1$ (см. также работу [26] этого автора, в которой выяснена связь между сходимостью почти всюду рассмотренных в [24]–[25] интегралов и локальной дифференцируемостью функции $f(x)$). Случай $\lambda=\lambda(x,t)$ при аналогичном предположении однородности по t рассматривался М. Фишером [18].

Интегралы вида (1) с разностями $(\Delta^m_t f)(x)$ исследовались с однородной нулевой степени функцией $\lambda=\lambda(t)$ в рамках пространств $L^{\alpha}_{p}(\boldsymbol{R}^n)$, $\alpha>[n/2]+1$, В. Требельсом [23]. Рассматриваемые нами гиперсингулярные интегралы (1) с одной стороны исследуются в более широкой области: $f\in L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ при произвольных $\alpha>0$ и $r\geqslant p$, а с другой стороны имеют другую природу: не предполагая однородности функции $\lambda(x,t)$ по переменной t, мы накладываем ограничение на поведение $\lambda(x,t)$ при $|t|\to 0$ и $|t|\to\infty$, считая, что существуют $\lambda(x,0) = \lim\limits_{|t|\to 0}\lambda(x,t)$, $\lambda(x,\infty) = \lim\limits_{|t|\to\infty}\lambda(x,t)$. Последние предположения позволяют пользоваться техникой нормированного винеровского кольца $\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ преобразований Фурье функций из $L_1(\boldsymbol{R}^n)$ вместо техники L_p-мультипликаторов, что приводит к нужной цели быстрее и при всех $\alpha>0$, ср. содержание §§ 4–5 с [23]. (Необходимые вспомогательные предложения, касающиеся кольца $\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ даны в п. 3° § 1.) Кроме того, в рамках наших предположений относительно λ в случае $\lambda=\lambda(t)$ оказывается возможным рассмотрение вопроса о совпадении пространств $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ с пространствами ${}_{\lambda}L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n) = \{f\colon f\in L_r,\ \boldsymbol{D}^{\alpha}_{\lambda}f\in L_p\}$. (В случае однородности функции $\lambda(t)$ такая постановка вопроса неправомочна; см. [24], стр. 422, Теоремы 1–2, относящиеся к случаю пространств L^{α}_{p}.) В § 5 показано, что условие

$$\lambda(0)\neq 0$$

является достаточным для того, чтобы $L^{\alpha}_{p} = {}_{\lambda}L^{\alpha}_{p}$ (случай $r=p$). Обсуждается вопрос о необходимости этого условия. В общем случае $r\neq p$ достаточное условие совпадения пространств $L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ и ${}_{\lambda}L^{\alpha}_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ дается в терминах символа $\sigma(x)\in\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ оператора A, порожденного представлением $\boldsymbol{D}^{\alpha}_{\lambda}f = A\boldsymbol{D}^{\alpha}f$, полученным в § 4.

Обозначения. $\boldsymbol{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$, $x'=x/|x|$, $\vec{j}=(1,0,\ldots,0)$; $dx=dx_1\ldots dx_n$; $(x,t)=x_1t_1+\ldots+x_nt_n$; $\mathscr{F}\varphi=\hat{\varphi}(x)=\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}e^{i(x,t)}\varphi(t)\,dt$; $\dot{\boldsymbol{R}}^n$ — компактификация $\boldsymbol{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой; $(\tau_h f)(x)=f(x-h)$, $h\in\boldsymbol{R}^n$; $a*\varphi=\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}a(x-t)\varphi(t)\,dt$; $\|f\|_p=\|f\|_{L_p(\boldsymbol{R}^n)}$; $\omega_p(f,h)=\|f-\tau_h f\|_p$ — интегральный модуль непрерывности в $L_p(\boldsymbol{R}^n)$; $x=\mathrm{rot}_h y$ — вращение в $\boldsymbol{R}^n$, переводящее $y\in\boldsymbol{R}^n$ в $x\in\boldsymbol{R}^n$ так, что $h/|h|=\mathrm{rot}_h\vec{j}$; Σ_{n-1} — единичная сфера в $\boldsymbol{R}^n$, $|\Sigma_{n-1}|=2\pi^{n/2}\Gamma^{-1}(n/2)$ — её площадь; $\chi(t)=\begin{cases}1, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ — характеристическая функция единичного шара в $\boldsymbol{R}^n$; $\mathfrak{J}^{\alpha}(x)$ — бесселево ядро [17], такое, что $\widehat{\mathfrak{J}^\alpha}(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2}$; S — класс Шварца бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой степени [3], C_0^∞ — его подмножество, состоящее из финитных функций; Φ — введенное П. И. Лизоркиным [7]–[8] подпространство S функций, ортогональных многочленам, Φ' — класс обобщенных функций над Φ; вложение (непрерывное) $Z_1 \subset Z_2$, $\|\cdot\|_{Z_2} \leqslant c\|\cdot\|_{Z_1}$, двух нормированных пространств Z_1 и Z_2 будем обозначать, как обычно [11], через $Z_1 \to Z_2$.

Обозначение $(\Delta_t^l f)(x)$ конечной разности функции $f(x)$ порядка l с шагом $t \in \boldsymbol{R}^n$ будем ради единообразия изложения использовать как для нецентрированных разностей

$$(2)\qquad (\Delta_t^l f)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k f(x-kt) = (I-\tau_t)^l f(x)$$

так и для центрированных

$$(2')\qquad (\Delta_t^l f)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k f\left(x+\left(\frac{l}{2}-k\right)t\right) = (\tau_{-t/2}-\tau_{t/2})^l f(x),$$

при этом всюду в дальнейшем l всегда четно, если используются центрированные разности (2'); в случае разностей (2) порядок может быть произвольным.

Через $k_\alpha(x)$, $\alpha > 0$, обозначим риссово ядро

$$k_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha-n \neq 0, 2, 4, 6, \ldots, \\ |x|^{\alpha-n}\ln|x|, & \alpha-n = 0, 2, 4, 6, \ldots, \end{cases}$$

нормированное множителем $\gamma_n(\alpha)$ так, что $\widehat{k_\alpha}(x) = |x|^{-\alpha}$ (в смысле обобщенных функций над Φ; см. [10], стр. 242). Известно, что (см. [3], [10])

$$\gamma_n(\alpha) = \begin{cases} \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{n-\alpha}{2}\right), & \alpha-n \neq 0, 2, 4, 6, \ldots, \\ (-1)^{\frac{\alpha-n}{2}} 2^{\alpha-1} \pi^{\frac{\pi}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha-n}{2}\right)!, & \alpha-n = 0, 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

Через $K^\alpha\varphi$ будем обозначать риссов потенциал

$$(3)\qquad K^\alpha\varphi = \int_{\boldsymbol{R}^n} k_\alpha(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Введем еще обозначение следующих нормировочных постоянных

$$(4)\qquad d'_{n,l}(\alpha) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{(1-e^{it_1})^l\,dt}{|t|^{n+\alpha}}, \qquad d''_{n,l}(\alpha) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{(e^{\frac{1}{2}it_1}-e^{-\frac{1}{2}it_1})^l\,dt}{|t|^{n+\alpha}}$$

и договоримся о том, что всюду в дальнейшем

$$(5)\qquad d_{n,l}(\alpha) = \begin{cases} d'_{n,l}(\alpha), & \text{если используются разности (2)}, \\ d''_{n,l}(\alpha), & \text{если используются разности (2')}. \end{cases}$$

Можно показать, что

$$d'_{n,l}(\alpha) = \begin{cases} 2^{-\alpha}\pi^{\frac{n}{2}+1}\Gamma^{-1}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)A'_l(\alpha)\sin^{-1}\frac{\alpha\pi}{2}, & \alpha \neq 2, 4, 6, \ldots, \\ (-1)^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}2^{1-\alpha}\Gamma^{-1}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\frac{d}{d\alpha}A'_l(\alpha), & \alpha = 2, 4, 6, \ldots, \end{cases}$$

$$d''_{n,l}(\alpha) = \begin{cases} 2^{1-\alpha}(-1)^{\frac{l}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}+1}l!\,\Gamma^{-1}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)A''_l(\alpha)\sin^{-1}\frac{\alpha\pi}{2}, & \alpha \neq 2, 4, 6, \ldots, \\ 2^{2-\alpha}(-1)^{\frac{\alpha+l}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}l!\,\Gamma^{-1}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\frac{d}{d\alpha}A''_l(\alpha), & \alpha = 2, 4, 6, \ldots, \end{cases}$$

где обозначено

$$(6)\qquad A'_l(\alpha) = \sum_{k=1}^{l}(-1)^{k-1}C_l^k k_\alpha, \qquad A''_l(\alpha) = \sum_{k=1}^{l/2}\frac{(-1)^k k^\alpha}{\left(\frac{l}{2}+k\right)!\left(\frac{l}{2}-1\right)!}$$

(последнее — при четном l).

§ 1. Определения и вспомогательные предложения.

1°. Риссовы производные и пространства $L_{p,r}^\alpha(\boldsymbol{R}^n)$. Следуя [9], определим риссово дифференцирование равенством

$$(1.1)\qquad (\boldsymbol{D}^\alpha f)(x) = \lim_{\substack{(L_p)\\ \varepsilon\to 0}} (\boldsymbol{D}_\varepsilon^\alpha f)(x),$$

где $\boldsymbol{D}_\varepsilon^\alpha$ — оператор усеченного риссова дифференцирования:

$$(1.2)\qquad (\boldsymbol{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\,dt.$$

Можно показать, что при указанном в (5) выборе $d_{n,l}(\alpha)$

$$(1.3)\qquad \widehat{\boldsymbol{D}^\alpha f}(x) = |x|^\alpha \hat{f}(x)$$

(по крайней мере для достаточно хороших функций $f(x)$). Заметим, что функция $A'_l(\alpha)$ в (6) имеет своими нулями целые числа $\alpha = 0, 1, \ldots$ $\ldots, l-1$. Поэтому $d_{n,l}(\alpha) = 0$ при целом нечетном α и $l > \alpha$. Будем считать здесь и всюду в дальнейшем, что

1) $l > 2\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ (с обязательным выбором $l = \alpha$ при нечетном α), если в (1.2) используются нецентрированные разности (2);

2) $l > \alpha$ и четно, если в (1.2) используются центрированные разности (2′).

Известно описание пространства $L_p^\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ бесселевых потенциалов в терминах $\boldsymbol{D}^\alpha f$: $L_p^\alpha = \{f\colon f \in L_p, \boldsymbol{D}^\alpha f \in L_p\}$ (см. [9], где использовались центрированные разности; можно показать, что в этом результате можно использовать и нецентрированные разности при указанном выше выборе l). Отправляясь от этого описания, введем пространство

$$L_{p,r}^\alpha(\boldsymbol{R}^n) = \{f(x)\colon f \in L_r(\boldsymbol{R}^n),\ \boldsymbol{D}^\alpha f \in L_p(\boldsymbol{R}^n)\}, \tag{1.4}$$

$1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$, $\alpha > 0$, где $\boldsymbol{D}^\alpha f$ понимается в смысле (1.1) и положим $\|f\|_{L_{p,r}^\alpha} = \|f\|_r + \|\boldsymbol{D}^\alpha f\|_p$.

2°. Вспомогательные функции $\Delta_{l,\alpha}(x, h)$, $k_{l,\alpha}(x)$ **и** $K_{l,\alpha}(|x|)$. Введем функцию ($\alpha > 0$, $l = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\Delta_{l,\alpha}(x, h) = (\Delta_h^l k_\alpha)(x) \tag{1.5}$$

и выделим важный для нас случай $h = \vec{j}$, положив

$$k_{l,\alpha}(x) = \Delta_{l,\alpha}(x, \vec{j}). \tag{1.6}$$

Немаловажную роль в наших построениях будет играть ядро

$$K_{l,\alpha}(|x|) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)\,|x|^n} \int\limits_{|\xi|<|x|} k_{l,\alpha}(\xi)\,d\xi. \tag{1.7}$$

Преобразование Фурье функции (1.5) вычисляется по формуле

$$\widehat{\Delta_{l,\alpha}(\cdot, h)}(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}[1 - e^{i(x,h)}]^l & \text{в случае (2)}, \\ |x|^{-\alpha}[e^{\frac{i}{2}(x,h)} - e^{-\frac{i}{2}(x,h)}]^l & \text{в случае (2′)}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Функция $\Delta_{l,\alpha}(x, h)$ может быть выражена через $k_{l,\alpha}(x)$ с помощью вращения:

$$\Delta_{l,\alpha}(x, h) = |h|^{\alpha-n} k_{l,\alpha}\left(\frac{|x|}{|h|^2}\operatorname{rot}_x^{-1} h\right). \tag{1.9}$$

Формула (1.9) проверяется непосредственно, с помощью равенства $|x - k\vec{j}\,| = \left||x|\,\vec{j} - k\frac{x}{|x|}\right|$, из которого следует, что $\left|\frac{|x|}{|h|^2}\operatorname{rot}_x^{-1} h - k\vec{j}\right| = |h|^{-1}|x - kh|$ и с учетом того, что $\ln|h| \sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k |x - kh|^{\alpha-n} \equiv 0$ при $\alpha - n = 0, 2, 4, \ldots$

Лемма 1.1. *Функция $k_{l,\alpha}(x)$ удовлетворяет оценке*

$$|k_{l,\alpha}(x)| \leqslant c(1 + |x|)^{\alpha-n-l} \quad \text{при} \quad |x| \geqslant l + 1, \tag{1.10}$$

так что при $l > \alpha$

$$k_{l,\alpha}(x) \in L_q(\boldsymbol{R}^n), \quad 1 - \frac{\alpha}{n} < \frac{1}{q} \leqslant 1, \tag{1.11}$$

при этом

$$\int\limits_{\boldsymbol{R}^n} k_{l,\alpha}(x)\,dx = 0. \tag{1.12}$$

Равенство (1.12) верно и при $2\left[\frac{\alpha}{2}\right] < l \leqslant \alpha$ в случае нечетного l и нецентрированной разности в (1.6), если интеграл в (1.12) понимать как $\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{\left|x - \frac{l}{2}\vec{j}\right| < N} k_{l,\alpha}(x)\,dx$.

Доказательство. Обозначим $w(s) = k_\alpha(x + s\vec{j})$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, так что $k_{l,\alpha}(x) = (\Delta_1^l w)(0)$. В силу известного тождества

$$(\Delta_\xi^l w)(s) = \int\limits_0^\xi \ldots \int\limits_0^\xi w^{(l)}(s + s_1 + \ldots + s_l)\,ds_1 \ldots ds_l, \qquad \xi \in \boldsymbol{R}^1,$$

получаем, что $k_{l,\alpha}(x) = w^{(l)}(\theta)$, $0 < \theta < l$, откуда (1.10) следует без труда (с учетом оценки $\left|\frac{d^l}{d\varrho^l}(\varrho^k \ln\varrho)\right| \leqslant c\varrho^{k-l}$ при $\varrho > 1$ и $l > k$ в случае $\alpha - n = 0, 2, 4, \ldots$). Так как $k_{l,\alpha}(x)$ локально суммируема в степени q, $1/q \geqslant 1 - \alpha/n$, то из (1.10) следует (1.11). Равенство (1.12), т.е. равенство $\widehat{k_{l,\alpha}}(0) = 0$ следует при $l > \alpha$ из (1.8). И, наконец,

$$\int\limits_{\left|x - \frac{l}{2}\vec{j}\right| < N} k_{l,\alpha}(x)\,dx = \int\limits_{|y|<N,\, y_1>0} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu k_\alpha\left(y + \left(\frac{l}{2} - \nu\right)\vec{j}\right) dy + {}$$

$$+ \int\limits_{|y|<N,\, y_1>0} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu k_\alpha\left(y - \left(\frac{l}{2} - \nu\right)\vec{j}\right) dy.$$

Поменяв индекс ν на $l - \nu$ во втором слагаемом, видим, что оно отличается от первого множителем $(-1)^l$. Поэтому

$$\int\limits_{\left|x - \frac{l}{2}\vec{j}\right| < N} k_{l,\alpha}(x)\,dx = 0 \tag{1.13}$$

для всех $N > 0$ при нечетном l. Лемма 1.1 доказана.

