COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLIV 1981 FASC. 2

ZUR EXISTENZ PARALLELER SPINORFELDER ÜBER RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN

VON

TH. FRIEDRICH (BERLIN)

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir, welche Anforderungen an die Geometrie eines Riemannschen Raumes sich aus der Existenz paralleler Spinorfelder ergeben. Bereits Hitchin (vgl. [5]) bemerkte (allerdings unter einschränkenden, topologischen Voraussetzungen), daß aus der Existenz nichtverschwindender, paralleler Spinorfelder erhebliche Bedingungen an die Metrik des zugrundeliegenden Riemannschen Raumes folgen. Indem es uns durch eine geeignete Kontraktion im Spinorbündel gelingt, den Ricci-Tensor des Riemannschen Raumes im Spinorkalkül natürlicherweise zu reproduzieren (Satz 1), sind wir insbesondere in der Lage, aus der lokalen Existenz paralleler Spinorfelder das Verschwinden des Ricci-Tensors zu schließen. Im letzten Abschnitt der Arbeit geben wir für eine kompakte Spin-Mannigfaltigkeit mit nichttrivialem, parallelem Spinorfeld eine Abschätzung der Dimension des Kerns des Dirac-Operators von unten durch die Hälfte der ersten Betti-Zahl der Mannigfaltigkeit an.

1. Vorbereitende Bezeichnungen. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine orthonormale Basis des euklidischen Raumes $(R^n, \langle,\rangle)$ und bezeichne $\mathrm{Cliff}(R^n)$ die Clifford-Algebra der Bilinearform $(R^n, -\langle,\rangle)$. Ihre Komplexifizierung $\mathrm{Cliff}^c(R^n)$ ist isomorph zur Matrizenalgebra $C(2^k)$, falls $n = 2k$, beziehungsweise isomorph zu $C(2^k)+C(2^k)$, falls $n = 2k+1$. Wir wählen jeweils eine solche Isomorphie und bezeichnen sie mit $\varkappa$. Der Totalraum der universellen Überlagerung $\varrho : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ der speziellen orthogonalen Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ ist in $\mathrm{Cliff}(R^n)$ enthalten und wird hier von allen Produkten $x \cdot y$ mit $x, y \in R^n$ und $|x| = |y| = 1$ multiplikativ erzeugt. Schränken wir $\varkappa$ auf $\mathrm{Spin}(n)$ ein und projizieren wir im Fall $n = 2k+1$ noch auf die erste Achse, so erhalten wir eine komplexe, $2^{[n/2]}$-dimensionale Darstellung Δ_n der Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$

$$(*) \qquad \varkappa : \mathrm{Spin}(n) \to GL(\Delta_n),$$

welche für $n \equiv 1 \pmod 2$ irreduzibel ist und für $n \equiv 0 \pmod 2$ in zwei irreduzible Komponenten $\Delta_n = \Delta_n^+ + \Delta_n^-$ $(n = 2k)$ zerfällt. Die Multiplikation $\mu : R^n \otimes \Delta_n \to \Delta_n$ eines Vektors mit einem Spinor ist ein Homomorphismus der entsprechenden $\mathrm{Spin}(n)$-Darstellungen und für $\mu(v \otimes \psi)$ schreiben wir einfach $v \cdot \psi$. Die Lie-Algebra $\mathbf{spin}(n)$ der Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$ kann mit der linearen Hülle der Menge $\{e_i e_j : i < j\}$ in $\mathrm{Cliff}(R^n)$ identifiziert werden. Ist E_{ij} die Standardbasis der Lie-Algebra $\mathbf{so}(n)$, so ist unter Verwendung dieser Identifikation das Differential

$$\varrho_* : \mathbf{spin}(n) \to \mathbf{so}(n)$$

durch $\varrho_*(e_i e_j) = 2E_{ij}$ gegeben. Für das Differential der Darstellung $(*)$ gilt $\varkappa_* = \varkappa$ (vgl. [6] und [7]).

Wir betrachten nun eine parakompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit X^n der Dimension $n \geqslant 3$ und bezeichnen mit $(P, \pi, X^n; \mathrm{SO}(n))$ das assoziierte $\mathrm{SO}(n)$-Hauptfaserbündel. Eine Spin-Struktur ist ein Hauptfaserbündel $(Q, \pi, X^n; \mathrm{Spin}(n))$ und eine Überlagerung $\lambda : Q \to P$ derart, daß

$$\begin{array}{ccc} Q \times \mathrm{Spin}(n) & \longrightarrow & Q \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda \times \varrho} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ P \times \mathrm{SO}(n) & \longrightarrow & P \end{array} \qquad \begin{array}{l} \searrow^{\pi} \\ X^n \\ \nearrow_{\pi} \end{array}$$

kommutiert. Wir setzen voraus, daß die betrachtete Riemannsche Mannigfaltigkeit eine Spin-Struktur besitzt und fixieren eine solche. Der Levi-Cività-Zusammenhang $Z : TP \to \mathbf{so}(n)$ hebt sich dann zu einem Zusammenhang $\hat{Z} : TQ \to \mathbf{spin}(n)$ derart, daß

$$\begin{array}{ccc} TQ & \xrightarrow{\hat{Z}} & \mathbf{spin}(n) \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_*} \\ TP & \xrightarrow{Z} & \mathbf{so}(n) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm ist. Im zur Spin-Darstellung Δ_n der Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$ assoziierten Spinorbündel

$$\mathcal{S} = Q \underset{\mathrm{Spin}(n)}{\times} \Delta_n$$

induziert der Zusammenhang $\hat{Z}$ eine kovariante Ableitung

$$\nabla^{\mathcal{S}} : \Gamma(\mathcal{S}) \to (T^* X^n \otimes \mathcal{S}).$$

