STUDIA MATHEMATICA, T. LXVI. (1979)

Intégration dans les semi-groupes

par

J. CLAUDE MASSÉ (Québec)

Sommaire. Nous présentons une théorie générale de l'intégration dans le contexte des semi-groupes topologiques abéliens. On s'inspire de Drewnowski dans l'utilisation systématique de familles de sous-mesures et des anneaux topologiques associés à celles-ci. Le point de vue adopté pour définir l'intégrale et l'ensemble des fonctions intégrables s'apparente à celui de Bartle, Dunford et Schwartz. Ces notions sont définies en termes de suites généralisées de fonctions étagées, ce qui permet de faire de l'ensemble des fonctions intégrables un espace uniforme de maniement commode. On montre que les théories classiques d'intégration par rapport à une mesure scalaire, de même que les théories de Bartle–Dunford–Schwartz et Lewis pour l'intégration des fonctions scalaires par rapport à une mesure vectorielle, sont englobées naturellement dans notre cadre général. Il en résulte une unification de le théorie de caractère particulièrement simple.

1. Hypothèses générales. On supposera partout que S est un ensemble non vide et $\mathscr{S}$ une sous-algèbre de $\mathscr{P}(S)$, l'ensemble des parties de S.

On dira qu'une fonction d'ensembles $\gamma\colon \mathscr{S} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+ = [0, \infty]$ est une *sous-mesure* (Drewnowski [7]) si les conditions suivantes sont satisfaites:

(1) $\gamma(\emptyset) = 0$;

(2) $E, F \in \mathscr{S}$, $E \subseteq F$ entrainent $\gamma(E) \leqslant \gamma(F)$;

(3) $E, F \in \mathscr{S}$, entrainent $\gamma(E \cup F) \leqslant \gamma(E) + \gamma(F)$.

De manière générale, toute sous-mesure $\gamma\colon \mathscr{S} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ peut être prolongée à une sous-mesure $\gamma^*\colon \mathscr{P}(S) \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ en posant pour $A \subseteq S$:

$$\gamma^*(A) = \inf\{\gamma(E)\colon A \subseteq E \in \mathscr{S}\}.$$

En prenant comme addition la différence symétrique Δ et comme multiplication l'intersection $\cap$, on définit sur $\mathscr{P}(S)$ une structure d'anneau. Etant donnée $\Gamma = \{\gamma_i\colon \mathscr{S} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+\}_{i\in I}$ une famille non vide de sous-mesures sur $\mathscr{S}$, considérons la famille B_Γ des ensembles $V_{K,\varepsilon} = \{A \subseteq S\colon \gamma_i^*(A) < \varepsilon,\ i \in K\}$, où K fini $\subseteq I$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors une topologie unique τ_Γ sur $\mathscr{P}(S)$ telle que $(\mathscr{P}(S), \Delta, \cap, \tau_\Gamma)$ est un anneau topologique et B_Γ est un système fondamental de voisinages de $\emptyset$ pour cette topologie ([5], p. 13 et p. 75–76). Dans la suite, on posera $\mathscr{P}(S)(\Gamma) = (\mathscr{P}(S), \Delta, \cap, \tau_\Gamma)$, et $\mathscr{S}(\Gamma)$ désignera le sous-anneau topologique $\mathscr{S}$ muni de la topologie induite.

Soit $X = (X, \mathscr{U})$ un espace uniforme. À K fini $\subseteq I$, $\varepsilon > 0$ et $U \in \mathscr{U}$, associons l'ensemble $W_K(U, \varepsilon) = \{(f, g) \in X^S \times X^S\colon \gamma_i^* \{s \in S\colon (f(s), g(s)) \notin U\} < \varepsilon,\ i \in K\}$. La famille des $W_K(U, \varepsilon)$ forme alors un système fondamental d'entourages pour une structure uniforme $\mathscr{U}^\Gamma$ sur X^S. Posons $X^S(\Gamma) = (X^S, \mathscr{U}_\Gamma)$. Si $\{f_\alpha\}$ est une suite généralisée dans X^S, $f \in X^S$ et si f_α tend vers f dans $X^S(\Gamma)$, on dira que $\{f_\alpha\}$ *tend vers f en Γ-sous-mesures*, ce que l'on écrira $f_\alpha \xrightarrow{\Gamma} f$. On vérifie sans peine que l'injection $\chi\colon \mathscr{P}(S) \to \boldsymbol{R}^S$, $\chi(E) =$ l'indicatrice de E, est un isomorphisme de l'espace uniforme $\mathscr{P}(S)(\Gamma)$ sur le sous-espace uniforme $\chi(\mathscr{P}(S))$ de $\boldsymbol{R}^S(\Gamma)$, pour $\boldsymbol{R}$ muni de sa structure uniforme habituelle. Pour cette raison, on notera $E_\alpha \xrightarrow{\Gamma} E$ la convergence dans $\mathscr{P}(S)(\Gamma)$.

On dira qu'un semi-groupe $(T, +)$ est *topologique* (s.g.t.) si T est muni d'une topologie τ faisant de $+$ une opération continue. Suivant Sion [26], on dira que $(T, +, \tau)$ est *uniforme* (s.g.t.u.) s'il existe une structure uniforme T induisant τ et si $+$ est alors uniformément continue. *Tous les semi-groupes topologiques considérés dans la suite seront supposés abéliens, séparés, réguliers et contenant un élément neutre* 0 *pour* $+$.

Les fonctions intégrables appartiendront à X^S, où X est un s.g.t.u. On intégrera par rapport à une fonction d'ensembles $\mu\colon \mathscr{S} \to Y$, Y étant un s.g.t., μ additive et telle que $\mu(\emptyset) = 0$. L'intégrale prendra ses valeurs dans un s.g.t.u. Z et, pour ce faire, on suppose l'existence d'une application "produit" $(x, y) \to xy$ de $X \times Y$ dans Z satisfaisant les conditions suivantes:

(1) $x \cdot 0 = 0 \cdot y = 0$ $(x \in X, y \in Y)$;

(2) $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ $(x_1, x_2 \in X,\ y_1, y_2 \in Y)$.

On supposera qu'à μ est associée une famille non vide de sous-mesures $\Gamma_\mu = \{\gamma_i\colon \mathscr{S} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+\}_{i \in I}$, à laquelle famille est associé un sous-anneau héréditaire de $\mathscr{S}$ d'ensembles dits *Γ_μ-intégrables*.

On fait enfin l'hypothèse que μ et l'application produit satisfont les axiomes de continuité suivants:

(C_1) *Pour tout $F \in \mathscr{S}$ Γ_μ-intégrable, pour tout W entourage dans Z, il existe U entourage dans X ayant la propriété suivante: pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, si $\{(x_i, y_i)\}_1^n$ est dans U et si $\{E_i\}_1^n$ est une suite d'ensembles disjoints deux à deux dans $\mathscr{S}$, alors*

$$\Big(\sum_1^n x_i \mu(E_i \cap F),\ \sum_1^n y_i \mu(E_i \cap F)\Big) \in W.$$

(C_2) *Pour tout $x \in X$ (x fini si $X \subseteq \overline{\boldsymbol{R}}$)* $\displaystyle\lim_{E \xrightarrow{\Gamma_\mu} \emptyset, E \in \mathscr{S}} x\mu(E) = 0$.

2. Intégrabilité. On dit qu'une fonction $f \in X^S$ est *étagée Γ_μ-intégrable* si

(1) elle prend un nombre fini de valeurs distinctes $x_1, \ldots, x_n$, respectivement sur des ensembles $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{S}$;

(2) pour $i = 1, \ldots, n$, $x_i \neq 0$ entraîne que E_i est Γ_μ-intégrable (si $X \subset \overline{\boldsymbol{R}}$ et x_i est infini, on exige en plus que $\mu(E_i) = 0$).

Pour $E \in \mathscr{S}$, la *Γ_μ-intégrale de f sur E* est alors par définition,

$$\int_E f\,d\mu = \sum_1^n x_i \mu(E_i \cap E).$$

On note $\mathscr{E}(\Gamma_\mu, X)$ l'ensemble des fonctions étagées Γ_μ-intégrables.

2.1. Proposition. (a) *Relativement à l'opération* $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$, *$\mathscr{E}(\Gamma_\mu, X)$ est un sous-semi-groupe de X^S.*

(b) *Pour $E \in \mathscr{S}$, l'application $f \to \int_E f\,d\mu$ de $\mathscr{E}(\Gamma_\mu, X)$ dans Z est additive.*

(c) *Pour $f \in \mathscr{E}(\Gamma_\mu, X)$, $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ $(E \in \mathscr{S})$ est additive.*

(d) *Pour $f \in \mathscr{E}(\Gamma_\mu, X)$,* $\displaystyle\lim_{E \xrightarrow{\Gamma_\mu} \emptyset, E \in \mathscr{S}} \int_E f\,d\mu = 0$.

2.2. Remarque. Dans 2.1(c), on aura la σ-additivité de ν en supposant que μ est σ-additive.

2.3. Lemme. *Pour tout entourage V de Z, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, il existe un entourage U de Z tel que $U + U + \ldots + U$ (n fois) $\subseteq V$.*

Démonstration. On montre le cas $n = 2$, le résultat général se déduisant par induction. Puisque l'application somme dans Z est uniformément continue, pour tout entourage V, il existe, en effet, un entourage W tel que (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in W$ impliquent $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in V$, d'où la conclusion.

Le prolongement de l'intégrale sera fondé sur le prochain résultat.

2.4. Proposition. *Soit $\{f_\alpha\}$ une suite généralisée dans $\mathscr{E}(\Gamma_\mu, X)$ qui est de Cauchy dans $X^S(\Gamma_\mu)$. Alors, pour que $\{\int_E f_\alpha\,d\mu\}$ soit de Cauchy uniformément en $E \in \mathscr{S}$, il faut et il suffit que:*

(a) *Pour tout voisinage V de 0 dans Z, il existe un indice α_0 et un voisinage $\mathscr{N}$ de $\emptyset$ dans $\mathscr{S}(\Gamma_\mu)$ tels que $\int_E f_\alpha\,d\mu \in V$ lorsque $\alpha \geqslant \alpha_0$ et $E \in \mathscr{N}$.*

(b) *Pour tout voisinage V de 0 dans Z, il existe un indice α_0 et F Γ_μ-intégrable dans $\mathscr{S}$ tels que $\int_E f_\alpha\,d\mu \in V$ lorsque $\alpha \geqslant \alpha_0$ et $E \in \mathscr{S}$, $E \subseteq S \setminus F$.*

Démonstration. *Nécessité.* Pour tout voisinage V de 0 dans Z, il existe un entourage symétrique de la structure uniforme de Z tel que $W^2(0) \subseteq V$. Soit α_0 tel que $(\int_E f_\alpha\,d\mu, \int_E f_{\alpha_0}\,d\mu) \in W$ pour tout $E \in \mathscr{S}$ lorsque $\alpha \geqslant \alpha_0$. D'après 2.1 (d), il existe un voisinage $\mathscr{N}$ de $\emptyset$ dans $\mathscr{S}(\Gamma_\mu)$ tel que $\int_E f_{\alpha_0}\,d\mu$

$\in W(0)$ lorsque $E \in \mathcal{N}$. On a alors $\int_E f_\alpha d\mu \in V$ dès que $\alpha \geqslant \alpha_0$ et $E \in \mathcal{N}$, ce qui montre (a). La condition (b) est obtenue en prenant $F = \{s \in S: f_{\alpha_0}(s) \neq 0\}$. On a, en effet, $F \in \mathcal{S}$ Γ_μ-intégrable et $\int_E f_{\alpha_0} d\mu = 0$ quel que soit $E \in \mathcal{S}$, $E \subseteq S \setminus F$, d'où la conclusion est immédiate.

