STUDIA MATHEMATICA, T. LXXI. (1982)

# Charakterisierung der Unterräume eines nuklearen stabilen Potenzreihenraumes von endlichem Typ

von

DIETMAR VOGT (Wuppertal)

**Abstract.** The class of all subspaces of nuclear stable finite type power series space is characterized by condition $(\underline{DN})$ and $\Lambda_1(\alpha)$-nuclearity. The proof uses a Komura-type imbedding theorem for $\Lambda_1(\alpha)$-nuclear spaces and splitting theorem for certain exact sequences of $(F)$-spaces. Condition $(\underline{DN})$ is verified for a large class of $(F)$-spaces of real-analytic functions.

Die Frage nach der Bestimmung der Unterräume, Quotientenräume und projizierten Teilräume konkreter lokalkonvexer Räume, die schwierig und auch im Bereich der Banachräume nur in Spezialfällen lösbar ist, hat in jüngster Zeit für die wichtige Klasse der Potenzreihenräume zu einer Reihe von Ergebnissen geführt. Einerseits wurden dabei diejenigen Unterräume, Quotientenräume und projizierten Teilräume zu bestimmen gesucht, die selbst wieder Kötheräume sind, bzw. eine Basis haben. Dieses Problem ist im stabilen Fall vollständig gelöst und zwar für Potenzreihenräume endlichen Typs in Dubinsky [3] und Wagner [23]. Andererseits ist es im Fall der nuklearen stabilen Potenzreihenräume vom unendlichen Typ gelungen, alle Unterräume, Quotientenräume bzw. projizierten Teilräume durch interne Bedingungen zu charakterisieren (s. [20], [21], [22]).

Die Reihe dieser Untersuchungen wird mit der vorliegenden Arbeit fortgesetzt. In ihr wird eine vollständige interne Charakterisierung der Unterräume der nuklearen stabilen Potenzreihenräume von endlichem Typ gegeben (Satz 3.2). Die Bedingungen, die dazu verwendet werden, sind vom selben Typ, wie die in [22] verwendeten. Sie sind natürlich dieselben, die für den Fall der Kötheunterräume in [3] und [23] erhalten wurden. Die Beweismethoden jedoch sind vom Ansatz her basisfrei. Sie beruhen (wie in [20], [21], [22]) auf einen Analogon zum Satz von T. und Y. Komura (§ 1, Satz 1.6), einem Splittingsatz (§ 2, Satz 2.5), sowie einem Ergebnis aus [22], der Existenz einer gewissen exakten Sequenz.

Es sei darauf hingewiesen, daß das Problem der Bestimmung sämtlicher Quotientenräume im Falle eines Potenzreihenraumes von endlichem Typ weiterhin offen ist(1), während die projizierten Teilräume bekannt sind, s. Mitjagin [10], [11].

Die im folgenden formulierten Voraussetzungen und Bezeichnungen sollen durch die ganze Arbeit gelten:

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ ist eine strikt monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen, d.h. $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$, und es soll gelten

$$(1) \qquad \sup_n (\alpha_{2n}/\alpha_n) < +\infty \qquad \text{(Stabilität)},$$

$$(2) \qquad \lim_n (\log n/\alpha_n) = 0 \qquad \text{(Nuklearität von } \Lambda_1(\alpha)).$$

Für $0 < r \leqslant +\infty$ sei

$$\Lambda_r(\alpha) = \Big\{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = \sum_n \varrho^{\alpha_n} |\xi_n| < +\infty \text{ für alle } 0 < \varrho < r\Big\}.$$

Ist $\varrho_m$ eine reelle Zahlenfolge mit $0 < \varrho_m \nearrow r$, so ist $\Lambda_r(\alpha)$, versehen mit den Normen $\|\xi\|_m = \sum_n \varrho_m^{\alpha_n} |\xi_n|$, ein nuklearer $(F)$-Raum. Die Topologie hängt dabei nicht von der Folge $\varrho_m$ ab. Man kann weiter dieselbe Topologie auch durch die Normen $\|\xi\|_m' = \sup_n \varrho_m^{\alpha_n} |\xi_n|$ erhalten.

$\Lambda_r(\alpha)$ heißt *Potenzreihenraum von endlichem Typ*, falls $r < +\infty$, von *unendlichem Typ*, falls $r = +\infty$. Alle $\Lambda_r(\alpha)$, $r < +\infty$, sind isomorph. Ein Potenzreihenraum von endlichem Typ ist niemals isomorph einem Potenzreihenraum von unendlichem Typ (s. [14], 9.3.4).

**1.** In diesem Abschnitt soll zunächst der für unsere Zwecke angemessene Nuklearitätsbegriff behandelt werden. Auf Grund der Ergebnisse von [3] und [23] für Unterräume vom Köthe-Typ ist klar, daß dies auch hier die $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität im Sinne von [4] sein wird. Diese wurde eingehend behandelt in [16].

Wir beginnen hier mit einer von [4] und [16] etwas abweichenden Definition und ziehen ein stark an [22] angelehntes Verfahren vor. Dieses zeigt im Vergleich zu [22], Def. 1.1 sehr schön den Unterschied des für die Theorie der Potenzreihenräume von unendlichem Typ bzw. endlichem Typ relevanten Nuklearitätsbegriffs ($\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität bzw. $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität).

Sind $V \subset U$ absolutkonvexe Mengen in einem linearen Raum $E$, so setzen wir bei gegebenem linearem Teilraum $F \subset E$

$$\delta(V, U; F) = \inf\{\delta > 0 \colon V \subset \delta U + F\}$$

(1) Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen gelöst in D. Vogt, *Eine Charakterisierung der Potenzreihenraume von endlichen Typ und ihre Folgerungen.*



und definieren dann den *n-ten Kolomogorowschen Durchmesser* als

$$\delta_n(V, U) = \inf\{\delta(V, U; F) \colon \dim F \leqslant n\}.$$

Ist $E$ lokalkonvexer linearer Raum, so sei $\mathfrak{A}$ die Menge der absolutkonvexen, abgeschlossenen Nullumgebungen in $E$.

1.1. Definition. Ein lokalkonvexer Raum $E$ heißt *$\Lambda_1(\alpha)$-nuklear*, falls zu jedem $U \in \mathfrak{A}$ ein $V \in \mathfrak{A}$ und $R > 1$ existiert mit

$$\lim_n R^{\alpha_n} \delta_n(V, U) = 0.$$

Mit Hilfe des Satzes von Baire zeigt man leicht, daß dies äquivalent ist dazu, daß $\Lambda_1(\alpha) \subset \Delta(E)$, wo $\Delta(E)$ die diametrale Dimension (s. [17]) bedeutet, vgl. dazu auch [23]. Daß diese Bedingung aus 1.1 folgt, ist dabei trivial.

Aus unseren Voraussetzungen über $\alpha$ leitet man leicht ab, daß $\lim_n n^k \varrho^{\alpha_n} = 0$ für alle $k \in \mathbf{N}$, $0 < \varrho < 1$. Daraus folgt, daß $(n^k)_{n=1,2,\ldots} \in \Lambda_1(\alpha)$ und damit nach dem Vorhergehenden $(n^k)_{n=1,2,\ldots} \in \Delta(E)$ für alle $k$. Unter Beachtung von z.B. [18], S. 75 haben wir damit bewiesen:

Bemerkung. Jeder $\Lambda_1(\alpha)$-nukleare Raum ist nuklear.

Ist $U \in \mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit $E_U$ den zu $U$ gehörigen normierten Raum, mit $\hat{E}_U$ die vollständige Hülle davon, d.h. den zugehörigen Banachraum. Auf Grund obiger Bemerkung können wir für $\Lambda_1(\alpha)$-nukleares $E$ die $\hat{E}_U$ als Hilberträume annehmen. Ist weiter $V \subset U$, $V \in \mathfrak{A}$, dann sei $A_{V,U} \colon \hat{E}_V \to \hat{E}_U$ die kanonische Abbildung.

1.2. Satz. *Äquivalent sind:*

(a) *$E$ ist $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear;*

(b) *Zu jedem $U \in \mathfrak{A}$ existiert ein $V \in \mathfrak{A}$, $V \subset U$ und $R > 1$, so daß*

$$A_{V,U} x = \sum_n R^{-\alpha_n} \langle x, a_n \rangle y_n$$

*für alle $x \in E_V$ mit geeigneten beschränkten Folgen $(a_n)$ in $(E_V)' = E'_{V^0}$, $(y_n)$ in $\hat{E}_U$.*

Der Beweis verläuft analog zu [15], S. 3.

Aus 1.2 entnehmen wir, daß der in 1.1 definierte Begriff der $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität der in [16] von Robinson untersuchte ist, d.h. (s. [15], Thm. 2.2) $E$ ist $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear, wenn es $\lambda$-nuklear im Sinne von [4], S. 39 ist mit $\lambda = \Lambda_1(\alpha)$.

Wir benötigen die beiden folgenden Eigenschaften der $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität, deren einfache Beweise wir angeben:

1.3. Lemma. *$\Lambda_1(\alpha)$ ist $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear.*

1.4. LEMMA. *$\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität vererbt sich auf Unterräume und Produkte.*

Beweis. 1.3 folgt unmittelbar aus der Definition oder aus 1.2 (b). Zu zeigen bleibt 1.4.