Sei $s = (s_1, \ldots, s_n) : V \to P$ ein lokales Reper von orthonormalen Vektorfeldern über einer einfach-zusammenhängenden, offenen Menge $V \subset X^n$. Der Zusammenhang Z induziert eine lokale Zusammenhangsform

$$Z^s = Z \circ s_* : TV \to \mathbf{so}(n).$$

Mittels

$$Z^s = \sum_{i<j} \omega_{ij} E_{ij}$$

erhalten wir dann 1-Formen ω_{ij} $(i<j)$ auf V, welche wir durch Antisymmetrie $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$ für beliebige Indizes definieren können. Für die kovariante Ableitung ∇ im Tangentialbündel gilt dann

$$\nabla_{s_i} s_j = \sum_{l=1}^{n} \omega_{jl}(s_i) s_l.$$

Der Schnitt $s: V \to P$ hebt sich zu einem Schnitt $\hat{s}: V \to Q$ und wir können die lokale Zusammenhangsform $\hat{Z}^{\hat{s}} = \hat{Z} \circ \hat{s}_*$ betrachten. Für sie gilt

$$\hat{Z}^{\hat{s}} = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j.$$

Ist nun $u(\varepsilon)$ eine Basis des Spin-Moduls Δ_n, so erhalten wir durch $\eta(\varepsilon) = [\hat{s}, u(\varepsilon)]$ linear unabhängige Schnitte $\eta(\varepsilon)$ in $\mathcal{S}$ über V. Dann gilt

$$\nabla_i^{\mathcal{S}} \eta(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{l<m} \omega_{lm}(t)(s_l s_m) \cdot \eta(\varepsilon).$$

Abschließend bemerken wir noch, daß der Zusammenhang $\hat{Z}$ in Q eine absolute Differentiation $D^{\mathcal{S}}$ im Bündel $\mathcal{S}$ induziert, welche jeder p-Form mit Werten in $\mathcal{S}$ eine $(p+1)$-Form mit Werten in $\mathcal{S}$ zuordnet (vgl. [8]).

2. Wodurch tritt der Ricci-Tensor im Spinorbündel auf? Wir gehen von einer parakompakten, Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit X^n $(n \geqslant 3)$ mit ausgewählter Spin-Struktur sowie dem assoziierten Spinorbündel $\mathcal{S}$ aus. Den Ricci-Tensor Ric des Riemannschen Raumes fassen wir als (1, 1)-Tensor auf, welcher jedem Vektorfeld t ein Vektorfeld $\mathrm{Ric}(t)$ durch

$$\mathrm{Ric}(t) = \sum_{i,j=1}^{n} R_{ij} \langle t, s_i \rangle s_j \quad \text{mit} \quad R_{ij} = \sum_{l=1}^{n} R_{ilij}$$

zuordnet. Ist $\psi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein Schnitt im Spinorbündel $\mathcal{S}$, so können wir ψ zweimal absolut differenzieren und erhalten eine 2-Form $D^{\mathcal{S}} D^{\mathcal{S}} \psi$ mit Werten in $\mathcal{S}$. Durch

$$H^{\psi}(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot D^{\mathcal{S}} D^{\mathcal{S}} \psi(t, s_i)$$

definieren wir eine 1-Form mit Werten in $\mathcal{S}$.

SATZ 1. $H^{\psi}(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{Ric}(t)\cdot\psi$.

Beweis. Sei $\hat{\Omega} = d\hat{Z} + \frac{1}{2}[\hat{Z}, \hat{Z}]$ die Krümmungsform des Zusammenhanges $\hat{Z}$. Betrachten wir die lokale Krümmungsform $\hat{\Omega}^{\hat{s}} = \hat{\Omega} \circ \hat{s}_*$, so erhalten wir

$$\hat{\Omega}^{\hat{s}} = \frac{1}{2}\sum_{i<j} d\omega_{ij} e_i e_j + \frac{1}{8}\sum_{k<l}\sum_{p<q} \omega_{kl} \wedge \omega_{pq}[e_k e_l, e_p e_q].$$

Berechnen wir die Kommutatoren und benutzen wir die Strukturgleichungen

$$d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\sigma^k \wedge \sigma^l,$$

in denen $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ ein zu $s_1, \ldots, s_n$ duales Reper ist, so ergibt sich

$$\hat{\Omega}^{\hat{s}} = \frac{1}{4}\sum_{i<j}\Big(\sum_{k,l} R_{ijkl}\sigma^k \wedge \sigma^l\Big) e_i e_j.$$

