Conspectus materiae tomi XLII, fasciculi 3

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange | Address of the Editorial Board and of the exchange | Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches | Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

ISBN 83-01-04428-4 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений

В. И. Берник (Минск)

1. Введение. Пусть S некоторое множество вещественных чисел. Для любого $\delta > 0$ определим

$$m(\varrho, \delta, S) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|^{\varrho},$$

где точная нижняя грань рассматривается по всевозможным последовательностям интервалов $I_1, I_2, \ldots$ длины $|I_j| \leqslant \delta$ и образующих покрытие множества S. Положим

$$m(\varrho, S) = \sup_{\delta>0} m(\varrho, \delta, S).$$

Тогда

$$r = \inf\{\varrho\colon m(\varrho, S) = 0\}$$

называется *размерностью Хаусдорфа множества* S, что обозначают $r = \dim S$. Нетрудно показать, что размерность счетного множества равна нулю и для любого S верно $0 \leqslant \dim S \leqslant 1$. Иногда мы будем пользоваться следующим свойством размерности

$$\dim \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \sup_i \dim S_i.$$

В последние годы это понятие, введенное Хаусдорфом [16], часто применяется при анализе различных множеств, характеризующихся теоретико-числовыми свойствами. Обозначим через $\mathscr{L}_n(w)$ множество вещественных чисел ω, для которых неравенство

$$|P(\omega)| < H^{-w} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(x)$ степени не выше n. Здесь $H = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ — высота полинома

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{2}$$

В конце двадцатых годов Ярник [17] и Безикович [14] доказали, что при $w>1$ $\dim\mathscr{L}_1(w)=2/(w+1)$. Гютинг [15] усилил этот результат.

При $n>1$ известно следующее. Из теоремы Минковского о линейных формах следует, что $\mathscr{L}_n(n)=R$, Спринджук [6]–[9], решив тем самым проблему Малера, показал, что при $w>n$ множество $\mathscr{L}_n(w)$ имеет нулевую меру Лебега. В 1970 году А. Бейкер и Шмидт [11] доказали неравенство

$$\frac{n+1}{w+1}\leqslant\dim\mathscr{L}_n(w)<2\frac{n+1}{w+1}. \tag{3}$$

Основная часть их работы посвящена получению оценки снизу для $\mathscr{L}_n(w)$. Оценка сверху получена с помощью применения неравенств Вирзинга [20].

Ряд соображений приводит к гипотезе [11], что при $w>n$

$$\dim\mathscr{L}_n(w)=(n+1)/(w+1). \tag{4}$$

При $n=1$ эта гипотеза справедлива в силу указанных выше результатов. При $n=2$ Каш и Фолькман [18] доказали, что $\dim\mathscr{L}_2(w)\leqslant\leqslant 3/(w+1)$. Вместе с неравенством (3) это дает для $\mathscr{L}_2(w)$ (4). Наконец, совсем недавно Р. Бейкер [13] доказал, что $\dim\mathscr{L}_3(w)\leqslant 4/(w+1)$ при $w>3$ и $\dim\mathscr{L}_n(w)\leqslant(n+1)/(w+1)$ при $n\geqslant 4$ и $w>(n^2+n-3)/3$, что вместе с (3) дает (4) при $n=3$ и $w>(n^2+n-3)/3$ для $n\geqslant 4$. При $(4n-3)/3\leqslant w\leqslant(n^2+n-3)/3$ Р. Бейкер получил оценку

$$\dim\mathscr{L}_n(w)\leqslant\frac{n}{w+1-n/3}$$

однако при $n<w<(4n-3)/3$ его метод не позволяет получить оценки лучше тривиальной ($\dim\mathscr{L}_n(w)\leqslant 1$). Оценку $\dim\mathscr{L}_n(w)<1$ можно получить, применив метод существенных и несущественных областей Спринджука [6]–[9], [12]. Такие результаты были получены автором и готовились к печати. Однако вскоре выяснилось, что метод допускает дальнейшее развитие, которое привело к полному доказательству (4).

