[13] C. Stegall, *The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 213–223.
[14] — *The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces II*, ibid. (to appear).
[15] M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement K-analytiques*, Seminaire sur la Geometry des Espaces de Banach 1977–1978, Paris, exposé 12–13,
[16] S. L. Troyanski, *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces*, Studia Math. 37 (1971), 173–180.

Received November 6, 1978 (1478)
Revised version September 4, 1979

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXI. (1981)

Ein Beitrag zur Lipschitz-Saturation im unendlichdimensionalen Fall

von

HANS-JÖRG REIFFEN und HEINZ WILHELM TRAPP (Osnabrück)

Abstract. We study the problem of Lipschitz-saturation in the complex Banach analytic case. In codimension 1 relative Lipschitz-saturation and absolute Lipschitz-saturation are equal; the results of Stutz on equisaturation are also valid in the Banach case. We use only geometric methods and a simple power series calculus.

Von Ramis [4] wurde die Theorie der C-analytischen Teilmengen endlicher Definition von C-Banachmannigfaltigkeiten systematisch entwickelt. Schickhoff [6] hat die Geometrie dieser Ramisschen Mengen untersucht. Wir setzen in dieser Arbeit wie in [5] die Untersuchungen von Schickhoff fort; insbesondere benutzen wir die Bezeichnungen aus [5], [6].

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die von Zariski [9], [10], sowie von Pham, Teissier [3] begründete Theorie der Saturation. Da wir die endlichdimensionalen algebraischen Methoden nicht verwenden können, folgen wir dem geometrischen Ansatz von Stutz [8].

In § 1 treffen wir Vorbereitungen; insbesondere führen wir die Begriffe der Lipschitz-Holomorphie, der Puiseux-Regularität und der Lipschitz-Regularität ein. Wie bei Stutz gehen wir dabei von der Situation aus, daß die Singularitätenmenge die Codimension 1 hat.

In § 2 führen wir aus, daß in geeigneten Fällenr elative und absolute Lipschitz-Holomorphie übereinstimmen. Daraus leiten wir Sätze über Lipschitz-Regularität ab, d.h. über die Existenz von Produktdarstellungen im Sinne der Lipschitz-Biholomorphie.

In § 3 beweisen wir, daß die in § 2 angegebenen hinreichenden Bedingungen für Lipschitz-Regularität auch notwendig sind. Unsere Ergebnisse sind also scharf.

In § 4 zeigen wir, daß in der von uns betrachteten Situation "fast immer" Lipschitz-Regularität vorliegt. Ferner erhalten wie eine Verallgemeinerung einer von Stutz bewiesenen Aussage über den C_5-Tangentenkegel.

Insgesamt stellen unsere Ergebnisse Verallgemeinerungen Stutz'scher Resultate für den unendlich-dimensionalen Fall dar. Wir können sie jedoch ohne Rückgriff auf die Arbeit [3] von Pham, Teissier beweisen. Aus unserem Satz 2.1 lassen sich vielmehr sehr leicht zentrale Ergebnisse aus [3] gewinnen. Leider ist nicht zu erkennen, wie die von Böger [1], [2] gewonnenen weitreichenden Aussagen im unendlichdimensionalen Fall abgeleitet werden können.

Unter dem Aspekt der Whitney-Regularität haben wir in [5] die Zusammenhänge zwischen Whitney-Regularität und Puiseux-Regularität analysiert. Die Beziehungen zwischen Lipschitz-Regularität und Whitney-Regularität werden wir an anderer Stelle behandeln.

§ 1. Vorbereitungen. In dieser Arbeit sind X, $\tilde{X}$ Ramische Teilmengen parakompakter analytischer C-Banachmannigfaltigkeiten U, $\tilde{U}$. Die Normen auftretender Banachräume bezeichnen wir mit $|\cdot|$.

Die Abbildung $f\colon X \to \tilde{X}$ heißt *holomorph*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene U-Umgebung W und eine holomorphe Fortsetzung $g\colon W \to \tilde{U}$ von $f|X \cap W$ gibt.

Die Abbildung f heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ Kartenumgebungen W von x in U und $\tilde{W}$ von $f(x)$ in $\tilde{U}$ gibt, so daß bei Identifikation von W und $\tilde{W}$ mit den entsprechenden offenen Teilmengen von Banachräumen E und $\tilde{E}$ gilt: $f(W) \subset \tilde{W}$.

$$|f(u)-f(v)| \leqslant C\,|u-v| \qquad \forall u,\ v \in W.$$

Dabei ist $C \geqslant 0$ eine geeignete Konstante.

Ist $\pi\colon X \to U'$ eine stetige Abbildung in einen topologischen Raum U', so heißt f *relativ π Lipschitz-stetig*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ Kartenumgebungen W von x und $\tilde{W}$ von $f(x)$ gibt, so daß mit den Bezeichnungen wie oben gilt: $f(W) \subset \tilde{W}$,

$$|f(u)-f(v)| \leqslant C\,|u-v| \qquad \forall u, \quad v \in W \text{ mit } \pi(u) = \pi(v).$$

Eine Teilmenge A von X heißt eine *Ausnahmemenge*, wenn A analytisch ist, die singulären Punkte von X umfaßt, und $X-A$ in X dicht ist.

1.1. Definition. Die Abbildung $f\colon X \to \tilde{X}$ heißt *schwach holomorph* (*s-holomorph*), wenn f stetig ist und es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene X-Umgebung W sowie eine Ausnahmemenge A in W gibt, derart daß $|W-A$ holomorph ist.

Ist f schwach holomorph und Lipschitz-stetig, so heißt f *Lipschitz-holomorph* (*L-holomorph*).

Ist f schwach holomorph und relativ π Lipschitz-stetig, so heißt f *relativ π Lipschitz-holomorph* (*L-holomorph relativ π*).

Die Abbildung f heißt *schwach biholomorph* (*s-biholomorph*), wenn f topologisch ist und es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene X-Umgebung W und Ausnahmemengen A in W, $\tilde{A}$ in $\tilde{W}\colon = f(W)$ gibt, so daß f eine biholomorphe Abbildung $f\colon W-A \to \tilde{W}-\tilde{A}$ induziert.

Ist f schwach biholomorph, und sind f und f^{-1} Lipschitz-holomorph, so heißt f *Lipschitz-biholomorph* (*L-biholomorph*). ■

Ist f schwach holomorph, so ist f auf der Mannigfaltigkeit der regulären Punkte von X holomorph.

Im weiteren setzen wir X, $\tilde{X}$ als rein p-codimensional voraus. Im Falle $p = 1$ heißt X eine *Hyperfläche*.