Aus $D^{\mathscr{S}} D^{\mathscr{S}} \psi = \varkappa_*(\hat{\Omega})\psi = \varkappa(\hat{\Omega})\psi$ (vgl. [8]) folgt somit

$$D^{\mathscr{S}} D^{\mathscr{S}} \psi(t_1, t_2) = \frac{1}{4}\sum_{i<j}\sum_{k,l} R_{ijkl}\sigma^k \wedge \sigma^l(t_1, t_2)(s_i s_j)\cdot\psi$$

und daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
H^{\psi}(t) &= \sum_m s_m \cdot D^{\mathscr{S}} D^{\mathscr{S}} \psi(t, s_m) \\
&= \frac{1}{4}\sum_m \sum_{i<j} \sum_{k,l} R_{ijkl}\sigma^k \wedge \sigma^l(t, s_m)(s_m s_i s_j)\cdot\psi \\
&= \frac{1}{2}\sum_m \sum_{i<j} \sum_k R_{ijkm}\sigma^k(t)(s_m s_i s_j)\cdot\psi \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i<j}\sum_k R_{ijki}\sigma^k(t)s_j\cdot\psi + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\sum_k R_{ijkj}\sigma^k(t)s_i\cdot\psi + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_k \sum_{i<j} \sum_{m\neq i,j} R_{ijkm}\sigma^k(t)(s_m s_i s_j)\cdot\psi \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Ric}(t)\cdot\psi + \frac{1}{2}\sum_k \sum_{i<j} \sum_{m\neq t,j} R_{ijkm}\sigma^k(t)(s_m s_i s_j)\cdot\psi.
\end{aligned}$$

Die zweite Summe verschwindet jedoch. Dies folgt aus der Bianchi-Identität des Krümmungstensors

$$R_{ijkl}+R_{jkil}+R_{kijl} = 0.$$

3. Parallele Spinorfelder. Ein Schnitt $\psi \in \Gamma(\mathcal{S})$ heißt *parallel*, falls $\nabla^{\mathcal{S}}\psi = 0$. Wir beschäftigen uns jetzt mit der Frage, welche Konsequenzen sich für die Geometrie des Raumes aus der Existenz eines parallelen Spinorfeldes ergeben. Dazu beweisen wir

SATZ 2. *Sei X^n eine parakompakte, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur sowie dem assoziierten Bündel $\mathcal{S}$. Sind $\psi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein nirgends verschwindender Schnitt und ω eine reelle 1-Form mit*

$$\nabla^{\mathcal{S}}_t \psi = \omega(t)\psi,$$

so verschwindet der Ricci-Tensor des Riemannschen Raumes identisch und ω ist eine geschlossene Form, $d\omega = 0$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $D^{\mathcal{S}}\psi = \omega\psi$ und daher

$$D^{\mathcal{S}}D^{\mathcal{S}}\psi = d\omega\psi - \omega D^{\mathcal{S}}\psi = d\omega\psi - \omega\wedge\omega\psi = d\omega\psi.$$

Die 1-Form H^{ν} hat somit die Gestalt

$$H^{\nu}(t) = \sum_m d\omega(t, s_m)s_m\cdot\psi.$$

Aus Satz 1 folgt dann

$$\sum_m d\omega(t, s_m)s_m\cdot\psi = -\frac{1}{2}\operatorname{Ric}(t)\cdot\psi,$$

$$\sum_m \Big\{2d\omega(t, s_m) + \sum_k R_{km}\langle t, s_k\rangle\Big\} s_m\cdot\psi = 0.$$

Weil ψ ungleich Null und ω eine reelle Form ist, erhalten wir daraus

$$2d\omega(s_k, s_m) = -R_{km}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist antisymmetrisch in den Indizes k und m, während die rechte Seite in ihnen symmetrisch ist. Daraus folgt Ric $= 0$ und $d\omega = 0$.

FOLGERUNG 1. *Sei X^n eine parakompakte, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur. Ist ψ ein nichtverschwindender, paralleler Schnitt im Spinorbündel $\mathcal{S}$, so ist der Ricci-Tensor des Riemannschen Raumes gleich Null.*

FOLGERUNG 2. *Sei X^n eine kompakte, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur und einem nichtverschwindenden, parallelen*

Schnitt im assoziierten Spinorbündel. Ist entweder die erste Betti-Zahl von X^n größer als $n-4$,

$$b_1(X^n) > n-4,$$

oder sind die k-ten Homotopiegruppen ($k > 1$) von X^n trivial,

$$\pi_k(X^n) = 0 \quad (k > 1),$$

so ist X^n eine flache Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Der Beweis der Folgerung 2 ergibt sich aus der Folgerung 1 und Resultaten von Fischer sowie Wolf (vgl. [2]), welche besagen, daß unter den angegebenen topologischen Bedingungen eine Ricci-flache Mannigfaltigkeit flach ist.

FOLGERUNG 3. *Eine 3-dimensionale, parakompakte, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit nichtverschwindendem, parallelem Spinorfeld ist flach.*

Tatsächlich, ist |Ric| die Länge des Ricci-Tensors, R die Skalarkrümmung und $|R|$ die Länge des Krümmungstensors, so besteht in einem 3-dimensionalen, Riemannschen Raum die Beziehung $R^2 - 4|\mathrm{Ric}|^2 + |R|^2 = 0$ (vgl. [1]). Somit können wir aus Ric $= 0$ das Verschwinden des Krümmungstensors schließen.