Suffisance. Soit W un entourage symétrique pour Z, et soient α_0, $\mathcal{N}$ et F choisis en fonction du voisinage $W(0)$ selon les conditions (a) et (b), α_0 réalisant celles-ci simultanément. Relativement à F et W, soit maintenant un entourage U pour X choisi en accord avec l'axiome (C_1). Posons

$$F_{\alpha\alpha'} = \{s \in S: (f_\alpha(s), f_{\alpha'}(s)) \notin U\}.$$

On a alors $F_{\alpha\alpha'} \in \mathcal{S}$ quels que soient α et α'; de plus, comme $\{f_\alpha\}$ est de Cauchy dans $X^S(\Gamma_\mu)$, il existe $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$ tel que $F_{\alpha\alpha'} \in \mathcal{N}$ pour $\alpha, \alpha' \geqslant \alpha_1$. Pour tout $E \in \mathcal{S}$, on peut donc écrire dans le semi-groupe $Z \times Z$:

$$\Big(\int_E f_\alpha d\mu, \int_E f_{\alpha'} d\mu\Big) = \Big(\int_{E\cap F_{\alpha\alpha'}} f_\alpha d\mu, \int_{E\cap F_{\alpha\alpha'}} f_{\alpha'} d\mu\Big) +$$
$$+ \Big(\int_{E\setminus(F_{\alpha\alpha'}\cup F)} f_\alpha d\mu, \int_{E\setminus(F_{\alpha\alpha'}\cup F)} f_{\alpha'} d\mu\Big) + \Big(\int_{(E\setminus F_{\alpha\alpha'})\cap F} f_\alpha d\mu, \int_{(E\setminus F_{\alpha\alpha'})\cap F} f_{\alpha'} d\mu\Big)$$
$$\in W(0)\times W(0) + W(0)\times W(0) + W \subseteq W^2 + W^2 + W^2$$

lorsque $\alpha, \alpha' \geqslant \alpha_1$, d'où la conclusion suit du lemme 2.3.

2.5. Corollaire. *Soient $\{f_\alpha\}$ et $\{g_\beta\}$ deux suites généralisées dans $\mathcal{E}(\Gamma_\mu, X)$ convergeant dans $X^S(\Gamma_\mu)$ vers une même fonction. Supposons, de plus, que $\{\int_E f_\alpha d\mu\}$ et $\{\int_E g_\beta d\mu\}$ soient des suites généralisées de Cauchy dans Z uniformément en $E \in \mathcal{S}$. Alors, quel que soit l'entourage W de Z, il existe α_0 et β_0 tels que*

$$\Big(\int_E f_\alpha d\mu, \int_E g_\beta d\mu\Big) \in W$$

uniformément en $E \in \mathcal{S}$ lorsque $\alpha \geqslant \alpha_0$ et $\beta \geqslant \beta_0$.

Démonstration. On utilise les mêmes idées que pour la démonstration de la proposition. Etant donné un entourage symétrique W_1 pour Z tel que $W_1^2 + W_1^2 + W_1^2 \subseteq W$, on se donne un entourage U pour X correspondant à W_1 conformément à l'axiome (C_1). On pose alors $F_{\alpha\beta} = \{s \in S: (f_\alpha(s), g_\beta(s)) \notin U\}$. D'après la proposition, on peut trouver α_0, β_0, ainsi que F Γ_μ-intégrable dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$ voisinage de $\emptyset$ dans $\mathcal{S}(\Gamma_\mu)$ tels que $\int_E f_\alpha d\mu \in W_1(0)$ et $\int_E g_\beta d\mu \in W_1(0)$ lorsque $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\beta \geqslant \beta_0$, $E \in \mathcal{N}$ ou $E \subseteq S\setminus F$, $E \in \mathcal{S}$.

Comme il existe, par hypothèse, $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$ et $\beta_1 \geqslant \beta_0$ tels que $F_{\alpha\beta} \in \mathcal{N}$ pour $\alpha \geqslant \alpha_1$ et $\beta \geqslant \beta_1$, on peut décomposer $(\int_E f_\alpha d\mu, \int_E g_\beta d\mu)$ comme dans la démonstration de la suffisance pour obtenir le résultat.

On dira que $f \in X^S$ est *Γ_μ-intégrable* s'il existe une suite généralisée $\{f_\alpha\}$ dans $\mathcal{E}(\Gamma_\mu, X)$ tel que $f_\alpha \xrightarrow{\Gamma_\mu} f$ et $\{\int_E f_\alpha d\mu\}$ est une suite généralisée de Cauchy dans Z uniformément en $E \in \mathcal{S}$. La *Γ_μ-intégrale de f sur $E \in \mathcal{S}$* est l'élément du complété $\hat{Z}$ de Z défini par

$$\int_E f d\mu = \lim_\alpha \int_E f d\mu.$$

En vertu du cor. 2.5 et de la séparation de Z, la Γ_μ-intégrale est bien définie. L'ensemble des fonctions Γ_μ-intégrables dépend de μ, Γ_μ, des ensembles Γ_μ-intégrables, de X, $\cdot$ et Z; par abus de notation, on le désignera $\mathcal{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$. Il est clair que $\mathcal{E}(\Gamma_\mu, X) \subseteq \mathcal{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ et que l'intégrale qu'on vient de définir prolonge l'intégrale définie sur $\mathcal{E}(\Gamma_\mu, X)$.

On résume dans la proposition suivante les principales propriétés de la Γ_μ-intégrale.

2.6. Proposition. (a) *Relativement à l'opération $(f+g)(s) = f(s)+g(s)$, $\mathcal{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ est un semi-groupe de X^S.*

(b) *Pour $B \in \mathcal{S}$, l'application $f \to \int_E f d\mu$ de $\mathcal{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ dans $\hat{Z}$ est additive.*

(c) *Pour $f \in \mathcal{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$, $\nu(E) = \int_E f d\mu$ $(E \in \mathcal{S})$ est additive.*

(d) *Pour $f \in \mathcal{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$,* $\displaystyle\lim_{E \xrightarrow{\Gamma_\mu} \emptyset, E\in\mathcal{S}} \int_E f d\mu = 0.$

(e) *Supposons S non Γ_μ-intégrable. Soit $\Phi = \{F \in \mathcal{S}: F$ est Γ_μ-intégrable$\}$. Alors, tout $F \in \Phi$ détermine l'ensemble non vide $B_F = \{E \in \mathcal{S}: E\cap F = \emptyset\}$, et $\{B_F\}_{F\in\Phi}$ est base d'un filtre $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$. Pour toute $f \in \mathcal{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$, $\lim_{\mathcal{F}} \int_E f d\mu = 0$.*

Démonstration. (a), (b) et (c) sont conséquences plus ou moins immédiates des définitions et de la prop. 2.1. Pour montrer (d) et (e), étant donné un entourage symétrique de $\hat{Z}$, on se donne $g \in \mathcal{E}(\Gamma_\mu, X)$ telle que $(\int_E f d\mu, \int_E g d\mu) \in W$ uniformément en $E \in \mathcal{S}$. Soit alors $\mathcal{N}$ voisinage de $\emptyset$ dans $\mathcal{S}(\Gamma_\mu)$ tel que $\int_E g d\mu \in W(0)$ lorsque $B \in \mathcal{N}$. On a $\int_E f d\mu \in W^2(0)$ lorsque $B \in \mathcal{N}$, ce qui prouve (d). D'autre part, $F = \{s \in S: g(s) \neq 0\}$ est Γ_μ-intégrable dans $\mathcal{S}$ et $E \in B_F$ entraînent $\int_E f d\mu \in W(0)$, d'où (e).

2.7. Remarque. On peut vérifier sans difficultés que dans 2.6 (c), ν sera σ-additive si μ l'est, voir remarque 2.2.

Pour étendre la prop. 2.4 aux fonctions de $\mathcal{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$, nous formaliserons un procédé d'approximation à rapprocher avec [13], th. 4, p. 69. Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ une suite généralisée dans un espace uniforme $(H, \mathcal{U})$ et, pour tout $\alpha \in D$, soit $\{x_{\alpha\beta}\}_{\beta\in D_\alpha}$ une suite généralisée dans $\overset{\bullet}{H}$ telle que $\lim_\beta x_{\alpha\beta} = x_\alpha$. Pour $\varphi, \psi \in \prod_\alpha D_\alpha$, posons $\varphi \geqslant \psi$ si $\varphi(\alpha) \geqslant \psi(\alpha)$ pour tout $\alpha \in D$, et pour (α, φ), $(\alpha', \psi) \in D \times \prod_\alpha D_\alpha$, posons $(\alpha, \varphi) \geqslant (\alpha', \psi)$ si $\alpha \geqslant \alpha'$ et $\varphi \geqslant \psi$. On dit alors que la suite généralisée $\{x_{\alpha,\varphi(\alpha)}\colon (\alpha, \varphi) \in D \times \prod_\alpha D_\alpha\}$ est *l'approximation* diagonale de $\{x_\alpha\}$ déterminée par le système $\{x_{\alpha\beta}\colon \beta \in D_\alpha\}$, $\alpha \in D$.

2.8. LEMME. *Soit T un ensemble $\neq \emptyset$, et pour tout $t \in T$, soit $\{x_\alpha(t)\}_{\alpha\in D}$ une suite généralisée dans $H = (H, \mathscr{U})$. Pour $t \in T$, $\alpha \in D$, soit $\{x_{\alpha\beta}(t)\}_{\beta\in D_\alpha}$ une suite généralisée dans H telle que, pour tout $\alpha \in D$, $\lim_\beta x_{\alpha\beta}(t) = x_\alpha(t)$ uniformément en $t \in T$. Alors, pour tout $U \in \mathscr{U}$, il existe $\varphi_U \in \prod_\alpha D_\alpha$ tel que $\varphi \in \prod_\alpha D_\alpha$ et $\varphi \geqslant \varphi_U$ entraine que $\big(x_\alpha(t), x_{\alpha,\varphi(\alpha)}(t)\big) \in U$ uniformément en $\alpha \in D$ et $t \in T$.*

Démonstration. Pour tout $\alpha \in D$, il existe $\beta'_\alpha \in D_\alpha$ tel que $\beta_\alpha \in D_\alpha$, $\beta_\alpha \geqslant \beta'_\alpha$ entraine que $\big(x_\alpha(t), x_{\alpha\beta_\alpha}(t)\big) \in U$ uniformément en $t \in T$; il suffit donc de prendre φ_U tel que $\varphi_U(\alpha) = \beta'_\alpha$, $\alpha \in D$.

2.9. THÉORÈME. *Soit $\{f_\alpha\}$ une suite généralisée dans $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ qui est de Cauchy dans $X^S(\Gamma_\mu)$. Alors, pour que $\{\int_E f_\alpha d\mu\}$ soit de Cauchy uniformément en $E \in \mathscr{S}$, il faut et il suffit que:*

(a) *Pour tout voisinage V de 0 dans $\hat{Z}$, il existe un indice α_0 et un voisinage $\mathscr{N}$ de $\emptyset$ dans $\mathscr{S}(\Gamma_\mu)$ tels que $\int_E f_\alpha d\mu \in V$ lorsque $\alpha \geqslant \alpha_0$ et $E \in \mathscr{N}$.*

(b) *Pour tout voisinage V de 0 dans $\hat{Z}$, il existe un indice α_0 et F Γ_μ-intégrable dans $\mathscr{S}$ tels que $\int_E f_\alpha d\mu \in V$ lorsque $\alpha \geqslant \alpha_0$ et $E \in \mathscr{S}$, $E \subseteq S \setminus F$.*

Démonstration. La *nécessité* des conditions se démontre comme la partie correspondante de la prop. 2.4, en appliquant cette fois 2.6 (d) et (e). Remarquons que, si S est Γ_μ-intégrable, (b) est obtenue en prenant $F = S$ et α_0 égal à n'importe quel indice.