1.2. Es sei $p \geqslant 2$, $x_0 \in X$ und U eine offene Teilmenge eines Banachraumes E. Dann gibt es eine Darstellung

$$E = E' \oplus \check{E} \oplus {}''E$$

mit $E' \in \mathcal{G}^p(E)$, $\check{E} \in \mathcal{G}_1(E)$, ${}''E \in \mathcal{G}_{p-1}(E)$ ([5], 1.1), und (nach eventueller Verkleinerung der Umgebung U von x_0) eine Darstellung

$$U = U' + \check{U} + {}''U$$

mit Gebieten U', $\check{U}$, ${}''U$ in E', $\check{E}$, ${}''E$, so daß die Beschränkung der kanonischen Projektion

$$P_{E'', E'}\colon E' \oplus E'' \to E', \qquad E''\colon = \check{E} \oplus {}''E,$$

auf X eine analytische Überlagerung $\pi\colon X \to U'$ liefert.

Wir setzen

$$'E\colon = E' \oplus \check{E}, \qquad \check{\pi}\colon = P_{''E, 'E}|X,$$
$$'X\colon = \check{\pi}(X), \qquad '\pi\colon = P_{\check{E}, E'}|X.$$

Dann ist $'X \subset U' + \check{U}$ eine Hyperfläche und $'\pi\colon {}'X \to U'$ eine analytische Überlagerung. Außerdem ist

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\check{\pi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & 'X \arrow[dl, "'\pi"] \\ & U' & \end{tikzcd}$$

ein Faserraumhomomorphismus (d.h. $\pi = {}'\pi \circ \check{\pi}$). Wir nennen $\check{\pi}$ eine Hyperflächendarstellung von X in x_0.

Genau dann ist $\check{\pi}$ schwach biholomorph, wenn $\check{\pi}$ injektiv ist.

1.3. Definition. Im Falle $p \geqslant 2$ heißt X *schwache Hyperfläche* (*s-Hyperfläche*) bzw. *Lipschitz-Hyperfläche* (*L-Hyperfläche*), wenn es zu jedem Punkt von X lokal eine Hyperflächendarstellung $\check{\pi}$ gemäß 1.2 gibt, wobei $\check{\pi}$ schwach biholomorph bzw. Lipschitz-biholomorph ist. ■

Wie in [8] zeigt man:

1.4. Genau dann ist die Hyperflächendarstellung $\check{\pi}$ in 1.2 (nach eventueller Verkleinerung von U) L-biholomorph, wenn gilt:

$${}''E \cap C_5(X, x_0) = \{0\}.$$

Daraus folgt:

1.5. Satz (C_5-Bedingung). *Im Falle $p \geqslant 2$ ist X genau dann eine Lipschitz-Hyperfläche, wenn gilt:*

$$\operatorname{codim} C_5(X, x) \geqslant p-1 \quad \forall x \in X. \ \blacksquare$$

Im weiteren sei Y eine analytische Untermannigfaltigkeit von X, die alle singulären Punkte von X enthält; für jedes $y \in Y$ liege der Keim $\overline{Y}_y$ in jeder Komponente des Keimes $\overline{X}_y$.

Der Lipschitz-Regularität liegt lokal folgende Situation zugrunde:

1.6. U ist eine offene Teilmenge eines Banachraumes E. Es existieren Darstellungen $E = \dot{E} \oplus \ddot{E}$ mit $\dot{E}, \ddot{E} \in \mathscr{G}(E)$, $U = \dot{U} + \ddot{U}$ mit zusammenhängenden offenen Nullumgebungen $\dot{U}$, $\ddot{U}$ von $\dot{E}$, $\ddot{E}$, so daß gilt:

$$Y = \dot{U} + \{0\} = \dot{U}.$$

Ferner gibt es eine Darstellung $E = \dot{E} \oplus \ddot{F}$ mit $\ddot{F} \in \mathscr{G}(E)$, und eine rein p-codimensionale Ramissche Menge Z in einer zusammenhängenden offenen Nullumgebung $\ddot{V}$ von $\ddot{F}$ sowie einen L-biholomorphen Faserraumisomorphismus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \times Z \arrow[dl] \\ & \dot{U} & \end{tikzcd}$$

über den natürlichen Projektionen mit

$$f(Y) = Y \times \{0\}.$$

Wir nennen f eine Lipschitz-Darstellung von X. $\blacksquare$

1.7. Definition. X heißt *längs Y Lipschitz-regulär*, wenn es zu jedem Punkt von Y lokal eine Lipschitz-Darstellung f von X gemäß 1.6 gibt. $\blacksquare$

Bei der Puiseux-Regularität beziehen wir uns lokal auf folgende Situation (vgl. [6]):

1.8. U ist eine offene Teilmenge eines Banachraumes E. Es existieren Darstellungen

$$E = \dot{E} \oplus \hat{E} \oplus E''$$

mit $\dot{E} \in \mathscr{G}^{p+1}(E)$, $\hat{E} \in \mathscr{G}_1(E)$, $E'' \in \mathscr{G}_p(E)$,

$$U = \dot{U} + \hat{U} + U''$$

mit offenen Kugeln $\dot{U}$, $\hat{U}$, U'' in $\dot{E}$, $\hat{E}$, E'' um den jeweiligen Nullpunkt, so daß $Y = \dot{U}$ ist.

Wir setzen

$$E' := \dot{E} \oplus \hat{E}, \qquad U' := \dot{U} + \hat{U}.$$

Die kanonische Projektion $\pi\colon X \to U'$ ist eine analytische Überlagerung; es gilt: $\pi^{-1}(Y) = Y$, Y enthält die Verzweigungsmenge von π,

$$C_3(X, y) \cap E'' = \{0\} \quad \forall y \in Y.$$

Es gibt dann zu jeder irreduziblen Komponente X^0 von X eine positive ganze Zahl μ^0 und eine topologische holomorphe Abbildung

$$\Phi^0\colon U \times K^0 \to X^0$$

($K^0 := \{t \in C\colon |t|^{\mu^0} < r\}$, r = Radius von $\hat{U}$) der Form

$$\Phi^0(y, t) = y + t^{\mu^0} e + \varphi^0(y, t)$$

($e \in \hat{E}$, $|e| = 1$), wobei $\varphi^0\colon \dot{U} \times K^0 \to E''$ durch eine Potenzreihe $\sum_{j=\mu^0}^{\infty} \varphi_j^0(y) t^j$ beschrieben wird.

Die Zahl μ^0 ist die Multiplizität von X^0 in den Punkten von Y. Die s-biholomorphe Abbildung Φ^0 heißt eine Puiseux-Normalisierung von X^0.