Заметим, что утверждения (1.10)–(1.12) несколько иначе доказаны в [22] при $0 < \alpha < l \leqslant n$.

Следствие. *Если $l > \alpha$, то*

(1.14) $$\Delta_{l,\alpha}(x, h) \in L_q(\boldsymbol{R}^n), \quad 1-\frac{\alpha}{n}<\frac{1}{q}\leqslant 1,$$

при любом $h \in \boldsymbol{R}^n$, причем

$$|\Delta_{l,\alpha}(x, h)| \leqslant c|h|^l(|h|+|x|)^{\alpha-n-l}$$

при любом $h \in \boldsymbol{R}^n$, причем $|\Delta_{l,\alpha}(x, h)| \leqslant c|h|^l(|h|+|x|)^{\alpha-n-l}$ при $|x| \geqslant (l+1)|h|$, где c не зависит от x и h.

Доказательство. Следует из Леммы 1.1 в силу связи (1.9))

Лемма 1.2. *Справедливы оценки*

(1.15) $$|K_{l,\alpha}(|x|)| \leqslant \begin{cases} c|x|^{\min(\alpha-n,0)}, & \alpha \neq n \\ c\ln\dfrac{1}{|x|}, & \alpha = n \end{cases} \quad \text{при } |x| \leqslant 1,$$

(1.16) $$|K_{l,\alpha}(|x|)| \leqslant c|x|^{\alpha-n-l^*} \quad \text{при } |x| \geqslant 1,$$

где $l^* = l$ во всех случаях, когда $l > \alpha$ и $l^* = l+1$ в случае $2\left[\dfrac{\alpha}{2}\right] < l \leqslant \alpha$ (при использовании нецентрированных разностей (2) в (1.6)), так что $K_{l,\alpha}(|x|) \in L_q(\boldsymbol{R}^n)$, $1-\dfrac{\alpha}{n}<\dfrac{1}{q}\leqslant 1$.

Доказательство. Получение оценки (1.15) очевидно. Для $|x| \to \infty$ имеем при $l > \alpha$ в силу (1.12) и (1.10):

$$|K_{l,\alpha}(|x|)| = \left|\frac{1}{d_{n,l}(\alpha)|x|^n}\int\limits_{|\xi|>|x|} k_{l,\alpha}(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{c}{|x|^{n+l-\alpha}}.$$

Если же $2[\alpha/2] < l \leqslant \alpha$ (так что l нечетно), то оценку (1.16) можно получить за счет предоставляемой равенством (1.13) возможности интегрировать в (1.7) не по шару $|\xi| < |x|$, а по слою $|x| - l/2 < |\xi| < |x| + l/2$. Именно, в силу (1.13) имеем при $|x| \geqslant l+1$ с учетом (1.10.

$$|K_{l,\alpha}(|x|)| \leqslant \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)\cdot|x|^n}\int\limits_{|x|-\frac{l}{2}<|\xi|<|x|+\frac{l}{2}} |k_{l,\alpha}(\xi)|\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{|x|^n}\left|\left(|x|+\frac{l}{2}\right)^{\alpha-l}-\left(|x|-\frac{l}{2}\right)^{\alpha-l}\right| \leqslant c_1|x|^{-n+\alpha-l-1}.$$

3°. О винеровском кольце $\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$. Пусть $\mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n) = \{f\colon f(x) = \hat{\varphi}(x), \varphi \in L_1(\boldsymbol{R}^n)\}$ и пусть $\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n) = \{f\colon f(x) = c+\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi} \in L_1(\boldsymbol{R}^n)\}$ есть пополнение единицей кольца $\mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$, снабженное нормой $\|f\|_{\mathscr{R}} = |c| + \|\varphi\|_1$. Укажем следующий достаточный признак принадлежности функции кольцу $\mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$.

Лемма 1.3. *Пусть $f(x) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ и $f(\infty) = 0$. Если $\mathscr{D}^m f = \dfrac{\partial^m f}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_m}} \in L_p(\boldsymbol{R}^n)$ при каком-нибудь $p \in (1, 2]$ для всех $m = 1, 2, \ldots, n$ и любых $k_1, \ldots, k_m$, то $f(x) \in \mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$ и справедлива оценка $\|f\|_{\mathscr{R}^0} \leqslant c_1\|f\|_1 + c_2\sum\|D^m f\|_p$.*

Доказательство. Известно, что формула обращения $f(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n} e^{-i(x,t)}\hat{f}(t)\,dt$ имеет место для $f(x) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$, если и $\hat{f}(x) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ (см. [1], стр. 271). Поэтому достаточно показать, что $\hat{f}(x) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ при условиях леммы. Разобьем $\boldsymbol{R}^n$ на параллелепипеды гиперплоскостями $x_k = \pm 1$, $k = 1,2,\ldots,n$, так что $\boldsymbol{R}^n = \sum\limits_{u,v} P_{u,v}$, где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — произвольный набор целых чисел от 1 до n, $m = 1, 2, \ldots, n$; $v = z - u$ — дополнительный до $z = (1, 2, 3, \ldots, n)$ набор к набору u; и $P_{u,v} = \{x\colon |x_j| > 1,\ j \in u;\ |x_j| < 1,\ j \in v\}$. Тогда $\|\hat{f}\|_1 = \sum\limits_{u,v}\int\limits_{P_{u,v}}|\hat{f}(x)|\,dx$. Очевидно, $\int\limits_{P_{\varnothing,z}}|\hat{f}(x)|\,dx \leqslant 2^n\|f\|_1$. В каждом из оставшихся бесконечных параллелепипедов $P_{u,v}$ $(u \neq \varnothing)$ представим $\hat{f}(x)$ интегрированием по частям в виде

$$\hat{f}(x) = \frac{i^m}{x_{u_1}\ldots x_{u_m}}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n} e^{i(x,t)}\frac{\partial^m f}{\partial t_{u_1}\ldots\partial t_{u_m}}\,dt, \quad (u_1, \ldots, u_m) = u$$

(с учетом того, что $f(\infty) = 0$). Тогда $|\hat{f}(x)| \leqslant \dfrac{|\widehat{\mathscr{D}^m f}|}{|x_{u_1}\ldots x_{u_m}|}$, $x \in P_{u,v}$, и, следовательно,

$$\int\limits_{P_{u,v}}|\hat{f}(x)|\,dx \leqslant \Big\{\int\limits_{P_{u,v}}|x_{u_1}\ldots x_{u_m}|^{-p}\,dx\Big\}^{1/p}\cdot\|\widehat{\mathscr{D}^m f}\|_p.$$

Применение теоремы Хаусдорфа–Юнга завершает оценку для $\|\hat{f}\|_1$.

Известно, что $|x|^\alpha(1+|x|^2)^{-\alpha/2} \in \mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ ([15], стр. 157) и что $(1+|x|^\alpha)^{-1} \in \mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$ ([19], стр. 447) при $\alpha > 0$. Некоторое обобщение этих двух утверждений дает следующая

Лемма 1.4. *Пусть $0 \leqslant \delta \leqslant \alpha$. Тогда*

$$\frac{|x|^{\alpha-\delta}}{1+|x|^\alpha}, \frac{|x|^{\alpha-\delta}}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} \in \mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n).$$

Доказательство. Введем функцию $\mu_{\xi,a}(x) \in C^\infty$ такую, что $\mu_{\xi,a}(x) \equiv 1$ при $|x-\xi| \leqslant a$ и $\mu_{\xi,a}(x) \equiv 0$ при $|x-\xi| \geqslant 2a$, $a > 0$, с очевидными изменениями для $\xi = \infty$. Пусть $f(x)$ — одна из рассматриваемых двух функций. Положим $f_\xi(x) = \mu_{\xi,a}(x)f(x)$. Так как $f(x) = f_\xi(x)$

для $|x-\xi|<a$, то в соответствии с локальной теоремой теории нормированных регулярных колец ([2], стр. 224) достаточно показать, что $f_\xi(x)\in\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ при любом фиксированном $\xi\in\boldsymbol{R}^n$. Это очевидно при $\xi\neq 0$ и $\xi\neq\infty$, так как тогда $f_\xi(x)\in C_0^\infty$ при достаточно малом выборе a. Если $\xi=0$, то с помощью формулы Лейбница убеждаемся в том, что производные $\mathscr{D}^m f_\xi(x)$, $m=1,\ldots,n$, имеют при $x=0$ особенности порядков меньше n и потому суммируемых в некоторой степени $p>1$. Тогда $f_\xi(x)\in\mathscr{R}^0$, $\xi=0$, в силу Леммы 1.3. Остается случай $\xi=\infty$. Разлагая нашу функцию $f(x)=\dfrac{1}{|x|^\delta}\left(1+\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)^{-1}$ или $f(x)=$ $=\dfrac{1}{|x|^\delta}(1+|x|^{-2})^{-\alpha/2}$ соответственно в геометрическую нрогрессию и биномиальный ряд, получим для $f_\xi(x)$ ряд, в котором остаток, начиная с некоторого номера, достаточно быстро убывает на бесконечности и потому, будучи бесконечно дифференцируемой функцией, принадлежит $\mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$ в силу Леммы 1.3. Остается показать, что первые члены ряда, т.е. функции вида $\dfrac{\mu_{\xi,a}(x)}{|x|^\beta}$, $\beta>0$, принадлежат $\mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$. Положив $\varrho=(1+|x|^2)^{-1/2}$, видим, что $|x|^{-\beta}=\varrho^\beta(1-\varrho^2)^{-\beta/2}=\varrho^\beta(1+\gamma_1\varrho^2+\gamma_2\varrho^4+\ldots)$, где γ_k — биномиальные коэффициенты. Поэтому

$$\frac{\mu_{\xi,a}(x)}{|x|^\beta}=\frac{\mu_{\xi,a}(x)}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}+\gamma_1\frac{\mu_{\xi,a}(x)}{(1+|x|^2)^{\beta/2+1}}+\gamma_2\frac{\mu_{\xi,a}(x)}{(1+|x|^2)^{\beta/2+2}}+\ldots$$

Так как $(1+|x|^2)^{-\beta/2}\in\mathscr{R}^0$, то каждый член этого ряда принадлежит $\mathscr{R}^0$. Остаток ряда, достаточно быстро убывая на бесконечности, принадлежит $\mathscr{R}^0$ в силу Леммы 1.3.

Лемма 1.5. *Пусть $a(x)\in\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$, и $a(0)=0$. Тогда оператор A_ε, имеющий $a(\varepsilon x)$ своим символом: $\widehat{A_\varepsilon\varphi}(x)=a(\varepsilon x)\hat\varphi(x)$ сильно сходится в $L_p(\boldsymbol{R}^n)$, $p\geqslant 1$, к нулю при $\varepsilon\to 0$.*

Доказательство. 1) Пусть вначале $a(\infty)=0$. Тогда $a(x)=\hat{\tilde a}(x)$, $\tilde a\in L_1(\boldsymbol{R}^n)$, и $A_\varepsilon\varphi=\int_{\boldsymbol{R}^n}\tilde a(t)\varphi(x-\varepsilon t)\,dt$. Так как $a(0)=0$, то

$$A_\varepsilon\varphi=\int_{\boldsymbol{R}^n}\tilde a(t)[\varphi(x-\varepsilon t)-\varphi(x)]\,dt \quad\text{и}\quad \|A_\varepsilon\varphi\|_p\leqslant\int_{\boldsymbol{R}^n}|\tilde a(t)|\,\omega_p(\varphi,\varepsilon t)\,dt\to 0.$$

2) Пусть $a(\infty)\neq 0$. Введем прообраз Фурье $\tilde b(x)\in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ функции $b(x)=1-\dfrac{a(x)}{a(\infty)}$. Имеем: $A_\varepsilon\varphi=a(\infty)\varphi(x)-\dfrac{a(\infty)}{\varepsilon^n}\tilde b\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)*\varphi(x)$. Так как $\int_{\boldsymbol{R}^n}\tilde b(x)\,dx=1$, то свертка $\varepsilon^{-n}\tilde b\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)*\varphi(x)$ сходится в $L_p(\boldsymbol{R}^n)$ к $\varphi(x)$ при $\varepsilon\to 0$ как соболевское усреднение с суммируемым ядром.

4°. Некоторые оценки интегралов. Обозначим $M_\tau\varphi=\tau^{-n}\left|\int_{|x|<\tau}\varphi(x)\,dx\right|$. Справедлива следующая

Лемма 1.6. *Пусть $\varphi(x)$ суммируема при $|x|<1$ и пусть $\gamma<n$ и $-\infty<\mu<\infty$. Тогда*

$$\left|\int_{|x|<\varepsilon}\frac{\varphi(x)\,dx}{|x|^\gamma}\right|\leqslant\frac{n-\gamma+|\gamma|}{n-\gamma}\,\varepsilon^{n-\gamma}\sup_{0<\tau<\varepsilon}M_\tau\varphi, \tag{1.17}$$

$$\left|\int_{|x|<\varepsilon}\ln\frac{|x|}{\varepsilon}\,\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon^n}{n}\sup_{0<\tau<\varepsilon}M_\tau\varphi, \tag{1.18}$$

$$\left|\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\varphi(x)\,dx}{|x|^\mu}\right|\leqslant\varepsilon^{n-\mu}M_\varepsilon\varphi+\left|\int_{|x|<1}\varphi(x)\,dx\right|+|\mu|\int_\varepsilon^1\frac{M_\tau\varphi}{\tau^{1+\mu-n}}\,d\tau. \tag{1.19}$$

Доказательство следует из непосредственно проверяемых тождеств

$$\int_{|x|<\varepsilon}\frac{\varphi(x)\,dx}{|x|^\gamma}=\frac{1}{\varepsilon^\gamma}\int_{|x|<\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\gamma\int_0^\varepsilon\tau^{-1-\gamma}\,d\tau\int_{|x|<\tau}\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{|x|<\varepsilon}\ln\frac{|x|}{\varepsilon}\,\varphi(x)\,dx=-\int_0^\varepsilon\frac{d\tau}{\tau}\int_{|x|<\tau}\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\varphi(x)\,dx}{|x|^\mu}=-\frac{1}{\varepsilon^\mu}\int_{|x|<\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\int_{|x|<1}\varphi(x)\,dx+\mu\int_\varepsilon^1\frac{d\tau}{\tau^{1+\mu}}\int_{|x|<\tau}\varphi(x)\,dx.$$

Лемма 1.7. *Если $a(\tau)\in L_\infty(0,1)$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\operatorname{ess\,sup}\limits_{0<\tau<\varepsilon}|a(\tau)|=0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^\mu\int_\varepsilon^1 a(\tau)\tau^{-1-\mu}\,d\tau=0$, $\mu>0$.*

Доказательство элементарно.

§ 2. Пространства $L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ и $I^\alpha(L_p)$. Через $I^\alpha(L_p)$ обозначим образ оператора $K^\alpha\varphi$ риссова интегрирования (3), когда φ пробегает L_p:

$$I^\alpha(L_p)=\{f\colon f=K^\alpha\varphi,\ \varphi\in L_p(\boldsymbol{R}^n)\},\qquad \alpha>0,\ 1<p<\infty, \tag{2.1}$$

понимая $K^\alpha\varphi$ в обычном смысле при $0<\alpha<n$, $1<p<n/\alpha$ и в смысле свертки (3) в классе Φ' при $p\geqslant n/\alpha$, рассматривая $\varphi\in L_p$ как элемент из Φ' (относительно корректности такого определения см. [7], [8], [10]). Таким образом, $I^\alpha(L_p)$ — класс обычных функций при $1<p<n/\alpha$ ($I^\alpha(L_p)\subset L_q$, $q=\dfrac{np}{n-\alpha p}$, в силу теоремы С. Л. Соболева) и обобщенных, вообще говоря, функций нри $p\geqslant n/\alpha$. Однако, разности

$\Delta_h^l f$ функций $f \in I^\alpha(L_p)$ при $l > \alpha$ всегда будут обычными ($\in L_p$) функциями, см. Следствие Леммы 2.1. Пространство $I^\alpha(L_p)$ банахово относительно нормы $\|f\|_{I^\alpha(L_p)} = \|\varphi\|_p$.