Beachten wir die Tatsache, daß für absolutkonvexe Mengen $V_k \subset U_k$ in den linearen Räumen $E_k$, $k = 1, \ldots, m$ und $V = V_1 \times \ldots \times V_m$, $U = U_1 \times \ldots \times U_m$ gilt $\delta_{mn}(V, U) \leqslant \max\{\delta_n(V_k, U_k): k = 1, \ldots, m\}$, so folgt die Vererblichkeit auf Produkte aus der Stabilität der Folge $\alpha$.

Um die Vererblichkeit auf Unterräume zu beweisen, betrachten wir einen Unterraum $H \subset E$. Dann ist für $U \in \mathfrak{U}_E$ und $U_0 = U \cap H$ in natürlicher Weise $\hat{H}_{U_0}$ abgeschlossener Unterraum von $\hat{E}_U$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\hat{E}_U$ Hilbertraum ist. Sei $\pi$ die orthogonale Projektion auf $\hat{H}_{U_0}$. Ist $V \in \mathfrak{U}_E$ eine Nullumgebung gemäß 1.2 (b) mit der dort beschriebenen Darstellung, dann haben wir mit $V_0 = V \cap H$

$$A_{V_0, U_0} x = \sum_n R^{-\alpha_n} \langle x, a_n \rangle \pi y_n$$

für alle $x \in \hat{H}_{V_0}$.

Der folgende Satz ist ein Analogon zum Satz von T. Komura und Y. Komura [6]:

1.5. SATZ. *Ein (F)-Raum $E$ ist $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear genau dann, wenn er isomorph ist einem abgeschlossenen Unterraum von $\Lambda_1(\alpha)^{\mathbf{N}}$.*

Beweis. Auf Grund von 1.3 und 1.4 ist jeder Unterraum von $\Lambda_1(\alpha)^{\mathbf{N}}$ $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear. Diese Nuklearität bleibt offenbar bei Isomorphie erhalten. Zur Umkehrung beweisen wir die folgende schärfere Version, die wir später benötigen. Alle Nullumgebungen darin können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit absolutkonvex denken.

1.6. SATZ. *Ist $E$ ein $\Lambda_1(\alpha)$-nuklearer (F)-Raum, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ eine Nullumgebungsbasis in $E$, $\tilde{U}_1 \supset \tilde{U}_2 \supset \ldots$ eine Nullumgebungsbasis in $\Lambda_1(\alpha)^{\mathbf{N}}$. Dann läßt sich $E$ so nach $\Lambda_1(\alpha)^{\mathbf{N}}$ einbetten, daß mit geeigneten $\lambda_m > 0$ gilt: $\lambda_m U_m \subset \tilde{U}_m$ für alle $m$.*

Beweis. (1) Wir nehmen zunächst an, daß für alle $n$

$$A_{U_{m+1}, U_m} x = \sum_n R_m^{-\alpha_n} \langle x, a_n^m \rangle y_n^m$$

mit gewissen $R_m > 1$, $(a_n^m)_{n=1,2,\ldots}$ beschränkt in $(E_{U_{m+1}})'$, $(y_n^m)_{n=1,2,\ldots}$ beschränkt in $\hat{E}_{U_m}$.

Ist $\| \; \|_m$ die Halbnorm von $U_m$, und fassen wir für alle $m$ $(E_{U_m})'$ als Unterraum von $E'$ auf, dann erhalten wir: Zu jedem $m$ existiert $R_m > 1$, $C_m > 0$ und eine Folge $(a_n^m)_{n=1,2,\ldots}$ in $E'$, so daß

$$\sup_n |\langle x, a_n^m \rangle| \leqslant C_m \|x\|_{m+1},$$

$$\|x\|_m \leqslant C_m \sum_n R_m^{-\alpha_n} |\langle x, a_n^m \rangle|.$$

Ist $\| \; \|_m^{\sim}$ die zu $\tilde{U}_m$ gehörige Halbnorm, so existieren Zahlen $M(m) \in \mathbf{N}$, $\tilde{C}_m > 0$ und $\varrho_m$, $0 < \varrho_m < 1$, so daß für $\xi = (\xi_{n,k})_{n,k \in \mathbf{N}} \in \Lambda_1(\alpha)^{\mathbf{N}}$ $(= \prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_1(\alpha))$:

$$\|\xi\|_m^{\sim} \leqslant \tilde{C}_m \sum_{k=1}^{M(m)} \sum_n \varrho_m^{\alpha_n} |\xi_{n,k}|.$$

Wir wählen nun Zahlen $s_m$ mit $1 < s_m < R_m$ und können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $M(m+1) > M(m)$ für alle $m$. Wir definieren dann die Einbettung $\varphi: E \to \Lambda_1(\alpha)^{\mathbf{N}}$ durch

$$(\varphi x)_{n,k} = \begin{cases} s_\mu^{-\alpha_n} \langle x, a_n^\mu \rangle & \text{falls} \quad k = M(\mu+1), \\ 0 & \text{falls} \quad k \neq M(\mu+1) \text{ für alle } \mu \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Es ist klar, daß $(\varphi x)_{n,k}$, $n = 1, 2, \ldots$ in $\Lambda_1(\alpha)$ ist für jedes feste $k$.

Wegen

$$\begin{aligned} \|\varphi x\|_m^{\sim} &\leqslant \tilde{C}_m \sum_{k=1}^{M(m)} \sum_n \varrho_m^{\alpha_n} |(\varphi x)_{n,k}| \\ &= \tilde{C}_m \sum_{\mu=1}^{m-1} \sum_n (\varrho_m / s_\mu)^{\alpha_n} |\langle x, a_n^\mu \rangle| \\ &\leqslant \underbrace{\tilde{C}_m \sum_{\mu=1}^{m-1} C_\mu \sum_n (\varrho_m / s_\mu)^{\alpha_n}}_{=: K_m} \|x\|_m \end{aligned}$$

für $m > 1$ und $\|\varphi x\|_1 = 0$, ist $\varphi$ stetig, und wir erhalten, falls wir etwa $\lambda_1 = 1$, $0 < \lambda_m < K_m^{-1}$ für $m > 1$ setzen $\varphi(\lambda_m U_m) \subset \tilde{U}_m$ für alle $m$.

Umgekehrt ist wegen

$$\|x\|_m \leqslant C_m \sum_n (s_m / R_m)^{\alpha_n} |s_m^{-\alpha_n} \langle x, a_n^m \rangle| \leqslant C_m \sum_{k=1}^{M(m+1)} \sum_n (s_m / R_m)^{\alpha_n} |(\varphi(x))_{n,k}| =: |||\varphi x|||_m$$

die Abbildung $\varphi$ offen auf ihr Bild und injektiv, denn die $||| \; |||_m$ stellen ein separierendes System stetiger Halbnormen auf $\Lambda_1(\alpha)^{\mathbf{N}}$ dar.

(2) Ist $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ eine beliebige Nullumgebungsbasis, die wir natürlich als absolutkonvex voraussetzen können, dann wählen wir eine Teilfolge $m(1) = 1 < m(2) < \ldots$, so daß für die $U_{m(k)}$ die Voraussetzungen

von (1) erfüllt sind. Wir können dann $E$ nach $\Lambda_1(\alpha)^N$ so einbetten, daß mit geeignetem $\lambda_k$ gilt $\lambda_k U_{m(k)} \subset \tilde{U}_{m(k+1)}$. Für $m(k) \leqslant m < m(k+1)$ ergibt sich daraus $\lambda_k U_m \subset \lambda_k U_{m(k)} \subset \tilde{U}_{m(k+1)} \subset \tilde{U}_m$, d.h. die Behauptung.

**2.** Der in diesem Abschnitt behandelte Begriff ist eine Abschwächung der Eigenschaft (DN), die in [20], [22] zur Charakterisierung der Unterräume von $s$, bzw. der Unterräume von Potenzreihenräumen von unendlichem Typ verwendet wurde. Multiplikative Abschätzungen derselben Art wurden schon verschiedentlich in der Literatur betrachtet (s. z.B. [9], [10], [11]). Er hat sich in [23] als typisch für die Kötheunterräume von Potenzreihenräumen von endlichem Typ erwiesen. Dasselbe wird auch in unserem Fall gelten.

$E$ sei im folgenden immer ein $(F)$-Raum, $\|\ \|_1 \leqslant \|\ \|_2 \leqslant \ldots$ ein die Topologie definierendes Halbnormensystem, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ die zugehörige Nullumgebungsbasis.