1.9. Definition. X heißt *längs Y Puiseux-regulär*, wenn X in jedem Punkt von Y lokal eine Darstellung gemäß 1.8 besitzt.

In [6] wird gezeigt:

1.10. Satz (C_4-Bedingung). *Sei Y rein $(p+1)$-codimensional. X ist genau dann längs Y Puiseux-regulär, wenn gilt:*

$$\operatorname{codim} C_4(X, x) = p \quad \forall x \in Y. \ \blacksquare$$

Gemäß [6] gilt ferner:

1.11. Satz. *Es sei Y eine $(p+1)$-codimensionale Zusammenhangskomponente der Menge der regulären Punkte der Singularitätenmenge von X. Dann ist X längs Y in allen Punkten außerhalb einer abgeschlossenen vernachlässigbaren Teilmenge von Y Puiseux-regulär.* $\blacksquare$

1.12. Setzen wir unter den Voraussetzungen von 1.8

$$\ddot{E} := \hat{E} \oplus E'',$$

$$X_y := X \cap (y + \ddot{E}), \qquad y \in Y,$$

so erhalten wir eine eindimensionale analytische Menge X_y in $\ddot{E}$, die höchstens in 0 singulär ist. $\blacksquare$

Folgende Aussage ist offensichtlich:

1.13. Es sei $U = \tilde{U}$, und für X und $\tilde{X}$ sei die in 1.8 beschriebene Situation gleichzeitig erfüllt. Dann gilt:

Die Faserraumisomorphismen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi"] \\ & U' & \end{tikzcd}$$

stehen vermöge $f \mapsto f|X_0$ in bijektiver Beziehung zu den Faserraumisomorphismen

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{X}_0 \arrow[dl, "\pi"] \\ & \hat{U} & \end{tikzcd}$$

Alle Faserraumisomorphismen sind s-biholomorph. ■

Es ist klar, wie in der Situation von 1.13 der Begriff der Lipschitz-Biholomorphie relativ π zu verstehen ist. Im weiteren setzen wir Y als rein $(p+1)$-codimensional voraus.

§ 2. Relative und absolute Lipschitz-Holomorphie, hinreichende Bedingungen für die Lipschitz-Regularität. Zunächst setzen wir X als Hyperfläche voraus.

2.1. Satz. *X sei eine Hyperfläche; die Situation aus 1.8 liege vor. Dann ist jede relativ π Lipschitz-holomorphe Abbildung $f\colon X \to F$ in einen Banachraum F bereits Lipschitz-holomorph.* ■

Beweis. Wir identifizieren $\hat{E}$ und E'' mit $\boldsymbol{C}$ und zeigen: Seien X^1, X^2 irreduzible Komponenten von X ($X^1 = X^2$ ist zugelassen) und seien $\Phi^k\colon \dot{U}\times K^k \to X^k$,

$$\Phi^k(y, z) = \left(y, z^{\mu^k}, \psi^k(y, z)\right), \qquad \psi^k(y, z) = \sum_{j=\mu^k}^{\infty} \psi_j^k(y) z^j$$

$(k = 1, 2)$ die zugehörigen Puiseux-Normalisierungen.

Seien ferner $f^k\colon \dot{U}\times K^k \to F$ $(k = 1, 2)$ holomorphe Abbildungen mit den Eigenschaften:

2.2 $\quad f^1(u, 0) = f^2(u, 0) \qquad \forall u \in \dot{U},$

und für eine (geeignete) Konstante $C > 0$

2.3 $\quad |f^1(u, v) - f^2(u, w)| \leqslant C\,|\psi^1(u, v) - \psi^2(u, w)|$

$$\forall u \in \dot{U},\ v \in K^1,\ w \in K^2 \text{ mit } v^{\mu^1} = w^{\mu^2}.$$

2.4 $\quad |f^k(u, v) - f^k(u, w)| \leqslant C\,|\psi^k(u, v) - \psi^k(u, w)|$

$$\forall u \in \dot{U},\ v \in K^1,\ w \in K^2 \text{ mit } v^{\mu^k} = w^{\mu^k}\ (k = 1, 2).$$

Dann gilt für eine Konstante $c > 0$ (bei eventueller Verkleinerung von U):

2.5 $\quad |f^1(u, v) - f^2(y, z)| \leqslant c\left(|u-y| + |v^{\mu^1} - z^{\mu^2}| + |\psi^1(u, v) - \psi^2(y, z)|\right)$

$$\forall u, y \in \dot{U},\ v \in K^1,\ z \in K^2.$$

Im Fall $X^1 = X^2$ sei $f^1 = f^2$. Dann ist 2.2 selbstverständlich und 2.3, 2.4 sind äquivalent. Eine elementare Überlegung zeigt, daß wir statt 2.5 nur folgende spezielle Abschätzung zu zeigen haben:

2.6 $\quad |f^1(y, v) - f^2(y, z)| \leqslant c\left(|v^{\mu^1} - z^{\mu^2}| + |\psi^1(y, v) - \psi^2(y, z)|\right)$

$$\forall y \in \dot{U},\ v \in K^1_{\natural},\ z \in K^2 \text{ mit } |v|^{\mu^1} \geqslant |z|^{\mu^2}.$$

Im weiteren lassen wir kommentarlos Verkleinerungen von U zu. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$f^k(y, z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^k(y) z^j \qquad (k = 1, 2);$$

μ sei kleinstes gemeinsames Vielfaches von μ^1, μ^2,

$$\lambda^k := \mu|\mu^k \qquad (k = 1, 2),$$

$$K := \{t \in \boldsymbol{C}\colon\ t^\mu \in \hat{U}\},$$

$$W := \dot{U} \times \{a \in \boldsymbol{C}\colon\ |a| \leqslant 1\} \times K;$$

$\psi\colon W \to \boldsymbol{C}$ mit

$$\psi(u, a, t) := \psi^1(u, t^{\lambda^1}) - \psi^2\left(u, (at)^{\lambda^2}\right) = \sum_{j=\mu}^{\infty} \psi_j(u, a) t^j;$$

$f\colon W \to F$ mit

$$f(u, a, t) := f^1(u, t^{\lambda^1}) - f^2\left(u, (at)^{\lambda^2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(u, a) t^j;$$

$$M := \{(u, a, t) \in W\colon\ |1 - a^\mu|\,|t|^\mu + |\psi(u, a, t)| = 0\},$$

$c := W - M \to \boldsymbol{R}$ mit

$$c(u, a, t) := \frac{|f(u, a, t)|}{|1 - a^\mu|\,|t|^\mu + |\psi(u, a, t)|}.$$

Wir müssen zeigen:

2.7 $\quad c\colon W - M \to \boldsymbol{R}$ ist beschränkt.