Лемма 2.1. *Разности $(\Delta_h^l f)(x)$ функций $f(x) \in I^\alpha(L_p)$ представимы в виде*

(2.2) $$(\Delta_h^l f)(x) = \int_{R^n} \Delta_{l,\alpha}(\xi, h)\varphi(x-\xi)\,d\xi, \quad \varphi \in L_p,$$

где l произвольно при $1 < p < n/\alpha$ и $l > \alpha$ при $p \geqslant n/\alpha$.

Доказательство. Случай $1 < p < n/\alpha$ ясен. В случае $p \geqslant n/\alpha$ равенство (2.2) верно в смысле пространства Φ':

$$\langle \Delta_h^l f, \omega\rangle_{\Phi'} = \langle \Delta_{l,\alpha}(\cdot, h) * \varphi, \omega\rangle_{\Phi'}, \quad \omega \in \Phi,$$

что проверяется непосредственно. Переход к записи (2.2) справедлив вследствие того, что $\Delta_{l,\alpha}(x, h) \in L_1(R^n)$ в силу (1.14) (с учетом известного [8], [28] факта: обычные функции, совпадающие как Φ'-распределения, могут разниться разве лишь многочлёном).

Следствие. $(\Delta_h^l f)(x) \in L_p(R^n)$ *для* $f \in I^\alpha(L_p)$, *если* $l > \alpha$.

Основной результат этого § содержит следующая

Теорема 1. *Пусть*

(2.3) $$\alpha > 0, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 < r < \infty, \quad \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{p}.$$

Тогда

(2.4) $$L_{p,r}^\alpha = L_r \cap I^\alpha(L_p),$$

при этом $\|f\|_{L_{p,r}^\alpha} = \|f\|_r + \|f\|_{I^\alpha(L_p)}$.

Доказательство. Докажем вначале вложение

(2.5) $$L_r \cap I^\alpha(L_p) \subset L_{p,r}^\alpha, \quad \|f\|_{L_{p,r}^\alpha} = \|f\|_r + \|f\|_{I^\alpha(L_p)}$$

(справедливое при всех $1 < r < \infty$). Пусть $f(x) \in L_r \cap I^\alpha(L_p)$. Считая l выбираемым в (1.2) так как указано в п. 1° § 1, предположим вначале, что $l > \alpha$. Тогда в силу (2.2)

(2.6) $$(D_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \varphi(x-\xi)\,d\xi \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\Delta_{l,\alpha}(\xi, t)}{|t|^{n+\alpha}}\,dt$$

(перестановка порядка интегрирования возможна ввиду абсолютной сходимости интегралов). Ориентируясь на (1.9), положим $t = \frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi \tau$, что после ряда преобразований приведет (2.6) к виду

(2.7) $$(D_\varepsilon^\alpha f)(x) = \int_{R^n} K_{l,\alpha}(|\xi|)\varphi(x-\varepsilon\xi)\,d\xi,$$

где $K_{l,\alpha}(|x|)$ — ядро (1.7). Заметим, что

(2.8) $$\int_{R^n} K_{l,\alpha}(|\xi|)\,d\xi = 1.$$

(Это равенство — следствие выбора нормировочных постоянных — легко установить косвенным путем: пусть $\varphi \in \Phi$, тогда [7] $f = K^\alpha\varphi \in \Phi$ и $D^\alpha f = \varphi$. Переходя в (2.7) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что (2.8) необходимо должно быть выполненным.) Но тогда

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(x) - \varphi(x) = \int_{R^n} K_{l,\alpha}(|\xi|)[\varphi(x-\varepsilon\xi) - \varphi(x)]\,d\xi$$

и применение неравенства Минковского дает:

(2.9) $$\|D_\varepsilon^\alpha f - \varphi\|_p \leqslant \int_{R^n} |K_{l,\alpha}(|\xi|)|\,\omega_p(\varphi, \varepsilon\xi)\,d\xi \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

в силу суммируемости $K_{l,\alpha}(|\xi|)$ согласно Лемме 1.2 и в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Таким образом, $D_\varepsilon^\alpha f$ сходится в L_p и тогда $f \in L_{p,r}^\alpha(R^n)$ Равенство норм в (2.5) следует из того, что $D^\alpha f = \varphi$.

Если же $2[\alpha/2] < l \leqslant \alpha$ (при использовании нецентрированных разностей), то (2.7) вначале устанавливаем в смысле Φ'-распределений:

$$\langle D_\varepsilon^\alpha f, \omega\rangle_{\Phi'} = \left\langle \frac{1}{\varepsilon^n} K_{l,\alpha}\left(\frac{|\xi|}{\varepsilon}\right) * \varphi, \omega \right\rangle_{\Phi'}$$

(с учетом суммируемости $K_{l,\alpha}(|\xi|)$), а тогда функции $D_\varepsilon^\alpha f \in L_r$ и $\frac{1}{\varepsilon^n} K_{l,\alpha}\left(\frac{|\xi|}{\varepsilon}\right) * \varphi \in L_p$ совпадают и как обычные функции.

Для доказательства обратного вложения

(2.10) $$L_{p,r}^\alpha \subset L_r \cap I^\alpha(L_p), \quad \|f\|_{I^\alpha(L_p)} = \|D^\alpha f\|_p,$$

распространим представление (2.2) на тот случай, когда информация о том, что $f(x) \in I^\alpha(L_p)$ заменена условием $f(x) \in L_{p,r}^\alpha(R^n)$.

Лемма 2.2. *Пусть $f(x) \in L_{p,r}^\alpha(R^n)$ при условиях (2.3). Тогда для разности $(\Delta_h^m f)(x)$ справедливо представление*

(2.11) $$(\Delta_h^m f)(x) = \int_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x-\xi, h)(D^\alpha f)(\xi)\,d\xi.$$

Доказательство. Так как выкладки разнятся при различном выборе типа разности и зависят от того, является ли число $\alpha - n$ четным, то мы предположим (для определённости), что $D^\alpha f$ определяется в (1.1)–(1.2) нецентрированной разностью (2), разность $\Delta_h^m f$ — центрированная и $\alpha - n \neq 0, 2, 4, \ldots$ (Остальные варианты рассматриваются совершенно аналогично.) Обозначив $\varphi_\varepsilon = \boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f$ и $B\varphi = \Delta_{m,\alpha}(\cdot, h) * \varphi$, имеем:

$$B\varphi_\varepsilon = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\left\{\int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \Delta_{m,\alpha}(x-t, h) f(t)\, dt \int\limits_{|t-y|>\varepsilon} \frac{dy}{|t-y|^{n+\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu \nu^\alpha \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \Delta_{m,\alpha}(x-t, h)\, dt \int\limits_{|t-y|>\varepsilon\nu} \frac{f(y)\, dy}{|t-y|^{n+\alpha}}\right\}.$$

Так как в силу (1.14) $\Delta_{m,\alpha}(x, h) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ при $m > \alpha$, то допустима перестановка порядка интегрирования, так что

$$B\varphi_\varepsilon = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} f(y)\, dy \int\limits_{|\tau|>\varepsilon} \frac{\Delta_{m,\alpha}(x-y-\nu\tau, h)}{|\tau|^{n+\alpha}}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\gamma_n(\alpha)\, d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(x - y + \left(\frac{m}{2} - k\right) h\right) dy \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu \int\limits_{|\tau|>\varepsilon} \frac{|y-\nu\tau|^{\alpha-n}\, d\tau}{|\tau|^{n+\alpha}},$$

откуда после замены $y = \varepsilon t$, $\tau = \varepsilon \frac{|t|}{|\xi|^2} \operatorname{rot}_t \xi$,

$$B\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)\, d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \frac{(\Delta_h^m f)(x-\varepsilon t)}{|t|^n}\, dt \int\limits_{|\xi|<|t|} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu \left| |\xi| \vec{j} - \nu \frac{\xi}{|\xi|}\right|^{\alpha-n} d\xi,$$

что ввиду формулы $\left| |\xi| \vec{j} - \nu \frac{\xi}{|\xi|}\right| = |\xi - \nu \vec{j}|$ дает равенство

$$\int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \Delta_{m,\alpha}(x-\xi, h) \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} (\Delta_h^m f)(x-\varepsilon t) K_{l,\alpha}(|t|)\, dt. \tag{2.12}$$

Отсюда (2.11) получится при $\varepsilon \to 0$. Обоснуем предельный переход в (2.12), осуществив его в $L_r(\boldsymbol{R}^n)$. В левой части это возможно ввиду того, что оператор B ограничен из $L_p(\boldsymbol{R}^n)$ в $L_r(\boldsymbol{R}^n)$ при $\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{p}$ (в силу теоремы Юнга о свертках, применимой согласно (1.14) при $r \neq \frac{np}{n-\alpha p}$, и в силу теоремы С. Л. Соболева при $r = \frac{np}{n-\alpha p}$ в тех случаях, когда $\alpha p < n$). Для правой же части имеем, применяя неравенство Минковского с учетом (2.8):

$$\left\| \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} K_{l,\alpha}(|t|)(\Delta_h^m f)(x-\varepsilon t)\, dt - (\Delta_h^m f)(x)\right\|_r \leqslant \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} |K_{l,\alpha}(|t|)| \cdot \omega_r(\Delta_h^m f, \varepsilon t)\, dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Лемма 2.2 доказана.

Вложение (2.10) следует из Леммы 2.2 незамедлительно. В самом деле, пусть $f(x) \in L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$. Равенство (2.11) в случае $1 < p < n/\alpha$ можно переписать в виде

$$\Delta_h^m f \equiv \Delta_h^m K^\alpha \boldsymbol{D}^\alpha f. \tag{2.13}$$

Функции, имеющие тождественно совпадающие разности, могут отличаться разве лишь многочленом (перейти в рамках S' к образам Фурье и применить теорему об общем виде функционала, сосредоточенного в точке [4], стр. 149, пользуясь произволом $h \in \boldsymbol{R}^n$). Поэтому из (2.13) следует, что $f = K^\alpha \boldsymbol{D}^\alpha f$, т.е. $f \in I^\alpha(L_p)$. В случае же $p \geqslant n/\alpha$ мы по-прежнему имеем равенство (2.13) с той лишь разницей, что все операции в нем понимаются в смысле Φ' и заключение $f \in I^\alpha(L_p)$ также следует. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пространства $L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ при условиях* (2.3) *не зависят от типа разности, определяющей $\boldsymbol{D}^\alpha f$ в* (1.2) *и от порядка l этой разности (при указанном в п.* 1° § 1 *выборе l).*

Следствие 2. *Пространства $L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ при условиях* (2.3) *полны.*

Следствие 3. *Усеченные риссовы производные $\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f$ функций $f \in L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ в случае* (2.3) *допускают представление*

$$(\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} K_{l,\alpha}(|\xi|)(\boldsymbol{D}^\alpha f)(x-\varepsilon\xi)\, d\xi. \tag{2.14}$$

Следствие 4. *Преобразование Фурье ядра $K_{l,\alpha}(|x|)$ можно вычислить по формуле*

$$\widehat{K_{l,\alpha}}(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)\, |x|^\alpha} \int\limits_{|x|>1} \frac{[1-e^{i(t,x)}]^l}{|t|^{n+\alpha}}\, dt, \tag{2.15}$$

если используются нецентрированные разности (2). *В случае центрированных разностей* (2′) *следует заменить* $[1-e^{i(t,x)}]^l$ *в* (2.15) *на* $[e^{\frac{i}{2}(t,x)} - e^{-\frac{i}{2}(t,x)}]^l$.

Действительно, взяв в (2.14) $f \in \Phi$, имеем $\widehat{\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f}(x) = K_{l,\alpha}(\varepsilon x) \cdot \widehat{\boldsymbol{D}^\alpha f}(x)$. Так как $\widehat{(\boldsymbol{D}^\alpha f)}(x) = |x|^\alpha \hat{f}(x)$, а $(\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon \hat{f})(x) = d_{n,l}^{-1}(\alpha) \hat{f}(x) \int\limits_{|t|>\varepsilon} [1-e^{i(t,x)}]^l \times$ $\times |t|^{-n-\alpha} dt$, то отсюда при $\varepsilon = 1$ и следует (2.15). Заметим, что косвенный путь отыскания $\widehat{K_{l,\alpha}}(x)$ — из представления (2.14) — выбран по существу: непосредственное вычисление $\widehat{K_{l,\alpha}}(x)$ наталкивается на трудность обоснования перестановки порядка интегрирования в повторных интегралах, не являющихся абсолютно сходящимися.

icm©

§ 3. Оценка сходимости почти всюду риссовых производных $\boldsymbol{D}^\alpha f$. Оценка L_p-сходимости усеченной риссовой производной $\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f$ дана в (2.9). Покажем, что имеет место и сходимость почти всюду и получим оценку этой сходимости (от каких характеристик функции $f \in L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ зависит скорость сходимости?).

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ при условиях* (2.3) *и пусть $\varphi(x) = (\boldsymbol{D}^\alpha f)(x)$. Тогда*

(3.1) $$(\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p.}} \varphi(x)$$

и имеет место оценка

(3.2) $$|(\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) - \varphi(x)| \leqslant c_1 \sup_{0<t<\varepsilon} \Phi_t(x) + c_2 \Psi_3(x) + \varepsilon^{l^*-\alpha}\big(c_3|\varphi(x)| + c_4\|\varphi\|_p\big),$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — постоянные, l^* — то же, что и в (1.16) *и*

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\int\limits_{|y|<t} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|\,dy, \qquad \Psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{l^*-\alpha}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{\Phi_t(x)\,dt}{t^{l^*-\alpha+1}}.$$

Доказательство. Известно ([15], стр. 22), что $\Phi_t(x) \to 0$ при $t \to 0$ почти для всех $x \in \boldsymbol{R}^n$. Сходимость $\Psi_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p.}} 0$ следует из Леммы 1.7. Таким образом, сходимость (3.1) вытекает из оценки (3.2). Докажем последнюю. Воспользуемся вытекающим из (2.14) равенством

$$(\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) - \varphi(x) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} K_{l,\alpha}(|y|)[\varphi(x-\varepsilon y) - \varphi(x)]\,dy.$$

Представив правую часть в виде

$$\int\limits_{|y|<1} + \int\limits_{1<|y|<1/\varepsilon} + \int\limits_{|y|>1/\varepsilon} = J_1 + J_2 + J_3,$$

оценим каждое слагаемое отдельно. Для J_1, используя оценку (1.15) ядра $K_{l,\alpha}(|y|)$, совершая замену переменных $\varepsilon y \to y$ и применяя после того неравенства (1.17), (1.18), получим:

$$|J_1| \leqslant c \sup_{0<t<\varepsilon} \Phi_t(x).$$

Аналогично из (1.16) имеем:

$$|J_2| \leqslant c \int\limits_{1<|y|<1/\varepsilon} \frac{|\varphi(x-\varepsilon y) - \varphi(x)|}{|y|^{l^*+n-\alpha}}\,dy = c\varepsilon^{l^*-\alpha} \int\limits_{\varepsilon<|y|<1} \frac{|\varphi(x-y) - \varphi(x)|}{|y|^{l^*+n-\alpha}}\,dy$$

и оценка (1.19) дает: $|J_2| \leqslant c\varepsilon^{l^*-\alpha}[|\varphi(x)| + \|\varphi\|_p] + \sup\limits_{0<t<\varepsilon} \Phi_t(x) + \Psi_\varepsilon(x)$. Для J_3 также из (1.16) получаем:

$$|J_3| \leqslant c\varepsilon^{l^*-\alpha} \int\limits_{|y|>1} \frac{|\varphi(x-y) - \varphi(x)|}{|y|^{l^*+n-\alpha}}\,dy \leqslant c\varepsilon^{l^*-\alpha}\big(\|\varphi\|_p + |\varphi(x)|\big).$$

Собирая оценки для J_1, J_2, J_3, приходим к (3.2). Теорема 2 доказана.

Отметим, что утверждение (3.1) в одномерном случае $n = 1$ для $f \in I^\alpha(L_p)$ при $1 < p < 1/\alpha$ по существу содержится в [20].