Suffisance. Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ dans $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$, une suite généralisée de Cauchy dans $X^S(\Gamma_\mu)$ vérifiant (a) et (b). Pour tout $\alpha \in D$, il existe une suite généralisée $\{f_{\alpha\beta}\}_{\beta\in D_\alpha}$ dans $\mathscr{E}(\Gamma_\mu, X)$ telle que $f_{\alpha\beta} \overset{\Gamma_\mu}{\to} f_\alpha$ et $\lim_\beta \int_E f_{\alpha\beta} d\mu = \int_E f_\alpha d\mu$ uniformément en $E \in \mathscr{S}$. Soit $\{f_{\alpha,\varphi(\alpha)}\colon (\alpha, \varphi) \in D \times \prod_\alpha D_\alpha\}$ l'approximation diagonale déterminée par le système $\{f_{\alpha\beta}\colon \beta \in D_\alpha\}$, $\alpha \in D$. Soit U un entourage symétrique de $X^S(\Gamma_\mu)$. D'après 2.8 avec T se réduisant à un point, il existe alors $\varphi_U \in \prod_\alpha D_\alpha$ tel que $\varphi \in \prod_\alpha D_\alpha$ et $\varphi \geqslant \varphi_U$ entrainent que $(f_\alpha, f_{\alpha,\varphi(\alpha)}) \in U$, pour tout $\alpha \in D$. Si α_1 est tel que $(f_\alpha, f_{\alpha'}) \in U$ pour α, $\alpha' \geqslant \alpha_1$, on a alors $(f_{\alpha,\varphi(\alpha)}, f_{\alpha',\varphi'(\alpha')}) \in U^3$ pour (α, φ), $(\alpha', \varphi') \geqslant (\alpha_1, \varphi_U)$, ce qui montre que $\{f_{\alpha,\varphi(\alpha)}\}$ est une suite généralisée dans $\mathscr{E}(\Gamma_\mu, X)$ qui est de Cauchy dans $X^S(\Gamma_\mu)$. Soient maintenant V_0 un voisinage de 0 dans $\hat{Z}$ et W un entourage symétrique de $\hat{Z}$ tel que $W^2(0) \subseteq V_0$. Soient α_0, $\mathscr{N}$ et F choisis en fonction de $\{f_\alpha\}$ et $W(0)$ selon (a) et (b), α_0 réalisant les deux conditions en même temps. D'après 2.8, il existe $\varphi_1 \in \prod_\alpha D_\alpha$ tel que $\varphi \in \prod_\alpha D_\alpha$ et $\varphi \geqslant \varphi_1$ impliquent que $\big(\int_E f_{\alpha,\varphi(\alpha)} d\mu, \int_E f_\alpha d\mu\big) \in W$, quels que soient $\alpha \in D$ et $E \in \mathscr{S}$. Pour $(\alpha, \varphi) \geqslant (\alpha_0, \varphi_1)$, il en résulte que $\int_E f_{\alpha,\varphi(\alpha)} d\mu \in V_0$ dès que $E \in \mathscr{N}$ ou $E \in \mathscr{S}$, $E \subseteq S \setminus F$, autrement dit que $\big\{\int_E f_{\alpha,\varphi(\alpha)} d\mu\big\}$ est de Cauchy uniformément en $E \in \mathscr{S}$. On en déduit qu'il existe α_1 tel que $\alpha, \alpha' \geqslant \alpha_1$ impliquent que $\big(\int_E f_\alpha d\mu, \int_E f_{\alpha'} d\mu\big) \in W^3$ uniformément en $E \in \mathscr{S}$, d'où le résultat.

On dira qu'une suite généralisée $\{f_\alpha\}$ dans $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ est *terminalement Γ_μ-équiintégrable* si elle satisfait les conditions (a) et (b) du théorème 2.9.

Le prochain résultat est un théorème de type Vitali (cf. [10], III 6.15). Nous l'énoncerons après avoir vérifié que $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ possède une structure uniforme "naturelle". Soit $\mathscr{W}$ la structure uniforme de $\hat{Z}$ et soit, pour tout $W \in \mathscr{W}$, l'ensemble

$$T(W) = \Big\{(f, g) \in \mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X) \times \mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)\colon \Big(\int_E f\, d\mu,\ \int_E g\, d\mu\Big) \in W \text{ pour tout } E \in \mathscr{S}\Big\}.$$

Il est clair que la famille $\{T(W)\}_{W\in\mathscr{W}}$ forme un système fondamental d'entourages pour une structure uniforme $T_{\mathscr{W}}$ sur $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$. Soit $\mathscr{M}\big(\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)\big)$ la structure uniforme induite sur $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ par $X^S(\Gamma_\mu)$. La structure uniforme de la *convergence en Γ_μ-moyenne* sur $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ est alors définie par $\sup\big\{\mathscr{M}\big(\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)\big), T_{\mathscr{W}}\big\}$. Dans la suite, on supposera $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ ainsi uniformisé et on notera $f_\alpha \to f(\Gamma_\mu\text{-moy.})$ la convergence (en Γ_μ-moyenne) qu'on en déduit.

2.10 THÉORÈME. *Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ une suite généralisée dans $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ et soit $f \in X^S$. Alors, pour que $f \in \mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ et $f_\alpha \to f(\Gamma_\mu\text{-moy.})$, il faut et il suffit que*

(a) $f_\alpha \overset{\Gamma_\mu}{\to} f$;

(b) *$\{f_\alpha\}$ soit terminalement Γ_μ-équiintégrable.*

Démonstration. La nécessité est conséquence immédiate des définitions et du th. 2.9. Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ une suite généralisée dans $\mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ satisfaisant (a) et (b). Pour tout $\alpha \in D$, il existe alors une suite généralisée $\{f_{\alpha\beta}\}_{\beta\in D_\alpha}$ dans $\mathscr{E}(\Gamma_\mu, X)$ telle que $f_{\alpha\beta} \to f_\alpha$ (Γ_μ-moy.). Soit $\{f_{\alpha,\varphi(\alpha)}\colon \alpha \in D$, $\varphi \in \prod_\alpha D_\alpha\}$ l'approximation diagonale correspondante. En procédant comme ci-dessus, α variant dans D et φ dans $\prod D$, on montre que $f_{\alpha,\varphi(\alpha)} \to f$

(Γ_μ-moy.), d'où $f \in \mathscr{L}_Z(\Gamma_\mu, X)$ et

$$\lim_{\alpha,\varphi} \int_E f_{\alpha,\varphi(\alpha)} d\mu = \int_E f d\mu \text{ uniformément en } E \in \mathscr{S}.$$

Soit W un entourage symétrique de $\hat{Z}$. Il existe alors $(\alpha_1, \varphi_1) \in D \times \prod_\alpha D_\alpha$ tel que $(\alpha, \varphi) \geqslant (\alpha_1, \varphi_1)$ entraine que $(\int_E f d\mu, \int_E f_{\alpha,\varphi(\alpha)} d\mu) \in W$ et $(\int_E f_{\alpha,\varphi(\alpha)} d\mu, \int_E f_\alpha d\mu) \in W$, uniformément en $E \in \mathscr{S}$. Pour $\alpha \geqslant \alpha_1$, on a donc $(\int_E f_\alpha d\mu, \int_E f d\mu) \in W^2$ uniformément en $E \in \mathscr{S}$, ce qui conclut la démonstration.

Le cadre de notre théorie de l'intégration est très rapproché de celui de Sion [26]. Celui-ci envisage le problème d'intégration comme un cas particulier du problème de prolongement d'une fonction $t: H \to Z$, où $H \subset \mathscr{P}(S)$ et Z est un s.g.t.u, à une fonction $t^*: \mathscr{P}(S) \to Z$ appelée *mesure extérieure* (définition: loc. cit., I.3.1). Sous certaines conditions, il obtient une telle mesure extérieure au moyen d'un "procédé intégral" inspiré des théories d'intégration de Philips [20] et Rickart [21]. La notion de sous-ensembles intégrables ne joue aucun rôle explicite dans cette théorie et rend difficile toute comparaison significative des théories générales. Pour obtenir un théorème d'existence de l'intégrale, Sion donne deux conditions (loc. cit., 4.1 (1) et (2), p. 61) portant sur f, μ et (selon notre notation) dont l'une, 4.1. (2), a la même forme que l'axiome de continuité (C_1) auquel nous somme arrivés indépendamment. Essentiellement, (C_1) fait en sorte que, sur les parties intégrables dans $\mathscr{S}$, l'intégrale est continue sur l'ensemble des fonctions $\mathscr{S}$-étagées muni de la convergence uniforme; cette condition a pour effet de permettre de définir l'intégrale sur ces ensembles de toutes les fonctions qui sont limites uniformes de fonctions $\mathscr{S}$-étagées. La condition 4.1 (1) de Sion n'est cependant pas du même type que (C_2) et n'a pas d'équivalent dans notre théorie, bien qu'on puisse la rapprocher de la condition (b), prop. 2.4.

Notre théorie d'intégration accorde une importance privilégiée à la topologie d'anneau sur $\mathscr{S}$ (plus particulièrement au filtre des voisinages de $\emptyset$ pour cette topologie), ainsi qu'à un sous-anneau héréditaire de $\mathscr{S}$ d'ensembles dits intégrables. Ceux-ci sont associées à une famille de sous-mesures elle-même associée à μ, la nature exacte de ce lien n'ayant pas été précisée. Dans la section 3, on vérifie que ces sous-mesures apparaissent naturellement lorsque X, Y et Z satisfont des hypothèses de convexité.

3. Intégration dans les espaces localement pseudo-convexes. Comme modèles de la théorie qui précède, nous donnons ici deux façons naturelles de construire dans certains cas la théorie de l'intégration lorsque les semi-groupes X, Y et Z sont des espaces vectoriels sur K ($\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$).

On rappelle qu'une *quasi-semi-norme* sur un espace vectoriel G sur K est une application π: $G \to [0, \infty)$ pour laquelle il existe $t \in (0, 1]$ tel que

(1) $\pi(\lambda x) = |\lambda|^t \pi(x)$ $(x \in G, \lambda \in K)$;

(2) $\pi(x+y) \leqslant \pi(x) + \pi(y)$ $(x, y \in G)$.

Dans ce cas, on dit aussi que π est une *t-semi-norme* sur G. On dit qu'un espace vectoriel topologique est *localement pseudo-convexe* (e.l.p.c.) si sa topologie est définie par une famille de quasi-semi-normes (cf. [22] ou [31]).

On suppose dans toute cette section que X, Y et Z sont des e.l.p.c. séparés; moyennant cette restriction, le cadre de la section 2 est conservée. Les familles de toutes les quasi-semi-normes continues sur X, Y et Z sont désignées, respectivement, par P, Q et R. Une quasi-semi-norme π sera notée $|\cdot|_\pi$.

(a) *Intégration par rapport à des semi-variations.* Pour $p \in P$, $r \in R$, on appelle *(p, r)-semi-variation de μ* la sous-mesure définie par $\|\mu\|_{p,r}(E) = \sup |\sum_1^n x_i \mu(E_i)|_r$ $(E \in \mathscr{S})$, où le supremum est pris sur toutes les suites finies $\{x_i\}_1^n$ dans X telles que $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|_p \leqslant 1$ et toutes les partitions finies $\{E_i\}_1^n$ de E dans $\mathscr{S}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Lorsque μ est sous-entendue, on écrira $\|E\|_{p,r}$ au lieu de $\|\mu\|_{p,r}(E)$.