FOLGERUNG 4. *Sei X^4 eine kompakte, 4-dimensionale, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit einem nichtverschwindenden, parallelen Spinorfeld. Ist die Eulersche Charakteristik $\chi(X^4)$ gleich Null, so ist X^4 flach.*

Den Beweis von Folgerung 4 erhält man aus der Gauß-Bonnet-Forme

$$\chi(X^4) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{X^4} (R^2 - 4|\mathrm{Ric}|^2 + |R|^2)$$

(vgl. [1]) unmittelbar.

Beispiel 1. Wir gehen von einer Metrik auf dem Torus T^2 aus, deren Gauß'sche Krümmung nicht identisch verschwindet, und betrachten das Produkt $X^3 = T^2 \times S^1$. In X^3 wählen wir die kanonische Spin-Struktur. Das orthonormale Reper $s = (s_1, s_2, s_3)$, welches wir so bestimmen, daß s_3 tangential zu S^1 ist, hebt sich dann global zu einem Schnitt $\hat{s}: X^3 \to Q$ der Spin-Struktur. Ist somit $u(1)$, $u(-1) \in \Delta_3$ eine Basis von Δ_3, so erhalten wir durch $\eta(1) = [\hat{s}, u(1)]$ und $\eta(-1) = [\hat{s}, u(-1)]$ globale Schnitte im Spinorbündel $\mathcal{S}$. Nun kann diese Basis so gewählt werden, daß $(e_1 e_2) \cdot u(1) = iu(1)$ gilt (vgl. [4]). Dann folgt

$$\nabla_i^{\mathcal{S}} \eta(1) = \frac{1}{2} \sum_{<m} \omega_{lm}(t) s_l s_m \cdot \eta(1) = \frac{1}{2} \omega_{12}(t) i\eta(1).$$

Demnach ist im Bündel $\mathscr{S}$ die Gleichung

$$\nabla^{\mathscr{S}}\psi = \frac{i}{2}\omega_{12}\psi \qquad \text{mit } \psi \neq 0$$

lösbar, obwohl der Ricci-Tensor von X^3 ungleich Null und ω_{12} im allgemeinen keine geschlossene Form ist.

Dieses Beispiel zeigt, daß im Satz 2 die Voraussetzung „ω ist eine reelle 1-Form" wesentlich ist.

Beispiel 2. Wir geben nun ein Beispiel dafür an, daß das Verschwinden des Ricci-Tensors selbst lokal noch nicht hinreichend für die Existenz paralleler Spinorfelder ist. Sei X^4 die durch $x_1 > 0$, $0 < x_2 < \pi$ bestimmte offene Untermenge des R^4 und $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4$ das kanonische Reper von Vektorfeldern. Wir betrachten die Schwarzschild-Metrik g,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1+c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2\sin^2 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_1+c}{x_1} \end{pmatrix},$$

welche durch diese Vorzeichenwahl allerdings eine Riemannsche Metrik ist. Leicht überzeugt man sich davon, daß der Ricci-Tensor identisch gleich Null ist. Durch

$$s_1 = \sqrt{\frac{x_1+c}{x_1}}\,\partial_1, \qquad s_2 = \frac{1}{x_1}\partial_2,$$

$$s_3 = \frac{1}{x_1\sin x_2}\partial_3 \quad \text{und} \quad s_4 = \sqrt{\frac{x_1}{x_1+c}}\,\partial_4$$

erhalten wir ein orthonormales Reper von Vektorfeldern. Ist $\sigma^1, \ldots, \sigma^4$ dual dazu, so gilt

$$\omega_{12} = \sqrt{\frac{x_1+c}{x_1}}\frac{1}{x_1}\sigma^2, \qquad \omega_{13} = \sqrt{\frac{x_1+c}{x_1}}\frac{1}{x_1}\sigma^3,$$

$$\omega_{14} = -\frac{c}{2}\frac{1}{\sqrt{(x_1+c)x_1}}\frac{1}{x_1}\sigma^4, \qquad \omega_{23} = \frac{\cos x_2}{x_1\sin x_2}\sigma^3,$$

$$\omega_{24} = 0 = \omega_{34}.$$

Gemäß $\Delta_4 = \Delta_4^+ + \Delta_4^-$ zerfällt das Spinorbündel $\mathscr{S}$ in $\mathscr{S} = \mathscr{S}^+ + \mathscr{S}^-$. Wir zeigen, daß es in $\mathscr{S}^+$ keine nichttrivialen, parallelen Spinorfelder gibt. Auf die gleiche Weise kann die Nichtexistenz derartiger Spinorfelder

in $\mathcal{S}^-$ eingesehen werden. In [4] wurden lokale Basisschnitte $\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, von $\mathcal{S}$ derart konstruiert, daß $\eta(1,1)$ und $\eta(-1,-1)$ das Bündel $\mathcal{S}^+$ aufspannen. Schreibt man nun für $\psi = f\eta(1,1) + h\eta(-1,-1)$ die Gleichung $\nabla^{\mathcal{S}}\psi = 0$ aus, so erhält man

$$2df + if\omega_{12} + h\big(-\omega_{13} - i(\omega_{14} + \omega_{23})\big) = 0,$$

$$2dh + f\big(\omega_{13} - i(\omega_{14} + \omega_{23})\big) - ih\omega_{12} = 0.$$

Aus der angegebenen Gestallt der ω_{ij} schließt man nun zuerst, daß f und h nicht von x_1 abhängen und danach setzt man in dieses Gleichungssystem $s_2 = x_1^{-1}\partial_2$ ein. Dann ergibt sich

$$2\partial_2(f) = -if\sqrt{\frac{x_1 + c}{x_1}}, \qquad 2\partial_2(h) = ih\sqrt{\frac{x_1 + c}{x_1}},$$

woraus für $c \neq 0$ die Identität $f \equiv 0 \equiv h$ folgt.