Заметим, что скрупулезный подсчет показывает, что в качестве c_1, c_2, c_3, c_4 в (3.2) можно взять постоянные

$$c_1 = \beta\left(\mu + n\frac{1+4^\alpha}{\alpha}\right), \qquad c_2 = \mu\beta(n+l-\alpha),$$

$$c_3 = \beta|\Sigma_{n-1}|\left[\frac{\mu}{n} + \frac{\alpha(2l+1)^{n+l-\alpha}}{(l-\alpha)^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}+l\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}\right],$$

$$c_4 = \beta|\Sigma_{n-1}|^{1/p'}\left[\frac{\mu}{n^{1/p'}} + \frac{\alpha(2l+1)^{n+l-\alpha}}{(l-\alpha)\left\{p'\left(\frac{n}{p}+l-\alpha\right)\right\}^{1/p'}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}+l\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}\right],$$

где $p' = \dfrac{p}{p-1}$ и обозначено

$$\beta = \frac{2^{l-\alpha+1}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\alpha|d_{n,l}(\alpha)|\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

$$\mu = 2^{-l} + l\cdot 2^{l-\alpha}(2l+1)^l + (2l+1)^{n+l-\alpha}\cdot\frac{\alpha}{l-\alpha}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}+l\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)},$$

в предположении, что $0 < \alpha < n$, $l > \alpha$ и используются нецентрированные разности.

§ 4. Гиперсингулярные интегралы в случае $\lambda = \lambda(t)$. Основной результат этого § — представление гиперсингулярного интеграла (1) в случае $\lambda = \lambda(t)$ через риссову производную $\boldsymbol{D}^\alpha f$ в виде

(4.1) $$\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda f = A\boldsymbol{D}^\alpha f,$$

где A — „хороший" оператор. Здесь

(4.2) $$\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda f = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}} \boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f,$$

где

(4.3) $$(\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\int\limits_{|t|>\varepsilon} \frac{(\Delta^m_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\,\lambda(t)\,dt.$$

Относительно $\lambda(t)$ предполагаем, что

1) $\lambda(t)$ измерима;
2) $\lambda(t)$ непрерывна при $t = 0$, $t = \infty$, удовлетворяя условиям

$$|\lambda(t)-\lambda(0)| \leqslant c|t|^{\delta_1},\ \delta_1 > 0 \quad \text{при} \quad |t|\to 0 \quad (|t| < \eta), \tag{4.4}$$

$$|\lambda(t)-\lambda(\infty)| \leqslant c|t|^{-\delta_2},\ \delta_2 > 0 \quad \text{при} \quad |t|\to \infty \quad (|t| > N), \tag{4.5}$$

3) имеет место равномерная оценка

$$\int_{\Sigma_{n-1}} |\lambda(t)|\, dS_t \leqslant M < \infty, \quad t = |t|t', \quad t' \in \Sigma_{n-1}. \tag{4.6}$$

Замечание 1. Всюду в дальнейшем для порядка m разности $\Delta_t^m f$, определяющей гиперсингулярный интеграл (4.3), исключаем возможность $2[\alpha/2] < m \leqslant \alpha$ и считаем, что всегда $m > \alpha$ (так что в случаях $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ можно использовать в (4.3) только центрированную разность).

1°. Связь между $\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f$ и $\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f$. Ищем связь

$$\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f = A_\varepsilon \boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f \tag{4.7}$$

с усеченным интегралом (1.2). Операторы A_ε будут сильно сходиться в L_p (иногда и равномерно), что позволит делать заключения о сходимости $\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f$ при заданной сходимости $\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f$ и наоборот.

Замечание 2. Будем брать $\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f$ с центрированной разностью (четного порядка $l > \alpha$). Так как гиперсингулярные интегралы рассматриваются нами для $f \in L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$, то это не ограничит в силу Следствия 1 Теоремы 1 общности окончательных результатов.

В образах Фурье мы имеем:

$$\widehat{\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f}(x) = \mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x)\hat{f}(x), \qquad \widehat{\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f}(x) = \mathscr{D}_\varepsilon(x)\hat{f}(x),$$

где

$$\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{[e^{\frac{i}{2}(x,t)} - e^{-\frac{i}{2}(x,t)}]^m}{|t|^{n+\alpha}} \lambda(t)\, dt, \tag{4.8}$$

$$\mathscr{D}_\varepsilon(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{[e^{\frac{i}{2}(x,t)} - e^{-\frac{i}{2}(x,t)}]^l}{|t|^{n+\alpha}}\, dt = \frac{(2i)^l}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\sin^l \frac{1}{2}(x,t)}{|t|^{n+\alpha}}\, dt \tag{4.9}$$

(равенство (4.8) выписано для случая, когда в (4.3) используются центрированные разности; при использовании нецентрированных разностей следует в (4.8) заменить $[e^{\frac{i}{2}(x,t)} - e^{-\frac{i}{2}(x,t)}]^m$ на $[1 - e^{i(x,t)}]^m$).

Искомый оператор A_ε должен определяться своим символом

$$\sigma_\varepsilon(x) = \frac{\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x)}{\mathscr{D}_\varepsilon(x)} \qquad (\widehat{A_\varepsilon \varphi} = \sigma_\varepsilon \cdot \hat{\varphi}). \tag{4.10}$$

Замечание 3. Случай, когда гиперсингулярный интеграл $\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda f$ и сравниваемый с ним интеграл $\boldsymbol{D}^\alpha f$ построены с помощью одинаковых (центрированных) разностей одного и того же четного порядка $m = l$, условимся для краткости называть *симметричным*.

Лемма 4.1. $\sigma_\varepsilon(x) \in \mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$.

Доказательство. Очевидно, $\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x) \in \mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$. Однако, $\mathscr{D}_\varepsilon(0) = 0$, так что $\dfrac{1}{\mathscr{D}_\varepsilon(x)} \notin \mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$. Покажем, что

$$|x|^{-\alpha}\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x) \in \mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n). \tag{4.11}$$

Введя для этого функцию

$$a_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\Delta_{m,\alpha}(\xi, t)}{|t|^{n+\alpha}} \lambda(t)\, dt = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|\xi|^n} \int_{|\tau|<|\xi|/\varepsilon} k_{m,\alpha}(\tau)\lambda\left(\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi \tau\right) d\tau, \tag{4.12}$$

покажем, что $a_\varepsilon(\xi) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ и что $\widehat{a_\varepsilon}(x) = |x|^{-\alpha}\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x)$. Более того, покажем, что $\|a_\varepsilon\|_1 \leqslant c$, т.е.

$$\|\,|x|^{-\alpha}\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x)\|_{\mathscr{R}_0} \leqslant c, \tag{4.11'}$$

где c не зависит от ε. Исходя соответственно из (4.5) и (4.4), представим $a_\varepsilon(\xi)$ в двух формах

$$a_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|\xi|^n}\left\{\int_{\frac{|\xi|}{N}<|\tau|<\frac{|\xi|}{\varepsilon}} k_{m,\alpha}(\tau)\lambda\left(\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}\ \tau\right)d\tau + \int_{|\tau|<\frac{|\xi|}{N}} k_{m,\alpha}(\tau)\left[\lambda\left(\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi \tau\right) - \lambda(\infty)\right]d\tau\right\} + \frac{\lambda(\infty)}{N^n}K_{m,\alpha}\left(\frac{|\xi|}{N}\right), \tag{4.13}$$

$$a_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|\xi|^n}\left\{\int_{|\tau|<\frac{|\xi|}{\eta}} k_{m,\alpha}(\tau)\left[\lambda\left(\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi \tau\right) - \lambda(0)\right]d\tau + \int_{\frac{|\xi|}{\eta}<|\tau|<\frac{|\xi|}{\varepsilon}} k_{m,\alpha}(\tau)\left[\lambda\left(\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi \tau\right) - \lambda(0)\right]d\tau\right\} + \frac{\lambda(0)}{\varepsilon^n}K_{m,\alpha}\left(\frac{|\xi|}{\varepsilon}\right). \tag{4.13'}$$

Первое слагаемое в (4.13) согласно (1.10) и (4.6) мажорируется при $|\xi| > N(l+1)$ равномерно по ε величиной

$$\frac{1}{|d_{n,m}(\alpha)|\cdot|\xi|^n}\int\limits_{\frac{|\xi|}{N}}^{\infty}\varrho^{m-\alpha-1}d\varrho\int\limits_{\Sigma_{n-1}}\left|\lambda\left(\frac{|\xi|}{\varrho}\tau'\right)\right|dS_\tau \leqslant c_1|\xi|^{\alpha-n-m}, \tag{4.14}$$

а второе в силу (4.5) — величиной $c|\xi|^{-n-\delta_2}\int\limits_{R^n}|k_{m,\alpha}(\tau)|\cdot|\tau|^{\delta_2}d\tau$ при выборе $\delta_2 < m-\alpha$. Таким образом,

$$|a_\varepsilon(\xi)| \leqslant c|\xi|^{-n-\delta_2}+|\lambda(\infty)|N^{-n}\left|K_{m,\alpha}(N^{-1}|\xi|)\right|, \qquad |\xi| > N(l+1),$$

где c не зависит от ξ и ε. Аналогично из (4.13′) на основании (4.4) и (4.6) следует оценка при $|\xi|\to 0$:

$$|a_\varepsilon(\xi)| \leqslant c|\xi|^{\delta_1-n}+|\lambda(0)|\varepsilon^{-n}\left|K_{m,\alpha}(\varepsilon^{-1}|\xi|)\right|, \qquad |\xi| < \frac{\eta}{2}.$$

Остается получить оценку $a_\varepsilon(\xi)$ при $0 < \beta \leqslant |\xi| \leqslant B < \infty$. Имеем:

$$|a_\varepsilon(\xi)| \leqslant c+c\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{|\tau-k\vec{j}|<\frac12}\left|k_\alpha(\tau-k\vec{j})\lambda\left(\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\mathrm{rot}_\xi\tau\right)\right|d\tau. \tag{4.15}$$

Отсюда после замены $|\tau|^{-2}\mathrm{rot}_\xi\tau = t|t|^{-2}$ и затем $t-k\frac{\xi}{|\xi|} = y$ с учетом равенства $|\tau-k\vec{j}| = \left|t-k\frac{\xi}{|\xi|}\right|$ получаем

$$\begin{aligned}|a_\varepsilon(\xi)| &\leqslant c+c\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{|y|<\frac12}\left|k_\alpha(y)\lambda\left(\frac{|\xi|\left(y+k\frac{\xi}{|\xi|}\right)}{\left|y+k\frac{\xi}{|\xi|}\right|^2}\right)\right|dy = \\ &= c+c\sum_{k=0}^{m}\int\limits_0^{\frac12}|k_\alpha(\varrho)|\varrho^{n-1}d\varrho\int\limits_{\Sigma_{n-1}}|\lambda(r_k t')|dS_t,\end{aligned} \tag{4.16}$$

где $t' = \left(y+k\frac{\xi}{|\xi|}\right)\cdot\left|y+k\frac{\xi}{|\xi|}\right|^{-1}\in\Sigma_{n-1}$ и $r_k = |\xi|\cdot\left|y+k\frac{\xi}{|\xi|}\right|^{-1}$, и тогда в силу (4.6) получаем, что $|a_\varepsilon(\xi)|\leqslant c$, $0<\beta\leqslant|\xi|\leqslant B<\infty$, c не зависит от ε, что и завершает равномерную оценку $\|a_\varepsilon\|_1 \leqslant c$.

Имеем далее

$$\begin{aligned}\hat{a}_\varepsilon(x) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\Bigg\{&\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}e^{i(x,\xi)}d\xi\int\limits_{\varepsilon<|t|<N}\frac{\Delta_{m,\alpha}(\xi,t)}{|t|^{n+\alpha}}\lambda(t)dt+ \\ &+\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}e^{i(x,\xi)}d\xi\int\limits_{|t|>N}\frac{\Delta_{m,\alpha}(\xi,t)}{|t|^{n+\alpha}}[\lambda(t)-\lambda(\infty)]dt+\lambda(\infty)\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}e^{i(x,\xi)}d\xi\times \\ &\times\int\limits_{|t|>N}\frac{\Delta_{m,\alpha}(\xi,t)}{|t|^{n+\alpha}}dt\Bigg\}.\end{aligned}$$

В первых двух слагаемых возможна перестановка интегрирования ввиду абсолютной сходимости интегралов (по существу установленной выше):

$$\begin{aligned}\hat{a}_\varepsilon(x) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\Bigg\{&\int\limits_{\varepsilon<|t|<N}\frac{\lambda(t)}{|t|^{n+\alpha}}\widehat{\Delta_{m,\alpha}(\cdot,t)}(x)dt+ \\ &+\int\limits_{|t|>N}\frac{\lambda(t)-\lambda(\infty)}{|t|^{n+\alpha}}\widehat{\Delta_{m,\alpha}(\cdot,t)}(x)dt\Bigg\}+\lambda(\infty)\widehat{K_{m,\alpha}}(Nx).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Учитывая формулы (1.8) и (2.15), из (4.17) получаем, что $\hat{a}_\varepsilon(x) = \dfrac{\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x)}{|x|^\alpha}$, что и дает (4.11). В частности, и $|x|^{-\alpha}\mathscr{D}_\varepsilon(x)\in\mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$.

Записывая $\sigma_\varepsilon(x)$ в виде $\sigma_\varepsilon(x) = \dfrac{(1+|x|^{-\alpha})\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x)}{(1+|x|^{-\alpha})\mathscr{D}_\varepsilon(x)}$, видим, что и числитель, и знаменатель принадлежат $\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$. Но теперь

$$(1+|x|^{-\alpha})\mathscr{D}_\varepsilon(x) \neq 0, \qquad x\in\dot{\boldsymbol{R}}^n. \tag{4.18}$$

Для конечных $x\neq 0$ то видно из (4.9) (l четно); при $|x|\to 0$ имеем:

$$\lim_{|x|\to 0}(1+|x|^{-\alpha})\mathscr{D}_\varepsilon(x) = \lim_{|x|\to 0}\frac{\mathscr{D}_\varepsilon(x)}{|x|^\alpha} = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\lim_{|x|\to 0}\int\limits_{|t|>\varepsilon|x|}\frac{(e^{\frac{i}{2}t_1}-e^{-\frac{i}{2}t_1})^l}{|t|^{n+\alpha}}dt = 1;$$

также и $\lim\limits_{|x|\to\infty}(1+|x|^{-\alpha})\mathscr{D}_\varepsilon(x) = \lim\limits_{|x|\to\infty}\mathscr{D}_\varepsilon(x)\neq 0$, поскольку после раскрытия бинома в (4.9) видим, что все слагаемые с $k\neq l/2$ исчезают на бесконечности в силу теоремы Римана–Лебега, слагаемое же с номером $k = l/2$ дает $\mathscr{D}_\varepsilon(\infty)\neq 0$. Коль скоро (4.18) выполнено, $[(1+|x|^{-\alpha})\times\times\mathscr{D}_\varepsilon(x)]^{-1}\in\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ в силу теоремы Н. Винера. Тогда и $\sigma_\varepsilon(x)\in\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$. Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Справедлива равномерная оценка* $\|A_\varepsilon\|_{L_p\to L_p}\leqslant c$, *где* $p\geqslant 1$ *и* c *не зависит от* ε.