Zur Ausnutzung der Bedingungen 2.3 und 2.4 setzen wir:

$$G := \{a \in \boldsymbol{C}\colon\ a^\mu = 1\};$$

$$\mu_a := \min\{j\colon\ \psi_j(\cdot, a) \neq \text{Nullabbildung}\},$$

$$\omega_a := \min\{j\colon\ f_j(\cdot, a) \neq \text{Nullabbildung}\}.$$

Ist $a \in G$ und dabei $a \neq 1$ im Falle $X^1 = X^2$, so haben wir

$$\psi(u, a, t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Deshalb sowie aufgrund von 2.3 ist

2.8 $\mu_a < \infty, \quad \mu_a \leqslant \omega_a; \quad \psi(u, a, t) = t^{\mu_a}\psi_a(u, t)$

mit einer analytischen Funktion

$$\psi_a\colon \dot{U} \times K \to C, \qquad \psi_a(u, 0) \neq 0 \qquad \forall u \in \dot{U}.$$

Die Anwendung von 2.8 auf den Spezialfall $X^1 = X^2$ und ein erzeugendes Element von G liefert:

$$f_1^k = \ldots = f_{\mu^k-1}^k = \text{Nullabbildung}.$$

Darum gilt:

$$f(u, a, t) = \sum_{j=\mu}^{\infty} f_j(u, a)t^j,$$

$$c(u, a, t) = \frac{\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_{\mu+j}(u, a)t^j\right|}{|1-a^\mu| + \left|\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\mu+j}(u, a)t^j\right|}.$$

Zum Beweis der Beschränktheit von c gehen wir indirekt vor und betrachten eine Folge (u_n, a_n, t_n) in $W-M$ mit:

$$u_n \to 0, \quad a_n \to a, \quad |a| \leqslant 1, \quad t_n \to 0,$$

$$c_n := c(u_n, a_n, t_n) \to \infty.$$

Wäre $a^\mu \neq 1$, so hätten wir

$$c_n \to \frac{|f_\mu(0, a)|}{|1-a^\mu| + |\psi_\mu(0, a)|} \neq \infty,$$

also ist $a \in G$.

Wäre $X^1 = X^2$ und $a = 1$, so hätten wir

$$c_n \to \frac{\mu|f_\mu^2(0)|}{\mu + \mu|\psi_\mu^2(0)|} \neq \infty.$$

Also ist $X^1 \neq X^2$ oder $X^1 = X^2$ und $a \neq 1$. Wegen 2.8 muß $\mu < \mu_a$ gelten. Dann haben wir:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{\mu+j}(u, a)t^j = E(u, a, t) + F(u, a, t),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\mu+j}(u, a)t^j = A(u, a, t) + B(u, a, t)$$

mit

$$E(u, a, t) = \sum_{j=0}^{\mu_a-\mu-1} f_{\mu+j}(u, a)t^j = \sum_{\mu \leqslant \lambda^1\lambda^2 j < \mu_a} (\alpha^{\lambda^1\lambda^2 j} - a^{\lambda^1\lambda^2 j}) f^2_{\lambda^1 j} t^{\lambda^1\lambda^2 j-\mu},$$

$$A(u, a, t) = \sum_{j=0}^{\mu_a-\mu-1} \psi_{\mu+j}(u, a)t^j = \sum_{\mu < \lambda^1\lambda^2 j < \mu_a} (\alpha^{\lambda^1\lambda^2 j} - a^{\lambda^1\lambda^2 j}) \psi^2_{\lambda^1 j} t^{\lambda^1\lambda^2 j-\mu}.$$

Aufgrund der Konvergenz

$$\frac{E(u_n, a_n, t_n)}{1-a_n^\mu} \to f_{\mu^2}^2(0),$$

muß gelten

$$\frac{|F(u_n, a_n, t_n)|}{|1-a_n^\mu| + |A(u_n, a_n, t_n) + B(u_n, a_n, t_n)|} \to \infty,$$

dann aber auch

$$\frac{|F(u_n, a_n, t_n)|}{\frac{1}{2}|1-a_n^\mu| + |(1-a_n^\mu)\psi_{\mu^2}^2(u_n) + B(u_n, a_n, t_n)|} \to \infty.$$

Nun gilt:

$$t_n^{\mu-\mu_a} F(u_n, a_n, t_n) \to f_{\mu_a}(0, \alpha);$$

darum muß gelten

$$(1-a_n^\mu)\psi_{\mu^2}^2(u_n)t_n^{\mu-\mu_a} \to -\psi_a(0, 0).$$

Dann gilt aber:

$$\frac{F(u_n, a_n, t_n)}{1-a_n^\mu} \to -\frac{f_{\mu_a}(0, \alpha)\psi_{\mu^2}^2(0)}{\psi_a(0, 0)}.$$

Widerspruch! Unser Satz ist bewiesen. ∎

Wir können 2.1 wie folgt verallgemeinern.

2.9. Satz. *Sei X eine Hyperfläche und U eine offene Teilmenge eines Banachraumes E. Es sei ferner $E = E' \oplus E''$ mit $E' \in \mathcal{G}^1(E)$, $E'' \in \mathcal{G}_1(E)$, sowie $U = U' + U''$ mit Gebieten U', U'' in E', E''.*

Gilt dann

$$E'' \cap C_4(X, x) = \{0\} \qquad \forall x \in X$$

und bezeichnet $\pi\colon X \to U'$ die natürliche Abbildung, so ist jede relativ π L-holomorphe Abbildung $f\colon X \to F$ in einen Banachraum F bereits L-holomorph. ∎

Beweis. Man betracht eteinen Punkt $y \in Y$ und stellt unter Zulassung von Verkleinerungen von U und von biholomorphen Transformationen von U, welche die Eigenschaft des C_4-Kegels und der relativen L-Holomorphie unberührt lassen, auf kanonische Weise die Situation 2.1 her. ∎

2.10. Satz. *X, $\tilde{X}$ seien Hyperflächen; die Situation aus* 1.13 *liege vor. Dann gilt: Ein Faserraumisomorphismus*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi"] \\ & U' & \end{tikzcd}$$

ist genau dann L-biholomorph, wenn $f|X_0$ relativ π L-biholomorph ist. ■

Beweis. Seien X^1, X^2 irreduzible Komponenten von X ($X^1 = X^2$ ist zugelassen) und seien Φ^1, Φ^2 wie im Beweis 2.1. Wir setzen

$$f^k := f\circ\Phi^k\colon\ \dot{U}\times K^k \to E \qquad (k = 1, 2)$$

und müssen 2.3 ableiten. Das geschieht mit einer Argumentation, die völlig analog ist zu der in [8], Beweis zu Proposition 3.14. ■

Aus 2.10 folgt:

2.11. X sei eine Hyperfläche; die Situation aus 1.8 liege vor. Dann ist der kanonische Faserraumisomorphismus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y\times X_0 \arrow[dl] \\ & \dot{U} & \end{tikzcd}$$

L-biholomorph. ■

Wir übertragen die Ergebnisse 2.9–2.11 auf Lipschitz-Hyperflächen.