2.1. Definition. $E$ hat die *Eigenschaft* ($\underline{\mathrm{DN}}$), falls folgendes gilt: Es existiert eine stetige Norm $\|\ \|$ auf $E$, so daß es zu jedem $k$ ein $p, C > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\|\ \|_k^{1+\varepsilon} \leqslant C \|\ \|^{\varepsilon} \|\ \|_{k+p}.$$

Es ist offenbar, daß die Eigenschaft ($\underline{\mathrm{DN}}$) nur von der Topologie von $E$, nicht vom speziellen Halbnormensystem abhängt. Ferner ist klar der Beweis des ersten der beiden folgenden Lemmas (vgl. [22], [19]):

2.2. Lemma. *Hat $E$ die Eigenschaft ($\underline{\mathrm{DN}}$), so auch jeder Unterraum.*

2.3. Lemma. *$\Lambda_r(\alpha)$ hat die Eigenschaft ($\underline{\mathrm{DN}}$) für alle $r$.*

Beweis. Sei $0 < \varrho_0 < \varrho_1 \ldots \nearrow r$, $\varepsilon = \varepsilon(k) = (\log \varrho_{k+1} - \log \varrho_k)/(\log \varrho_k - \log \varrho_0)$, d.h. $\varrho_{k+1} = \varrho_k^{1+\varepsilon} \varrho_0^{-\varepsilon}$. Dann erhalten wir aus der Hölderschen Ungleichung für $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \Lambda_r(\alpha)$:

$$\|\xi\|_k^{1+\varepsilon} = \Big(\sum_n |\xi_n| \varrho_k^{\alpha_n}\Big)^{1+\varepsilon} = \Big[\sum_n (|\xi_n| \varrho_0^{\alpha_n})^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} (|\xi_n| \varrho_{k+1}^{\alpha_n})^{1/(1+\varepsilon)}\Big]^{1+\varepsilon} \leqslant \|\xi\|_0^{\varepsilon} \|\xi\|_{k+1}.$$

Wir haben also schon gezeigt, daß jeder Unterraum eines $\Lambda_r(\alpha)$ die Eigenschaft ($\underline{\mathrm{DN}}$) hat. Wir benötigen weiter den folgenden in seiner Funktion zu [20], 1.5 analogen Splittingsatz. Ein volles Analogon zu [20], 1.5, d.h. ein Satz, der das Zerfallen aller nuklearen Sequenzen der Form

$$0 \to \Lambda_1(\alpha) \to \tilde{E} \to E \to 0$$

garantiert, falls $E$ die Eigenschaft ($\underline{\mathrm{DN}}$) hat, läßt sich nicht erreichen. Man zeigt dies unter Benutzung von [20], 1.4 mit Hilfe einer modifizierten Version der in [19], 3.5 (S. 15) angewandten Beweisidee.



Wir beginnen mit einem Lemma, das die Bedingung ($\underline{\mathrm{DN}}$) dualisiert. Darin bezeichnet $\|\ \|$ eine stetige Norm, $U^0 = \{y \in E' : |y(x)| \leqslant \|x\| \text{ für alle } x \in E\}$ die Polare der zugehörigen Nullumgebung.

2.4. Lemma. *Äquivalent sind für festes $k$ und $k+p$, $\varepsilon > 0$:*

(a) *Es existiert ein $C > 0$, so daß*

$$\|\ \|_k^{1+\varepsilon} \leqslant C \|\ \|^{\varepsilon} \|\ \|_{k+p}.$$

(b) *Es existiert ein $C > 0$, so daß*

$$\|\ \|_k \leqslant r \|\ \| + (C/r^{\varepsilon}) \|\ \|_{k+p}$$

*für alle $r > 0$.*

(c) *Es existiert ein $C > 0$, so daß*

$$U_k^0 \subset r U^0 + (C/r^{\varepsilon}) U_{k+p}^0$$

*für alle $r > 0$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (b) erhält man durch Berechnen des Minimums der Funktion $f(r) = \alpha r + \beta/r^{\varepsilon}$ auf $(0, +\infty)$. Die Äquivalenz von (b) und (c) ergibt sich durch Dualisieren wie in [20], 1.4.

Wir erhalten nun den geforderten Splittingsatz:

2.5. Satz. *Sei $0 \to \Lambda_\varrho(\alpha) \xrightarrow{i} \tilde{E} \xrightarrow{q} E \to 0$, $\varrho < +\infty$ eine exakte Sequenz von $(F)$-Räumen und es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(1) *Es existieren eine stetige Norm $\|\ \|$ auf $E$ und Folgen $\varepsilon_k > 0$, $C_k > 0$, so daß*

$$\|\ \|_k^{1+\varepsilon_k} \leqslant C_k \|\ \|^{\varepsilon_k} \|\ \|_{k+1}$$

*für $k = 1, 2, \ldots$*

(2) *Die Normen auf $\Lambda_\varrho(\alpha)$ sind gegeben durch*

$$\|\xi\|_k = \sup_n |\xi_n| \varrho_k^{\alpha_n}$$

*für $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, wo $0 < \varrho_k \nearrow \varrho$.*

(3) *Es gibt eine Nullumgebungsbasis $W_k$ in $\tilde{E}$, so daß $i^{-1} W_k \subset V_k$, $q W_k \supset U_k$ für alle $k$, wobei*

$$U_k = \{x \in E : \|x\|_k \leqslant 1\}, \qquad V_k = \{\xi \in \Lambda_\varrho(\alpha) : \|\xi\|_k \leqslant 1\}.$$

(4) $\varrho_{k+1}/\varrho_k \leqslant (\varrho_k/\varrho_{k-1})^{\varepsilon_{k+1}}$ *für alle $k$.*

*Dann zerfällt die Sequenz.*

Beweis. Wir verfahren analog zu [20], Satz 1.5 und nehmen zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $\Lambda_\varrho(\alpha)$ Unterraum von $\tilde{E}$ ist. Wir zeigen, daß ein $\varphi \in L(\tilde{E}, \Lambda_\varrho(\alpha))$ existiert, so daß für $\xi \in \Lambda_\varrho(\alpha) \subset \tilde{E}$ gilt: $\varphi\xi = \xi$.

Sei dazu $f_n \in \Lambda_\varrho(\alpha)'$ die $n$-te Koordinatenabbildung, d.h. $f_n(\xi) = \xi_n$ für $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \Lambda_\varrho(\alpha)$. Auf Grund von (2) und (3) ist

$$\{\varrho_k^{\alpha_n} f_n :\ n = 1, 2, \dots\} \subset V_k^0 \subset \big(W_k \cap \Lambda_\varrho(\alpha)\big)^0 .$$

Daher läßt sich für jedes $k$ $f_n$ nach Hahn–Banach fortsetzen zu $F_n^k$ derart, daß

$$\{\varrho_k^{\alpha_n} F_n^k :\ n = 1, 2, \dots\} \subset W_k^0 .$$

Wir setzen weiter: $G_n^k = F_n^{k+1} - F_n^k$, dann ist $G_n^k \in \Lambda_\varrho(\alpha)^\perp = q^\tau E'$. Nach (3) erhalten wir also

$$\{\varrho_k^{\alpha_n} G_n^k :\ n = 1, 2, \dots\} \subset 2W_{k+1}^0 \cap q^\tau E' \subset 2q^\tau U_{k+1}^0 .$$

Auf Grund von (1) und Lemma 2.4 gilt mit den in (1) genannten $\varepsilon_k$ und evtl. geänderten $C_k$:

$$U_k^0 \subset rU^0 + (C_k/r^{\varepsilon_k})\, U_{k+1}^0$$

für alle $r > 0$, wo $U^0$ die Polare der zu $\|\ \|$ gehörigen Einheitskugel ist.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß in obiger Inklusion $C_k = 2^{-k-1}$ und $\varepsilon_k < 1$ ist. Letzteres ist trivial. Zum Beweis des ersteren wählen wir eine Folge $\lambda_k$ mit $\lambda_k \geqslant 1$ und $2^{-k-1}\lambda_{k+1} \geqslant C_k \lambda_k^{1+\varepsilon_k}$ für alle $k$. Multiplizieren wir die Inklusion mit $\lambda_k$, ersetzen $r$ durch $\lambda_k^{-1} r$ und beachten, daß $\lambda_k U_k^0 = (\lambda_k^{-1} U_k)^0$, so erhalten wir

$$\lambda_k^{-1} U_k \subset U_k ,$$

$$(\lambda_k^{-1} U_k)^0 \subset rU^0 + (2^{-k-1}/r^{\varepsilon_k})(\lambda_{k+1}^{-1} U_{k+1})^0$$

für alle $r > 0$ und alle $k$.

Setzen wir also $B = 2q^\tau U^0$, $B_k = 2q^\tau U_{k+1}^0$, so erhalten wir

(*) $$\{\varrho_k^{\alpha_n} G_n^k :\ n = 1, 2, \dots\} \subset B_k .$$

(**) $$B_k \subset rB + (2^{-k-2}/r^{\varepsilon_{k+1}}) B_{k+1} \quad \text{für} \quad \text{alle } r > 0 .$$

Multiplizieren wir (**) mit $2\varrho_k^{-\alpha_n}$ und setzen $r = (\varrho_k/\varrho_{k-1})^{\alpha_n} 2^{-k-1}$ ein, so erhalten wir

$$2\varrho_k^{-\alpha_n} B_k \subset \varrho_{k-1}^{-\alpha_n} 2^{-k} B + 2^{(\varepsilon_{k+1}-1)(k+1)} \varrho_k^{-\alpha_n} (\varrho_k/\varrho_{k-1})^{-\varepsilon_{k+1}\alpha_n} B_{k+1} .$$

Unter Beachtung von (4) und $\varepsilon_{k+1} \leqslant 1$ ergibt sich

(***) $$2\varrho_k^{-\alpha_n} B_k \subset \varrho_{k-1}^{-\alpha_n} 2^{-k} B + \varrho_{k+1}^{-\alpha_n} B_{k+1} .$$

Bei festem $n$ wählen wir nun sukzessive eine Folge $A_n^k$ mit $A_n^k \in \varrho_k^{-\alpha_n} B_k$. Dazu setzen wir $A_n^0 = 0$. Ist $A_n^k \in \varrho_k^{-\alpha_n} B_k$ gewählt, so ist wegen (*) $G_n^k + A_n^k \in 2\varrho_k^{-\alpha_n} B_k$. Wegen (***) existiert nun ein $A_n^{k+1} \in \varrho_{k+1}^{-\alpha_n} B_{k+1}$, so daß $G_n^k + A_n^k - A_n^{k+1} \in \varrho_{k-1}^{-\alpha_n} 2^{-k} B$.