Wir wenden uns jetzt 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu. Das Spinorbündel $\mathcal{S}$ über einem derartigen Raum zerfällt kanonisch in $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ + \mathcal{S}^-$.

SATZ 3. *Sei X^4 eine parakompakte, 4-dimensionale, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur sowie dem assoziierten Spinorbündel $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ + \mathcal{S}^-$. Existieren zwei nichtverschwindende, parallele Schnitte $\psi^+ \in \Gamma(\mathcal{S}^+)$ und $\psi^- \in \Gamma(\mathcal{S}^-)$ in $\mathcal{S}^+$ beziehungsweise $\mathcal{S}^-$, so ist X^4 flach.*

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, zeigen wir folgendes

LEMMA 1. *Sei X^n eine Mannigfaltigkeit und α, β, γ reelle 1-Formen auf ihr. Existieren komplexwertige Funktionen $f, g: X^n \to C$ derart, daß $|f| + |g| > 0$ und*

$$2df + if\alpha + g(\beta - i\gamma) = 0,$$

$$2dg + f(-\beta - i\gamma) - ig\alpha = 0,$$

so gelten folgende Beziehungen zwischen den Formen:

$$d\alpha = \beta \wedge \gamma, \qquad d\beta = \gamma \wedge \alpha, \qquad d\gamma = \alpha \wedge \beta.$$

Beweis. Wir differenzieren beide Gleichungen und erhalten

$$idf \wedge \alpha + if d\alpha + dg \wedge (\beta - i\gamma) + g(d\beta - id\gamma) = 0,$$

$$df \wedge (-\beta - i\gamma) + f(-d\beta - id\gamma) - idg \wedge \alpha - igd\alpha = 0.$$

Multiplizieren wir diese mit 2 und setzen wir df beziehungsweise dg aus den Ausgangsgleichungen ein, so ergibt sich nach Zusammenfassen

$$ifA + g(B + iC) = 0,$$

$$f(-B + iC) - igA = 0$$

mit

$$A = 2(da+\gamma\wedge\beta), \quad B = 2(d\beta+a\wedge\gamma)$$

und

$$C = 2(-d\gamma+a\wedge\beta).$$

Aus $|f|+|g|>0$ folgt nun $A^2+B^2+C^2=0$, und weil a, β, γ reelle Formen sind, erhalten wir $A=B=C=0$. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Beweis von Satz 3. Die Aussage des Satzes besteht in einer lokalen Behauptung. Somit können wir uns für den Beweis auf eine offene, einfachzusammenhängende Menge $U\subset X^4$ beschränken, über der ein orthonormales Reper $s=(s_1, s_2, s_3, s_4)$ von Vektorfeldern existiert. Den Schnitt $s\colon U\to P$ heben wir in das Bündel Q zu einem Schnitt $\hat{s}\colon U\to Q$. In [4] wurde eine Basis $u(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_i=\pm 1$, von Δ_4 angegeben und wir betrachten die dazu gehörigen Basisschnitte $\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=[\hat{s}, u(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]$ in $\mathscr{S}$. Wichtig ist nun zu bemerken, daß $\eta(1,1)$ und $\eta(-1,-1)$ das Bündel $\mathscr{S}^+$ aufspannen, während $\eta(1,-1)$ und $\eta(-1,1)$ ein Reper in $\mathscr{S}^-$ sind. Den Schnitt stellen wir in der Form

$$\psi^+ = f\eta(1,1)+g\eta(-1,-1)$$

mit komplexwertigen Funktionen f und g dar. Aus $\nabla^{\mathscr{S}}\psi^+=0$ folgt

$$0 = df\eta(1,1)+dg\eta(-1,-1)+\frac{1}{2}f\sum_{i<j}\omega_{ij}s_is_j\cdot\eta(1,1)+$$

$$+\frac{1}{2}g\sum_{i<j}\omega_{ij}\,s_is_j\cdot\eta(-1,-1).$$

Die Produkte $s_is_j\cdot\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ wurden in [4] gleichfalls vollständig berechnet. Wenden wir diese Formeln an, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$2df+if(\omega_{12}+\omega_{34})+g\big((\omega_{24}-\omega_{13})-i(\omega_{14}+\omega_{23})\big)=0,$$

$$2dg+f\big(-(\omega_{24}-\omega_{13})-i(\omega_{14}+\omega_{23})\big)-ig(\omega_{12}+\omega_{34})=0.$$