Доказательство. Покажем, что $\|\sigma_\varepsilon\|_{\mathscr{R}}\leqslant c$, где c не зависит от ε. Замечая, что $\mathscr{D}_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-\alpha}\mathscr{D}_1(\varepsilon x)$, где $\mathscr{D}_1(x)=\mathscr{D}_\varepsilon(x)|_{\varepsilon=1}$, покажем, что $\|[1+(\varepsilon|x|)^{-\alpha}]\varepsilon^\alpha\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x)\|_{\mathscr{R}}\leqslant c$, $\|\{[1+(\varepsilon|x|)^{-\alpha}]\mathscr{D}_1(\varepsilon x)\}^{-1}\|_{\mathscr{R}}\leqslant c$, где c не зависит от ε. Второе выполнено в силу того, что $\{(1+|x|^{-\alpha})\mathscr{D}_1(x)\}^{-1}\in\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ (см. доказательство Леммы 4.1), и в силу равенства $\|f(\varepsilon x)\|_{\mathscr{R}}=\|f(x)\|_{\mathscr{R}}$. Для первого же ввиду (4.11′) достаточно показать, что $\|\varepsilon^\alpha\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x)\|_{\mathscr{R}}\leqslant c$. Имеем: $\varepsilon^\alpha\mathscr{D}_{\lambda,\varepsilon}(x)=c_\varepsilon+\widehat{q_\varepsilon}(x)$, где $c_\varepsilon=d_{n,m}^{-1}(\alpha)(-1)^{m/2}C_m^{m/2}\varepsilon^\alpha\int\limits_{|t|>\varepsilon}\lambda(t)|t|^{-n-\alpha}dt$,

$$q_\varepsilon(t)=\frac{\varepsilon^\alpha}{d_{n,m}(\alpha)}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq\frac{m}{2}}}^{m}(-1)^kC_m^k\left|k-\frac{m}{2}\right|^\alpha\lambda\left(\frac{t}{k-\frac{m}{2}}\right)\left[1-\chi\left(\frac{k-\frac{m}{2}}{\varepsilon}t\right)\right]$$

(значения c_ε и q_ε выписаны для того случая, когда в (4.3) используются центрированные разности). Равномерные оценки $|c_\varepsilon|\leqslant c$, $\|q_\varepsilon\|_1\leqslant c$ легко получаются с помощью (4.6).

2°. Предельный оператор A **и его символ.** Введем оператор свертки

$$Af=\lambda(0)f(x)+\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}a(x-y)f(y)\,dy \tag{4.19}$$

с ядром

$$a(x)=\frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\Delta_{m,\alpha}(x,t)}{|t|^{n+\alpha}}\lambda(t)\,dt= \tag{4.20}$$

$$=\frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|x|^n}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}k_{m,\alpha}(\tau)\lambda\left(\frac{|x|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_x\tau\right)d\tau.$$

Заметим, что $a(x)\equiv 0$ при $\lambda(t)=\text{const}$ в силу (1.12).

Лемма 4.3. $a(x)\in L_1(\boldsymbol{R}^n)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из оценки

$$|a(x)|\leqslant c|x|^{-n+\delta_1}\ \text{при}\ |x|\leqslant 1\quad\text{и}\quad |a(x)|\leqslant c|x|^{-n-\delta_2}\ \text{при}\ |x|\geqslant 1 \tag{4.21}$$

при выборе $0<\delta_1<\alpha$, $0<\delta_2<m-\alpha$ в (4.4), (4.5). Докажем эту оценку. В силу (1.12) из (4.20) имеем:

$$a(x)=\frac{|x|^{-n}}{d_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}k_{m,\alpha}(\tau)\left[\lambda\left(\frac{|x|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_x\tau\right)-\lambda(0)\right]d\tau.$$

Отсюда на основании (4.4) и (4.6) имеем при $|x|$ достаточно малом ($|x|<\beta$, $0<\beta\leqslant\frac{1}{2}\eta\leqslant\frac{1}{2}$):

$$|a(x)|\leqslant c|x|^{-n}\int\limits_{|\tau|<\frac{1}{\eta}|x|}|k_{m,\alpha}(\tau)|\cdot\left|\lambda\left(\frac{|x|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_x\tau\right)-\lambda(0)\right|d\tau+$$

$$+c|x|^{-n}\int\limits_{|\tau|>\frac{1}{\eta}|x|}|k_{m,\alpha}(\tau)|\cdot\left(\frac{|x|}{|\tau|}\right)^{\delta_1}d\tau\leqslant\frac{2Mc_1}{|x|^{\max(n-\alpha,0)}}+\frac{c_2}{|x|^{n-\delta_1}}\leqslant\frac{c_3}{|x|^{n-\delta_1}},$$

где мы предположили, что $\alpha\neq n$. Если же $\alpha=n$, то следует заменить c_1 на $c_1\ln\frac{1}{|x|}$. Аналогично, вычитанием $\lambda(\infty)$ в (4.20) получается вторая из оценок (4.21) при больших $|x|>B>2N$. Получение оценки $|a(x)|\leqslant c$ при $\beta\leqslant|x|\leqslant B$, аналогичное действиям в (4.15), (4.16), опустим.

Анализируя доказательство Леммы 4.3, получаем следующее

Следствие. *В случае* $\lambda(0)=\lambda(\infty)=0$ *интегралы в* (4.20) *сходятся абсолютно и мажорируются при этом так же, как и в* (4.21).

Лемма 4.4. *Символ*

$$\sigma(x)\stackrel{\text{def}}{=}\lambda(0)+\hat{a}(x) \tag{4.22}$$

оператора A *вычисляется по формуле*

$$\sigma(x)=\frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|x|^\alpha}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}\frac{[e^{\frac{i}{2}(t,x)}-e^{-\frac{i}{2}(t,x)}]^m}{|t|^{n+\alpha}}\lambda(t)\,dt$$

(*выписано для случая центрированной разности в* (4.3)).

Доказательство. При непосредственном вычислении $\hat{a}(x)$ неясно обоснование перестановки порядка интегрирования: соответствующие повторные интегралы не являются абсолютно сходящимися. Абсолютная сходимость, однако, будет иметь место, если $\lambda(0)=\lambda(\infty)=0$ (см. Следствие). Представим поэтому $\lambda(t)$ в виде $\lambda(t)=\tilde{\lambda}(t)+\lambda_0(t)$, где $\tilde{\lambda}(t)=\lambda(t)-\lambda(0)\chi(t)-\lambda(\infty)[1-\chi(t)]$, так что $\tilde{\lambda}(0)=\tilde{\lambda}(\infty)=0$, а $\lambda_0(t)=[\lambda(0)-\lambda(\infty)]\chi(t)+\lambda(\infty)$. Для функции (4.20) соответственно имеем: $a(x)=a_{\tilde{\lambda}}(x)+a_{\lambda_0}(x)$. В интеграле

$$\widehat{a_{\tilde{\lambda}}}(x)=\frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}e^{i(x,y)}dy\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\tilde{\lambda}(t)\Delta_{m,\alpha}(y,t)}{|t|^{n+\alpha}}dt \tag{4.24}$$

перестановка порядка интегрирования обосновывается ссылкой на Следствие из Леммы 4.3. Что же касается $a_{\lambda_0}(x)$, то из (4.20) замечаем, что $a_{\lambda_0}(x) = [\lambda(\infty)-\lambda(0)]K_{m,\alpha}(|x|)$ и $\widehat{a_{\lambda_0}}(x)$ определяется тогда из (2.15) Переставляя в (4.24) порядок интегрирования и применяя после этого (1.8), мы и придем, собирая $\widehat{a_{\tilde{\lambda}}}(x)+\widehat{a_{\lambda_0}}(x)$, к (4.23).

3°. Обоснование сходимости $A_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightarrow} A$. Покажем, что операторы A_ε сильно сходятся в L_p к A, а в *симметричном* случае $m=l$ (см. Замечание 3) эта сходимость будет и равномерной. Основной момент доказательства — следующая лемма о поведении символа $\sigma_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to 0$.

Лемма 4.5. *Справедливо представление*

$$\sigma_\varepsilon(x) = \sigma(x)+\lambda(0)\sigma_0(\varepsilon|x|)+W_\varepsilon(x), \tag{4.25}$$

где $\sigma_0(|x|)\in\mathscr{R}(\mathbf{R}^n)$ *и* $\sigma_0(0)=0$, *а* $W_\varepsilon(x)$ *допускает оценку*

$$|W_\varepsilon(x)|\leqslant c\varepsilon^{\delta_1}$$

при выборе δ_1 *в* (4.4) *в пределах* $0<\delta_1<\min(\alpha, l-\alpha)$; c *не зависит от* x *и* ε.

Доказательство. Пусть в (4.3) выбрана центрированная разность (доказательство меняется несущественно в случае нецентрированной разности). Из (4.10) и (4.23) имеем (после приведения к общему знаменателю):

$$\sigma_\varepsilon(x)-\sigma(x) = \tag{4.27}$$

$$=\frac{(2i)^m}{d_{n,m}(\alpha)}\left\{\frac{\int\limits_{|t|>\varepsilon|x|}|t|^{-n-\alpha}\sin^m\frac{t_1}{2}\lambda\left(\mathrm{rot}_x\frac{t}{|x|}\right)dt}{\int\limits_{|t|>\varepsilon|x|}|t|^{-n-\alpha}\sin^l\frac{t_1}{2}\,dt}\cdot\int\limits_{|t|<\varepsilon|x|}\frac{\sin^l\frac{t_1}{2}}{|t|^{n+\alpha}}\,dt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{|t|<\varepsilon|x|}\frac{\sin^m\frac{t_1}{2}}{|t|^{n+\alpha}}\lambda\left(\mathrm{rot}_x\frac{t}{|x|}\right)dt\right\}.$$

Вычитая $\lambda(0)$ из $\lambda\left(\mathrm{rot}_x\frac{t}{|x|}\right)$, придем к записи (4.25), где $\sigma_0(\varepsilon|x|)$ есть правая часть в (4.27) при замене $\lambda\left(\mathrm{rot}_x\frac{t}{|x|}\right)$ на 1, а $W_\varepsilon(x)$ — при замене $\lambda\left(\mathrm{rot}_x\frac{t}{|x|}\right)$ на $\lambda\left(\mathrm{rot}_x\frac{t}{|x|}\right)-\lambda(0)$. Очевидно, $\sigma_0(|x|)=\sigma_\varepsilon(x)|_{\varepsilon=1,\lambda\equiv 1}$, так что $\sigma_0(|x|)\in\mathscr{R}(\mathbf{R}^n)$ в силу Леммы 4.1. Для оценки функции $W_\varepsilon(x)$ запишем её в виде

$$W_\varepsilon(x) = \frac{(2i)^m}{d_{n,m}(\alpha)}[W_1(\varepsilon,x)W_2(\varepsilon|x|)+W_3(\varepsilon,x)], \tag{4.22}$$

где обозначено

$$W_1(\varepsilon,x) = (1+\varepsilon|x|)^\alpha\int\limits_{|t|>\varepsilon|x|}\frac{\sin^m\frac{t_1}{2}}{|t|^{n+\alpha}}\left[\lambda\left(\mathrm{rot}_x\frac{t}{|x|}\right)-\lambda(0)\right]dt,$$

$$W_2(r) = \frac{\int\limits_{|t|<r}|t|^{-n-\alpha}\sin^l\frac{t_1}{2}\,dt}{(1+r)^\alpha\int\limits_{|t|>r}|t|^{-n-\alpha}\sin^l\frac{t_1}{2}\,dt},\quad r>0, \tag{4.29}$$

$$W_3(\varepsilon,x) = \int\limits_{|t|<\varepsilon|x|}\frac{\sin^m\frac{t_1}{2}}{|t|^{n+\alpha}}\left[\lambda\left(\mathrm{rot}_x\frac{t}{|x|}\right)-\lambda(0)\right]dt.$$

Оценка $W_3(\varepsilon,x)$ проста в силу (4.4) (при выборе $0<\varepsilon<\eta$): $|W_3(\varepsilon,x)|\leqslant$ $\leqslant c\varepsilon^{\delta_1}Y(\varepsilon|x|)$, где функция

$$Y(r) = \frac{1}{r^{\delta_1}}\int\limits_{|t|<r}|t|^{\delta_1-n-\alpha}\sin^m\frac{t_1}{2}\,dt,$$

очевидно, ограничена при $0\leqslant r\leqslant\infty$. Покажем, что $W_2(r)\leqslant c\left(\frac{r}{1+r}\right)^{l-\alpha}$. Этой оценке удовлетворяет числитель дроби (4.29). Остается показать, что её знаменатель ограничен снизу. Обозначим его через $\tilde{W}_2(r)$; $\tilde{W}_2(r)>0$ для любых конечных $r\in[0,N]$ и нужно показать, что $\tilde{W}_2(\infty)\neq 0$. Имеем:

$$\tilde{W}_2(r) = (1+r)^\alpha\int\limits_r^\infty\varrho^{-1-\alpha}\Phi(\varrho)\,d\varrho,$$

где

$$\Phi(\varrho) = (2i)^{-l}\int\limits_{\Sigma_{n-1}}\left(e^{i\frac{\varrho}{2}\sigma_1}-e^{-i\frac{\varrho}{2}\sigma_1}\right)^l d\sigma.$$

Формулы 4.644 и 3.915.5 из [5] дают:

$$\Phi(\varrho) = (-1)^{\frac{l}{2}}C_l^{\frac{l}{2}}|\Sigma_{n-1}|+(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq\frac{l}{2}}}^{l}(-1)^kC_l^k\left(\left|k-\frac{l}{2}\right|\varrho\right)^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}\left(\left|k-\frac{l}{2}\right|\varrho\right), \tag{4.30}$$

где $I_{\frac{n}{2}-1}(z)$ — функция Бесселя порядка $n/2-1$. В соответствии с правилом Лопиталя заключаем, что

$$\tilde{W}_2(\infty) = \lim_{r\to\infty}\frac{r^{-1-\alpha}\Phi(r)}{\alpha(1+r)^{-1-\alpha}} = \frac{\Phi(\infty)}{\alpha} = \frac{(-1)^{\frac{l}{2}}}{\alpha}C_l^{\frac{l}{2}}|\Sigma_{n-1}|\neq 0.$$

Для оценки функции $W_1(\varepsilon, x)$ представим её (ориентируясь на (4.4) и (4.6)) в виде

$$W_1(\varepsilon, x) = (1+\varepsilon|x|)^\alpha \Big(\int\limits_{\varepsilon|x|<|t|<\eta|x|} + \int\limits_{|t|>\eta|x|} \Big) = W_1^1(\varepsilon, x) + W_1^2(\varepsilon, x).$$

В силу (4.4)

$$|W_1^1(\varepsilon, x)| \leqslant c(|x|^{-\delta_1}(1+\varepsilon|x|)^\alpha \int\limits_{\varepsilon|x|<|t|<\eta|x|} |t|^{\delta_1-n-\alpha} \sin^m \frac{t_1}{2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1 |x|^{-\delta_1}(1+\varepsilon|x|)^{\delta_1} = c\varepsilon^{\delta_1}\left(\frac{1+\varepsilon|x|}{\varepsilon|x|}\right)^{\delta_1},$$

а с помощью (4.6) заключаем, что

$$|W_1^2(\varepsilon, x)| \leqslant c(1+\varepsilon|x|)^\alpha \int\limits_{|t|>\eta|x|} \frac{|t|^m(1+|t|)^{-m}}{|t|^{n+\alpha}} \left|\lambda\left(\mathrm{rot}_x \frac{t}{|x|}\right) - \lambda(0)\right| dt$$

$$\leqslant 2Mc(1+\varepsilon|x|)^\alpha \int\limits_{\eta|x|}^{\infty} \varrho^{m-\alpha-1}(1+\varrho)^{-m}\, d\varrho \leqslant c_1\left(\frac{1+\varepsilon|x|}{1+|x|}\right)^\alpha.$$

Собирая оценки для $W_1(\varepsilon, x)$ и $W_2(\varepsilon|x|)$, имеем:

$$\big|W_1(\varepsilon, x) W_2(\varepsilon|x|)\big| \leqslant c\left(\frac{\varepsilon|x|}{1+\varepsilon|x|}\right)^{l-\alpha}\left[\varepsilon^{\delta_1}\left(\frac{1+\varepsilon|x|}{\varepsilon|x|}\right)^{\delta_1} + \left(\frac{1+\varepsilon|x|}{1+|x|}\right)^\alpha\right]$$

$$\leqslant c\varepsilon^{\delta_1} + c\varepsilon^{l-\alpha}\,\frac{(1+\varepsilon|x|)^{2\alpha-l}|x|^{l-\alpha}}{(1+|x|)^\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} c\varepsilon^{\delta_1} + cE_\varepsilon(x).$$

Если $l \leqslant 2\alpha$, то $E_\varepsilon(x) = \varepsilon^{l-\alpha}\left(\frac{1+\varepsilon|x|}{1+|x|}\right)^{2\alpha-l}\cdot\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^{l-\alpha} \leqslant \varepsilon^{l-\alpha}$; если же $l \geqslant 2\alpha$, то $E_\varepsilon(x) = \varepsilon^\alpha\left(\frac{\varepsilon|x|}{1+\varepsilon|x|}\right)^{l-2\alpha}\cdot\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^\alpha \leqslant \varepsilon^\alpha$.