Теорема. *Размерность Хаусдорфа множества $\mathscr{L}_n(w)$ при $w>n$ равна $(n+1)/(w+1)$.*

Очевидно, принимая во внимание неравенство (3), теорема будет следовать из неравенства $\dim\mathscr{L}_n(w)\leqslant(n+1)/(w+1)$. Установить это неравенство — цель дальнейших рассмотрений. Доказательство теоремы разбито на 5 этапов (§§ 4–8). В § 2 вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные леммы. Следующий параграф посвящен доказательству основной леммы — леммы 12. В § 4 рассматриваются некоторые частные случаи теоремы (многочлены первой и второй степени, случаи специального расположения корней многочленов).

Следующие четыре параграфа являются основными при доказательстве теоремы. В § 5 дается доказательство теоремы при дополнительном предположении, что хотя бы два многочлена из некоторого множества не имеют общих корней. (Предложение 2). Если это дополнительное предположение не имеет места, то мы переходим ко множеству многочленов, имеющих общий множитель. Хотя при различных w приходится применять различные рассуждения — цель их одна: доказать, что общий множитель имеет небольшую степень и высоту и в тоже время достаточно мал во всех точках некоторого интервала. Таким образом мы получаем доказательство теоремы при $n<w<2n+1$ (§ 6, предложение 3), при $w>4n+3$ (§ 7, предложение 4) и при $2n+1\leqslant w\leqslant 4n+3$ (§ 8, предложение 5).

Краткое изложение доказательства теоремы дано автором в [2].

Я выражаю глубокую благодарность профессору В. Г. Спринджуку, заинтересовавшему меня гипотезой о размерности $\mathscr{L}_n(w)$ и оказывавшему постоянную поддержку в моих усилиях доказать ее.

2. Вспомогательные леммы. В этом параграфе будет сделан переход от множества всех целочисленных полиномов вида (2) ко множеству неприводимых в поле рациональных чисел полиномов, имеющих определенную структуру коэффициентов и корней.

Через $c(n)$ мы будем обозначать положительные функции, зависящие только от n и некоторого положительного, заранее фиксированного числа ε. Над $c(n)$ мы будем производить действия по формальным правилам

$$c(n)+c(n)=c(n),\quad c(n)\cdot c(n)=c(n),$$

смысл которых состоит в том, что сумма и произведение есть снова некоторая функция, зависящая от n и ε.

Если $P(x)$ многочлен вида (3), то через $H(P)$ будем обозначать величину его максимального по модулю коэффициента — высоту $P(x)$. Если при этом не возникает двусмысленности, то вместо $H(P)$ будем писать просто H. Ясно, что мы можем считать $H>H_0(n)$, где $H_0(n)$ достаточно большое натуральное число.

Лемма 1. *Пусть $P_1(x),\ldots,P_l(x)$ полиномы и $P(x)=P_1(x)\ldots P_l(x)$. Тогда*

$$c_1(n)H(P_1)\ldots H(P_l)<H(P)<c_2(n)H(P_1)\ldots H(P_l).$$

Доказательство леммы 1 можно найти в [3] и [9].

Лемма 2. *Пусть $w_1(\omega)$ и $v_1(\omega)$ точные верхние грани тех w_1' и v_1', для которых неравенства*

$$|P(\omega)|<H(P)^{-w_1'},\quad |F(\omega)|<H(F)^{-v_1'}$$

имеют бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(x)$ и целочисленных неприводимых полиномах $F(x)$ соответственно. Тогда $w_1(\omega) = v_1(\omega)$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству утверждения § 5 главы 1 из [9].

Лемма 3. *Пусть при некотором $w > n$ неравенство*

$$|P(\omega)| < H(P)$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных неприводимых полиномах $P(x)$ для некоторого множества $A(w)$, причем $\dim A(w) \geqslant \delta$ $(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$. Тогда неравенство

$$|Q(\omega)| < H(Q)^{-w}$$

имеет бесконечное число решений для некоторого множества $B(w)$ в целочисленных неприводимых полиномах $Q(x)$, подчиненных условию

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i(Q)| \leqslant a_n(Q) = H(Q), \tag{5}$$

где $a_i(Q)$ — коэффициенты $Q(x)$. При этом $\dim B(w) \geqslant \delta$.