Wegen $|f|+|g|>0$ folgt dann aus Lemma 1

$$d\omega_{12}+d\omega_{34} = (\omega_{24}-\omega_{13})\wedge(\omega_{14}+\omega_{23}),$$

$$d\omega_{24}-d\omega_{13} = (\omega_{14}+\omega_{23})\wedge(\omega_{12}+\omega_{34}),$$

$$d\omega_{14}+d\omega_{23} = (\omega_{12}+\omega_{34})\wedge(\omega_{24}+\omega_{31}).$$

Wertet man analog $\nabla^{\mathscr{S}}\psi^-=0$ aus, so ergibt sich

$$d\omega_{34}-d\omega_{12} = (\omega_{13}+\omega_{24})\wedge(\omega_{23}-\omega_{14}),$$

$$d\omega_{13}+d\omega_{24} = (\omega_{23}-\omega_{14})\wedge(\omega_{34}-\omega_{12}),$$

$$d\omega_{23}-d\omega_{14} = (\omega_{34}-\omega_{12})\wedge(\omega_{13}+\omega_{24}).$$

Unter Verwendung der Strukturgleichungen des Riemannschen Raumes schließt man aus diesen 6 Gleichungen unschwer $R_{ijkl} = 0$. Somit ist X^4 flach.

FOLGERUNG 5. *Der Raum der parallelen Schnitte des Spinorbündels über einer nichtflachen, 4-dimensionalen, Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit hat maximal die Dimension* 2.

FOLGERUNG 6. *Hat eine 4-dimensionale, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit einen nichtverschwindenden, parallelen Schnitt im Spinorbündel und ein derartiges, paralleles Vektorfeld, so ist sie flach.*

Beweis. Wir zerlegen den parallelen Schnitt $\psi = \psi^+ + \psi^-$ gemäß der Aufspaltung $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ + \mathcal{S}^-$ und können $\psi^+ \neq 0$ voraussetzen. Dann ist ψ^+ gleichfalls parallel. Ist V das nichttriviale, parallele Vektorfeld, so ist $V \cdot \psi^+$ ein paralleler Schnitt in $\mathcal{S}^-$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.

4. Parallele Spinoren und der Kern des Dirac-Operators. Wir betrachten ein Vektorbündel E über einer Mannigfaltigkeit X^n mit kovarianter Ableitung ∇^E. Im Bündel $\mathrm{Hom}(E, E)$ wird dann durch

$$(\bar{\nabla}^E_i A)(e) = \nabla^E_i (Ae) - A(\nabla^E_i e)$$

mit $A \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, E))$ und $e \in \Gamma(E)$ eine kovariante Ableitung $\bar{\nabla}^E$ definiert. Diese allgemeine Konstruktion wenden wir auf das Spinorbündel $\mathcal{S}$ einer Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit und die kovariante Ableitung $\nabla^{\mathcal{S}}$ an. Wir erhalten eine kovariante Ableitung $\bar{\nabla}^{\mathcal{S}}$ in $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$.

Einen Vektor $t \in T(X^n)$ kann man durch $t(\psi) = t \cdot \psi$ als einen Homomorphismus des Spinorbündels $\mathcal{S}$ auffassen, wodurch eine Einbettung $T(X^n) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ des Tangentialbündels in $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ entsteht. Wir können somit ein Vektorfeld t einerseits mittels der kovarianten Ableitung ∇ im Tangentialbündel und andererseits mittels $\bar{\nabla}^{\mathcal{S}}$ ableiten. Das Ergebnis ist beide Male das gleiche.

LEMMA 2. *Für ein Vektorfeld $t \in \Gamma(T(X^n))$ gilt $\nabla t = \bar{\nabla}^{\mathcal{S}} t$.*

Beweis. Wir prüfen dies lokal nach. Sei $s_1, \ldots, s_n$ ein orthonormales Reper in $U \subset X^n$. Dann ist mit $t = t^i s_i$ und $v \in T(X^n)$

$$\nabla_v t = \sum_i v(t^i) s_i + \sum_{i,m} t^i \omega_{im}(v) s_m$$

und demnach

$$(\nabla_v t) \cdot \psi = \sum_i v(t^i) s_i \cdot \psi + \sum_{i,m} t^i \omega_{im}(v) s_m \cdot \psi.$$

Andererseits erhalten wir

$$(\bar{\nabla}^{\mathcal{S}}_v t)\psi = \nabla^{\mathcal{S}}_v (t \cdot \psi) - t \cdot (\nabla^{\mathcal{S}}_v \psi) = \sum_i v(t^i) s_i \cdot \psi + \sum_i t^i \nabla^{\mathcal{S}}_v (s_i \cdot \psi) - t \cdot (\nabla^{\mathcal{S}}_v \psi).$$