3.1. Lemme. *Soit $\{E_i\}_1^n$, une partition de E dans $\mathscr{S}$ et soit $\{x_i\}_1^n$ dans X. Alors, si $p \in P$ est une t_p-semi-norme et $r \in R$ est une t_r-semi-norme, on a pour tout $A \in \mathscr{S}$:*

$$\Big|\sum_1^n x_i \mu(E_i \cap A)\Big|_r \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|_p^{t_r/t_p} \|E \cap A\|_{p,r}.$$

Démonstration. Soient $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|_p$ et $\varepsilon > 0$. On a alors

$$\Big|\sum_1^n x_i \mu(E_i \cap A)\Big|_r = \Big|\sum_1^n (M+\varepsilon)^{1/t_p} \frac{x_i}{(M+\varepsilon)^{1/t_p}} \mu(E_i \cap A)\Big|_r$$
$$= (M+\varepsilon)^{t_r/t_p} \Big|\sum_1^n \frac{x_i}{(M+\varepsilon)^{1/t_p}} \mu(E_i \cap A)\Big|_r$$
$$\leqslant (M+\varepsilon)^{t_r/t_p} \|E \cap A\|_{p,r}$$

avec ε arbitraire.

Soit $\Gamma_\mu = \{\|\mu\|_{p,r}: (p, r) \in I\}$, $I \subseteq P \times R$, une famille non vide de semi-variations de μ. On dit que Γ_μ est *admissible* si la famille de quasi-semi-normes $\{r \in R: (p, r) \in I$ pour au moins un $p \in P\}$ engendre la topologie de Z. On dit qu'un ensemble $E \in \mathscr{S}$ est *Γ_μ-fini* si, quel que soit $(p, r) \in I$, $\|\mu\|_{p,r}(E) < \infty$.

Comme conséquence immédiate du lemme précédent, on a alors:

3.2. Proposition. *Relativement à une famille admissible Γ_μ de semi-variations de μ ainsi qu'à l'anneau d'ensembles Γ_μ-intégrables définis par* *l'anneau des ensembles de $\mathscr{S}$ Γ_μ-finis, les axiomes de continuité* (C_1) *et* (C_2) *sont satisfaits.*

La théorie des sections 1 et 2 s'appliquera ainsi dans chacune des situations suivantes, où dans chaque cas, on identifie une famille admissible de semi-variations.

3.3. Exemple. Soit $X = K$ le corps des scalaires et soit $Y = Z$ un e.l.p.c. dont la topologie est définie par une famille R_0 de quasi-semi-normes. En prenant comme produit la loi de composition externe, $\Gamma_\mu = \{\|\mu\|_{|\cdot|,r} : r \in R_0\}$ est une famille admissible de semi-variations de μ, où $|\cdot|$ désigne la norme de K.

3.4. Exemple. Soit $X = Z$ un e.l.p.c. dont la topologie est définie par une famille R_0 de quasi-semi-normes et soit $Y = K$ le corps des scalaires. En prenant comme produit la loi de composition externe, $\Gamma_\mu = \{\|\mu\|_{r,r}: r \in R_0\}$ est une famille admissible de semi-variations de μ. On peut aussi étendre la théorie au cas $Y \subseteq \overline{\boldsymbol{R}}$ en posant $\|\mu\|_{r,r}(E) = \infty$ si $\mu(E) = \pm\infty$. L'intégration s'intéressant essentiellement aux ensembles finis, la famille de semi-variations résultante peut encore servir à construire la théorie.

3.5. Exemple. Soient X, Y et Z normés par $|\cdot|_X$, $|\cdot|_Y$ et $|\cdot|_Z$, respectivement, et pour lesquels il existe une application bilinéaire $(x, y) \to xy$ de $X \times Y$ dans Z. La famille réduite à $\|\mu\|_{|\cdot|_X, |\cdot|_Z}$ est alors admissible. La théorie d'intégration dans ce contexte a été étudiée par Bartle [1] en supposant que l'application bilinéaire ci-dessus est continue, ce qui n'est pas nécessaire pour la théorie générale.

(b) *Intégration par rapport à des variations.* Pour $p \in P$, $r \in R$, définissons $|\cdot|_{p,r}: Y \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ par $|y|_{p,r} = \sup_{|x|_p \leqslant 1} |xy|_r$. On appelle alors *$(p, r)$-variation de μ* la sous-mesure définie par $|\mu|_{p,r}(E) = \sup \sum_1^n |\mu(E_i)|_{p,r} (E \in \mathscr{S})$, où le supremum est pris sur toutes les partitions finies $\{E_i\}_1^n$ de E dans $\mathscr{S}$. Lorsque μ est sous-entendue, on écrira $|E|_{p,r}$ au lieu de $|\mu|_{p,r}(E)$.

Comme $\|\mu\|_{p,r} \leqslant |\mu|_{p,r}$, on a l'analogue du lemme 3.1 et de la prop. 3.2 pour les variations:

3.6. Lemme. *Soit $\{E_i\}_1^n$ une partition de E dans $\mathscr{S}$ et soit $\{x_i\}_1^n$ dans X. Alors, si $p \in P$ est une t_p-semi-norme et $r \in R$ une t_r-semi-norme, on a pour tout $A \in \mathscr{S}$:*

$$\Big|\sum_1^n x_i \mu(E_i \cap A)\Big|_r \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|_p^{t_r/t_p} |E \cap A|_{p,r}.$$

Soit $\Gamma_\mu = \{|\mu|_{p,r}: (p, r) \in I\}$, $I \subseteq P \times R$, une famille non vide de variations de μ. On dit que Γ_μ est *admissible* si la famille de quasi-semi-normes $\{r \in R: (p, r) \in I$ pour au moins un $p \in P\}$ engendre la topologie de Z. On dit qu'un ensemble $E \in \mathscr{S}$ est *Γ_μ-fini* si, quel que soit $(p, r) \in I$, $|\mu|_{p,r}(E) < \infty$.

3.7. Proposition. *Relativement à une famille admissible Γ_μ de variations de μ ainsi qu'à l'anneau d'ensembles Γ_μ- intégrables définis par l'anneau des ensembles de $\mathscr{S}$ Γ_μ-finis, les axiomes de continuité* (C_1) *et* (C_2) *sont satisfaits.*

Les familles admissibles de variations de μ peuvent donc servir à construire une théorie d'intégration du type des sections 1 et 2.

3.8. Exemple. Dans le contexte de l'exemple 3.3, la famille $\Gamma_\mu = \{|\mu|_{|\cdot|,r} : r \in R_0\}$ est admissible.

3.9. Exemple. Dans le contexte de l'exemple 3.4, $\Gamma_\mu = \{|\mu|_{r,r}: r \in R_0\}$ est admissible. Si r est une t_r-semi-norme, on vérifie alors que pour $E \in \mathscr{S}$: $|\mu|_{r,r}(E) = \sup \sum_1^n |\mu(E_i)|^{t_r}$, où le supremum est pris sur toutes les partitions finies $\{E_i\}_1^n$ de E dans $\mathscr{S}$. Ce type de sous-mesures sera examiné dans la section 4 (b).

4. $X = Z$ espace localement pseudo-convexe, $Y = K$.

(a) *Cas localement convexe.* A l'intérieur du cadre des sections précédentes, on suppose d'abord que $X = Z$ est un espace localement convexe séparé (e.l.c.) sur $K = Y$. Soit R_0 une famille de semi-normes définissant la topologie de X, et soit $|\mu|$ la variation de μ. Pour toute $r \in R_0$, on vérifie sans peine que $\|\mu\|_{r,r} = |\mu|_{r,r} = |\mu|$ (cf. ex. 3.4 et 3.9). Il résulte de la prop. 3.2 (ou 3.7) qu'on peut construire une théorie d'intégration du type de la section 2 par rapport à la famille de sous-mesures se réduisant à $\{|\mu|\}$. Pour simplifier, on convient de remplacer partout $\{|\mu|\}$ par $|\mu|$.

Nous ferons ici le lien entre la théorie précédente et quelques théories d'intégration classiques. On compare en premier lieu à une version généralisée de la théorie de Bochner–Dunford–Schwartz (cf. [10], III 2.17).

On dit qu'une fonction $f \in X^S$ est *intégrable-Bochner–Dunford–Schwartz* et on écrit $f \in \mathscr{L}_{\text{B.D.S.}}$ — s'il existe une suite généralisée $\{f_\alpha\}$ dans $\mathscr{E}(|\mu|, X)$ telle que

(1) $f_\alpha \xrightarrow{|\mu|} f$;

(2) $\lim_{\alpha,\alpha'} \int_S |f_\alpha - f_{\alpha'}|_r d|\mu| = 0$ $(r \in R_0)$. (1)

Pour $f \in \mathscr{L}_{\text{B.D.S.}}$ et $E \in \mathscr{S}$, *l'intégrale Bochner–Dunford–Schwartz de f sur E* est alors l'élément de $\hat{X}$:

$$\text{B.D.S.-}\int_E f d\mu = \lim_\alpha \int_E f_\alpha d\mu,$$

(1) On suppose que d'une théorie à l'autre, les fonctions étagées intégrables de même que leurs intégrales sont les mêmes.

définition qui ne dépend pas de la suite $\{f_\alpha\}$ vérifiant (1) et (2), comme on peut montrer par des méthodes combinant celles du cor. 2.5 et [10] III. 2.16.

4.1. Théorème. $\mathscr{L}_{\text{B.D.S.}} \subseteq \mathscr{L}_X(|\mu|, X)$; *de plus, pour* $f \in \mathscr{L}_{\text{B.D.S.}}$ *et* $E \in \mathscr{S}$,

$$\text{B.D.S.-} \int_E f\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement des inégalités

$$\Big|\int_E f_\alpha d\mu - \int_E f_{\alpha'} d\mu\Big|_r \leqslant \int_E |f_\alpha - f_{\alpha'}|_r d|\mu| \leqslant \int_S |f_\alpha - f_{\alpha'}|_r d|\mu|$$

pour les fonctions étagées intégrables.

Au moyen d'un exemple emprunté à Birkhoff ([3], ex. 7, p. 377) et mentionné par Bartle ([1], p. 349), on peut montrer qu'en général l'inclusion ci-dessus est stricte. On a cependant le résultat suivant lorsque les espaces sont scalaires.

4.2. Proposition. *Soient* $X = Y = Z = C$. *Alors* $\mathscr{L}_{\text{B.D.S.}} = \mathscr{L}_C(|\mu|, C)$ *et les intégrales coïncident.*

Démonstration. D'après 4.1, il suffit de montrer que $\mathscr{L}_C(|\mu|, C) \subseteq \mathscr{L}_{\text{B.D.S.}}$. Soit $f \in \mathscr{L}_C(|\mu|, C)$. Comme $\mathscr{L}_C(|\mu|, C)$ possède un système fondamental d'entourages dénombrable, il existe $\{f_n\}_1^\infty$, dans $\mathscr{E}(|\mu|, C)$ telle que $f_n \to f$ ($|\mu|$-moy.). Pour tout n et tout $E \in \mathscr{S}$, posons $\nu_n(E) = \int_E f_n d\mu$. Ce résultat est alors conséquence des définitions et de l'inégalité

$$|\nu_m - \nu_n|(E) = \int_E |f_m - f_n| d|\mu| \leqslant 4 \sup_{A \in \mathscr{S}} |\nu_m(A) - \nu_n(A)|$$

valable quel que soit $E \in \mathscr{S}$.