2.12. Satz. *Es sei X eine Lipschitz-Hyperfläche und U eine offene Teilmenge eines Banachraumes E.*

Es sei ferner $E = E'\oplus\check{E}\oplus{}''E$ mit $E'\in\mathscr{G}^p(E)$, $\check{E}\in\mathscr{G}_1(E)$, ${}''E\in\mathscr{G}_{p-1}(E)$, sowie $U = U'+\check{U}+{}''U$ mit Gebieten U', $\check{U}$, ${}''U$ in E', $\check{E}$, ${}''E$.

Gilt dann

$$E''\cap C_4(X, x) = \{0\} \quad \forall x\in X, \quad E'' := \check{E}\oplus{}''E,$$

$$''E\cap C_5(X, x) = \{0\} \quad \forall x\in X$$

und bezeichnet $\pi\colon X\to U'$ die natürliche Abbildung, so ist jede relativ π L-holomorphe Abbildung $f\colon X\to F$ in einen Banachraum F bereits L-holomorph. ■

Beweis. Sei $x_0\in X$. Wir gehen von der in 1.2 dargestellten Situation aus — was wegen $C_4(X, x_0)\cap E'' = \{0\}$ möglich ist — und lassen Verkleinerungen von U zu. Aufgrund von 1.4 ist $\check{\pi}$ L-biholomorph. Außerdem ist

$$\check{E}\cap C_4('X, 'x) = \{0\} \qquad \forall 'x\in 'X.$$

Aufgrund von 2.9 ist $f\circ\check{\pi}^{-1}\colon 'X\to F$ L-holomorph, dann aber auch f. ■

Analog zeigt man mit Hilfe von 2.10:

2.13. Satz. *X, $\tilde{X}$ seien Lipschitz-Hyperflächen; die Situation aus* 1.13 *liege vor. Es gelte:*

$$E'' = \check{E}\oplus{}''E \quad \text{mit} \quad \check{E}\in\mathscr{G}_1(E),\ {}''E\in\mathscr{G}_{p-1}(E),$$

und

$$''E\cap C_5(X, x) = \{0\} \quad \forall x\in X,$$

$$''E\cap C_5(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{0\} \quad \forall \tilde{x}\in\tilde{X}.$$

Dann gilt: Ein Faserraumisomorphismus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi"] \\ & U' & \end{tikzcd}$$

ist genau dann L-biholomorph, wenn $f|X_0$ relativ π L-biholomorph ist. ■

Aus 2.13 folgt:

2.14. X sei eine L-Hyperfläche; die Situation aus 1.8 liege vor. Dann ist der kanonische Faserraumisomorphismus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y\times X_0 \arrow[dl] \\ & \dot{U} & \end{tikzcd}$$

L-biholomorph. ■

2.11 und 2.14 können wie folgt darstellungsunabhängig formuliert werden:

2.15. Satz. *X sei eine Hyperfläche oder eine Lipschitz-Hyperfläche. Ist X längs Y Puiseux-regulär, so ist X längs Y Lipschitz-regulär.* ■

Im folgenden Paragraphen zeigen wir die Umkehrung von 2.15

§ 3. Charakterisierung der Lipschitz-Regularität.

3.1. Satz. *Ist X längs Y Lipschitz-regulär, so ist X längs Y Puiseux-regulär.* ■

Beweis. Wir dürfen davon ausgehen, daß die Situation 1.6 vorliegt, und folgen der Argumentation aus [8]. O.B.d.A. besitzt Z höchstens eine isolierte Singularität in 0.

Wir betrachten die Abbildung

$$g := f^{-1}\colon\ Y\times Z\to X.$$

Sie ist eine s-biholomorphe Abbildung mit den Ausnahmemengen $Y\times\{0\}$ und Y; g bildet Komponenten auf Komponenten ab. Wir betrachten eine Komponente Z^0 von Z, eine Puiseux-Normalisierung $\Phi^0\colon K^0 \to \ddot{F}$ (K^0 Kreis um Null in C) von Z^0 und die Bildkomponente $X^0 := g(Y\times Z^0)$.

$$g^0\colon \dot{U}\times K^0 \to X^0, \qquad g^0(u, z) := g\big(u, \Phi^0(z)\big),$$

ist eine holomorphe topologische Abbildung. Wir haben

$$g^0(u, z) = \big(u, \ddot{g}^0(u, z)\big), \qquad \ddot{g}^0(u, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{g}_j^0(u) z^j;$$

$$\Phi^0(z) = \sum_{j=\mu^0}^{\infty} \Phi_j^0 z^j, \qquad \Phi_{\mu^0}^0 \neq 0.$$

Wir vergleichen für $u \in \dot{U}$ die Zahl

$$\omega_0(u) := \min\{j\colon \ddot{g}_j^0(u) \neq 0\}$$

mit der Multiplizität μ^0.

Es gilt:

$$|g^0(u, z) - g^0(u, 0)| = |z|^{\omega_0(u)} \Big|\sum_{j=0}^{\infty} \ddot{g}^0_{\omega_0(u)+j}(u) z^j\Big|,$$

$$|\Phi^0(z) - \Phi^0(0)| = |z|^{\mu_0} \Big|\sum_{j=0}^{\infty} \Phi^0_{\mu^0+j} z^j\Big|.$$

Aus der L-Biholomorphie von g folgt:

$$\omega_0(u) = \mu^0 \qquad \forall u \in \dot{U},$$

und daraus folgt:

$$\operatorname{codim} C_4(X^0, x) = p \qquad \forall x \in Y. \ \blacksquare$$

3.2. Satz. *Ist X längs Y Lipschitz-regulär und $p \geqslant 2$, so ist X eine Lipschitz-Hyperfläche.* $\blacksquare$

Beweis. Wir gehen wieder von Situation 1.6 aus. Wie in 1.12 sei $X_y := X \cap (y + \ddot{E})$ für $y \in Y$. O.B.d.A. ist $\ddot{F} = \ddot{E}$, $Z = X_0$, $f|X_0 = \mathrm{id}_{X_0}$; außerdem sei X_0 höchstens in 0 singulär.