Следовательно

$$\big|W_1(\varepsilon, x) W_2(\varepsilon|x|)\big| \leqslant c\varepsilon^{\delta_1}$$

при выборе $0<\delta_1<\min(\alpha, l-\alpha)$ и из (4.28) заключаем, что $|W_\varepsilon(x)| \leqslant \leqslant c\varepsilon^{\delta_1}$.

Теорема 3. *Операторы A_ε сильно сходятся в $L_p(\boldsymbol{R}^n)$, $p>1$, к оператору A при $\varepsilon\to 0$; в симметричном случае $m=l$ эта сходимость равномерна.*

Доказательство. В соответствии с (4.25) положим

$$A_\varepsilon - A = A_\varepsilon^1 + \lambda(0) A_\varepsilon^2, \tag{4.31}$$

где $\widehat{A_\varepsilon^1\varphi} = W_\varepsilon(x)\hat\varphi(x)$, $\widehat{A_\varepsilon^2\varphi} = \sigma_0(\varepsilon|x|)\hat\varphi(x)$. Оператор A_ε^2 равномерно ограничен в $L_p(\boldsymbol{R}^n)$: $\|A_\varepsilon^2\|_{L_p\to L_p} \leqslant c$, $c = \|\sigma_0(\varepsilon|x|)\|_{\mathscr{R}} = \|\sigma_0(x)\|_{\mathscr{R}}$. Тогда из (4.31) в силу Леммы 4.2 следует и равномерная ограниченность $\|A_\varepsilon^1\|_{L_p\to L_p} \leqslant c$. Покажем, что всегда $A_\varepsilon^1 \to 0$ в равномерной операторной топологии. Выберем $r>1$ так, чтобы p было между 2 и r. В силу интерполяционной теоремы Рисса ([6], стр. 144) имеем:

$$\|A_\varepsilon^1\|_{L_p\to L_p} \leqslant \|A_\varepsilon^1\|_{L_r\to L_r}^{1-\theta}\cdot\|A_\varepsilon^1\|_{L_2\to L_2}^{\theta}, \qquad \theta = \frac{2(r-p)}{p(r-2)}.$$

Отсюда в силу равномерной ограниченности $\|A_\varepsilon^1\|_{L_r\to L_r}$ и в силу равенства Парсеваля получаем, что $\|A_\varepsilon^1\|_{L_p\to L_p} \leqslant c\big(\max_{x\in\dot{\boldsymbol{R}}^n}|W_\varepsilon(x)|\big)^\theta$, так что равномерная сходимость $A_\varepsilon^1\to 0$ следует из оценки (4.26).

Так как $\sigma_0(r)\equiv 0$ в симметричном случае $m=l$, то для этого случая $A_\varepsilon^2=0$ и теорема доказана. В остальных случаях $\sigma_0(r)\not\equiv 0$. Однако, $\sigma_0(0)=0$ и поэтому сильная сходимость к нулю оператора A_ε^2 при $\varepsilon\to 0$ является следствием Леммы 1.5. Теорема доказана.

Из Теоремы 3 и из (4.7) следует (см. (5.3)), что сходимость в L_p простейшего гиперсингулярного интеграла $\boldsymbol{D}_\varepsilon^\alpha f$ влечет за собой сходимость в L_p общего гиперсингулярного интеграла (4.2)–(4.3). (При этом не обязательно $f\in L_p$.)

§ 5. Пространства ${}_\lambda L_{p,r}^\alpha(\boldsymbol{R}^n)$. В обозначениях и предположениях (4.2)–(4.6) положим

$${}_\lambda L_{p,r}^\alpha(\boldsymbol{R}^n) = \{f\colon f(x)\in L_r(\boldsymbol{R}^n),\ \boldsymbol{D}_\lambda^\alpha f\in L_p(\boldsymbol{R}^n)\}, \tag{5.1}$$

$$1<p<\infty,\ 1<r<\infty,\ \alpha>0,$$

$$\|f\|_{{}_\lambda L_{p,r}^\alpha} = \|f\|_r + \|\boldsymbol{D}_\lambda^\alpha f\|_p.$$

1°. Вложение $L_{p,r}^\alpha\to{}_\lambda L_{p,r}^\alpha$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Имеет место вложение*

$$L_{p,r}^\alpha(\boldsymbol{R}^n)\to{}_\lambda L_{p,r}^\alpha(\boldsymbol{R}^n). \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть $f(x)\in L_{p,r}^\alpha(\boldsymbol{R}^n)$. Обозначив $\varphi=\boldsymbol{D}^\alpha f$, на основании связи (4.7) имеем: $\boldsymbol{D}_{\lambda,\varepsilon}^\alpha f - A\varphi = (A_\varepsilon - A)\varphi + A_\varepsilon(\boldsymbol{D}_\varepsilon^\alpha f - \varphi)$. Отсюда

$$\|\boldsymbol{D}_{\lambda,\varepsilon}^\alpha f - A\varphi\|_p \leqslant \|(A_\varepsilon - A)\varphi\|_p + \|A_\varepsilon\|\cdot\|\boldsymbol{D}_\varepsilon^\alpha f - \varphi\|_p \to 0 \tag{5.3}$$

в силу Теоремы 3 и равномерной ограниченности $\|A_\varepsilon\|$ (Лемма 4.2). Таким образом, $\boldsymbol{D}_\lambda^\alpha f$ существует как предел (4.2) и $\boldsymbol{D}_\lambda^\alpha f = A\boldsymbol{D}^\alpha f$, так что $\|\boldsymbol{D}_\lambda^\alpha f\|_p \leqslant \|A\|\cdot\|\boldsymbol{D}^\alpha f\|_p$.

2°. О совпадении пространств $L^\alpha_{p,r}$ и ${}_\lambda L^\alpha_{p,r}$. Имеет место

Теорема 5. *Если*

$$\sigma(x) \neq 0, \quad x \in \dot{\boldsymbol{R}}^n, \tag{5.4}$$

то в симметричном[1] *случае $m = l$ пространства $L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ и ${}_\lambda L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ совпадают (с точностью до эквивалентности норм).*

Доказательство. В силу Теоремы 4 достаточно показать вложение, обратное (5.2). Вследствие (5.4) оператор A обратим в $L_p(\boldsymbol{R}^n)$. Так как по Теореме 3 операторы A_ε равномерно сходятся к A в симметричном случае, а множество обратимых операторов открыто в равномерной топологии, то операторы A_ε обратимы при ε достаточно малом, причем A_ε^{-1} сходится равномерно к A^{-1}. Переписывая (4.7) в виде $\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f = A_\varepsilon^{-1}\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f$, заключаем отсюда, как и при доказательстве Теоремы 4, что сходимость $\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f$ в L_p влечет за собой сходимость $\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f$ в L_p, что и требовалось.

Замечание 4. Простое достаточное условие, обеспечивающее (5.4), заключается в том, чтобы $\lambda(0) \neq 0$ и $\sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}^n}\left|\dfrac{\lambda(x)}{\lambda(0)} - 1\right| \leqslant q < 1$. Другим достаточным условием (в случае центрированной разности в (4.3)) служит требование, чтобы 1) $\lambda(t)$ была неотрицательной (неположительной) и 2) $\lambda(0) \neq 0$, $\lambda(\infty) \neq 0$.

Представляет интерес вопрос о необходимости условия (5.4) для совпадения пространств $L^\alpha_{p,r}$ и ${}_\lambda L^\alpha_{p,r}$. В случае $r = p$, т.е. в случае пространства $L^\alpha_{p,p} = L^\alpha_p$ бесселевых потенциалов, мы покажем, что условие (5.4) заведомо не необходимо и что в действительности при $r = p$ достаточно лишь, чтобы $\sigma(\infty) \neq 0$. Заметим, что

$$\sigma(\infty) = \lambda(0). \tag{5.5}$$

3°. Случай бесселевых потенциалов. Справедлива

Теорема 6. *Пусть $\lambda(0) \neq 0$. Пространство бесселевых потенциалов $L^\alpha_p(\boldsymbol{R}^n)$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, совпадает (с точностью до эквивалентности норм) с пространством*

$${}_\lambda L^\alpha_p(\boldsymbol{R}^n) = \{f\colon f(x) \in L_p(\boldsymbol{R}^n),\ (\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda f)(x) \in L_p(\boldsymbol{R}^n)\}. \tag{5.6}$$

Доказательство теоремы будет опираться на следующие леммы.

Лемма 5.1. *Пусть $\lambda(0) \neq 0$. Найдется $\lambda > 0$ такое, что*

$$\widehat{\mathfrak{J}^\alpha_\alpha}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda\sigma(\infty) + |x|^\alpha\sigma(x)} \in \mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n). \tag{5.7}$$

---

[1] В условиях (2.3) вместо требования $m = l$ достаточно на основании Следствия 1 Теоремы 1 сказать, что в (5.1) используются центрированные разности (2′).

Доказательство. Прежде всего установим, что $\lambda > 0$ можно подобрать так, чтобы $\lambda\sigma(\infty) + |x|^\alpha\sigma(x) \neq 0$. Обозначим $z = |x|^\alpha\sigma(x)$. Так как $\sigma(\infty) \neq 0$ в силу (5.5), то $\sigma(x) \neq 0$ при достаточно большом $|x|$ и тогда $\arg z = \arg\sigma(x)$. Следовательно, $-\varepsilon + \arg\sigma(\infty) < \arg z < \varepsilon + \arg\sigma(\infty)$ для $|x| > N$, $N = N(\varepsilon)$. Учитывая, что $z|_{x=0} = 0$, получаем, что множество $M = \{z\colon z = |x|^\alpha\sigma(x),\ x \in \dot{\boldsymbol{R}}^n\}$ точек комплексной плоскости целиком лежит внутри некоторой области $\mathscr{D}$, имеющей коническую структуру на бесконечности („вдоль” $z_0 = \sigma(\infty)$) и являющейся кругом в конечной части проскости. Преобразование $w = z + \lambda\sigma(\infty)$ преобразует $\mathscr{D}$ в область $\mathscr{D}_\lambda$, сдвинутую вдоль того же вектора $\sigma(\infty)$. Поэтому при большом $\lambda > 0$ область $\mathscr{D}_\lambda$, а тем более и множество M_λ, состоящее из точек $w = \lambda\sigma(\infty) + |x|^\alpha\sigma(x)$, не содержат начала координат, т.е. $\lambda\sigma(\infty) + |x|^\alpha\sigma(x) \neq 0$, $x \in \dot{\boldsymbol{R}}^n$.

Далее, в соответствии с (4.22) имеем:

$$\frac{1}{\lambda\sigma(\infty) + |x|^\alpha\sigma(x)} = \frac{1}{\lambda + |x|^\alpha}\cdot\frac{1}{\lambda(0) + \left(1 - \dfrac{\lambda}{1+|x|^\alpha}\right)\hat{a}(x)}. \tag{5.8}$$

Здесь $(\lambda + |x|^\alpha)^{-1} \in \mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$ (см. Лемму 1.4). Поэтому и $\left(1 - \dfrac{\lambda}{1+|x|^\alpha}\right)\times \hat{a}(x) \in \mathscr{R}^0$ и для принадлежности $\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ второго множителя в (5.8) остается показать согласно теореме Ф. Винера, что $\lambda(0) + \left(1 - \dfrac{1}{1+|x|^\alpha}\right)\times \hat{a}(x) \neq 0$, $x \in \dot{\boldsymbol{R}}^n$. На бесконечности это очевидно, а в конечных точках выполнено ввиду того, что $\lambda\sigma(\infty) + |x|^\alpha\sigma(x) \neq 0$.

Лемма 5.2. *Пусть $a_i(x) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ и пусть $L^{a_i}_p = \{f\colon f = a_i * \varphi,\ \varphi \in L_p\}$, $i = 1, 2$. Если $\dfrac{\hat{a}_1(x)}{\hat{a}_2(x)}$ есть p-мультипликатор, то $L^{a_1}_p \to L^{a_2}_p$ ($\|f\|_{L^{a_i}_p} = \|\varphi\|_p$).*

Утверждение этой леммы в сущности известно и доказывается очевидным образом.

Определение. Через

$$\mathfrak{J}^\alpha_\lambda(L_p) = \{f\colon f = \mathfrak{J}^\alpha_\lambda * \varphi,\ \varphi \in L_p(\boldsymbol{R}^n)\} \tag{5.9}$$

обозначим класс функций, представимых в виде свертки функций $\varphi \in L_p$ с ядром $\mathfrak{J}^\alpha_\lambda(x)$, имеющим своим образом Фурье функцию (5.7);

$$\|f\|_{\mathfrak{J}^\alpha_\lambda(L_p)} = \|\varphi\|_p.$$

В случае $\lambda(0) \neq 0$ в силу Леммы 5.1 $\mathfrak{J}^\alpha_\lambda(x) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ и тогда $\mathfrak{J}^\alpha_\lambda(L_p) \subset L_p$. Более того, из Леммы 5.1 и 5.2 вытекает, что при $\lambda(0) \neq 0$

$$\mathfrak{J}^\alpha_\lambda(L_p) = L^\alpha_p \tag{5.10}$$

(с точностью до эквивалентности норм). Действительно,

$$L_p^\alpha = \{f\colon f = \mathfrak{J}^\alpha * \varphi,\ \varphi \in L_p\}, \qquad \widehat{\mathfrak{J}^\alpha}(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2}. \tag{5.11}$$

Применим к пространствам (5.9), (5.11) Лемму 5.2. Очевидно,

$$\frac{\widehat{\mathfrak{J}^\alpha}(x)}{\widehat{\mathfrak{J}^\alpha_\lambda}(x)} = \frac{\lambda\sigma(\infty)}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} + \frac{|x|^\alpha}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}\sigma(x) \in \mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$$

в силу Леммы 1.4. Так как $\widehat{\mathfrak{J}^\alpha}(x)[\widehat{\mathfrak{J}^\alpha_\lambda}(x)]^{-1} \neq 0$ (для конечных $x \neq \infty$ это следует из Леммы 5.1, для $x = \infty$ — из условия $\sigma(\infty) = \lambda(0) \neq 0$), то в силу теоремы Н. Винера и $\dfrac{\widehat{\mathfrak{J}^\alpha_\lambda}(x)}{\widehat{\mathfrak{J}^\alpha}(x)} \in \mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$. Поэтому из Леммы 5.2 и следует (5.10).

Утверждение ${}_\lambda L_p^\alpha(\boldsymbol{R}^n) = L_p^\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ Теоремы 6 теперь выведем из (5.10). В силу Теоремы 4 и равенства (5.10) достаточно показать, что ${}_\lambda L_p^\alpha \to \mathfrak{J}^\alpha_\lambda(L_p)$. Доказательство последнего проще всего осуществить переходом к обобщённым функциям над Φ. Именно, рассматривая $f \in {}_\lambda L_p^\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ как элемент пространства Φ', имеем: $\hat{f} \in \mathscr{F} L_p$, где $\mathscr{F} L_p \subset \mathscr{F}(\Phi')$ есть класс преобразований Фурье функций из L_p в смысле обобщённых функций в Φ':

$$\langle \hat{f}, \psi\rangle_{\Psi'} = \langle f, \omega\rangle_{\Phi'}, \qquad \omega = \hat{\psi} \in \Phi, \qquad \psi \in \Psi = \mathscr{F}(\Phi)$$

(относительно корректности этих действий см. [7]–[8]). Аналогично условие $\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda f \in L_p$ дает в обобщенных функциях с учетом (4.1) и (4.23): $|x|^\alpha \sigma(x)\hat{f}(x) \in \mathscr{F} L_p$ (в том же смысле; проверяется непосредственно). Таким образом, условие $f \in {}_\lambda L_p^\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ влечет $[\lambda\sigma(\infty) + |x|^\alpha\sigma(x)]\hat{f}(x) \in \mathscr{F} L_p$. Отсюда $f = \mathfrak{J}^\alpha_\lambda * \varphi$, $\varphi \in L_p$, в смысле свертки в Φ' и тогда $f = \mathfrak{J}^\alpha_\lambda * \varphi$ в обычном смысле, т.е. $f \in \mathfrak{J}^\alpha_\lambda(L_p)$.