Soit X_τ l'espace X muni d'une topologie localement convexe τ moins fine que la topologie initiale. Comme la convergence en $|\mu|$-mesure dans X^S est plus fine que celle en X_τ^S, il est alors facile de voir que $\mathscr{L}_X(|\mu|, X) \subseteq \mathscr{L}_{X_\tau}(|\mu|, X_\tau)$. En particulier, cela est vrai pour $X_\sigma = (X, \sigma(X, X'))$, où $\sigma(X, X')$ est la topologie affaiblie de X. Pour montrer que l'ensemble des fonctions intégrables peut ainsi être effectivement enrichi, nous comparerons $\mathscr{L}_{X_\sigma}(\mu, X_\sigma)$ à l'ensemble des fonctions μ-intégrables-Pettis lorsque μ *est à valeurs dans* $\mathbf{R}_+$.

On dit qu'une fonction $f \in X^S$ est *μ-intégrable-Pettis* [19] ($f \in \mathscr{L}_{\text{Pettis}}$) si pour tout $x' \in X'$, la fonction $s \to \langle f(s), x'\rangle$ est μ-intégrable (²), et si pour tout $E \in \mathscr{S}$, il existe $x_E \in X$ tel que pour tout $x' \in X'$:

$$\int_E \langle f, x'\rangle d\mu = \langle x_E, x'\rangle.$$

(²) D'après 4.2, il revient au même de dire que cette fonction appartient à $\mathscr{L}_{\text{B.D.S.}}$.

On note alors $x_E = \text{Pettis-}\int_E f\,d\mu$.

4.3. Théorème. $\mathscr{L}_{\text{Pettis}} \subseteq \mathscr{L}_{X_\sigma}(\mu, X_\sigma)$. *Pour* $f \in \mathscr{L}_{\text{Pettis}}$ *et* $E \in \mathscr{S}$, *on a*

$$\text{Pettis-}\int_E f\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

Démonstration. Nous nous inspirerons de la démonstration du théorème 18 de [10], IV. 8; cette dernière contenant deux erreurs, nous croyons utile d'aller dans les détails.

Soit $f \in \mathscr{L}_{\text{Pettis}}$. Il nous suffit de trouver une suite généralisée $\{f_\alpha\}$ dans $\mathscr{E}(\mu, X)$ telle que pour tout $x' \in X'$,

(1) $\langle f_\alpha, x'\rangle \xrightarrow{\mu} \langle f, x'\rangle$;

(2) $\lim_\alpha |\langle \int_E f_\alpha d\mu, x'\rangle - \langle \text{Pettis-}\int_E f\,d\mu, x'\rangle| = \lim_\alpha |\int_E \langle f_\alpha - f, x'\rangle d\mu| = 0$ uniformément en $E \in \mathscr{S}$.

Soit Π l'ensemble des suites finies d'ensembles de $\mathscr{S}$ disjoints deux à deux et de μ-mesure strictement positive. Pour $\pi, \pi_1 \in \Pi$, on dit que $\pi_1 \geqslant \pi$ si tout ensemble de π est, à un ensemble μ-négligeable près, réunion d'ensembles de π_1.

Posons

$$f_\pi = \sum_{E \in \pi} (\mu(E))^{-1} \text{Pettis-}\int_E f\,d\mu\,\chi_E,$$

où χ_E est la fonction indicatrice de E. Nous allons prouver que pour tout $x' \in X'$,

$$\lim_\pi \int_S |\langle f_\pi - f, x'\rangle|\,d\mu = 0$$

ce qui entrainera que $\{f_\pi\}$ satisfait (1) et (2) ci-dessus. D'après 4.2, $\mathscr{L}_C(\mu, C)$ n'est autre que l'espace semi-normé $\mathscr{L}^1(\mu)$. Soit U_π: $\mathscr{L}^1(\mu) \to \mathscr{L}^1(\mu)$ définie par $U_\pi(h) = h_\pi = \sum_{E \in \pi} (\mu(E))^{-1} \int_E h\,d\mu\,\chi_E$. Alors U_π est linéaire et de norme $\leqslant 1$:

$$|U_\pi(h)|_1 = \sum_{E \in \pi} \Big|\int_E h\,d\mu\Big| \leqslant \sum_{E \in \pi} \int_E |h|\,d\mu \leqslant |h|_1.$$

Pour tout $x' \in X'$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $g = \sum_1^n a_i \chi_{E_i} \in \mathscr{E}(\mu, C)$ telle que $|\langle f, x'\rangle - g|_1 < \varepsilon/2$. On peut supposer que $\mu(E_i) > 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et prendre $\pi = \{E_1, \dots, E_n\}$. Pour $\pi_1 \geqslant \pi$, on a évidemment $g_{\pi_1} = g$ (μ-p.p.) et

$$|\langle f, x'\rangle - \langle f_{\pi_1}, x'\rangle|_1 = |\langle f, x'\rangle - \langle f, x'\rangle_{\pi_1}|_1$$
$$\leqslant |\langle f, x'\rangle - g|_1 + |U_{\pi_1}(g - \langle f, x'\rangle)|_1 < \varepsilon,$$

pour $\pi_1 \geqslant \pi$, d'où le résultat.

4.4. COROLLAIRE. *Pour que $f \in \mathscr{L}_{\text{Pettis}}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite généralisée $\{f_\alpha\}$ dans $\mathscr{E}(\mu, X)$ telle que*

(1) $\langle f_\alpha, x'\rangle \xrightarrow{\mu} \langle f, x'\rangle$ *pour tout* $x' \in X'$;

(2) $\{\int_E f_\alpha d\mu\}$ *converge dans X_δ uniformément en $E \in \mathscr{S}$.*

Démonstration. La nécessité résulte du th. 4.3. Soient $f \in \mathscr{L}_{X_\sigma}(\mu, X_\sigma)$ et $\{f_\alpha\}$ dans $\mathscr{E}(\mu, X)$ satisfaisant (1) et (2). En vertu des th. 2.9 et 2.10, on a alors pour tout $E \in \mathscr{S}$ et tout $x' \in X'$:

$$\Big\langle \int_E f d\mu, x'\Big\rangle = \lim_\alpha \Big\langle \int_E f_\alpha d\mu, x'\Big\rangle = \lim_\alpha \int_E \langle f_\alpha, x'\rangle d\mu = \int_E \langle f, x'\rangle d\mu,$$

d'où $f \in \mathscr{L}_{\text{Pettis}}$ et Pettis-$\int_E f d\mu = \int_E f d\mu$.

4.5. EXEMPLE. A l'aide d'un exemple dû à Pettis ([19], 9.2), nous allons montrer qu'en général l'inclusion dans le th. 4.3 est stricte. Soit l'espace mesuré $(]0,1], \mathscr{S}, \mu)$, où $\mathscr{S}$ est la σ-algèbre des boréliens de $]0,1]$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{S}$. Soit $X = c$ l'espace de Banach des suites réelles convergentes $x = \{x_n\}_1^\infty$ muni de la norme $|x| = \sup_n |x_n|$. Pour $m = 1, 2, \ldots$, posons $I_m =]1/2^m, 1/2^{m-1}]$. On définit alors $f\colon]0,1] \to c$ qui n'est pas intégrable-Pettis:

$$f = \sum_1^\infty 2^m e_m \chi_{I_m}, \quad \text{où} \quad e_m = \{\delta_{mn}\}_{n=1}^\infty, \; \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m = n, \\ 0 & \text{si} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Considérons la suite $f_k = \sum_1^k 2^m e_m \chi_{I_m}$, $k = 1, 2, \ldots$ Comme $\langle f_k, x'\rangle \xrightarrow{\mu} \langle f, x'\rangle$ pour tout $x' \in X'$, on vérifiera que $f \in \mathscr{L}_{X_\sigma}(\mu, X_\sigma)$ en montrant que $\{f_k\}$ est terminalement μ-équiintégrable (th. 2.10), ce qui équivaut ici à prouver que

$$\lim_{E \xrightarrow{\mu} \sigma, E \in \mathscr{S}} \Big|\Big\langle \int_E f_k d\mu, x'\Big\rangle\Big| = 0 \text{ uniformément en } k = 1, 2, \ldots \; (x' \in c').$$

On sait que $x' \in c'$ correspond de manière unique à une suite $\{a_m\}_0^\infty \in l'$ telle que $x'(x) = \sum_0^\infty a_n x_n$ avec $x_0 = \lim_n x_n$ ([32], p. 115). Etant donné $\varepsilon > 0$, soit p assez grand pour que $\sum_{p+1}^\infty |a_n| < \varepsilon/2$. Pour $k = 1, 2, \ldots$, on obtient alors que

$$\Big|\Big\langle \int_E f_k d\mu, x'\Big\rangle\Big| = \Big|\int_E \langle f_k, x'\rangle d\mu\Big| = \Big|\sum_1^k a_n 2^n \mu(E \cap I_n)\Big|$$
$$\leqslant \sum_1^p |a_n| 2^n \mu(E \cap I_n) + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

pour $\mu(E)$ assez petit.

Par définition, l'intégrale sur un ensemble de $\mathscr{S}$ de la fonction f de l'ex. 4.5 est un élément du complété de X_σ, à savoir X'^*, le dual algébrique de X'. Le théorème suivant affirme plus: les intégrales appartiennent à $c'' = l^\infty$, le bidual de c. On dit qu'un e.l.c. X est *distingué* si son dual fort $X'_\beta = (X', \beta(X', X))$ est tonnelé ([24], p. 193). D'ici la fin de la sous-section (a), on suppose toujours μ à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+$.

4.6. THÉORÈME (Gelfand–Dunford). *Soit X un* e.l.c. *distingué et soit $f \in X^S$ telle que pour tout $x' \in X'$, la fonction $s \to \langle f(s), x'\rangle$ est μ-intégrable. Il existe alors $x'' \in X''$ tel que pour tout $x' \in X'$:*

$$\langle x', x''\rangle = \int_S \langle f, x'\rangle d\mu$$

Démonstration. Voir par exemple [12], 3.7.1. La démonstration est alors faite pour X Banach, mais la preuve est fondée sur une application du théorème du graphe fermé à l'application linéaire $x' \to \langle f, x'\rangle$ de X'_β dans $\mathscr{L}^1(\mu)$, résultat restant applicable lorsque X'_β est tonnelé ([24], IV. 8.5).

Le théorème de Gelfand–Dunford rend possible la définition d'une intégrale plus générale que celle de Pettis. Soient X un e.l.c. distingué, μ à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+$.

On dit que $f \in X^S$ est *intégrable-Dunford* ($f \in \mathscr{L}_{\text{Dunford}}$) (cf. [9]) si pour tout $x' \in X'$, $s \to \langle f(s), x'\rangle$ est μ-intégrable. Pour tout $E \in \mathscr{S}$, il existe alors d'après 4.6 un élément $x''_E = \text{Dunford-}\int_E f d\mu \in X''$ tel que, pour tout $x' \in X'$,

$$\langle x', \text{Dunford-}\int_E f d\mu\rangle = \int_E \langle f, x'\rangle d\mu.$$

Posons $X''_{\sigma^*} = (X'', \sigma(X'', X'))$. Par définition, une fonction $f \in \mathscr{L}_{X''_{\sigma^*}}(\mu, X''_{\sigma^*})$ si $f \in (X'')^S$ et s'il existe une suite généralisée $\{f_\alpha\}$ dans $\mathscr{E}(\mu, X'')$ tendant vers f en μ-moyenne pour la topologie $\sigma(X'', X')$.

4.7. THÉORÈME. $\mathscr{L}_{\text{Dunford}} = \mathscr{L}_{X''_{\sigma^*}}(\mu, X''_{\sigma^*}) \cap X^S$, *où X^S est considéré comme plongé dans $(X'')^S$ en tant qu'espace vectoriel. Pour $f \in \mathscr{L}_{\text{Dunford}}$ et $E \in \mathscr{S}$, on a* Dunford-$\int_E f d\mu = \int_E f d\mu$.