Wir setzen $\varphi_n^k = F_n^k - A_n^k$ und erhalten für $k \geqslant 1$

$$\varphi_n^{k+1} - \varphi_n^k = G_n^k + A_n^k - A_n^{k+1} \in \varrho_{k-1}^{-\alpha_n} 2^{-k} B \subset \varrho_0^{-\alpha_n} 2^{-k} B .$$

Also konvergiert bei festem $n$, für $k \to +\infty$ die Folge $\varphi_n^k$ gegen ein $\varphi_n \in E'$. Wegen $\varphi_n^{m+1} = F_n^{m+1} - A_n^{m+1} \in \varrho_{m+1}^{-\alpha_n}(W_{m+1}^0 + B_{m+1})$ erhalten wir für $k > m$ und alle $n$:

$$\varrho_m^{\alpha_n} \varphi_n^k = \varrho_m^{\alpha_n} \varphi_n^{m+1} + \sum_{\nu=m+1}^{k-1} \varrho_m^{\alpha_n} (\varphi_n^{\nu+1} - \varphi_n^{\nu}) \in W_{m+1}^0 + B_{m+1} + 2^{-m} B =: D_m .$$

Damit ist auch $\varrho_m^{\alpha_n} \varphi_n \in D_m$ für alle $n$, und es ist $\|\varphi x\|_m = \sup_n \varrho_m^{\alpha_n} |\varphi_n x| \leqslant 1$ für $x \in D_m^0$. Da $D_m$ nach Konstruktion gleichstetig ist in $\tilde{E}'$, ist $D_m^0$ Nullumgebung in $\tilde{E}$.

Durch $\varphi x := (\varphi_1 x, \varphi_2 x \dots)$ wird also eine stetige lineare Abbildung $\varphi\colon \tilde{E} \to \Lambda_\varrho(\alpha)$ definiert. Da die $A_n^k \in q^\tau E'$ auf $\Lambda_\varrho(\alpha)$ verschwinden, gilt für $\xi \in \Lambda_\varrho(\alpha) \subset \tilde{E}$:

$$(\varphi\xi)_n = \varphi_n \xi = \lim_k \varphi_n^k(\xi) = f_n(\xi) = \xi_n, \qquad \text{d.h.} \qquad \varphi\xi = \xi .$$

**3.** Wir haben nun die nötigen Begriffe und Ergebnisse vorbereitet, um zum Beweis unseres Hauptsatzes kommen zu können. In diesem geht außer dem in § 1 und § 2 Behandelten grundlegend das folgende Ergebnis aus [22] ein.

3.1. Lemma ([22], Satz 2.4). *Es existiert eine exakte Sequenz*

$$0 \to \Lambda_1(\alpha) \to \Lambda_1(\alpha) \to \Lambda_1(\alpha)^{\mathbf{N}} \to 0 .$$

Es sei in diesem Zusammenhang an unsere Grundvoraussetzungen über $\alpha$ erinnert, die die im Beweis des Satzes 2.4 in [22] an $\alpha$ gestellten Forderungen implizieren. Der folgende Satz ist das Hauptergebnis dieser Arbeit.

3.2. Satz. *Ein (F)-Raum $E$ ist genau dann isomorph einem Unterraum von $\Lambda_1(\alpha)$, wenn er $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear ist und die Eigenschaft ($\underline{\text{DN}}$) besitzt.*

Beweis. Die eine Richtung des Beweises folgt aus 1.3, 1.4 sowie 2.2, 2.3. Es bleibt die Umkehrung zu zeigen.

Sei $E$ also $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear und habe die Eigenschaft ($\underline{\text{DN}}$). Wir wählen in $E$ eine stetige Norm $\|\ \|$ sowie ein Fundamentalsystem $\|\ \|_1 \leqslant \|\ \|_2 \leqslant \dots$ von Halbnormen und Zahlen $\varepsilon_m > 0$, $C_m > 0$, so daß für alle $m$ gilt

$$\|\ \|_m^{1+\varepsilon_m} \leqslant C_m \|\ \|^{\varepsilon_m} \|\ \|_{m+1} .$$

Die $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ seien die zu den $\|\ \|_m$ gehörigen Nullumgebungen.

Mit den so gewählten $\varepsilon_m$ konstruieren wir eine Folge $\varrho_m$, $0 < \varrho_m \nearrow 1$ mit $\varrho_m^{1+\varepsilon_{m+1}} \geqslant \varrho_{m-1}^{\varepsilon_{m+1}}$ für alle $m$. Für diese gilt:

$$\varrho_{m+1}/\varrho_m \leqslant 1/\varrho_m \leqslant (\varrho_m/\varrho_{m-1})^{\varepsilon_{m+1}} .$$

Wir wählen nun gemäß 3.1 eine exakte Sequenz

$$0 \to \underset{(1)}{\Lambda_1(\alpha)} \xrightarrow{i} \underset{(2)}{\Lambda_1(\alpha)} \xrightarrow{q} \Lambda_1(\alpha)^{\boldsymbol{N}} \to 0$$

und führen auf $\Lambda_1(\alpha)$ = Definitionsbereich von $i$ (Stelle (1)) die Nullumgebungen $V_m = \{\xi \in \Lambda_1(\alpha)\colon \|\xi\|_m \leqslant 1\}$ ein mit $\|\xi\|_m = \sup_n \varrho_m^{\alpha_n} |\xi_n|$. Auf $\Lambda_1(\alpha)$ = Definitionsbereich von $q$ (Stelle (2)) wählen wir eine Nullumgebungsbasis $W_1 \supset W_2 \supset \ldots$ derart, daß $i^{-1} W_m \subset V_m$ für alle $m$. Auf $\Lambda_1(\alpha)^{\boldsymbol{N}}$ bilden dann die $\tilde{U}_m := q W_m$ eine Nullumgebungs basis. Wir betten gemäß 1.6 $E$ so in $\Lambda_1(\alpha)^{\boldsymbol{N}}$ ein, daß $U_m \subset \lambda_m \tilde{U}_m$, $\lambda_m > 0$ für alle $m$. Durch Abänderung der $U_m$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda_m = 1$ annehmen.

Setzen wir nun $\tilde{E} = q^{-1} E$ und betrachten die exakte Sequenz

$$0 \to \Lambda_1(\alpha) \xrightarrow{i} \tilde{E} \xrightarrow{q} E \to 0,$$

so erfüllt diese die Voraussetzungen (1)–(4) in 2.5. Sie zerfällt daher nach 2.5, d.h. $E$ ist isomorph einem (projizierten) Unterraum von $\tilde{E} \subset \Lambda_1(\alpha)$ und damit einem Unterraum von $\Lambda_1(\alpha)$.

Aus 3.2 folgt sofort die folgende Verallgemeinerung:

3.3. Satz. *Ist $0 < r < +\infty$, dann gilt: Ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum $E$ ist genau dann isomorph einem Unterraum von $\Lambda_r(\alpha)$, wenn er $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear ist und die Eigenschaft* (DN) *besitzt.*

Zum Beweis beachtet man einerseits, daß $\Lambda_1(\alpha) \cong \Lambda_r(\alpha)$ für alle $0 < r < +\infty$, ferner daß $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität und die Eigenschaft (DN) sich auf beliebige Unterräume vererben. Sie vererben sich andererseits, wie man leicht einsieht, auf die vollständige Hülle. Hat also $E$ diese Eigenschaften, so auch $\hat{E}$ und wir haben nach 3.2 $E \subset \hat{E} \hookrightarrow \Lambda_1(\alpha) \cong \Lambda_r(\alpha)$.

Die Ergebnisse von 3.2 und [22], 4.5 lassen sich in der folgenden Weise zusammenfassen: Ein $\Lambda_1(\alpha)$-nuklearer $(F)$-Raum $E$ ist

(1) isomorph einem Unterraum von $\Lambda_1(\alpha)$ genau dann, wenn er die Eigenschaft $(\underline{\mathrm{DN}})$ hat,

(2) isomorph einem Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$ genau dann, wenn er die Eigenschaft (DN) hat.

Dabei bedeutet (DN): Es existiert eine stetige Norm $\|\ \|$ auf $E$, so daß es zu jedem $k$ ein $p$, $C > 0$ gibt mit $\|\ \|_k^2 \leqslant C \|\ \| \ \|\ \|_{k+p}$ (s. [20], [22]).

Analog zu [22], § 4 läßt sich die in 3.2 und 3.3 genannte Nuklearitätsbedingung noch erheblich abschwächen. Dies wird durch den folgenden Satz geleistet. Sein Beweis ist im wesentlichen identisch mit dem Beweis von 4.3 in [22], wobei das dortige Lemma 4.2 durch Lemma 2.4 dieser Arbeit zu ersetzen ist.