Wir lassen kommentarlos Verkleinerungen von U zu. Es existeren Zerlegungen

$$\ddot{E} = \hat{E} \oplus \check{E} \oplus {}''E, \qquad \hat{E}, \check{E} \in \mathscr{G}_1(E), \qquad {}''E \in \mathscr{G}_{p-1}(E);$$

$$U = \dot{U} + \hat{U} + \check{U} + {}''U,$$

wobei wir $\dot{U}, \hat{U}, \check{U}, {}''U$ als Kugeln um 0 in $\dot{E}, \hat{E}, \check{E}, {}''E$ voraussetzen dürfen, so daß für $E' := \dot{E} \oplus \hat{E}$, $E'' := \check{E} \oplus {}''E$ und $U' := \dot{U} + \hat{U}$, $U'' := \check{U} + {}''U$ gilt:

$$\varrho := p_{E'', \hat{E}}|Z\colon Z \to \hat{U}, \qquad \pi := p_{E'', E'}|X\colon X \to U'$$

sind analytische Überlagerungen,

$$\check{\varrho}\colon Z \to {}'Z := p_{''E, \hat{E}\oplus\check{E}}(Z)$$

(vgl. 1.2) ist eine L-Biholomorphie. Wir betrachten zwei Komponenten Z^1, Z^2 von Z ($Z^1 = Z^2$ ist zugelassen) und die zugehörigen Komponenten X^1, X^2 von X, und zeigen, daß die Vektoren $v \in E$, zu denen Folgen (x_n^1) in X^1, (x_n^2) in X^2, (c_n) in C existieren mit

3.3 $\quad x_n^1 \to 0, \quad x_n^2 \to 0, \quad c_n(x_n^1 - x_n^2) \to v,$

eine Ramische Menge $C_5(X^1, X^2, 0)$ einer Codimension $\geqslant p-1$ bilden. Daß $C_5(X^1, X^2, 0)$ eine Ramische Menge ist, sieht man wie in [6]; es geht um die Codimensionsaussage. Wir zeigen, daß $C_5(X^1, X^2, 0) \cap (0 + E'')$ in endlich vielen Geraden enthalten ist.

Wir identifizieren $\hat{E}$ und $\check{E}$ mit C und betrachten Puiseux-Normalisierungen $\Phi^k\colon K^k \to Z^k$ ($k = 1, 2$). Es ist

$$\Phi^k(t) = \big(t^{\mu^k}, \psi^k(t), \chi^k(t)\big) \in \hat{E} \oplus \check{E} \oplus {}''E,$$

$$\psi^k(t) = \sum_{j=\mu^k}^{\infty} \psi_j^k t^j.$$

Wir betrachten einen Vektor $v = (0, v'') \in E' \oplus E''$ aus $C_5(X^1, X^2, 0)$ und dazu Folgen gemäß 3.3.

Wir gehen im weiteren kommentarlos zu geeigneten Teilfolgen über. Insbesondere dürfen wir dann annehmen, daß für die korrespondierenden Folgen $(y_n^1, z_n^1) \in Y \times Z^1$, $(y_n^2, z_n^2) \in Y \times Z^2$ gilt:

$$c_n(y_n^1 - y_n^2, z_n^1 - z_n^2) \to w = (0, \ddot{w}), \qquad w \in C_5(Y\times Z^1, Y\times Z^2, 0) \cap (0 + \ddot{E}).$$

Wir setzen nun für $k = 1, 2$:

$$g^k := f^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\dot{U}}, \Phi^k)\colon \dot{U} \times K^k \to X^k,$$

$$g^k(u, t) = \big(u, \ddot{g}^k(u, t)\big), \qquad \ddot{g}^k(u, t) = \sum_{j=\mu^k}^{\infty} \ddot{g}_j^k(u) t^j;$$

$$\ddot{g}^k(u, t) = \big(\hat{g}^k(u, t), g''^k(u, t)\big) \in \hat{E} \oplus E'',$$

$$\hat{g}^k(u, t) = \sum_{j=\mu^k}^{\infty} \hat{g}_j^k(u) t^j, \qquad g''^k(u, t) = \sum_{j=\mu^k}^{\infty} g_j''^k(u) t^j.$$

Es ist:

$$\hat{g}^k(0,t) = t^{\mu^k}, \qquad g''^k(0,t) = \big(\psi^k(t), \chi^k(t)\big),$$

und wir haben Darstellungen

$$g^k(y_n^k, v_n^k) = f^{-1}(y_n^k, z_n^k) = x_n^k.$$

Wir dürfen annehmen, daß für alle n gilt:

$$|v_n^1|^{\mu^1} \geqslant |v_n^2|^{\mu^2}.$$

Dann existieren Zahlen t_n, a_n in C, $|a_n| \leqslant 1$, mit

$$v_n^1 = t_n^{\lambda^1}, \qquad v_n^2 = (a_n t_n)^{\lambda^2};$$

wobei wie im Beweis von 2.1 folgende Bezeichnungen benutzt werden: μ ist das kleinste gemeinsame Vielfache von μ^1, μ^2, $\lambda^k := \mu/\mu^k$. Wir haben:

$$t_n \to 0, \qquad a_n \to a, \qquad |a| \leqslant 1; \qquad c_n(y_n^1 - y_n^2) \to 0,$$

$$c_n\Big(\ddot{g}^1(y_n^1, t_n^{\lambda^1}) - \ddot{g}^2\big(y_n^2, (a_n t_n)^{\lambda^2}\big)\Big) \to (0, v'') \in \hat{E} \oplus E''.$$

Dann ist o.B.d.A. $y_n^1 = y_n^2 =: u_n$.

Wir setzen weiter:

$$K := \{t \in C\colon\ t^\mu \in \hat{U}\}, \qquad W := \{a \in C\colon\ |a| \leqslant 1\} \times K;$$

$\psi\colon W \to C$ mit

$$\psi(a,t) := \psi^1(t^{\lambda^1}) - \psi^2\big((at)^{\lambda^2}\big) = \sum_{j=\mu}^{\infty} \psi_j(a) t^j;$$

$\ddot{g}\colon \dot{U} \times W \to \ddot{E}$ mit

$$\ddot{g}(u, a, t) := \ddot{g}^1(u, t^{\lambda^1}) - \ddot{g}^2\big(u, (at)^{\lambda^2}\big) = \sum_{j=\mu}^{\infty} \ddot{g}_j(u, a) t^j.$$

Nach Voraussetzung existiert nun eine Konstante $C > 0$ mit:

$$3.4 \qquad \begin{aligned} &|\ddot{g}(u,a,t)| \leqslant C\big(|1-a^\mu|\,|t|^\mu + |\psi(a,t)|\big), \\ &|1-a^\mu|\,|t|^\mu + |\psi(a,t)| \leqslant C\,|\ddot{g}(u,a,t)| \qquad \forall (u,a,t) \in W. \end{aligned}$$