4°. О необходимости условия $\lambda(0) \neq 0$. В рамках пространств $L_p^\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ бесселевых потенциалов условие $\lambda(0) \neq 0$ является по-видимому, и необходимым для „равносильности” производных $\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda f$ и $\boldsymbol{D}^\alpha f$ (при указанном в (4.4)–(4.6) классе для $\lambda(t)$). Увидеть доказательство этого в общем случае, однако, не удалось. Следующая теорема устанавливает необходимость условия $\lambda(0) \neq 0$ при некотором дополнительном предположении о поведении $\lambda(t)$ в начале координат.

Теорема 7. *Пусть* $\lambda(t)$, *кроме* (4.4)–(4.6), *удовлетворяет условию*

$$\lambda(t) = \lambda(0) + \omega|t|^{\delta_1} + O(|t|^{\delta_1+\varepsilon}) \quad \textit{при } |t| \to 0, \tag{5.12}$$

где $0 < \delta_1 < \alpha$, $\varepsilon < 0$ *и* $\omega \neq 0$. *Если* $\lambda(0) = 0$, *то* ${}_\lambda L_p^\alpha = L_p^{\alpha-\delta_1}$.

Случай $\delta_1 > \alpha$ не представляет интереса, так как при $\delta_1 > \alpha$, очевидно, ${}_\lambda L_p^\alpha = L_p$, если $\lambda(0) = 0$. Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 5.3. *Если* $\lambda(0) = 0$, *то* $|x|^\delta\sigma(x) \in \mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$ *для* $0 < \delta < \min(\delta_1, \alpha)$, *где* δ_1 — *показатель из* (4.4).

Доказательство. Введем функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{\Delta_{m,\alpha-\delta}(x, \xi)}{|\xi|^{n+\alpha}}\lambda(\xi)\,d\xi = \tag{5.13}$$

$$= \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|x|^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} k_{m,\alpha-\delta}(\tau)|\tau|^\delta \lambda\left(\frac{|x|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_x\tau\right)d\tau$$

(ср. с (4.20) и (4.12)!) и покажем, что $\psi(x) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ при условии $\lambda(0) = 0$ и что $|x|^\delta\sigma(x) = \hat{\psi}(x)$. Суммируемость $\psi(x)$ следует из оценок $|\psi(x)| \leqslant c|x|^{-n-\delta}$ при $|x| \geqslant \eta > 0$ и $|\psi(x)| \leqslant c|x|^{-n+\delta_1-\delta}$ при $|x| \leqslant \eta$. Первая из них устанавливается аналогично оценкам функции (4.12) в (4.13)–(4.16) и потому её получение здесь опускается, а при малых $|x| \leqslant \eta$, учитывая неравенство $|\lambda(t)| \leqslant c|t|^{\delta_1}$ при $|t| \leqslant \eta$, имеем

$$|\psi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{|x|^{n-\delta_1+\delta}}\int_{|\tau| > \frac{1}{\eta}|x|} |k_{m,\alpha-\delta}(\tau)|\frac{d\tau}{|\tau|^{\delta-\delta_1}} + \frac{c}{|x|^{n+\delta}}\int_0^{|x|/\eta}\frac{d\varrho}{\varrho^{1-\alpha+\delta}}\int_{\Sigma_{n-1}}\left|\lambda\left(\frac{|x|}{\varrho}\tau'\right)\right|dS \leqslant$$

$$\leqslant c_1|x|^{-n+\delta_1-\delta} + C_2M|x|^{\alpha-n} \leqslant c_3|x|^{-n+\delta_1-\delta}.$$

Далее

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i(x,t)}dt\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\Delta_{m,\alpha-\delta}(t, \xi)}{|\xi|^{n+\alpha}}\lambda(\xi)\,d\xi. \tag{5.14}$$

Здесь возможна перестановка порядка интегрирования, поскольку приведенные только что оценки устанавливают по существу абсолютную сходимость повторного интеграла в (5.14). Мы получаем после перестановки

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\lambda(\xi)}{|\xi|^{n+\alpha}}\widehat{\Delta_{m,\alpha-\delta}}(\cdot, \xi)(x)\,d\xi = |x|^\alpha\sigma(x);$$

в последнем равенстве мы воспользовались формулой (1.8).

Лемма 5.1′. *Пусть* $\lambda(t)$ *удовлетворяет условиям Теоремы* 7. *Существует постоянная* μ *такая, что*

$$\widehat{\mathfrak{J}_\lambda}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu + |x|^\alpha\sigma(x)} \in \mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n). \tag{5.15}$$

Доказательство. При $\lambda(0)\neq 0$ утверждение леммы содержится в Лемме 5.1. Считая поэтому, что $\lambda(0)=0$, представим $\lambda(t)$ в соответствии с (5.12) в виде $\lambda(t)=\omega|t|^{\delta_1}+\lambda_0(t)+\lambda_1(t)$, где $\lambda_0(t)=[\lambda(t)-\omega|t|^{\delta_1}]\chi(t)$, $\lambda_1(t)=[\lambda(t)-w|t|^{\delta_1}][1-\chi(t)]$. Тогда

$$|x|^\alpha\sigma(x)=d\omega|x|^{\alpha-\delta_1}+|x|^\alpha\sigma_{\lambda_0}(x)+|x|^\alpha\sigma_{\lambda_1}(x), \tag{5.16}$$

где $\sigma_{\lambda_0}(x)$, $\sigma_{\lambda_1}(x)$ — функции (4.23), построенные по $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$ соответственно, а $d=\dfrac{d_{n,m}(\alpha-\delta_1)}{d_{n,m}(\alpha)}$. Так как $\dfrac{\lambda_1(t)}{|t|^{n+\alpha}}\in L_1$ то из (4.23) замечаем, что $|x|^\alpha\sigma_{\lambda_1}(x)\overset{\mathrm{def}}{=}f_1(x)\in\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$. Рассмотрим среднее слагаемое в (5.16). Полагая $\lambda_0(t)=|t|^{\delta_1}\lambda^*(t)$, где $\lambda^*(0)=0$ и $|\lambda^*(t)|\leqslant c|t|^\varepsilon$ при $|t|\to 0$, представляем $\sigma_{\lambda_0}(x)$ в виде $\sigma_{\lambda_0}(x)=d|x|^{-\delta_1}\sigma^{\alpha-\delta_1}_{\lambda^*}(x)$, где $\sigma^{\alpha-\delta_1}_{\lambda^*}(x)$ — символ, получающийся из (4.23) при замене $\lambda(t)$ на $\lambda^*(t)$ и α на $\alpha-\delta_1$. Очевидно, $\lambda^*(t)$ удовлетворяет условиям (4.4)–(4.6), так что применима Лемма 5.3, в силу которой $|x|^\delta\alpha^{\alpha-\delta_1}_{\lambda^*}(x)\overset{\mathrm{def}}{=}f_2(x)\in\mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$ при $0<\delta<\min(\alpha-\delta_1,\varepsilon)$. Следовательно, $|x|^\alpha\sigma_{\lambda_0}(x)=d|x|^{\alpha-\delta_1-\delta}f_2(x)$ и (5.16) принимает вид $|x|^\alpha\sigma(x)=d\omega|x|^{\alpha-\delta_1}+d|x|^{\alpha-\delta_1-\delta}f_2(x)+f_1(x)$. Тогда

$$\widehat{\mathfrak{J}_\lambda}(x)=\frac{1}{\mu+\omega d|x|^{\alpha-\delta_1}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{d|x|^{\alpha-\delta_1-\delta}}{\mu+d\omega|x|^{\alpha-\delta_1}}f_2(x)+\dfrac{f_1(x)}{\mu+d\omega|x|^{\alpha-\delta_1}}}. \tag{5.17}$$

Здесь первый множитель принадлежит $\mathscr{R}^0(\boldsymbol{R}^n)$ (Лемма 1.4), знаменатель во втором принадлежит $\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ также с учетом Леммы 1.4. Остается согласно теореме Н. Винера добиться отличия его от нуля. На бесконечности он обращается в 1 (здесь существенно то, что среднее слагаемое в знаменателе исчезает на бесконечности — в сущности ради этого использовалась Лемма 5.3); неравенство его нулю в конечных точках достигается как в аналогичной Лемме 5.1 — выбором $\mu=\lambda\omega d$, где $\lambda>0$ и достаточно велико. Лемма 5.1′ доказана.

Переходим к доказательству Теоремы 7. Прежде всего с помощью Леммы 5.2 устанавливаем, что

$$\mathfrak{J}_\lambda(L_p)=L_p^{\alpha-\delta_1}, \tag{5.18}$$

где аналогично (5.9) $\mathfrak{J}_\lambda(L_p)=\{f\colon f=\mathfrak{J}_\lambda*\varphi,\ \varphi\in L_p(\boldsymbol{R}^n)\}$, $\mathfrak{J}_\lambda(x)$ имеет своим образом Фурье функцию (5.15). Для этого замечаем из (5.17), что $\widehat{\mathfrak{J}_\lambda}(x)[\widehat{\mathfrak{J}^{\alpha-\delta_1}}(x)]^{-1}=(1+|x|^2)^{\frac{\alpha-\delta_1}{2}}\mathfrak{J}_\lambda(x)\in\mathscr{R}$. Так как $\dfrac{\widehat{\mathfrak{J}_\lambda}(x)}{\widehat{\mathfrak{J}^{\alpha-\delta_1}}(x)}\neq 0$, $x\in\dot{\boldsymbol{R}}^n$ (для конечных $x\neq\infty$ это видно из (5.17), для $x=\infty$ следует из того, что в (5.17) $\omega\neq 0$), то в силу теоремы Н. Винера и $\dfrac{\widehat{\mathfrak{J}^{\alpha-\delta_1}}(x)}{\widehat{\mathfrak{J}_\lambda}(x)}\in\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$. Поэтому (5.18) вытекает из Леммы 5.2.

Остается доказать, что ${}_\lambda L_p^\alpha=\mathfrak{J}_\lambda(L_p)$. Вложение ${}_\lambda L_p^\alpha\to\mathfrak{J}_\lambda(L_p)$ проще всего установить переходом к обобщенным (над Φ) функциям точно также, как в Теореме 6 (по схеме: $f\in L_p$, $\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda f\in L_p$ влечет $[\mu+|x|^\alpha\sigma(x)]\hat{f}\in\mathscr{F}L_p$).

Обратное вложение

$$\mathfrak{J}_\lambda(L_p)\to{}_\lambda L_p^\alpha \tag{5.19}$$

формально является следствием того факта, что для $f\in\mathfrak{J}_\lambda(L_p)$ из $f=\mathfrak{J}_\lambda*\varphi$ следует, что $f\in L_p$ и (формально) $\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda f=\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda\mathfrak{J}_\lambda*\varphi\in L_p$, поскольку $\widehat{\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda\mathfrak{J}_\lambda}(x)=\dfrac{|x|^\alpha\sigma(x)}{\mu+|x|^\alpha\sigma(x)}=1-\mu\widehat{\mathfrak{J}_\lambda}(x)\in\mathscr{R}(\boldsymbol{R}^n)$ в силу Леммы 5.1. Ограничимся этим соображением, опуская строгое доказательство вложения (5.19); его можно провести, следуя схеме рассуждений в работах П. И. Лизоркина [7], [9], относящихся к доказательству равенства $\boldsymbol{L}^\alpha_p=\mathfrak{J}^\alpha(L_p)$ (заметим, что и без (5.19) из уже имеющегося вложения ${}_\lambda L_p^\alpha\to L_p^{\alpha-\delta_1}$ при $\lambda(0)=0$ следует необходимость условия $\lambda(0)\neq 0$ для равенства ${}_\lambda L_p^\alpha=L_p^\alpha$).

§ 6. Гиперсингулярные интегралы в случае $\lambda=\lambda(x,t)$. Установим здесь сходимость (как в p-среднем, так и почти всюду) гиперсингулярных интегралов (1) на функциях $f\in L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ в общем случае $\lambda=\lambda(x,t)$. Относительно $\lambda(x,t)$ предполагаем, что 1) $\lambda(x,t)$ измерима, суммируема по второй переменной на Σ_{n-1} и удовлетворяет равномерной оценке

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}}|\lambda(x,\varrho t')|\,dS_t\leqslant M<\infty, \tag{6.1}$$

где M не зависит от x и ϱ; 2) для почти всех $x\in\boldsymbol{R}^n$ существует $\lambda(x,0)=\lim\limits_{|t|\to 0}\lambda(x,t)$ и $\lambda(x,\infty)=\lim\limits_{|t|\to\infty}\lambda(x,t)$ и

$$|\lambda(x,t)-\lambda(x,0)|\leqslant c|t|^{\delta_1},\quad |t|<\eta,\ x\in\boldsymbol{R}^n, \tag{6.2}$$

$$|\lambda(x,t)-\lambda(x,\infty)|\leqslant c|t|^{-\delta_2},\quad |t|>N,\ x\in\boldsymbol{R}^n, \tag{6.3}$$

где $\delta_1>0$, $\delta_2>0$. Нетрудно видеть, что из условий (6.1)–(6.3) следует, что

$$\lambda(x,0),\lambda(x,\infty)\in L_\infty(\boldsymbol{R}^n). \tag{6.4}$$

Через $\boldsymbol{D}^\varepsilon_{\lambda,\varepsilon}f$ будем обозначать соответствующий усеченный гиперсингулярный интеграл, аналогичный (4.3), считая, что $m>\alpha$ (см. Замечание 1).

1°. Интегральное представление для $\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon}f$. Здесь получим представление $\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon}f$ непосредственно через $\boldsymbol{D}^\alpha f$, а не через $\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f$, как в (4.7). Нам достаточно такого представления, поскольку обратная задача —

вопрос о сходимости $\boldsymbol{D}^\alpha_\varepsilon f$ при известной сходимости $\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f$ — здесь не рассматривается.

Лемма 6.1. *Пусть* $f(x)\in L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$ *при условиях* (2.3). *Справедливо представление*

$$\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f = A_\varepsilon \boldsymbol{D}^\alpha f, \tag{6.5}$$

где $A_\varepsilon\varphi = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} a(x,\xi)\varphi(x-\xi)\,d\xi$ — *интегральный оператор с ядром*

$$a_\varepsilon(x,\xi) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|\xi|^n}\int\limits_{|\tau|<\frac{|\xi|}{\varepsilon}} k_{m,\alpha}(\tau)\lambda\left(x,\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi\tau\right)d\tau = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{\Delta_{m,\alpha}(\xi,t)\lambda(x,t)}{|t|^{n+\alpha}}\,dt. \tag{6.6}$$

Доказательство. Воспользуемся полученным в § 2 представлением (2.11) конечных разностей $(\Delta^m_h f)(x)$ функций $f(x)\in L^\alpha_{p,r}(\boldsymbol{R}^n)$. Обозначив $\varphi(x) = (\boldsymbol{D}^\alpha f)(x)$, после перестановки порядка интегрирования имеем из (2.11) равенство

$$\frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{(\Delta^m_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\lambda(x,t)\,dt = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x-\xi)\,d\xi\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{\Delta_{m,\alpha}(\xi,t)\lambda(x,t)}{|t|^{n+\alpha}}\,dt,$$

т.е. равенство (6.5). Возможность нерестановки порядка интегрирования следует из абсолютной сходимости повторного интеграла, получаемой с учетом того, что $\varphi\in L_p$ и оценки

$$\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{|\Delta_{m,\alpha}(\xi,t)\lambda(x,t)|}{|t|^{n+\alpha}}\,dt \leqslant \begin{cases} c|\xi|^{\alpha-n}, & |\xi|\leqslant 1,\\ c|\xi|^{-n}, & |\xi|\geqslant 1,\end{cases} \tag{6.7}$$

где $c = c(\varepsilon)$ (оценка выписана для случая $\alpha-n\neq 0,2,4,\ldots$; в противно случае в (6.7) следует заменить $|\xi|^{\alpha-n}$ на $|\xi|^{\alpha-n}\ln\frac{1}{|\xi|}$ при $|\xi|\leqslant 1$. Доказательство оценки (6.7), опирающееся на предположения (6.1)–(6.2), мы опускаем, поскольку оно аналогично выкладкам в (4.13)–(4.16), где рассматривалось аналогичное ядро (4.12) в случае $\lambda=\lambda(t)$. Укажем, что аналогично (4.15)–(4.16) получается также следующая равномерная оценка, используемая ниже:

$$\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}\left|k_{m,\alpha}(\tau)\lambda\left(x,\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi\tau\right)\right|d\tau\leqslant c, \tag{6.8}$$

где c не зависит от x и ξ.