3.4. Satz. *Hat der $(F)$-Raum $E$ die Eigenschaft* $(\underline{\mathrm{DN}})$, *ist $\|\ \|$ eine Norm gemäß Definition* 2.1, $B = \{y \in E'\colon |y(x)| \leqslant \|x\|$ für alle $x \in E\}$, *existiert weiter ein $R_0 > 1$, sowie eine schwach beschränkte absolutkonvexe Menge $B' \subset E'$, $B \subset B'$, so daß $\sup_n R_0^{\alpha_n} \delta_n(B, B') < +\infty$, dann ist $E$ $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear.*



Mit Hilfe von [17], S. 66 und S. 70 folgt aus 3.4 sofort die nicht dualisierte Version:

3.5. Satz. *Hat der $(F)$-Raum $E$ die Eigenschaft* (DN), *ist $\|\ \|$ eine Norm gemäß Definition* 2.1, $U = \{x \in E\colon \|x\| \leqslant 1\}$, *existiert weiter ein $R_0 > 1$ sowie eine absolutkonvexe Nullumgebung $V \subset E$, $V \subset U$, so daß $\sup_n R_0^{\alpha_n} \delta_n(V, U) < +\infty$, dann ist $E \Lambda_1(\alpha)$-nuklear.*

In beiden Fällen ist $E$ damit gemäß 3.2 (bzw. 3.3) isomorph einem Unterraum von $\Lambda_1(\alpha)$ (bzw. $\Lambda_r(\alpha)$, $0 < r < +\infty$).

**4.** In dem folgenden Abschnitt wollen wir die Bedeutung der vorhergehenden Resultate in einigen spezielleren Situationen erörtern, und zwar für den Fall der Kötheschen Folgenräume, für Räume holomorpher Funktionen, sowie Lösungsräume elliptischer Differentialoperatoren.

Wir beginnen mit dem Fall der Folgenräume, d.h. der Charakterisierung derjenigen Kötheschen Folgenräume, die Unterraum eines $\Lambda_1(\alpha)$ sind. Dieser Fall wurde in Dubinsky [3] und Wagner [23] behandelt und vollständig gelöst. Die hierzu im folgenden (4.1–4.3) formulierten Tatsachen sind also auch aus diesen Arbeiten zu entnehmen.

Zunächst einige Bezeichnungen: Sei $A = (a_{j,k})_{j,k \in \boldsymbol{N}}$ eine unendliche Matrix, $0 \leqslant a_{j,k} \leqslant a_{j,k+1}$, $\sup_k a_{j,k} > 0$ für alle $j$ (bzw. $j$, $k$). Wir setzen

$$\lambda(A) = \Big\{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)\colon \|\xi\|_k = \sum_j |\xi_j| a_{j,k} < +\infty \text{ für alle } k\Big\}.$$

Mit den Halbnormen $\|\ \|_k$ versehen ist $\lambda(A)$ ein $(F)$-Raum.

4.1. Lemma. *$\lambda(A)$ hat die Eigenschaft $(\underline{\mathrm{DN}})$ genau dann, wenn ein $k_0 \in \boldsymbol{N}$ existiert, so daß es zu jedem $k \in \boldsymbol{N}$, ein $p \in \boldsymbol{N}$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$a_{j,k}^{1+\varepsilon} \leqslant C a_{j,k_0}^{\varepsilon} a_{j,k+p}$$

*für alle $j$.*

Zum Beweis setzt man einerseits die Einheitsvektoren $e_j = (\delta_{i,j})_{i=1,2,\ldots}$ in die Definitionsungleichung in 2.1 ein, wobei man beachtet, daß $\|\ \|$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit als von der Form $\|\ \|_{k_0}$ angenommen werden kann. Die Umkehrung verwendet die Höldersche Ungleichung wie im Beweis zu 2.3.

Wir verwenden nun die folgende, z.B. aus [14], 9.1.3 zu entnehmende Bemerkung. Ist $\lim_j (a_{j,k}/a_{j,k+p}) = 0$, so gilt für

$$U_k = \{\xi\colon \|\xi\|_k \leqslant 1\}, \qquad U_{k+p} = \{\xi\colon \|\xi\|_{k+p} \leqslant 1\},$$

daß

$$\delta_n(U_{k+p}, U_k) = a_{j(n),k}/a_{j(n),k+p},$$

wo $j$ eine bijektive Abbildung $\boldsymbol{N}_0 \to \boldsymbol{N}$ ist, so daß die Folge $a_{j(n),k}/a_{j(n),k+p}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ monoton fällt.

Wir erhalten dann:

4.2. Satz. *$\lambda(A)$ ist isomorph einem Unterraum von $\Lambda_1(\alpha)$ genau dann, wenn ein $k_0 \in \boldsymbol{N}$, $p_0 \in \boldsymbol{N}$, $R_0 > 1$ existiert, so daß gilt:*

(1) *Zu jedem $k \in \boldsymbol{N}$ existiert $p \in \boldsymbol{N}$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$ mit*

$$a_{j,k}^{1+\varepsilon} \leqslant C\, a_{j,k_0}^{\varepsilon}\, a_{j,k+p} \quad \textit{für alle } j.$$

(2) $\sup_n R_0^{\alpha_n}(a_{\pi(n),k_0}/a_{\pi(n),k_0+p_0}) < +\infty$, *wo $\pi$ eine Permutation von $\boldsymbol{N}$ ist, die die Folge $a_{\pi(n),k_0}/a_{\pi(n),k_0+p_0}$ monoton fallend anordnet.*

Der Beweis der Notwendigkeit der beiden Bedingungen resultiert aus 3.2, obiger Bemerkung, sowie 4.1. Zum Beweis, daß sie hinreichend sind, ziehen wir zusätzlich 3.5 heran (wobei man die Aussage in 3.5 in diesem Spezialfall auch leicht direkt nachprüft).

Ist $0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots$, $\lim_n \beta_n = +\infty$ und $0 < r \leqslant +\infty$, so ergibt sich aus 4.2 leicht das folgende Resultat (vgl. auch [2]):

4.3. Corollar. *$\Lambda_r(\beta)$ ist isomorph einem Unterraum von $\Lambda_1(\alpha)$ genau dann, wenn $\sup_n(\alpha_n/\beta_n) < +\infty$.*

Es sei angemerkt, daß der in [23] gegebene Beweis des in 4.2 formulierten Sachverhalts insofern allgemeiner ist, als er die Nuklearität von $\Lambda_1(\alpha)$ nicht voraussetzt. Die zur Formulierung verwendete Terminologie ist in [3] etwas verschieden, jedoch mittels des Basissatzes (s. z.B. [14], 10.2.2) für nukleare $(F)$-Räume mit Basis und einiger einfacher Umformungen der hier verwendeten äquivalent. Insbesondere entsprechen sich $(\underline{\mathrm{DN}})$ und $(\mathrm{d}_5)$.

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Raum $\mathscr{H}(V)$ der holomorphen Funktionen, versehen mit der kompakt offenen Topologie auf der zusammenhängenden, im Unendlichen abzählbaren, $N$-dimensionalen Steinschen Mannigfaltigkeit $V$. Für diesen ist in [13], Prop. 2.1 gezeigt, daß er aus einer normalen Skala von Hilberträumen entsteht, d.h. die Eigenschaft $(\underline{\mathrm{DN}})$ besitzt.

Bezeichnen wir mit $D^N = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \boldsymbol{C}^N : \max_\nu |z_\nu| < 1\}$ den $N$-dimensionalen Einheitspolyzylinder, so ist $\mathscr{H}(D^N) \cong \Lambda_1(\alpha)$ mit $\alpha_n = n^{1/N}$ und wir erhalten das folgende Resultat, das in [1] aus einem Ergebnis von Fornaess–Stout hergeleitet wurde:

4.4. Satz. *$\mathscr{H}(V)$ ist isomorph einem Unterraum von $\mathscr{H}(D^N)$.*



Beweis. Indem man $V$ durch abzählbar viele offene Mengen $\varphi_n D^N$, $n = 1, 2, \ldots$ überdeckt, $\varphi_n$ biholomorph, erhält man eine Einbettung $\mathscr{H}(V) \hookrightarrow (\mathscr{H}(D^N))^{\boldsymbol{N}} \cong \Lambda_1(\alpha)^{\boldsymbol{N}}$. Auf Grund von 1.5 ist $\mathscr{H}(V)$ also $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear.

**5.** Wir wollen nun das in 4.4 gegebene Beispiel verallgemeinern, d.h. wir wollen zeigen, daß die Voraussetzungen für die Einbettungssätze des §3 in gewissen in der Analysis auftretenden Situationen stets gegeben sind. Der dazu dienende folgende Satz ist eine qualitative Verallgemeinerung des klassischen Hadamardschen Drei-Kreise Theorems. Er ist für Räume holomorpher Funktionen sowie Nullösungen gewisser elliptischer Differentialoperatoren wohlbekannt (s. [13], dort weitere Literatur).(2) Wir geben hier einen allgemeinen und recht elementaren Beweis.