Доказательство леммы 3 можно провести аналогично доказательству утверждения § 6 первой главы из [9]. Подобное лемме 3 утверждение доказано в лемме 4 из [13].

Обозначим через $P_n(H)$ класс неприводимых полиномов $P(x)$ с условием (5), для которых $a_n(P) = H$. Пусть далее $P_n = \bigcup_{H=1}^{\infty} P_n(H)$.

Пусть $P(x) \in P_n(H)$ и $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ его корни. Тогда нетрудно показать, что

$$|\varkappa_i| \leqslant n, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Для любого корня $\varkappa_i$ полинома $P(x)$ произведем упорядочивание корней, относительно $\varkappa_i$

$$|\varkappa_i - \varkappa_{i2}| \leqslant |\varkappa_i - \varkappa_{i3}| \leqslant \ldots \leqslant |\varkappa_i - \varkappa_{in}|. \tag{7}$$

Понятно, что $\varkappa_i, \varkappa_{i2}, \ldots, \varkappa_{in}$ являются некоторой перестановкой корней $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$. При $i = 1$ неравенство (7) будем записывать в виде

$$|\varkappa_1 - \varkappa_2| \leqslant |\varkappa_1 - \varkappa_3| \leqslant \ldots \leqslant |\varkappa_1 - \varkappa_n| \tag{8}$$

опуская индекс 1 у $\varkappa_{1i}$.

Лемма 4. *Пусть $A = \{A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$ система интервалов A_i на прямой и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^{\varrho} < \infty. \tag{9}$$

Пусть B — множество вещественных ω, попадающих в бесконечное число A_i. Тогда $\dim B \leqslant \varrho$.

Доказательство леммы 4 несложно.

Из леммы 4 следует, что если мы докажем, что $\mathscr{L}_n(w)$ можно покрыть системой интервалов $S = \{S_1, \ldots, S_n, \ldots\}$ с условием

$$\sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^{\varrho} < \infty$$

при $\varrho = (n+1)/(w+1) + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, то отсюда будет следовать утверждение теоремы. Зафиксируем ε и положим $T = [d(n)/\varepsilon]$, $\varepsilon_1 = T^{-1}$, где $d(n)$ достаточно большая величина, зависящая только от n.

Введем обозначения

$$|\varkappa_i - \varkappa_{ij}| = H^{-\mu_{ij}}, \quad j = 2, \ldots, n. \tag{10}$$

При $i = 1$ (10) будем записывать в виде

$$|\varkappa_1 - \varkappa_j| = H^{-\mu_j}, \quad j = 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Определим целые числа l_{ij} из неравенств

$$l_{ij}/T \leqslant \mu_{ij} < (l_{ij}+1)/T, \quad j = 2, \ldots, n. \tag{12}$$

При $i = 1$ (12) будем записывать в виде

$$l_j/T \leqslant \mu_j < (l_j+1)/T. \tag{13}$$

С каждым корнем $\varkappa_i$ полинома $P(x)$ будем связывать целочисленный вектор $\bar{s}_i = (l_{i2}, \ldots, l_{in})$. Все многочлены $P(x) \in P_n(H)$, имеющие один и тот же вектор $\bar{s}_i$, объединим в один класс $P_n(H, \bar{s}_i)$. При $i = 1$ класс $P_n(H, \bar{s}_1)$ будем обозначать $P_n(H, \bar{s})$.

Лемма 5. *Для любого $i = 1, \ldots, n$, число классов $P_n(H, \bar{s}_i)$ конечно и зависит только от n и ε.*

Лемма 5 доказана в [1]. Так как число классов $P_n(H, \bar{s})$ конечно, то будем считать, что неравенство (2) рассматривается при некотором фиксированном векторе $\bar{s}$.