Démonstration. On suit les mêmes lignes que dans la démonstration du th. 4.3, les fonctions étagées intégrables approchant f en μ-moyenne étant cette fois à valeurs dans X'', puisqu'elles sont définies en termes de l'intégrale de Dunford.

4.8. COROLLAIRE. *Pour que $f \in \mathscr{L}_{\text{Dunford}}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite généralisée $\{f_\alpha\}$ dans $\mathscr{E}(\mu, X'')$ telle que*

(1) $\langle x', f_\alpha\rangle \xrightarrow{\mu} \langle x', f\rangle$ *pour tout* $x' \in X'$;

(2) $\{\int_E f_\alpha d\mu\}$ *converge dans X''_{σ^*} vers un point de X uniformément en $E \in \mathscr{S}$.*

Soit X un e.l.c. distingué et soit μ à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+$. Une conséquence facile du th. 2.10 est que $\mathscr{L}_X(\mu, X) \subseteq \mathscr{L}_{\text{Pettis}}$; d'autre part, le th. 4.7 entraîne que $\mathscr{L}_{X_\sigma}(\mu, X_\sigma) \subseteq \mathscr{L}_{\text{Dunford}}$. On peut donc parler dans cette situation d'une hiérarchie de fonctions intégrables que l'on exprime par la chaîne d'inclusions:

$$\mathscr{L}_{\text{B.D.S.}} \subseteq \mathscr{L}_X(\mu, X) \subseteq \mathscr{L}_{\text{Pettis}} \subseteq \mathscr{L}_{X_\sigma}(\mu, X_\sigma) \subseteq \mathscr{L}_{\text{Dunford}} \subseteq \mathscr{L}_{X''_{\sigma*}}(\mu, X''_{\sigma*}),$$

les intégrales coïncidant sur les intersections.

(b) *Cas non localement convexe.* Dans le présent contexte, la théorie d'intégration se comporte assez mal. Qu'il suffise de mentionner, par exemple, que si X est métrisable non localement convexe, il existe toujours une suite de fonctions étagées sur $[0,1]$ à valeurs dans X tendant uniformément vers 0 et dont la suite d'intégrales par rapport à la mesure de Lebesgue ne tend pas vers 0 ([22], p. 84). En vertu du th. 2.10 et de l'axiome de continuité (C_1), $[0,1]$ ne peut être Γ-intégrable pour aucune famille de sous-mesures Γ associée à la mesure de Lebesgue. En définitive, un des problèmes principaux sera de trouver des conditions pour que l'on ait suffisamment d'ensembles intégrables pour la famille de sous-mesures choisie.

On considère d'abord la famille admissible $\Gamma_\mu = \{|\mu|_{r,r}\colon r \in R_0\}$, où R_0 est une famille de quasi-semi-normes définissant la topologie de $X = Z$ ex. 3.9). Si r est une t-semi-norme, on sait que $|\mu|_{r,r}(E) \overset{d}{=} |\mu|_t(E) = \sup \sum_1^n |\mu(E_i)|^t$, où le supremum est pris sur toutes les partitions finies $\{E_i\}_1^n$ de E dans $\mathscr{S}$. Nous donnerons ici des conditions nécessaires et suffisantes pour que $|\mu|_t$ soit finie lorsque $0 < t < 1$.

Nous supposons dans le reste de cette sous-section que μ est σ-additive et $\mathscr{S}$ est une σ-algèbre.

On dit qu'un ensemble $E \in \mathscr{S}$ est un *atome de* μ si $|\mu|(E) > 0$ et $F \subseteq E$, $F \in \mathscr{S}$, implique que $|\mu|(F) = |\mu|(E)$ ou $|\mu|(F) = 0$. Une partition au plus dénombrable $\{E_i\}$ de S dans $\mathscr{S}$ est une *décomposition atomique* de S *par rapport à* μ si, pour tout i, E_i est un atome de μ ou $|\mu|(E_i) = 0$. On dit que μ est *purement atomique* si S admet une décomposition atomique par rapport à μ.

4.9. Proposition. *Pour que μ soit purement atomique, il faut et il suffit que pour tout $E \in \mathscr{S}$, E soit μ-négligeable ou contienne un atome de μ.*

Démonstration. *Nécessité.* Soit $\{E_i\}$ une décomposition atomique de S. Soit $E \in \mathscr{S}$ tel que $|\mu|(E) > 0$. Il existe alors E_i tel que $|\mu|(E \cap E_i) > 0$, et donc $E_i \cap E$ est un atome contenu dans E.

Suffisance. Ordonnons partiellement par inclusion l'ensemble

$$\Omega = \{\omega\colon \omega \text{ est une réunion d'atomes de } \mu \text{ disjoints deux à deux}\}.$$

Comme on peut supposer $|\mu|(S) > 0$, $\Omega \neq \emptyset$, et donc, en vertu du lemme de Zorn, Ω contient un élément maximal ω_0. Puisque $|\mu|(S) < \infty$, ω_0 est au plus dénombrable et il résulte alors de la condition donnée que $S \setminus \bigcup_{A \in \omega_0} A$ est μ-négligeable.

4.10. Théorème. *Pour que $|\mu|_t(S) < \infty$, $0 < t < 1$, il faut et il suffit que μ soit purement atomique et qu'il existe une boule de centre 0 dans l^t contenant toutes les suites $\{\mu(E_i)\}$, où $\{E_i\}$ est une décomposition atomique de S.*

Démonstration. *Nécessité.* Supposons que μ ne soit pas purement atomique bien que $|\mu|_t(S) < \infty$. D'après 4.9, il existe $F \in \mathscr{S}$ de $|\mu|$-mesure strictement positive et ne contenant pas d'atome de μ. Pour $n = 1, 2, \ldots$, F possède alors une partition $\{F_i\}_1^n$ dans $\mathscr{S}$ telle que $|\mu|(F_i) = |\mu|(F)/n$ ([6], prop. 7, p. 26). On a alors $\sum_1^n |\mu(F_i)|^t = n^{1-t}|\mu(F_i)|^t$, d'où il résulte que $\infty = |\mu|_t(F) \leqslant |\mu|_t(S)$, une contradiction. Soit donc $\{E_i\}_{i\in I}$ une décomposition atomique de S. Pour toute partie finie J de I, $\sum_{i\in J} |\mu(E_i)|^t \leqslant |\mu|_t(S) < \infty$, donc $\sum_{i\in J} |\mu(E_i)|^t \leqslant |\mu|_t(S)$.

Suffisance. Soit $\{F_i\}_1^n$ une partition finie de S dans $\mathscr{S}$. Pour $j = 1, \ldots, n$, μ est purement atomique sur F_j (prop. 4.9). Soit $\{E_{ji}\}_{i\in I_j}$ une décomposition atomique de F_j. Puisque la famille $\{E_{ji}\}_{1\leqslant j\leqslant n, i\in I_j}$ est alors une décomposition atomique de S, il existe un nombre fini $K > 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^n |\mu(F_j)|^t = \sum_{j=1}^n \Big|\sum_{i\in I_j} \mu(E_{ji})\Big|^t \leqslant \sum_{j=1}^n \sum_{i\in I_j} |\mu(E_{ji})|^t \leqslant K, \text{ (3)}$$

d'où la conclusion.

Nous signalons un autre résultat moins général inspiré de Schuchat ([25], th. 8) et valable pour les mesures boréliennes positives finies sur $\boldsymbol{R}$. On appelle *support* d'une telle mesure μ le complémentaire du plus grand ouvert μ-négligeable, et on associe à μ une fonction de répartition $g_\mu(s) = \mu]-\infty, s]$ $(s \in \boldsymbol{R})$ dont les points de discontinuité sont appelés *points de masse* de μ.

4.11. Théorème. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\boldsymbol{R}$. Alors, une condition nécessaire pour que $|\mu|_t(\boldsymbol{R}) < \infty$, $0 < t < 1$, est que l'ensemble des points de masse de μ soit dense dans le support de μ.*

Démonstration. Le support de μ est de la forme $\bigcup_i J_i$ où $\{J_i\}$ est une famille ou plus dénombrable d'intervalles fermés disjoints deux à deux. Si la condition n'est pas vérifiée, il existe un intervalle fini $[a_0, b_0]$, $a_0 < b_0$, dans lequel g_μ est continue et non constante. Posons $M = \sum_{j=1}^\infty j^{-1/t}$

(3) On applique l'inégalité $(a+b)^t \leqslant a^t + b^t$ valable pour $a, b \geqslant 0$ et $0 < t < 1$.

et $h = (g_\mu(b_0) - g_\mu(a_0))/M$. Puisque g_μ est continue sur $[a_0, b_0]$, il existe une suite strictement croissante $\{a_j\}_1^\infty$ dans cet intervalle telle que $g_\mu(a_j) - g_\mu(a_{j-1}) = hj^{-1/t}$. Il suffit alors de prendre $A_j =]a_{j-1}, a_j]$ pour obtenir que

$$\sum_1^n |\mu(A_j)|^t = \sum_1^n |g_\mu(a_j) - g_\mu(a_{j-1})|^t = h^t \sum_1^n (1/j)$$

pour tout r, d'où $|\mu|_t(\boldsymbol{R}) = \infty$, une contradiction.

La condition du th. 4.11 n'est pas suffisante: pour E borélien, il suffit de poser $\mu(E) = \sum_{r_i \in E} 1/i^2$, où $\{r_i\}$ est une énumération de $\boldsymbol{Q}$; on a alors supp $\mu = \boldsymbol{R}$ et g_μ non continue dans $\boldsymbol{Q}$, mais $|\mu|_{1/2}(\boldsymbol{R}) = \infty$.

Les conditions de 4.10 et 4.11 sont extrêmement restrictives et mettent quelque peu en lumière la difficulté de construire une théorie de l'intégration pour les mesures non atomiques dans le contexte non localement convexe. Comme on a toujours $\|\mu\|_{r,r} \leqslant |\mu|_{r,r}$, tout résultat pour les (r, r)-variations est applicable aux (r, r)-semi-variations. On peut naturellement être tenté d'utiliser comme famille de sous-mesures $\Gamma_\mu = \{\|\mu\|_{r,r}\colon r \in R_0\}$ mais le résultat partiel suivant n'est guère encourageant.

4.12. Théorème. *Soit $\mu\colon \mathscr{S} \to \boldsymbol{R}_+$ σ-additive. Si $r \in R_0$, $r \neq 0$, une condition nécessaire pour que $\|\mu\|_{r,r}(S) < \infty$ est que μ soit purement atomique.*

Démonstration. Supposons le contraire. D'après 4.9, il existe alors $E \in \mathscr{S}$ de μ-mesure positive et ne contenant pas d'atome de μ. Posons $B_r = \{x \in X\colon |x|_r \leqslant 1\}$ et $\lambda(F) = \mu(E \cap F)(\mu(E))^{-1}$ $(F \in \mathscr{S})$. Puisque E ne contient pas d'atome, tout élément de l'enveloppe convexe de B_r peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^n x_i \lambda(E_i)$ pour $\{x_i\}_1^n$ dans B_r, $\{E_i\}_1^n$ formant une partition finie de E dans $\mathscr{S}$ ([6], prop. 7, p. 26). Puisque X est non localement convexe, on en déduit que

$$\|\mu\|_{r,r}(E) = |\mu(E)|^{t_r} \|\lambda\|_{r,r}(E) = \infty.$$

On a vu en 4 (a) que $\|\mu\|_{r,r} = \|\mu\|_{r,r} = \|\mu\|$ lorsque r est une semi-norme. La relation reste vraie en remplaçant $|\mu|$ par $|\mu|$,dans un exemple important où r est une t-semi-norme, $0 < t < 1$.