Sei $X$ eine zusammenhängende, $N$-dimensionale reell-analytische Mannigfaltigkeit, $\mathscr{A}$ die Garbe der komplexwertigen reell-analytischen Funktionen auf $X$, $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine Untergarbe, so daß für jede offene Menge $U \subset X$ der Raum $\mathscr{F}(U)$ ein vollständiger Vektorraum ist bzgl. der kompakt-offenen Topologie. Dann gilt:

5.1. Satz. *Sind $\emptyset \neq \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega_3 \subset\subset X$ offene Mengen, $\Omega_3$ zusammenhängend, und ist für $f \in \mathscr{F}(X)$: $\|f\|_j = \sup_{x\in\Omega_j}|f(x)|$, dann existieren Zahlen $C > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, so daß $\|f\|_2 \leqslant C\|f\|_1^{\lambda}\|f\|_3^{\mu}$ für alle $f \in \mathscr{F}(X)$.*

Wir werden den Beweis in mehrere Schritte unterteilen. Zunächst einige Bezeichnungen. Die Dimension $N$ ist dabei durchweg fixiert. Für $t > 0$ sei

$$D_{R,t} = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \boldsymbol{R}^N : \max_j |x_j| < t\},$$

$$D_{C,t} = \{z = (z_1, \ldots, z_N) \in \boldsymbol{C}^N : \max_j |z_j| < t\}$$

der reelle, bzw. komplexe Polyzylinder mit Polyradius $(t, \ldots, t)$. Ist $x \in X$ so nennen wir eine ausgezeichnete Umgebung von $x$ eine offene Umgebung der Form $\varphi D_{R,1}$, wo $\varphi$ bijektiv und in beiden Richtungen reell analytisch ist. Wir setzen immer $\|f\|_M = \sup_{x\in M}|f(x)|$ und schreiben $\Omega \subset\subset X$, falls eine kompakte Menge $K$ existiert mit $\Omega \subset K \subset X$.

5.2. Lemma. *Ist $x \in U \subset\subset X$, $U = \varphi D_{R,1}$ ausgezeichnete Umgebung, dann gilt:*

(a) *Es existiert eine Schar $U_t$, $0 < t \leqslant t_0$ von offenen Umgebungen von $x$, so daß*

(2) Zusatz bei Korrektur: s. auch E. Bishop, Ann. Math. 78 (1963), 468-500.

(1) $U_s \subset\subset U_t \subset\subset U$ *für* $0 < s < t \leqslant t_0$, $\bigcup\limits_{s<t} U_s = U_t$,

(2) *die* $U_t$ *bilden eine Umgebungsbasis von* $x$,

(3) *zu jedem* $0 < s < t \leqslant t_0$ *existieren* $C > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, *so daß* $\|f\|_{U_t} \leqslant C\, \|f\|_{U_s}^{\lambda} \|f\|_U^{\mu}$ *für alle* $f \in \mathscr{F}(X)$.

(b) *Die Schar* $U_t$ *kann ferner so bestimmt werden, daß ein* $t_1$, $0 < t_1 < t_0$ *existiert, so daß für jedes* $y \in U_{t_1}$ *die nach* (a) *zu* $y$ ($y \in U$!) *existierende Schar* $V_s$, $0 < s \leqslant s_0$ *so gewählt werden kann, daß* $x \in V_{s_0}$.

Beweis. Wir können zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $x = \varphi(0)$. Wir setzen $U_t = \varphi D_{R,t}$ für $0 < t < 1$. Dann sind für jedes $t_0$, $0 < t_0 < 1$ die Forderungen (1), (2) erfüllt.

Wir fixieren ein $\tau$, $0 < \tau < 1$ und betrachten die kanonische Abbildung

$$\mathscr{F}(U) \to \mathscr{A}(\bar{U}_\tau) \cong \mathscr{A}(\bar{D}_{R,\tau}) = \bigcup_k \mathscr{H}(V_k).$$

Der Isomorphismus wird dabei durch Zurückziehen mittels $\varphi$ geliefert, die $V_k$ sollen eine komplexe Umgebungsbasis von $\bar{D}_{R,\tau}$ aus zusammenhängenden, offenen Mengen in $C^N$ bilden, $\mathscr{H}(V_k)$ ist der $(F)$-Raum der holomorphen Funktionen auf $V_k$. $\mathscr{F}(U)$ ist ein $(F)$-Raum in der kompakt-offenen Topologie.

Versehen wir $\mathscr{A}(\bar{D}_{R,\tau})$ mit der Normtopologie $\|\ \|_{\bar{D}_{R,\tau}}$ so sind die angegebenen Abbildungen $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{A}(\bar{D}_{R,\tau})$, $\mathscr{H}(V_k) \to \mathscr{A}(\bar{D}_{R,\tau})$ stetig und injektiv. Auf Grund von [5], I, S. 16 erhalten wir für geeignetes $k_0$ eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathscr{A}(\bar{D}_{R,\tau}) \\ & \mathscr{H}(V_{k_0}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

d.h. für $f \in \mathscr{F}(U)$ läßt sich $f \circ \varphi$ mittels einer linearen stetigen Operation zu $\tilde{f} \in \mathscr{H}(V_{k_0})$ ausdehnen.

Wir wählen nun $0 < t_0 < 1$, so daß $D_{C,t_0} \subset\subset V_{k_0}$ und erhalten für $f \in \mathscr{F}(X)$ mit einer geeigneten von $f$ unabhängigen Konstante $C_1 > 0$:

$$\|\tilde{f}\|_{D_{C,t_0}} \leqslant C_1 \|f\|_U.$$

Ist $0 < s < t \leqslant t_0$, so wenden wir dasselbe Verfahren auf die ausgezeichnete Umgebung $U_s$ an und erhalten ein $\sigma_0$, so daß mit einer geeigneten Konstante $C_2 > 0$:

$$\|\tilde{f}\|_{D_{C,\sigma_0}} \leqslant C_2 \|f\|_{U_s}.$$



Mit Hilfe des klassischen Hadamardschen Drei-Kreise-Satzes (hier für Polyzylinder) ergibt sich mit geeigneten $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$:

$$\|f\|_{U_t} \leqslant \|\tilde{f}\|_{D_{C,t}} \leqslant \|\tilde{f}\|_{D_{C,\sigma_0}}^{\lambda} \|\tilde{f}\|_{D_{C,t_0}}^{\mu} \leqslant C_1 C_2 \|f\|_{U_s}^{\lambda} \|f\|_U^{\mu}$$

für alle $f \in \mathscr{F}(X)$.

Es bleibt Teil (b) zu zeigen. Wir nehmen wieder an, daß $x = \varphi(0)$ und betrachten die eben konstruierte Schar $U_t$, $0 < t \leqslant t_0$. Wir wählen $t_1 = t_0/2$, $s_0 = t_0/2$ und setzen für $y \in U_{t_1}$, d.h. $y = \varphi\eta$, $\eta \in D_{R,t_1}$

$$V_s := \varphi(\eta + D_{R,s}) \subset \varphi(\bar{D}_{R,s+t_1}) \subset U_{t_0}.$$

Die Schar $V_s$, $0 < s \leqslant s_0$ erfüllt dann offenbar (1), (2), (3). Wegen $\eta \in D_{R,s_0}$ erhalten wir $0 \in \eta + D_{R,s_0}$ und damit $x \in V_{s_0}$.

Wir können nun zum eigentlichen Beweis von 5.1 kommen:

Beweis zu 5.1. Wir gehen in drei Schritten vor, d.h. wir betrachten drei Fälle mit zunehmender Allgemeinheit.

1. *Fall.* Es existiert ein $x \in \Omega_1$, eine ausgezeichnete Umgebung $U \subset \Omega$ von $x$, sowie eine Schar $U_t$, $0 < t \leqslant t_0$ gemäß 5.2, so daß $\Omega_2 \subset \Omega_1 \subset U_t^3$ für ein $t$, $0 < t < t_0$.

Dann existieren $s, t$ mit $0 < s < t < t_0$ und $U_s \subset \Omega_1$, $\Omega_2 \subset \Omega_1 \cup U_t$ und wir erhalten mit geeigneten $C$, $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$:

$$\|f\|_{U_t} \leqslant C\, \|f\|_{U_s}^{\lambda} \|f\|_U^{\mu} \leqslant C\, \|f\|_1^{\lambda} \|f\|_3^{\mu}.$$

Da offenbar

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_1^{\lambda} \|f\|_3^{\mu},$$

ergibt sich die Behauptung aus $\|f\|_2 \leqslant \max(\|f\|_1, \|f\|_{U_t})$.

2. *Fall.* Es existiert ein $x \in \Omega_3$, eine ausgezeichnete Umgebung $U \subset \Omega_3$ von $x$, eine Schar $U_t$, $0 < t \leqslant t_0$ gemäß 5.2, sowie ein Parameter $t_1$ gemäß 5.2 (b), so daß $\Omega_2 \subset \Omega_1 \cup U_t$ für ein $t$, $0 < t < t_0$ und so daß $U_{t_1} \cap \Omega_1 \neq \emptyset$.