Заметим, что используя, кроме (6.1), (6.2), еще и (6.3), можно получить оценку

$$\left|\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{\Delta_{m,\alpha}(\xi,t)\lambda(x,t)}{|t|^{n+\alpha}}\,dt\right|\leqslant\begin{cases} c|\xi|^{\alpha-n}, & |\xi|\leqslant 1,\\ c|\xi|^{-n-\delta_2}, & |\xi|\geqslant 1,\end{cases} \tag{6.9}$$

где $0<\delta_2<m-\alpha$ (с той же оговоркой, что и в (6.7) при $\alpha-n=0,2,4,\ldots$). Доказательство оценки (6.9) получается вычитанием и добавлением $\lambda(x,\infty)$ и копирует выкладки в (4.13)–(4.16). Поэтому оно также опускается. Из оценки (6.9) ядра $a_\varepsilon(x,\xi)$ следует, что оператор A_ε ограничен в $L_p(\boldsymbol{R}^n)$. (Можно показать, что он и равномерно по ε ограничен в L_p.)

2°. Предельный оператор $A = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon$. Прибавляя и вычитая $\lambda(x,0)$ в (6.6), приведем (6.5) к виду

$$(\boldsymbol{D}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} f)(x) = \lambda(x,0)\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}K_{m,\alpha}(|\xi|)\varphi(x-\varepsilon\xi)\,d\xi + \int\limits_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x-\xi)\frac{d\xi}{|\xi|^n}\int\limits_{|\tau|<\frac{1}{\varepsilon}|\xi|}k_{m,\alpha}(\tau)\left[\lambda\left(x,\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi\tau\right)-\lambda(x,0)\right]d\tau, \tag{6.10}$$

где $K_{m,\alpha}(|\xi|)$ — ядро (1.7). В пределе при $\varepsilon\to 0$ ожидаем получить (с учетом (2.8)) равенство

$$(\boldsymbol{D}^\alpha_\lambda f)(x) = \lambda(x,0)\varphi(x)+\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}a(x,\xi)\varphi(x-\xi)\,d\xi\overset{\text{def}}{=\!=}A\varphi,$$

где (с учетом (1.12))

$$a(x,\xi) = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|\xi|^n}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}k_{m,\alpha}(\tau)\lambda\left(x,\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi\tau\right)d\tau = \frac{1}{d_{n,m}(\alpha)}\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\Delta_{m,\alpha}(\xi,t)\lambda(x,t)}{|t|^{n+\alpha}}\,dt. \tag{6.11}$$

Оператор A ограничен в пространствах $L_p(\boldsymbol{R}^n)$, $p\geqslant 1$. Это вытекает из оценки (6.4) и оценки

$$|a(x,\xi)|\leqslant\begin{cases} c|\xi|^{-n+\delta_1}, & |\xi|\leqslant 1,\\ c|\xi|^{-n-\delta_2}, & |\xi|\geqslant 1,\end{cases} \tag{6.12}$$

при выборе $0<\delta_1<\alpha$, $0<\delta_2<m-\alpha$ в (6.2)–(6.3). Докажем это оценку. Пусть вначале $|\xi|\to 0$. Пользуясь свойством (1.12), имеем:

$$a(x,\xi)=\frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|\xi|^n}\int_{R^n}k_{m,\alpha}(\tau)\left[\lambda\left(x,\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi\tau\right)-\lambda(x,0)\right]d\tau=$$
$$=\frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|\xi|^n}\left(\int_{|\tau|>\frac{1}{\eta}|\xi|}+\int_{|\tau|<\frac{1}{\eta}|\xi|}\right).$$

Применяя оценку (6.2) в первом слагаемом и оценку (6.1) во втором, получим:

$$|a(x,\xi)|\leqslant\frac{1}{|d_{n,m}(\alpha)|}\left[\frac{c}{|\xi|^{n-\delta_1}}\int_{R^n}|k_{m,\alpha}(\tau)|\frac{d\tau}{|\tau|^{\delta_1}}+\frac{2M}{|\xi|^n}\int_0^{\frac{1}{\eta}|\xi|}\frac{d\varrho}{\varrho^{1-\alpha}}\right]\leqslant\frac{c_1}{|\xi|^{n-\delta_1}}$$

при $0<\delta_1<\alpha$ (с очевидными изменениями при $\alpha-n=0,2,4,\ldots$). Совершенно аналогично — вычитанием $\lambda(x,\infty)$ на основании (1.12) и разбиванием интегрирования на части $|\tau|<\frac{1}{N}|\xi|$, $|\tau|>\frac{1}{N}|\xi|$ — получим с помощью (6.1) и (6.3) нижнюю оценку в (6.12) для больших $|\xi|$. Оценка $a(x,\xi)$ при $0<\beta\leqslant|\xi|\leqslant B<\infty$ следует из (6.8).

В следующих п.п. 3°–4° устанавливается, что $A_\varepsilon\varphi\underset{\varepsilon\to 0}{\to}A\varphi$ как по норме пространства $L_p(\boldsymbol{R}^n)$, так и почти всюду.

3°. Обоснование L_p-сходимости. В (6.10) первое слагаемое содержит усреднение функции $\varphi(x)$ с суммируемым ядром $K_{m,\alpha}(|\xi|)$ и потому сходимость его к $\lambda(x,0)\varphi(x)$ в $L_p(\boldsymbol{R}^n)$ очевидна. В доказательстве нуждается предельный переход во втором слагаемом. Так как предельная функция, как показано в п. 2°, принадлежит L_p, то достаточно убедиться в сходимости в L_p к нулю соответствующей разности:

$$\int_{R^n}a_\varepsilon^0(x,\xi)\varphi(x-\xi)\,d\xi\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0, \tag{6.13}$$

где обозначено

$$a_\varepsilon^0(x,\xi)=\frac{1}{d_{n,m}(\alpha)|\xi|^n}\int_{|\tau|>\frac{|\xi|}{\varepsilon}}k_{m,\alpha}(\tau)\left[\lambda\left(x,\frac{|\xi|}{|\tau|^2}\operatorname{rot}_\xi\tau\right)-\lambda(x,0)\right]d\tau. \tag{6.14}$$

Считая, что $0<\varepsilon<\eta$, с помощью (6.2) заключаем, что

$$|a_\varepsilon^0(x,\xi)|\leqslant\frac{c}{|\xi|^{n-\delta_1}}\int_{|\tau|>\frac{|\xi|}{\varepsilon}}|k_{m,\alpha}(\tau)|\frac{d\tau}{|\tau|^{\delta_1}}\qquad(0<\delta_1<\alpha) \tag{6.15}$$

для всех $x\in\boldsymbol{R}^n$, $\xi\in\boldsymbol{R}^n$. Для $|\xi|>1$ оценку уточним. Уменьшив при необходимости ε до $\varepsilon<1/(m+1)$, в силу (1.10) и (6.1) имеем из (6.4)

$$|a_\varepsilon^0(x,\xi)|\leqslant\frac{c}{|\xi|^n}\left(\frac{\varepsilon}{|\xi|}\right)^{m-\alpha}=\frac{c\,\varepsilon^{m-\alpha}}{|\xi|^{n+m-\alpha}},\qquad|\xi|\geqslant 1, \tag{6.16}$$

причем c в (6.15), (6.16) не зависит от x, ξ и ε. В силу оценок (6.15), (6.16) получаем:

$$\left\|\int_{R^n}\varphi(x-\xi)a_\varepsilon^0(x,\xi)\,d\xi\right\|_p\leqslant\int_{R^n}d\xi\left\{\int_{R^n}|\varphi(x)a_\varepsilon^0(x+\xi,\xi)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\leqslant c\|\varphi\|_p\left[\int_{|\xi|<1}\frac{d\xi}{|\xi|^{n-\delta_1}}\int_{|\tau|>\frac{|\xi|}{\varepsilon}}|k_{m,\alpha}(\tau)|\frac{d\tau}{|\tau|^{\delta_1}}+\varepsilon^{m-\alpha}\int_{|\xi|>1}\frac{d\xi}{|\xi|^{n+m-\alpha}}\right].$$

Здесь второе слагаемое стремится к нулю очевидным образом, а первое — в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Предельный переход (6.13) доказан.

4°. Обоснование $p\cdot p$-сходимости. В обосновании по-прежнему нуждается предельный переход (6.13) почти всюду, поскольку сходимость первого слагаемого в (6.10) к $\lambda(x,0)\varphi(x)$ почти всюду установлена в § 3 (см. (3.1) и (2.14)). Используя оценки (6.15)–(6.16), имеем:

$$\left|\int_{R^n}a_\varepsilon^0(x,\xi)\varphi(x-\xi)\,d\xi\right|\leqslant c_1\int_{|\xi|<1}\frac{|\varphi(x-\xi)|}{|\xi|^{n-\delta_1}}\,d\xi\int_{|t|>\frac{|\xi|}{\varepsilon}}|k_{m,\alpha}(\tau)|\frac{d\tau}{|\tau|^{\delta_1}}+c_2\varepsilon^{m-\alpha}\|\varphi\|_p.$$

Сходимость первого слагаемого к нулю почти для всех $x\in\boldsymbol{R}^n$ следует из теоремы Лебега, поскольку внутренний интеграл равномерно по $|\xi|/\varepsilon$ ограничен при $0<\delta_1<\alpha$, а функция $\varphi(x-\xi)|\xi|^{\delta_1-n}$, как известно, суммируема в шаре $|\xi|<1$ почти для всех $x\in\boldsymbol{R}^n$.

Литература

[1] С. Бохнер, *Лекции об интегралах Фурье*, ГИФМЛ, М. 1962.
[2] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, ГИФМЛ, М. 1960.
[3] — Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, ГИФМЛ, М. 1959.
[4] —, — *Пространства основных и обобщенных функций*, ГИФМЛ, М. 1958.
[5] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИФМЛ, М. 1963.
[6] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2. „Мир", М. 1965.

[7] П. И. Лизоркин, *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства* $L_p^r(E_k)$. *Теоремы вложения*, Матем. сб. 60 (1963), стр. 325–353.

[8] — *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций*, Тр. Матем. инст. АН СССР 105 (1969), стр. 89–162.

[9] — *Описание пространств* $L_p^r(E^n)$ *в терминах разностных сингулярных интегралов*, Матем. сб. 81 (1970), стр. 79–91.

[10] — *Операторы, связанные с дробным дифференцированием и классы дифференцируемых функций*, Тр. Матем. инст. АН СССР 117 (1972), стр. 212–243.

[11] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, „Наука", М. 1969.

[12] С. Г. Самко, *Об операторах типа потенциала*, ДАН СССР 196 (1971), стр. 299–301.

[13] — *Об интегральных уравнениях первого рода с ядром типа птенциала*, Изв. вузов. Математика 4 (1971), стр. 78–86.

[14] — *О пространстве* $I^a(L_p)$ *дробных интегралов и об операторах типа потенцала* Изв. АН Арм. ССР 8 (1973), стр. 359–383.

[15] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* „Мир", М. 1973.

[16] N. Aronszain, K. Smith, *Theory of Bessel potentials I*, Ann. de l'Institute Fourier 11 (1961), стр. 385–475.

[17] A. P. Calderón, *Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. Partial differential equations*, Providence R. I., Amer. Math. Soc. 1961, стр. 33–49.

[18] M. Fisher, *Some generalizations of the hypersingular integral operators*, Studia Math. 47 (1973), стр. 95–121.

[19] T. M. Flett, *Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces*, Proc. London Math. Soc. 22 (1971), стр. 385–471.

[20] P. Heywood, *On the inversion of fractional integrals*, J. London Math. Soc. 3 (1971), стр. 531–538.

[21] E. M. Stein, *The characteristic of functions arizing as potentials, I*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), стр. 102–104.

[22] W. Trebels, *Generalized Lipschitz conditions and Riesz derivatives on the space of Bessel potentials* L_a^p, $0 < a \leqslant 2$, *I. Conditions for elements of* L^p *and their Riesz transforms*, $0 < a \leqslant 2$, Appl. Anal. 1 (1971), стр. 75–99.

[23] — *Imbedding theorems for spaces of hypersingular integrals and Bessel potentials*, J. Approx. Theory 6 (1972), стр. 202–214.

[24] R. L. Wheeden, *On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968), стр. 421–436.

[25] — *On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differtiable functions, II*, ibid. 139 (1969), стр. 37–53.

[26] — *On hypersingular integrals and certain spaces of locally differtiable functions*, ibid. 146 (1969), стр. 211–230.

[27] — *A note on a generalized hypersingular integral*, Studia Math. 44 (1972), стр. 17–26.

[28] K. Yoshinaga, *On Liouville's differentiation*, Bull. Kyushi Inst. Technol. 11 (1964), стр. 1–17.

Received May 19, 1975 (1018)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXI. (1977)

On the random ergodic theorem

by

TAKESHI YOSHIMOTO (Kawagoe, Japan)

Abstract. A limiting behavior of random operator averages which are subject to the accidential phenomena varying in space and time is discussed in connection with the problem of dependence on the random parameters.

In consequence, a random ergodic theorem is obtained as an extension of the Cairoli's theorem to a case of many random parameters, including the Gładysz result with the exception of weighted functions.

1. Introduction. We consider a σ-finite measure space $(Y, \mathscr{F}, \mu)$ and the product spaces:

$$X^* = X_1 \times X_2 \times \ldots, \quad \mathscr{B}^* = \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2 \times \ldots, \quad m^* = m_1 \times m_2 \times \ldots,$$
$$X_r^* = X_1 \times \ldots \times X_r, \quad \mathscr{B}_r^* = \mathscr{B}_1 \times \ldots \times \mathscr{B}_r, \quad m_r^* = m_1 \times \ldots \times m_r$$

for an arbitrarily fixed integer $r \geqslant 1$, where $(X, \mathscr{B}, m)$ is a probability space and $X_i = X$, $\mathscr{B}_i = \mathscr{B}$, $m_i = m$, $i = 1, 2, \ldots$

Suppose now that to each $x \in X_r^*$ there corresponds a positive contraction operator U_x on the usual Banach space $L_1(\mu)$, and let there be given a family $\{U_x\colon x \in X_r^*\}$ of such positive contraction operators on $L_1(\mu)$.

The family $\{U_x\colon x \in X_r^*\}$ is said to be *strongly* $\mathscr{B}_r^*$*-measurable* if U_x is strongly $\mathscr{B}_r^*$-measurable as an $L_1(\mu)$-operator-valued function defined on X_r^*, that is to say, for any $g \in L_1(\mu)$ there are countably $L_1(\mu)$-valued functions $h_n(x, \cdot)$ defined on X_r^* such that

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n(x, \cdot) - (U_x g)(\cdot)\|_{L_1(\mu)} = 0 \quad m_r^*\text{-a.e.}$$

From now on, if we wish to regard $f(y, x^*)$ as a function of y defined on Y for an x^* arbitrarily fixed in X^*, we shall write $f_{(x^*)}(y)$ for $f(y, x^*)$.

In this note, on the hypothesis that the family $\{U_x\colon x \in X_r^*\}$ is strongly $\mathscr{B}_r^*$-measurable and there is a $g > 0$ $(g \in L_1(\mu))$ invariant under $\{U_x\colon x \in X_r^*\}$ for m_r^*-almost all x, we shall demonstrate that for any $f \in L_1(\mu \times m^*)$ the limit function

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U_{(x_1,\ldots,x_r)} \ldots U_{(x_k,\ldots,x_{k+r-1})} f_{(x_{k+1},x_{k+2},\ldots)}(y) = \tilde{f}_{(x_1,x_2,\ldots)}(y)$$
$$(\tilde{f} \in L_1(\mu \times m^*))$$

depends essentially only on the variables $y, x_1, \ldots, x_{r-1}$.