Ist nun in einem lokalen Reper $\eta(\varepsilon)$ von $\mathcal{S}$ der Schnitt ψ in der Form

$$\psi = \sum_{\varepsilon} \psi^{\varepsilon} \eta(\varepsilon)$$

dargestellt, so folgt

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_v^{\mathcal{S}} t)\psi &= \sum_i v(t^i) s_i \cdot \psi + \sum_i \sum_{\varepsilon} t^i v(\psi^{\varepsilon}) s_i \eta(\varepsilon) + \\ &+ \sum_i \sum_{\varepsilon} t^i \psi^{\varepsilon} \nabla_v^{\mathcal{S}}(s_i \cdot \eta(\varepsilon)) - \sum_{\varepsilon} v(\psi^{\varepsilon}) t \cdot \eta(\varepsilon) - \\ &- \sum_{\varepsilon} \psi^{\varepsilon} t \cdot (\nabla_v^{\mathcal{S}} \eta(\varepsilon)) \\ &= \sum_i v(t^i) s_i \cdot \psi + \sum_{i,\varepsilon} t^i \psi^{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2} \sum_{l<m} \omega_{lm}(v)(s_l s_m s_i - s_i s_l s_m) \cdot \eta(\varepsilon) \\ &= \sum_i v(t^i) s_i \cdot \psi + \sum_{l<m} \omega_{lm}(v) t^l s_m \cdot \psi.\end{aligned}$$

Wir erhalten also $\bar{\nabla}_v^{\mathcal{S}} t = \nabla_v t$ und Lemma 2 ist bewiesen.

Wir definieren jetzt eine Clifford-Multiplikation eines Vektors $t \in T(X^n)$ mit einem Homomorphismus $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ dadurch, daß wir t als einen Homomorphismus von $\mathcal{S}$ auffassen und ihn mit A verknüpfen:

$$\mu : T(X^n) \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S}),$$

$$\mu(t \otimes A)\psi = t \cdot A(\psi).$$

Anstelle $\mu(t \otimes A)$ schreiben wir einfach $t \cdot A$.

Einen elliptischen Differentialoperator erster Ordnung

$$P : \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})) \to \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S}))$$

erhalten wir nun als Superposition folgender Abbildungen:

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})) &\xrightarrow{\bar{\nabla}^{\mathcal{S}}} \Gamma(T^*(X^n) \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})) \\ &= \Gamma(T(X^n) \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})) \to \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})).\end{aligned}$$

Der Operator ist analog zum Dirac-Operator $D: \Gamma(\mathcal{S}) \to \Gamma(\mathcal{S})$ definiert, welchen wir weiter unten noch betrachten werden. In einem orthonormalen Reper $s_1, \ldots, s_n$ gilt

$$P(A) = \sum_i s_i \cdot \bar{\nabla}_{s_i}^{\mathcal{S}} A.$$

LEMMA 3. *Seien $t \in \Gamma(T(X^n))$ ein Vektorfeld und $\omega^t \in \Gamma(T^*(X^n))$ die ihm entsprechende 1-Form. Dann ist $P(t)$ genau dann gleich Null, falls $d\omega^t = 0 = \delta\omega^t$.*

Beweis. Unter Verwendung von Lemma 2 erhalten wir

$$P(t) = \sum_i s_i \cdot \bar{\nabla}^{\mathcal{S}}_{s_i}(t) = \sum_i s_i \cdot \nabla_{s_i}(t).$$

Mit $t = \sum_j t^j s_j$ und $\omega^i = \sum_j t^j \sigma^j$ gilt dann

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i,j} s_i \cdot \left(s_i(t^j) s_j + t^j \sum_m \omega_{jm}(s_i) s_m \right) \\ &= -\sum_i s_i(t^i) - \sum_{j,m} t^j \omega_{jm}(s_m) + \\ &\quad + \sum_{i<j} \left(s_i(t^j) - s_j(t^i) + \sum_m \left(t^m \omega_{mj}(s_i) - t^m \omega_{mi}(s_j) \right) \right) s_i s_j \\ &= -\sum_i s_i(t^i) - \sum_{j,m} t^j \omega_{jm}(s_m) + \sum_{i<j} d\omega^i(s_i, s_j) s_i s_j \\ &= \delta\omega^i + \sum_{i<j} d\omega^i(s_i, s_j) s_i s_j . \end{aligned}$$

Daraus ersieht man, daß $P(t) = 0$ gleichwertig mit $\delta\omega^i = 0 = d\omega^i$ ist.

Ist $\psi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein Schnitt, so definieren wir einen Homomorphismus $E_\psi : \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \to \mathcal{S}$ durch $E_\psi(A) = A(\psi)$. Sei $D : \Gamma(\mathcal{S}) \to \Gamma(\mathcal{S})$ der durch

$$D(\psi) = \sum_i s_i \cdot \nabla^{\mathcal{S}}_{s_i} \psi$$

definierte Dirac-Operator. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})) & \xrightarrow{P} & \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})) \\ \downarrow{\scriptstyle E_\psi} & & \downarrow{\scriptstyle E_\psi} \\ \Gamma(\mathcal{S}) & \xrightarrow{D} & \Gamma(\mathcal{S}) \end{array}$$

und beweisen

LEMMA 4. *Ist ψ ein paralleler Schnitt, so ist dieses Diagramm kommutativ.*

Beweis. Aus $\nabla^{\mathcal{S}} \psi = 0$ folgt

$$\begin{aligned} E_\psi(P(A)) = (PA)(\psi) &= \sum_i s_i \cdot \bar{\nabla}^{\mathcal{S}}_{s_i} A(\psi) \\ &= \sum_i s_i \cdot \left(\nabla^{\mathcal{S}}_{s_i}(A\psi) - A(\nabla^{\mathcal{S}}_{s_i} \psi) \right) \\ &= \sum_i s_i \cdot \nabla^{\mathcal{S}}_{s_i}(A\psi) = D(E_\psi(A)). \end{aligned}$$