Es existiert also ein $y \in U_{t_1} \cap \Omega_1$. Zu $y$ gibt es eine Schar $V_s$, $0 < s \leqslant s_0$ gemäß 5.2 (b). Wir setzen $M_1 = \Omega_1 \cup V_s$, $M_2 = \Omega_2 \cup V_s$, wo $0 < s < s_0$ so gewählt ist, daß $x \in V_s$ (s. 5.2 (a1)). Dann erfüllen $\Omega_1 \subset M_1 \subset\subset \Omega_3$ und $M_1 \subset M_2 \subset\subset \Omega_3$ die Voraussetzungen des 1. Falles und wir erhalten mit geeigneten positiven Zahlen $C_n$, $\lambda_n$, $\mu_n$, $\lambda_n + \mu_n = 1$, $n = 1, 2$:

$$\|f\|_{M_1} \leqslant C_1 \|f\|_1^{\lambda_1} \|f\|_3^{\mu_1},$$

$$\|f\|_2 \leqslant \|f\|_{M_2} \leqslant C_2 \|f\|_{M_1}^{\lambda_2} \|f\|_3^{\mu_2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\|f\|_2 \leqslant C\, \|f\|_1^{\lambda} \|f\|_3^{\mu}$$

mit $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$, $\mu = \mu_2 + \lambda_2 \mu_1$, $C = C_1^{\lambda_2} C_2$.

3. *Allgemeiner Fall.* Wir wählen eine zusammenhängende kompakte Menge $K$ mit $\Omega_2 \subset K \subset \Omega_3$. Daß dies möglich ist, resultiert aus der Lokalkompaktheit und dem lokalen Bogenzusammenhang von $X$ (man kann $\Omega_2$ durch endlich viele zusammenhängende in $\Omega_3$ kompakte Mengen überdecken), sowie dem daraus folgenden Bogenzusammenhang von $\Omega_3$ (man verbinde diese endlich vielen kompakten Mengen durch stetige Wege).

Zu jedem $x \in K$ wählen wir eine ausgezeichnete Umgebung $U^{(x)} \subset \Omega_3$, dazu eine Schar $U_t^{(x)}$, $0 < t \leqslant t_0(x)$ gemäß 5.2 sowie ein $t_1(x)$, $0 < t_1(x) < t_0(x)$ gemäß 5.2 (b).

Dann gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_m$, so daß

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{m} U_{t_1(x_n)}^{(x_n)}.$$

Wir setzen

$$M_0 = \Omega_1, \qquad M_n = M_{n-1} \cup U_{t_1(x_n)}^{(x_n)} \quad \text{für} \quad n = 1, \ldots, m.$$

Auf Grund des Zusammenhangs von $K$ können wir durch (sukzessive) geeignete Nummerierung der $x_n$ erreichen, daß $M_{n-1} \subset M_n \subset\subset \Omega_3$, $n = 1, \ldots, m$ die Voraussetzungen des 2. Falles erfüllen. Wir erhalten so

$$\|f\|_{M_n} \leqslant C_n \|f\|_{M_{n-1}}^{\lambda_n} \|f\|_3^{\mu_n}$$

für $n = 1, \ldots, m$ mit geeignetem $C_n, \lambda_n, \mu_n > 0$, $\lambda_n + \mu_n = 1$ und hieraus durch Zusammensetzen:

$$\|f\|_{M_m} \leqslant C \|f\|_{M_0}^{\lambda} \|f\|_3^{\mu}$$

mit $C, \lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$. Aus $\|f\|_1 = \|f\|_{M_0}$ und $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_{M_m}$ ergibt sich die Behauptung.

Wir setzen nun zusätzlich voraus, daß $X$ im Unendlichen abzählbar (d.h. $\sigma$-kompakt) ist. $\mathscr{F}(X)$ ist dann ein $(F)$-Raum. Wir erhalten:

5.3. Corollar. *$\mathscr{F}(X)$ hat die Eigenschaft* $(\underline{\mathrm{DN}})$.

Beweis. Man wähle eine beliebige offene Menge $\emptyset \neq \Omega_0 \subset\subset X$ und eine Ausschöpfung $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \ldots$, so daß $\bigcup_k \Omega_k = X$. Dann erhalten wir für jedes $k$ Zahlen $C, \lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, so daß mit $\|f\|_k = \sup_{x \in \Omega_k} |f(x)|$, $k = 0, 1, \ldots$ gilt

$$\|f\|_k \leqslant C \|f\|_0^{\lambda} \|f\|_{k+1}^{\mu}$$

für alle $f \in \mathscr{F}(x)$ und damit mit $\varepsilon = 1/\mu - 1 = \lambda/\mu$

$$\|f\|_k^{1+\varepsilon} \leqslant C^{1/\mu} \|f\|_0^{\varepsilon} \|f\|_{k+1}$$

für alle $f \in \mathscr{F}(X)$.



Um aus diesem Ergebnis mittels 3.2 oder 3.3 auf die Einbettbarkeit von $\mathscr{F}(X)$ in Folgenräume schließen zu können, benötigt man Informationen über die im jeweiligen Spezialfall gegebenen Nuklearitätstypen. Ein in gewissem Sinn minimaler Einbettungssatz läßt sich jedoch immer zeigen. Wir bezeichnen jetzt mit $D^N = \{z = (z_1, \ldots, z_N) \in C^N \colon \max_j |z_j| < 1\}$ den $N$-dimensionalen Einheitspolyzylinder. Der $(F)$-Raum $\mathscr{H}(D^N)$ der auf $D^N$ holomorphen Funktionen ist dann isomorph zu $\Lambda_1(\alpha)$ mit $\alpha_n = n^{1/N}$, $n = 1, 2, \ldots$

5.4. Satz. *$\mathscr{F}(X)$ ist isomorph einem Unterraum von $\mathscr{H}(D^N)$.*

Beweis. Wir gehen auf den Beweis von 5.1 zurück, bleiben zunächst bei den dortigen Bezeichnungen und erhalten zu jeder ausgezeichneten Umgebung $U$ eines Punktes $x$ ein $0 < t_0 < t$ und eine lineare stetige Abbildung $A \colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{H}(D_{C,t_0})$ derart, daß eine Umgebung $V \subset\subset U$ von $x$ und ein $t$ mit $0 < t < t_0$ existiert (wir können dazu $V = \varphi D_{R,t}$, $0 < t < t_0$ beliebig, wählen) mit $\|f\|_V \leqslant \|Af\|_{D_{R,t}}$ für alle $f \in \mathscr{F}(U)$ (beachte, daß $Af|_{D_{R,t_0}} = f \circ \varphi$ ist).

Wir haben gezeigt, indem wir $\mathscr{H}(D_{C,t_0}) \cong \mathscr{H}(D^N)$ ausnützen: Zu jedem $x \in X$ existieren Umgebungen $V_x \subset\subset U_x \subset\subset X$ und eine Faktorisierung der kanonischen Abbildung $\mathscr{F}(U_x) \to \mathscr{F}(V_x)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U_x) \arrow[rr] \arrow[dr, "A_x"'] & & \mathscr{F}(V_x) \\
& \tilde{F} \subset \mathscr{H}(D^N) \arrow[ur, "B_x"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir wählen nun abzählbar viele $x_1, x_2, \ldots$, so daß die $V_{x_n}$ ganz $V$ überdecken. Dann bettet

$$f \mapsto [A_{x_n}(f|_{U_{x_n}})]_{n=1,2,\ldots}$$

den Raum $\mathscr{F}(X)$ isomorph in $\mathscr{H}(D^N)^N$ ein. $\mathscr{F}(X)$ ist also isomorph einem Unterraum von $\mathscr{H}(D^N)^N \cong \Lambda_1(\alpha)^N$ und damit $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear für $\alpha_n = n^{1/N}$ (s. 1.5). Aus 3.2 und 5.3 folgt die Behauptung.

Daß dieser Satz jedoch nicht optimal ist, daß z.B. in wichtigen Fällen Einbettungen nach $\mathscr{H}(D^M)$, $M < N$ möglich sind, zeigt 4.4 (der natürlich auch mit Hilfe von 5.3 bewiesen werden kann) und der folgende Fall:

Wir betrachten einen elliptischen Differentialoperator $T$ auf $X$, d.h. eine Garbenabbildung $T \colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ (bzw. $C^\infty \to C^\infty$), die unter jeder reell-analytischen Karte ein elliptischer Differentialoperator

$$P(x, D) = \sum_{|j| \leqslant m} a_j(x) D^j$$

wird mit reell-analytischen $a_j(x)$. Sei $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ die Garbe der Nullösungen von $T$. Diese erfüllt unsere generellen Voraussetzungen.

5.5. SATZ. *Für $N > 1$ ist $\mathscr{F}(X)$ isomorph einem Unterraum von $\mathscr{H}(D^{N-1})$.*

Beweis. Wir knüpfen an den Beweis von 5.4 an und bemerken, daß man (durch evtl. nochmaliges Verkleinern von $D_{C,t_0}$) erreichen kann, daß ein Differentialoperator $P = P(z, \partial/\partial z)$ mit holomorphen Koeffizienten auf $D^N$ existiert, so daß Bild $A_x \subset \mathscr{K}(D^N)$, wobei wir für $\Omega \subset D^N$ mit $\mathscr{K}(\Omega)$ den Kern des Operators $P$: $\mathscr{H}(\Omega) \to \mathscr{H}(\Omega)$ bezeichnen.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen (durch eine komplex-lineare Transformation und evtl. erneutes Verkleinern von $D_{C,t_0}$), daß für den Koeffizienten von $(\partial/\partial z_N)^m$, wo $m = \operatorname{Grad} P$, gilt $a_{(0,\ldots,0,m)}(0) \neq 0$.