Im Falle $c_n t_n^\mu \to 0$ gilt dann $v = 0$; darum gebe es bei den weiteren Betrachtungen eine Konstante $c > 0$ mit

$$|c_n t_n^\mu| \geqslant c \qquad \forall n \in N.$$

Dann muß gelten: $a \in G := \{z \in C\colon\ z^\mu = 1\}$, weil wir anderenfalls hätten:

$$c_n\Big(\hat{g}^1(u_n,\ t_n^{\lambda^1}) - \hat{g}^2\big(u_n, (a_n t_n)^{\lambda^2}\big)\Big) \to \big(\hat{g}^1_{\mu^1}(0) - a^\mu \hat{g}^2_{\mu^2}(0)\big) \cdot \frac{\hat{w}}{1-a^\mu} = \hat{w} \neq 0,$$

wobei allgemein die $\hat{E}$-Komponente durch Anbringen des Zeichens ˆ angegeben wird. Es gilt:

$$c_n(a^\mu - a_n^\mu) t_n^\mu \to \hat{w}.$$

Darum haben wir im Fall $X^1 = X^2$, $a = 1$:

$$c_n \ddot{g}(u_n, a_n, t_n) \to \ddot{g}^1_{\mu^1}(0)\hat{w}$$

und damit $v = 0$.

Im weiteren sei nun $X^1 \neq X^2$ oder $X^1 = X^2$ und $a \neq 1$. Wir setzen dann wieder:

$$\mu_a := \min\{j\colon\ \psi_j(a) \neq 0\}, \qquad \omega_a(u) := \min\{j\colon\ \ddot{g}_j(u,a) \neq 0\}.$$

Aufgrund von 3.4 muß gelten:

$$\mu_a = \omega_a(u) \qquad \forall u \in \dot{U};$$

außerdem ist $\mu_a < \infty$.

Im Fall $\mu = \mu_a$ haben wir:

$$v = \gamma\big(0, \ddot{g}_\mu(0,a)\big), \qquad \gamma := \lim c_n t_n^\mu.$$

Nun sei $\mu < \mu_a$. Dann haben wir:

$$\ddot{g}(u,a,t) = E(u,a,t) + F(u,a,t),$$

$$E(u,a,t) := \sum_{j=\mu}^{\mu_a - 1} \ddot{g}_j(u,a) t^j = \sum_{\mu \leqslant \lambda^1\lambda^2 j < \mu_a} (\alpha^{\lambda^1\lambda^2 j} - a^{\lambda^1\lambda^2 j}) \ddot{g}^2_{\lambda^1 j}(u) t^{\lambda^1\lambda^2 j},$$

$$c_n E(u_n, a_n, t_n) \to \hat{w}\ddot{g}^2_{\mu^2}(0) = \hat{w}\big(1, g''^2_{\mu^2}(0)\big),$$

$$c_n F(u_n, a_n, t_n) \to \gamma \ddot{g}_{\mu_a}(0, a), \qquad \gamma := \lim c_n t_n^{\mu_a};$$

$$v = \gamma\big(0, g''_{\mu_a}(0,a) - \hat{g}_{\mu_a}(0,a) \cdot g''^2_{\mu^2}(0)\big),$$

wobei im allgemeinen die E''-Komponente durch Anbringen des Zeichens $''$ angegeben wird.

Wir haben gezeigt, daß $C_5(X^1, X^2, 0) \cap (0 + E'')$ in endlich vielen Geraden liegt. ∎

Wir erhalten zusammenfassend folgende Charakterisierung der Lipschitz-Regularität.

3.5. Satz. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *X ist längs Y Lipschitz-regulär.*

(2) *X ist längs Y Puiseux-regulär und Hyperfläche oder Lipschitz-Hyperfläche.*

(3) $\operatorname{codim} C_4(X, x) = p\ \ \forall x \in Y$, $\operatorname{codim} C_5(X, x) \geqslant p - 1\ \ \forall x \in Y$. ∎

§ 4. Lipschitz-Regularität von Singularitäten.

4.1. Satz. *Sei X längs Y Puiseux-regulär und $p \geqslant 2$. Dann gibt es zu jedem Punkt $y \in Y$ eine offene Y-Umgebung W und eine Ausnahmemenge A von W, derart daß X in allen Punkten von W-A eine L-Hyperfläche ist.* ■

Beweis. Wir gehen von der Situation 1.8 aus, betrachten zwei Komponenten X^1, X^2 von X und zeigen, daß $C_5(X^1, X^2, y) \cap (0 + E'')$ ($X^1 = X^2$ ist zugelassen) für alle Punkte $y \in Y$ außerhalb einer Ausnahmemenge A von Y in endlich vielen Geraden enthalten ist. Dazu betrachten wir einen Punkt $y \in Y$, einen Vektor $v = (0, v'') \in E' \oplus E''$ aus $C_5(X^1, X^2, 0)$ und Folgen gemäß 3.3:

$$x_n^1 \to y, \quad x_n^2 \to y, \quad c_n(x_n^1 - x_n^2) \to v.$$

Wir identifizieren $\hat{E}$ mit C und versehen die Größen der Puiseux-Normalisierung, die sich auf X^k beziehen, mit dem Index k. Die Größen μ, λ^k, K, W, ψ seien wie im Beweis von 2.1 gebildet; nur daß nun ψ: $W \to E''$ eine Abbildung in den p-dimensionalen Raum E'' ist.

Analog zum Beweis von 3.2 haben wir korrespondierende Folgen $(y_n^k, v_n^k) \in \dot{U} \times K^k$ zu x_n^k, und wir dürfen wieder annehmen

$$|v_n^1|^{\mu^1} \geqslant |v_n^2|^{\mu^2},$$

so daß wiederum Zahlen t_n, a_n in C, $|a_n| \leqslant 1$, existieren mit

$$v_n^1 = t_n^{\lambda^1}, \quad v_n^2 = (a_n t_n)^{\lambda^2}.$$

Wir dürfen ferner davon ausgehen, daß gilt:

$$t_n \to 0, \quad a_n \to a, \quad |a| \leqslant 1; \quad y_n^1 = y_n^2 =: u_n.$$

Im Fall $c_n t_n^\mu \to 0$ gilt $v = 0$; darum gebe es bei den weiteren Betrachtungen eine Konstante $c > 0$ mit

$$|c_n t_n^\mu| \geqslant c \qquad \forall n \in N.$$

Wegen $c_n(1 - a_n^\mu) t_n^\mu \to 0$ muß dann a eine μ-te Einheitswurzel sein. Sei G wie im Beweis 2.1 definiert. Es ist $a \in G$.