SATZ 4. *Sei X^n eine parakompakte, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur sowie dem assoziierten Spinorbündel $\mathcal{S}$. Seien $\psi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein paralleler Schnitt und $t \in \Gamma(TX^n)$ ein Vektorfeld, dessen entsprechende 1-Form ω^t harmonisch ist: $d\omega^t = 0 = \delta\omega^t$. Dann liegt $t \cdot \psi$ im Kern des Dirac-Operators.*

Der Beweis von Satz 4 ergibt sich aus den obigen Hilfssätzen unmittelbar: $D(t \cdot \psi) = DE_\psi(t) = E_\psi P(t) = 0$.

FOLGERUNG 7. *Sei X^n eine kompakte, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit nichttrivialem, parallelem Schnitt $\psi \in \Gamma(\mathcal{S})$ im Spinorbündel $\mathcal{S}$ und sei $b_1(X^n)$ deren erste Betti-Zahl. Dann ist die Dimension* $\dim(\operatorname{Ker} D)$ *des Kerns des Dirac-Operators nicht kleiner als $\frac{1}{2} b_1(X^n)$:*

$$\dim(\operatorname{Ker} D) \geqslant \frac{1}{2} b_1(X^n).$$

Beweis. Wir wählen reelle Vektorfelder $t_1, \ldots, t_b$ $(b = b_1(X^n))$ so, daß die entsprechenden 1-Formen harmonisch und linear unabhängig im Kern des Laplace-Operators sind. Dann sind die Vektorfelder in dem Sinne linear unabhängig, daß mit

$$\int_X \Big| \sum_{i=1}^{b} a_i t_i \Big|^2 = 0$$

auch alle Koeffizienten a_i verschwinden. Nach Satz 4 liegen die Spinoren $t_1 \cdot \psi, \ldots, t_b \cdot \psi$ im Kern des Dirac-Operators. Wir zeigen, daß sie als solche linear unabhängig sind. Dazu bemerken wir, daß man im Bündel $\mathcal{S}$ ein hermitisches Produkt $(,)$ mit der Eigenschaft $(t \cdot \psi, \psi_1) + (\psi, t \cdot \psi_1) = 0$, $t \in T(X^n)$, $\psi, \psi_1 \in \mathcal{S}$, einführen kann (vgl. [7]). Mit $t = \sum_i a_i t_i$ folgt dann aus

$$\int_X (t \cdot \psi, t \cdot \psi) = 0$$

die Beziehung

$$-\int_X (t \cdot t \cdot \psi, \psi) = 0.$$

Nun ist aber $t \cdot t = -|t|^2$ und wir erhalten

$$\int_X |t|^2 (\psi, \psi) = 0.$$

Weil ψ parallel ist, hat er eine konstante Länge $(\psi, \psi) > 0$. Somit schließen wir

$$\int_X \Big| \sum_i a_i t_i \Big|^2 = 0 \quad \text{und} \quad a_i = 0.$$

Die betrachteten Spinoren sind demnach reell linear unabhängig im $\mathrm{Ker}(D)$. Dies liefert die behauptete Ungleichung.

Beispiel 3. Sei $X^n = T^n$ der flache Torus. Mit der kanonischen Spin-Struktur hat X^n genau $2^{[n/2]}$ parallele Spinoren. Liegt jedoch eine andere Spin-Struktur vor, so gilt $\dim(\mathrm{Ker}\, D) = 0$ (vgl. [5] oder [3]). Nach Folgerung 7 existieren dann keine globalen, parallelen Spinorfelder, weil $b_1(X^n) = n > 0$ ist. Die Existenz von global-definierten, parallelen Spinoren hängt also außer von der Geometrie des Raumes noch von der gewählten Spin-Struktur ab. Abschließend bemerken wir noch, daß auf X^3 mit der kanonischen Spin-Struktur $\dim(\mathrm{Ker}\, D) = 2$ und

$$\frac{1}{2} b_1(X^3) = \frac{3}{2}$$

gilt.

LITERATURNACHWEIS

[1] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne* Lecture Notes in Mathematics 194 (1971).

[2] A. E. Fischer and J. A. Wolf, *The structure of compact Ricci-flat Riemannian manifolds*, Journal of Differential Geometry 10 (1975), S. 277-288.

[3] Th. Friedrich, *Zur Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur* (in Vorbereitung).

[4] — und S. Sulanke, *Ein Kriterium für die formale Selbstadjungiertheit des Dirac-Operators*, Colloquium Mathematicum 40 (1979), S. 239-247.

[5] N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Advances in Mathematics 14 (1974), S. 1-55.

[6] D. Husemoller, *Fibre bundles*, New York 1966.

[7] R. Parthasarathy, *Dirac-operator and discrete series*, Annals of Mathematics 96 (1972), S. 1-30.

[8] R. Sulanke und P. Wintgen, *Differentialgeometrie und Faserbündel*, Berlin 1972.

Reçu par la Rédaction le 23. 2. 1978