Wir identifizieren $D^{N-1}$ mit $\{(z_1, \ldots, z_{N-1}, 0)\colon \max|z_j| < 1\} \subset D^N$. Durch

$$f \mapsto (f, \partial f/\partial z_N, \ldots, \partial^{m-1} f/\partial z_N^{m-1})|_{D^{N-1}}$$

wird eine injektive, stetige lineare Abbildung $E_X$: $\mathscr{K}(D^N) \to \mathscr{H}^m(D^{N-1})$ erzeugt.

Wir betrachten den lokalkonvexen Raum $\mathscr{O}^m_{N-1}$ der Keime von $C^m$-wertigen Funktion in $N-1$ Variablen und setzen $D_k^N = \{(z_1, \ldots, z_N)\colon \max\limits_j |z_j| < 1/k\}$. Durch

$$f \mapsto \text{Keim in } 0 \text{ von} (f, \partial f/\partial z_N, \ldots, \partial f^{m-1}/\partial z_N^{m-1})$$

wird eine stetige Injektion $i_k\colon \mathscr{K}(D_k^N) \to \mathscr{O}^m_{N-1}$ geliefert. Sei weiter $j$ die kanonische Injektion $\mathscr{H}^m(D^{N-1}) \to \mathscr{O}^m_{N-1}$. Da wegen des Satzes von Cauchy–Kowalewsky Bild $j \subset \bigcup\limits_k \text{Bild}\, i_k$ folgt aus [5], I. S. 16, daß ein $k_0$ und eine stetige Abbildung $F_x$: $\mathscr{H}^m(D^{N-1}) \to \mathscr{K}(D^N_{k_0})$ existiert, so daß $i_{k_0} \circ F_x = j$.

Setzen wir nun $W_x = \varphi D^N_{k_0}$ und bezeichnen mit $G_x$ die Abbildung $f \to f \circ \varphi^{-1}$, so erhalten wir unter Beachtung von $D^N_{k_0} \subset D^N$ das folgende Diagramm. Die waagerechten Pfeile bedeuten jeweils die Einschränkungsabbildungen.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U_x) \arrow[rr] \arrow[dr, "A_x"'] & & \mathscr{F}(V_k) \arrow[rr] & & \mathscr{F}(W_1) \\
& \mathscr{K}(D^N) \arrow[ur, "B_x"'] \arrow[rr] \arrow[dr, "E_x"'] & & \mathscr{K}(D^N_{k_0}) \arrow[ur, "G_x"'] & \\
& & \mathscr{H}^m(D^{N-1}) \arrow[ur, "F_x"'] & &
\end{tikzcd}$$



Wir überdecken nun $X$ durch Mengen $W_{x_n}$ und erhalten eine Einbettung $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{H}^m(D^{N-1})\boldsymbol{N} \cong \mathscr{H}(D^{N-1})\boldsymbol{N}$ durch $f \mapsto [(E_{x_n} \circ A_{x_n})(f|_{U_{x_n}})]_{n=1,2,\ldots}$. Wir schließen dann weiter wie in 5.4.

Der Satz 5.5 gilt natürlich insbesondere für den Raum $\mathscr{F}(X)$ der Nullösungen eines elliptischen Differentialoperators $P(x, D) = \sum\limits_{|j| \leqslant m} a_j(x) D^j$, $a_j$ (komplexwertig) reell-analytisch auf einer offenen zusammenhängenden Menge $X \subset \boldsymbol{R}^N$, $N \geqslant 2$. Man vergleiche von 4.4 und 5.5 die Aussagen zur funktionalen Dimension der entsprechenden Räume in [7], [17].

**Literatur**


[1] A. Aytuna, T. Terzioglu, *On certain subspaces of a nuclear power series space of finite type*, Studia Math. 69 (1980), 79–86.

[2] E. Dubinsky, *Infinite type power series subspaces of finite type power series spaces*, Israel J. Math. 15 (1973), 257–281. 69 (1980), 76–86.

[3] — *Basic sequences in a stable finite type power series space*, Studia Math. 68 (1980), 117–130.

[4] E. Dubinsky, M. S. Ramanujan, *On λ-nuclearity*, Mem. Amer. Math. Soc. 128 (1972).

[5] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[6] T. und Y. Komura, *Über die Einbetting der nuklearen Räume nach* $(s)^A$, Math. Ann. 162 (1966), 284–288.

[7] Y. Komura, *Die Nuklearität der Lösungsräume der hypoelliptischen Gleichungen*, Funkcial. Ekvac. 9 (1966), 213–324.

[8] G. Köthe, *Probleme der linearen Algebra in topologischen Vektorräumen*, Proc. Intern. Symp. Linear Spaces, Jerusalem 1960.

[9] S. G. Krein, Yu. T. Petunin, *Scales of Banach spaces*, Russian Math. Surveys 21 (1966), 85–159 (engl. Übersetzung).

[10] B. S. Mitjagin, *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, ibid. 16 (1961), 59–127 (engl. Übersetzung).

[11] — *Sur l'équivalence des bases inconditionelles dans les échelles de Hilbert*, C.R. Acad. Sci. Paris 269 (1969), 426–428.

[12] — *The equivalence of bases in Hilbert scales*, Studia Math. 37 (1970), 111–137 (russisch).

[13] B. S. Mitjagin, G. M. Henkin, *Linear problems of complex analysis*, Russian Math. Surveys 26 (1971), 99–164 (engl. Übersetzung).

[14] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 1969.

[15] M.S. Ramanujan, T. Terzioglu, *Power series spaces $\Lambda_k(a)$ of finite type and related nuclearities*, Studia Math. 53 (1975), 1–13.

[16] W. Robinson, *On $\Lambda_1(a)$-nuclearity*, Duke Math. J. 40 (1973), 541–546.

[17] S. Rolewicz, *Metric linear spaces*, Warschau 1972.

[18] T. Terzioglu, *Die diametrale Dimension von lokalkonvexen Räumen*, Collect. Math. 20 (1969), 49–99.

[19] D. Vogt, *Vektorwertige Distributionen als Randverteilungen holomorpher Funktionen*, manuscripta math. 17 (1975), 267–290.

[20] — *Charakterisierung der Unterräume von s*, Math. Z. 155 (1977), 109–117.
[21] D. Vogt, M. J. Wagner, *Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau*, Studia Math. 67 (1980), 225–240.
[22] —, — *Charakterisierung der Unterräume und Quotientenräume der nuklearen stabilen Potenzreihenräume von unendlichem Typ.*, ibid. 70 (1981), 63–80.
[23] M. J. Wagner, *Unterräume und Quotienten von Potenzreihenräumen*, Dissertation, Wuppertal 1977.

*Received November 16, 1978* (1480)

---

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXI. (1982)

# Discrete nilpotent groups have a $T_1$ primitive ideal space

by

DETLEV POGUNTKE (Bielefeld)

**Abstract.** Let $G$ be a discrete nilpotent group, let $C^*(G)$ be the $C^*$-hull of $L^1(G)$, and let Prim$(G)$ be the space of all primitive ideals in $C^*(G)$, equipped with the Jacobson topology. It is shown that Prim$(G)$ is a $T_1$ space, i.e. the primitive ideals are maximal. As a consequence, the set of maximal two-sided ideals in $L^1(G)$ coincides with the set of primitive ideals and with the set of kernels of irreducible $*$-representations of $L^1(G)$.

For a locally compact group $G$ let $C^*(G)$ be the $C^*$-hull of $L^1(G)$ and let $\operatorname{Prim} G = \operatorname{Prim} C^*(G)$ denote the space of kernels of irreducible $*$-representation of $C^*(G)$, equipped with the Jacobson topology. Using R. Howe's results on representations of a certain type of discrete nilpotent groups, C.C. Moore and J. Rosenberg have shown that Prim$(G)$ is a $T_1$ space (i.e. the primitive ideals in $C^*(G)$ are maximal) for all *finitely generated* discrete nilpotent groups. In this paper, I want to give a short direct proof for the $T_1$ property of Prim$(G)$ for *all* discrete nilpotent groups.

The heart of the proof is the following lemma.

LEMMA 1. *Let $G$ be a locally compact group, let $N$ be an open normal subgroup of $G$, and let $W$ be a subgroup of $G$ with $N \subset W$ and such that $W/N$ is central in $G/N$. Let $\lambda$ be the left regular representation of $G$ in $L^2(G/N)$, and let $\sigma$ and $\tau$ be unitary representations of $G$. Suppose that $\sigma$ is irreducible and weakly contained in $\lambda\otimes\tau$ (symbolically: $\sigma \ll \lambda\otimes\tau$). Then there exists a unitary character $\chi$ of $W$, $\chi \equiv 1$ on $N$, such that*

$$\ker_{L^1}(\chi\otimes\tau|_W) \subset \ker_{L^1}\sigma|_W,$$

*where $\ker_{L^1}$ means that we take the kernel of the corresponding representation of $L^1(W)$.*

Remark. In [1], the so-called class $[\psi]$ of locally compact groups was introduced. For a locally compact group $G$, denote by $\operatorname{Priv}_*(L^1(G))$ the space of kernels of irreducible $*$-representations of $L^1(G)$, equipped with the Jacobson topology. $G$ belongs, by definition, to $[\psi]$ if the canonical map $\operatorname{Prim}(G)\to\operatorname{Priv}_*(L^1(G))$ is an homeomorphism. It was shown that