4.13. Exemple. Soit $(M, \mathscr{M}, \lambda)$ un espace mesuré où λ est une mesure positive sur une algèbre $\mathscr{M}$ de parties de M. Supposons qu'il existe dans $\mathscr{M}$ une suite $\{F_i\}_1^\infty$ d'ensembles deux à deux disjoints de λ-mesure finie > 0. Soit l'espace $X = L^t(M, \mathscr{M}, \lambda)$, $0 < t < 1$, t-normé par $\|f\|_t = \int_M |f|^t d\lambda$ (les fonctions égales λ-p.p. étant identifiées). Alors $\|\mu\|_{\|\cdot\|_t, \|\cdot\|_t}(E) = |\mu|_t(E)$ pour tout $E \in \mathscr{S}$. En effet, soit $\{E_i\}_1^n$ une partition de E dans $\mathscr{S}$. Posons $f_i = |\lambda(F_i)|^{-1/t} \chi_{F_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Puisque $\|f_i\|_t = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on a alors

$$\|\mu\|_{\|\cdot\|_t, \|\cdot\|_t}(E) \geqslant \Big\| \sum_1^n f_i \mu(E_i) \Big\|_t = \sum_1^n |\mu(E_i)|^t,$$

d'où le résultat.

5. $X = K$, $Y = Z$ espace vectoriel topologique. Nous obtenons ici quelques résultats applicables à la théorie de l'intégration des fonctions scalaires par rapport à une fonction d'ensembles à valeurs dans un e.v.t. Nous examinons ensuite le cas où $Y = Z$ est un e.l.p.c.

On dit qu'une suite $\{y_n\}_1^\infty$ dans un e.v.t. est *l^∞-sommable* [4] si, pour toute suite $\{a_n\}_1^\infty$ dans l^∞, la suite $\{a_n y_n\}_1^\infty$ est sommable. Toute suite l^∞-sommable est évidemment sommable et la réciproque est vraie dans un e.l.p.c. métrisable complet ([22], III. 6.6). Les deux notions ne sont toutefois pas équivalentes, voir [23].

Le résultat principal repose sur le prochain lemme cité sans démonstration par Rolewicz (loc. cit.). La démonstration ne paraissant pas triviale, nous croyons utile d'en présenter une.

5.1. Lemme. *Soit Y un espace vectoriel topologique métrisable complet dans lequel toute suite sommable est l^∞-sommable. Alors, pour tout voisinage U de 0 il existe un voisinage V de 0 ayant la propriété suivante: si $\{y_i\}_1^k$ est une suite dans Y telle que $\sum_1^k \varepsilon_i y_i \in V$ lorsque $\varepsilon_i = 0$ ou 1 pour $1 \leqslant i \leqslant k$, alors pour toute suite de scalaires $\{a_i\}_1^k$ telle que $|a_i| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $\sum_1^k a_i y_i \in U$.*

Démonstration. Nous allons supposer le contraire et construire une suite sommable qui n'est pas l^∞-sommable. Il existe donc un voisinage U de 0 ayant la propriété suivante: étant donnée une suite arbitraire $\{V_n\}_1^\infty$ de voisinage de 0, on peut associer à chaque V_n une suite $\{y_i^n\}_{i=1}^{k_n}$ dans Y telle que $\sum_{i=1}^{k_n} \varepsilon_i y_i^n \in V_n$ lorsque $\varepsilon_i = 0$ ou 1 pour $1 \leqslant i \leqslant k_n$ et une suite $\{a_i^n\}_{i=1}^{k_n}$ telle que $|a_i^n| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant k_n$ et $\sum_{i=1}^{k_n} a_i^n y_i^n \notin U$. Soit d une métrique invariante induisant la structure uniforme de Y. On choisit les V_n inductivement comme suit:

$$V_1 = \{y\colon |y|_d < 1\}, \quad c_1 = \max_{\substack{\varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1 \\ 1 \leqslant i \leqslant k_1}} \Big| \sum_{i=1}^{k_1} \varepsilon_i y_i^1 \Big|_d < 1, \quad r_2 = (1 - c_1)/2;$$

$$V_2 = \{y\colon |y|_d < r_2\}, \quad c_2 = \max_{\substack{\varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1 \\ 1 \leqslant i \leqslant k_2}} \Big| \sum_{i=1}^{k_2} \varepsilon_i y_i^2 \Big|_d < r_2, \quad r_3 = (r_2 - c_2)/2;$$

---

(4) Rolewicz: "$\sum_1^\infty x_n$ *is bounded multiplier convergent*" ([22], p. 88).

à la $n^{\text{ième}}$ étape, $n > 1$, on prend

$$V_n = \{y\colon |y|_d < r_n\}, \quad c_n = \max_{\substack{\varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1\\ 1\leqslant i\leqslant k_n}} \Big|\sum_{i=1}^{k_n} \varepsilon_i y_i^n\Big|_d < r_n, \quad r_{n+1} = (r_n - c_n)/2.$$

On détermine ainsi les suite $y_1^1, \ldots, y_{k_1}^1, y_1^2, \ldots, y_{k_2}^2, y_1^3, \ldots$ et $a_1^1, \ldots, a_{k_1}^1, a_1^2, \ldots, a_{k_2}^2, a_1^3, \ldots,$ que l'on désigne respectivement $\{y_i\}_1^\infty$, et $\{a_i\}_1^\infty$. Il est alors clair que $\{a_i y_i\}_1^\infty$ n'est pas sommable, et il nous suffit de vérifier que $\{y_i\}_1^\infty$ est sommable. Puisque $r_n \to 0$, $\{V_n\}_1^\infty$ est une base du filtre des voisinages de 0. Pour $n = 1, 2, \ldots$, il nous faut donc trouver un ensemble fini $J_n \subset N$ tel que $\sum_{i\in K} y_i \in V_n$ pour tout ensemble fini $K \subset N$ et disjoint de J_n. Soit $J_n = \{1, 2, \ldots, k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}\}$.

Pour un certain $m \geqslant n$, on a alors

$$\Big|\sum_{i\in K} y_i\Big|_d \leqslant c_n + c_{n+1} + \ldots + c_{m-1} + c_m < c_n + c_{n+1} + \ldots + c_{m-1} + r_m$$
$$< c_n + c_{n+1} + \ldots + c_{m-2} + r_{m-1} < \ldots < c_n + r_{n+1} < r_n,$$

d'où le résultat. Rappelons qu'une fonction d'ensembles $\mu\colon \mathscr{S} \to Y$ est dite *bornée* si $\{\mu(E)\colon E \in \mathscr{S}\}$ est borné dans Y. On dit que μ est *fortement additive* (ou encore *exhaustive* [14]) si elle est additive et si pour toute suite $\{E_n\}$ d'ensembles disjoints deux à deux dans $\mathscr{S}$, $\{\mu(E_n)\}$ tend vers 0. Si Y est un e.l.p.c. et si μ est fortement additive, μ est bornée ([8], 4.12); en particulier, si $\mathscr{S}$ est une σ-algèbre et Y un e.l.p.c., μ est bornée si elle est σ-additive.

Posons $S_\mu = \{\sum_1^n a_i\mu(E)\colon \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i| \leqslant 1,\ \{E_i\}_1^n$ est une partition de S dans $\mathscr{S}$, $n \in N\}$.

On dit que μ est L^∞-*bornée* ([29], 7.2.3) si S_μ est borné dans Y. Soit $\mathscr{E}(S, K)$ l'espace des fonctions $\mathscr{S}$-étagées à valeurs dans K. Lorsque μ est L^∞-bornée et $\mathscr{E}(\mathscr{S}, K)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme dans S, l'application $f = \sum_1^n a_i \chi_{E_i} \to \sum_1^n a_i\mu(E_i)$ de $\mathscr{E}(\mathscr{S}, K)$ dans Y est continue et peut ainsi être prolongée par continuité à une application de l'espace des fonctions $\mathscr{S}$-mesurables bornées à valeurs dans $\hat{Y}$, application ayant toutes les propriétés d'une intégrale. Le théorème suivant caractérise les e.v.t. métrisables complets pour lesquels toute fonction d'ensembles additive bornée est L^∞-bornée.

5.2. THÉORÈME. *Soit Y un* e.v.t. *métrisable complet. Alors pour que toute fonction $\mu\colon \mathscr{S} \to Y$ additive bornée soit L^∞-bornée, il faut et il suffit que dans Y toute suite sommable soit l^∞-sommable.*

Démonstration. *Suffisance.* Etant donné un voisinage U de 0 dans Y, soit V un voisinage de 0 dans Y ayant la propriété énoncée en 5.1.

Si $\mu\colon \mathscr{S} \to Y$ est additive bornée, il existe $c > 0$ tel que $c\{\mu(E)\colon E \in \mathscr{S}\} \subset V$. Soit $\{E_i\}_1^n$ une partition finie de S dans $\mathscr{S}$ et soit $\{a_i\}_1^n$ dans K telle que $\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i| \leqslant 1$. Pour une suite $\{\varepsilon_i\}_1^n$ telle que $\varepsilon_i = 0$ ou 1, $1 \leqslant i \leqslant n$, posons

$$\varepsilon_i E_i = \begin{cases} E_i & \text{si} \quad \varepsilon_i = 1,\\ \emptyset & \text{si} \quad \varepsilon_i = 0.\end{cases}$$

On a alors toujours $\sum_1^n \varepsilon_i c\mu(E_i) = c\mu\big(\sum_1^n \varepsilon_i E_i\big) \in V$, donc $c\sum_1^n a_i\mu(E_i) = \sum_1^n a_i c\mu(E_i) \in U$, ce qui montre que S_μ est borné dans Y.

Nécessité. Soit $\{y_i\}$ sommable dans Y. Pour $E \subset N$, en posant $\mu(E) = \sum_{i\in E} y_i$, on définit sur $\mathscr{P}(N)$ une mesure bornée ([18], p. 801) donc L^∞-bornée. Pour $n \in N$, l'application $\lambda_n\colon \{a_i\} \to \sum_1^n a_i y_i$ est linéaire continue de l^∞ dans Y. De plus, étant donnée B la boule unité de l^∞, $\bigcup_{n=1}^\infty \lambda_n(B) = S_\mu$ est borné, donc $\{\mu_n\}$ est équicontinue. Alors, comme $\lim_n \lambda_n(a) = \sum_1^\infty a_i y_i$ existe pour toutes les suites $a = \{a_i\}$ à support fini ($a_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices) formant un ensemble dense dans l^∞, cette limite existe partout dans l^∞ ([4], chap. III, § 3, no. 5, prop. 5). Puisqu'on a également montré que $\sum_1^\infty a_{i_k} y_{i_k}$ existait pour toute sous-suite $\{a_{i_k} y_{i_k}\}$, il en résulte que $\{a_i y_i\}$ est sommable, quelle que soit $\{a_i\} \in l^\infty$.

En ce qui concerne la théorie d'intégration lorsque $Y = Z$ est un e.l.p.c., on a

5.3. THÉORÈME. *Soit $Y = Z$ un* e.l.p.c. *dont la topologie est définie par une famille R_0 de quasi-semi-normes. Soit la famille admissible de semi-variations $\Gamma_\mu = \{\|\mu\|_{|\cdot|,r}\colon r \in R_0\}$* (ex. 3.3). *Alors, pour que S soit Γ_μ-fini, il faut et il suffit que μ soit bornée.*

Démonstration. *Nécessité.* Supposons le contraire. Il existe alors une suite $\{a_i\}$ dans K tendant vers 0 ainsi qu'une suite $\{E_i\}$ dans $\mathscr{S}$ telles que $\{a_i\mu(E_i)\}$ ne tende pas vers 0.