Im Fall $X^1 = X^2$, $a = 1$, haben wir

$$c_n \psi(u_n, a_n, t_n) \to 0, \qquad \text{also} \qquad v = 0.$$

Im weiteren sei $X^1 \neq X^2$ oder $X^1 = X^2$ und $a \neq 1$. Wir definieren μ_a wie im Beweis von 2.1 und wählen y außerhalb von

$$A_a := \{u \in Y: \ \psi_{\mu_a}(u, a) = 0\}.$$

Wir dürfen dann annehmen, daß $A_a = \emptyset$ und $y = 0$ ist.

Im Fall $\mu = \mu_a$ haben wir $v \in C \cdot (0, \psi_\mu(0, a))$.

Ist $\mu < \mu_a$, so sei

$$\psi(u, a, t) = E(u, a, t) + F(u, a, t),$$

$$E(u, a, t) = \sum_{\mu \leqslant \lambda^1 \lambda^2 j < \mu_a} (a^{\lambda^1 \lambda^2 j} - a^{\lambda^1 \lambda^2 j}) \psi^2_{\lambda^1 j}(u) t^{\lambda^1 \lambda^2 j}.$$

Dann gilt:

$$c_n E(u_n, a_n, t_n) \to 0, \quad c_n F(u_n, a_n, t_n) \to v'', \quad v \in C \cdot (0, \psi_{\mu_a}(0, a)). \ ■$$

Wir fassen 4.1 und 1.11 zusammen:

4.2. Satz. *Es sei Y eine $(p+1)$-codimensionale Zusammenhangskomponente der Menge der regulären Punkte der Singularitätenmenge von X. Dann gibt es eine abgeschlossene vernachlässigbare Teilmenge A von Y mit der Eigenschaft: $X - A$ ist längs $Y - A$ Lipschitz-regulär.* ■

Aufgrund von Lemma 4.6 [6] gilt:

4.3. Zusatz zu 4.2. *Es ist*

$$\operatorname{codim} C_4(X, x) = p \qquad \forall x \in Y - A,$$

$$\operatorname{codim} C_5(X, x) = p - 1 \qquad \forall x \in Y - A. \ ■$$

Dies ist eine Verallgemeinerung von Proposition 3.6 in [7].

Literatur

[1] E. Böger, *Zur Theorie der Saturation bei analytischen Algebren*, Math. Ann. 211 (1974), 119–143.

[2] — *Über die Gleichheit von absoluter und relativer Lipschitz-Saturation bei analytischen Algebren*, Manuscripta Math. 16 (1975), 229–249.

[3] F. Pham et B. Teissier, *Fraction Lipschitziennes d'une algèbre analytique complexe et saturation de Zariski*, Centre de Math. de l'Ecole Polyt., Paris M 17. 0669 1969.

[4] J. P. Ramis, *Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe*; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970.

[5] H.-J. Reiffen und H. W. Trapp, *Ein Beitrag zur Whitney-Regularität im unendlichdimensionalen Fall*, Comm. Math. Helv. 54 (1979), 159–172.

[6] W. Schickhoff, *Whitneysche Tangentenkegel, Multiplizitätsverhalten, Normal-Pseudoflachheit und Äquisingularitätstheorie für Ramissche Räume*, Schr. Math. Inst. Univ. Münster, 2. Serie, 12 (1977).

[7] J. Stutz, *Analytic sets as branched coverings*, Trans. Amer. Math. Soc. 166 (1972), 241–259.

[8] — *Equisingularity and equisaturation in codimension 1*, Amer. J. Math. 94 (1972), 1245–1268.

[9] O. Zariski, *Studies in equisingularity I, II, III*, ibid. 87 (1965), 507–536 und 972–1006; 90 (1968), 961–1023.
[10] — *General theory of saturation and of saturated local rings I, II, III*, ibid. 93 (1971), 573–648 und 872–964; 97 (1975), 415–502.

FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT OSNABRÜCK
D 4500 OSNABRÜCK, BR DEUTSCHLAND

Received January 9, 1979 (1501)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXI. (1982)

Positive operatorwertige Maße und banachraumwertige stationäre Prozesse auf LCA-Gruppen

von

F. Schmidt (Dresden)

Abstract. It is well known that a stationary process admits a representation in moving averages iff his non-random spectral measure is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. In this paper we generalize this theorem to stationary processes having as set of parameters an arbitrary locally compact abelian T_0-group and as set of values an arbitrary complex Banach space (more exactly, we are concerned with stationary mappings of the group of parameters into the space of all bounded linear operators $\mathfrak{F} \to \mathfrak{H}$ where $\mathfrak{F}$ is a Banach space and $\mathfrak{H}$ is a Hilbert space). In the proof we make use of a decomposition theorem for the spectral density of the process which is also proved here and which was proved formerly for the group of the integers under a separability and a boundedness condition by Miamee and Salehi. Besides, two isomorphic theorems for the treated class of stationary processes are given.

0. Einleitung. Bekanntlich gestattet ein stationärer Prozeß auf der Gruppe $\boldsymbol{Z}$ der ganzen oder der Gruppe $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen genau dann eine Darstellung durch gleitende Mittel, wenn sein nichtzufälliges Spektralmaß bezüglich des Lebesgueschen Maßes absolutstetig ist. Wie in [1] gezeigt wurde, bleibt diese Aussage für beliebige lokalkompakte abelsche T_0-Gruppen richtig, wenn man nur den Terminus „Lebesguesches Maß" durch „Haarsches Maß auf der Charaktergruppe" ersetzt. Sowohl für den Fall der Gruppe $\boldsymbol{Z}$ bzw. der Gruppe $\boldsymbol{R}$ als auch für den in [1] betrachteten allgemeineren Fall wird im Beweis dieses Kriteriums die (triviale) Tatsache benutzt, daß jede nichtnegative integrierbare Funktion als Betragsquadrat einer quadratisch integrierbaren Funktion darstellbar ist. Betrachtet man statt nichtnegativer Funktionen solche, deren Werte nichtnegative beschränkte lineare Operatoren in einem Hilbertraum sind, so folgt die Existenz einer entsprechenden Darstellung sofort aus der Existenz der Quadratwurzel für solche Operatoren. Wesentlich komplizierter liegen die Verhältnisse jedoch, wenn man Funktionen untersucht, deren Werte nichtnegative beschränkte lineare Operatoren von einem Banachraum in seinen dualen Raum sind. Dennoch kann man auch in diesem Fall mit Hilfe einer sogenannten „Quasi-Quadratwurzel" die gewünschte Darstellung erhalten (Miamee, Salehi [8], für einen einzelnen Operator — oder eine konstante operatorwertige Funktion — wurde die