Or, pour toute t_r-semi-norme $r \in R_0$,

$$|a_i\mu(E_i)|_r \leqslant |a_i|^{t_r}\|\mu\|_{|\cdot|,r}(E_i) \leqslant |a_i|^{t_r}\|\mu\|_{|\cdot|,r}(S) \to 0$$

quand $i \to \infty$, une contradiction.

Suffisance. Pour toute $r \in R_0$, considérons l'espace quotient $Y_r = Y/r^{-1}(0)$. Alors, en désignant par $(y)_r$ la classe de y dans Y_r, la topologie quotient de Y_r est déterminée par la quasi-semi-norme $\bar{r}$ définie par $\bar{r}\big((y)_r\big) = r(y)$. Soit $\mu_r\colon \mathscr{S} \to Y_r$ la fonction additive définie par $\mu_r(E) = \big(\mu(E)\big)_r$, et soit $\hat{Y}_r$ l'espace quasi-normé complété de Y_r. Alors, comme dans $\hat{Y}_r$ toute suite sommable est l^∞-sommable et comme μ_r est bornée, S_{μ_r}

est borné dans Y_r (th. 5.2), ce qui équivaut exactement à avoir

$$\|\mu_r\|_{|\cdot|,\tilde{r}}(S) = \|\mu\|_{|\cdot|,r}(S) < \infty.$$

Lorsque $Y = Z$ est un Banach de norme $|\cdot|_Z$, la famille de semi-variations se réduisant à la semi-variation $\|\mu\|_{|.|,|.|_Z}$ est admissible. L'intégrale alors obtenue est exactement celle de Bartle–Dunford–Schwartz [2] dont notre intégrale est la généralisation naturelle.

Parmi les intégrales développées dans le contexte $Y = Z$ e.l.c., mentionnons celles de Gould [11], Thomas [27], [28] pour les mesures de Radon, Lewis [16], [17], lequel fait en outre le rapport entre son intégrale et celle de Gould. Nous montrons brièvement le lien entre notre intégrale et celle de Lewis.

On suppose que $Y = Z$ est un e.l.c. sur K dont la topologie est définie par une famille de semi-normes R_0, $\mathscr{S}$ est une σ-algèbre et $\mu\colon \mathscr{S} \to Y$ est σ-additive. On dit que $f\colon S \to K$ est *μ-intégrable-Lewis au sens généralisé* ([16], 2.5) si pour tout $y' \in Y'$, f est $y' \circ \mu$-intégrable. Pour tout $E \in \mathscr{S}$, *l'intégrale généralisée de Lewis de f sur E* est alors la forme linéaire sur Y' définie par

$$y' \to \int_E f d(y' \circ \mu).$$

On dit que f est *intégrable-Lewis* ([16], 2.1) si elle est intégrable-Lewis au sens généralisé et si pour tout $E \in \mathscr{S}$, il existe $y_E \in y$ appelé *intégrale-Lewis de f sur E* tel que pour tout $y' \in Y'$:

$$\langle y_E, y' \rangle = \int_E f d(y' \circ \mu).$$

En se servant des résultats de Lewis ([16], th. 2.2, 2.4), on peut aisément montrer que si f est $\mathscr{S}$-mesurable ($f^{-1}(B) \in \mathscr{S}$ pour tout borélien B de K),

1° pour que f soit intégrable-Lewis, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{f_n\}$ dans $\mathscr{E}(\mathscr{S}, K)$ telle que

(1) $f_n(s) \to f(s)$ pour tout $s \in S$;

(2) $\{\int_E f_n d\mu\}$ converge dans Y uniformément en $E \in \mathscr{S}$;

2° pour que f soit intégrable-Lewis au sens généralisé, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{f_n\}$ dans $\mathscr{E}(\mathscr{S}, K)$ telle que

(1) $f_n(s) \to f(s)$ pour tout $s \in S$,

(2) $\{\int_E f_n d\mu\}$ est de Cauchy uniformément en $E \in \mathscr{S}$ pour $(Y, \sigma(Y, Y'))$.

En particulier, lorsque f $\mathscr{S}$-mesurable est intégrable-Lewis au sens généralisé, 2° entraîne que l'intégrale généralisée appartient à l'adhérence dans $(Y'^*, \sigma(Y'^*, Y'))$ d'un ensemble borné de Y, d'où il résulte que c'est un élément de Y'' ([24], IV, 5.4).

Considérons maintenant la famille admissible $\Gamma_\mu = \{\|\mu\|_{|.|,r}\colon r \in R_0\}$. Alors si $f_n, f \in \mathscr{E}(\mathscr{S}, K)$ et $f_n(s) \to f(s)$ pour tout $s \in S$, il n'est pas difficile de voir que $f_n \xrightarrow{\Gamma_\mu} f$; en effet, S est Γ_μ-fini (th. 5.3) et pour tout $r \in R_0$, $\|\mu\|_{|\cdot|,r}$ est σ-additive et $\{\|\mu\|_{|.|,r}(E_i)\} \to 0$ pour toute suite décroissante $\{E_i\}$ dans $\mathscr{S}$, ce qui entraîne que le théorème d'Egoroff se généralise à ce contexte. Il en résulte que les fonctions $\mathscr{S}$-mesurables intégrables-Lewis sont Γ_μ-intégrables et les intégrales coincident. Les mêmes obse vations s'appliquent aux fonctions $\mathscr{S}$-mesurables intégrables-Lewis au sens généralisé en considérant cette fois μ comme une mesure à valeurs dans $(Y, \sigma(Y, Y'))$ et en prenant comme famille admissible $\Gamma'_\mu = \{|y' \circ \mu|\colon y' \in Y'\}$.

Nous remercions l'arbitre de cet article pour l'aide apportée à la clarification du rôle des ensembles intégrables dans la construction de la théorie. Nous le remercions également pour avoir attirer notre attention sur deux articles pertinents à ce travail, l'un de Turpin [30] où figure en particulier notre théorème 5.2, l'autre de Labuda [15], où le lemme 5.1 et le th. 5.2 sont démontrés pour des e.v.t. généraux.

Bibliographie

[1] R. G. Bartle, *A general bilinear vector integral*, Studia Math. 15 (1956), pp. 337–352.

[2] R. G. Bartle, N. Dunford, and J. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math. (1955), pp. 289–305.

[3] G. Birkhoff, *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935), pp. 357–378.

[4] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique, Livre* V, *Espaces vectorieles topologique*, Chapitres III–V, Hermann, Paris.

[5] — *Eléments de Mathématique, Livre* III, *Topologie générale*, Chapitres III et IV, 3ième éd., Hermann, Paris. 1960.

[6] N. Dinculeanu, *Vector measures*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[7] L. Drewnowski, *Topological rings of sets, continuous set functions, integration, I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972), pp. 269–276.

[8] — *Topological rings ..., II*, ibid., pp. 277–286.

[9] N. Dunford, *Uniformity in linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), pp. 305–356.

[10] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators, Part* I, Interscience, New York 1957.

[11] G. G. Gould, *Integration over vector-valued measures*, Proc. London Math. Soc. 15 (1965), pp. 193–225.

[12] E. Hille and R. S. Philips, *Functional analysis and semigroups*, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 2nd ed., 1957.

[13] J. Kelley, *General topology*, Van Nostrand, Princeton 1955.

[14] I. Labuda, *Sur le théorème de Bartle-Dunford-Schwartz*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972), pp. 545–553.
[15] — *Exhaustive measures in arbitrary topological vector spaces*, Studia Math. 58 (1976), pp. 239–248.
[16] D. R. Lewis, *Integration with respect to vector measures*, Pacific J. Math. 33 (1970), pp. 157–165.
[17] — *On integrability and summability in vector spaces*, Illinois J. Math. 16 (1972), pp. 294–307.
[18] W. Matuszewska and W. Orlicz, *A note on modular spaces, IX*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), pp. 801–808.
[19] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), pp. 277–304.
[20] R. S. Philips, *Integration in a convex linear topological space*, ibid. 47 (1940), pp. 114–145.
[21] C. E. Rickart, *Integration in a convex linear topological space*, ibid. 52 (1942), pp. 498–521.
[22] S. Rolewicz, *Metric linear spaces*, Monografie Matematyczne, tom 56, PWN, Warszawa 1972.
[23] S. Rolewicz and Cz. Ryll-Nardzewski, *On unconditional convergence in linear metric spaces*, Colloq. Math. 17 (1967), pp. 327–331.
[24] H. Schaefer, *Topological vector spaces*, MacMillan, New-York 1966.
[25] A. H. Schuchat, *Integral representation theorems in topological vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972), pp. 373–396.
[26] M. Sion, *A theory of semi-group-valued measures*, Lecture Notes in Mathematics 355, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York 1973.
[27] E. Thomas, *L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle*, Ann. Inst. Fourier 20 (1970), pp. 55–191.
[28] — *On Radon maps with values in arbitrary topological vector spaces, and their integral extensions*, preprint.
[29] P. Turpin, *Convexité dans les espaces vectoriels topologiques généraux*, Thèse, Orsay 1974.
[30] — *Intégration par rapport à une mesure à valeurs dans un espace vectoriel topologique non supposé localment convexe*, Colloque: Intégration vectorielle et multivoque, Caen 1975.
[31] L. Waelbroeck, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes in Mathematics 230, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York 1971.
[32] K. Yosida, *Functional analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, New-York 1968.

Received June 26, 1976
Revised version May 14, 1977 (1172)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXVI. (1979)

A characterization of some weak semi-continuity of integral functionals

by

TRAN CAO NGUYEN (Warsaw)

Abstract. In this paper we give a characterization of lower semicontinuity of the integral functional $I_f(u) = \int_T f(t, u(t))\mu(dt)$ on the space L_1 of integrable functions from T into a Euclidean space. The semicontinuity is considered with respect to the weak topology $w(L_1, S)$, where S is a subspace of L_∞.

1. Introduction. Consider the integral functional of the form

$$I_f(u) = \int_T f\big(t, u(t)\big)\mu(dt), \qquad u \in L_1(T, \boldsymbol{R}^n),$$

where T is an abstract space, and μ is a fixed, finite, nonnegative, nonatomic and complete measure on T. We denote by $\mathscr{L}$ the σ-field of μ-measurable subsets of T. We assume that the space $L_1(T, \boldsymbol{R}^n)$ is separable.

Concerning the integrand we assume as little regularity as possible: namely, throughout the paper we assume the following

ASSUMPTION A. *$f\colon T\times\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}\cup\{+\infty\}$ is such that for each integrable u, $f\big(t, u(t)\big)$ is measurable and there is a u_0 such that $f\big(t, u_0(t)\big)$ is integrable and the integral is finite.*

Notice that Assumption A does not imply that the domain of I_f is the whole space $L_1(T, \boldsymbol{R}^n)$. A priori, it may happen that both the negative part and the positive part of $f\big(t, u(t)\big)$ have the integral divergent to infinity and $I_f(u)$ cannot be uniquely defined. If only one of them is divergent, then $I_f(u) = -\infty$ or $+\infty$.

In this paper we shall characterize the property that the epigraph of I_f, that is, the set

$$\operatorname{epi} I_f = \{(u, a) \mid a \geqslant I_f(u)\} \subset L_1\times\boldsymbol{R},$$

is closed if we consider in L_1 the weak topology $w(L_1, S)$, S being a subspace of L_∞. We say in that case that I_f is $w(L_1, S)$-*lower semicontinuous* $\big(w(L_1, S)$-l.s.c$\big)$.

In fact, if the domain of I_f is the whole L_1 or if we put $I_f(u) = +\infty$ whenever the integral cannot be defined uniquely, then the closedness