Введем еще одно обозначение. Пусть $\mathscr{S}(\varkappa_i)$ — множество вещественных чисел ω, обладающих свойством

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} |\omega - \varkappa_j| = |\omega - \varkappa_i|. \tag{14}$$

Ясно, что все $\mathscr{S}(\varkappa_i)$ представляют собой интервалы, причем два крайних интервала имеют вид $(-\infty, \beta_1)$, (β_2, ∞), где β_1 и β_2 некоторые вещественные алгебраические числа. Корни $\varkappa_i$ полиномов $P(x)$ упорядочим в порядке возрастания по величине $\mathrm{Re}\,\varkappa_i$. Если $\varkappa_i$ — комплексный корень, то ранее будем записывать тот корень, у которого $\mathrm{Im}\,\varkappa_i > 0$. Ясно, что если для некоторого $\omega \in R$ неравенство (2) выполняется бесконечно часто, то ω принадлежит бесконечному числу $\mathcal{S}(\varkappa_i)$ при некотором фиксированном i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Будем считать $i = 1$, что, конечно, не умаляет общности.

Определим числа p_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ следующим образом

$$p_i = \frac{l_{i+1} + \ldots + l_n}{T}. \tag{15}$$

Лемма 6. *Пусть $P(x) \in P_n(H)$, $\omega \in \mathcal{S}(\varkappa_1)$. Тогда*

$$|\omega - \varkappa_1| \leqslant 2^n \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_1)|}, \tag{16}$$

$$|\omega - \varkappa_1| \leqslant \min_{2 \leqslant j \leqslant n} \left(2^n \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_1)|} |\varkappa_1 - \varkappa_2| \ldots |\varkappa_1 - \varkappa_j|\right)^{1/j}. \tag{17}$$

Лемма 6 доказана, например, в [1].

Лемма 7. *Пусть $P(x) \in P_n(H, \bar{s})$. Тогда*

$$|P^{(l)}(\varkappa_1)| < c(n) H^{1-p_l}. \tag{18}$$

Лемма 7 доказана в [1].

Лемма 8. *Пусть $P(x)$ полином степени n и высоты H. Пусть старший коэффициент $P(x)$ равен a_n, $i_1, \ldots, i_m$ попарно различные натуральные числа, принимающие значения $1, \ldots, n$. Тогда для любого m*

$$|\varkappa_{i_1} \ldots \varkappa_{i_m}| < c(n) \frac{H}{|a_n|},$$

где $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ — корни $P(x)$.

Лемма 8 доказана в [10].

Лемма 9. *Пусть $P(H)$ — множество полиномов степени не выше l, высоты не более H, пусть $|P(H)|$ — число элементов $P(H)$. Тогда если для любого полинома $P(x) \in P(H)$ неравенство $|P(\omega)| < H^\mu$ выполняется для всех ω из некоторого интервала I, то*

$$|P(H)| < \begin{cases} c(l) H^{l+\mu}, & 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \\ c(l) H^l, & \mu < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть для некоторого $P(x) \in P(H)$ верно $|P(\omega)| < H^\mu$. Пусть b некоторое целое число. Тогда многочлены вида $P(\omega) + b$ могут удовлетворять неравенству $|P(\omega) + b| < H^\mu$ только при $-2H^\mu < b < 2H^\mu$. Многочленов $P(x)$ с ограничениями такого вида не более $c(l) H^{l+\mu}$ при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ и $c(l) H^l$ при $\mu < 0$.

Лемма 10. *Пусть $I \subset R$ — некоторый интервал и $B \subset I$ измеримое множество вещественных чисел с условием $|B| \geqslant k^{-1}|I|$, k — натуральное число. Пусть для всех $\omega \in B$ выполняется неравенство $|P(\omega)| < H^{-w}$, где $w > 0$ и $\deg P(x) \leqslant n$. Тогда для всех $\omega \in I$ выполняется неравенство*

$$|P(\omega)| < (3k)^n (n+1)^{n+1} H^{-w}.$$

Доказательство. Разобъем отрезок I на $3k(n+1)$ равных интервала $I_1, \ldots, I_{3k(n+1)}$. Так как $|B| \geqslant k^{-1}|I|$, то по крайней мере в $3n+3$ интервалах есть $\omega \in B$. Обозначим эти интервалы $I_{s1}, \ldots, I_{sl}$, $l \geqslant 3n+3$. Рассмотрим три последовательных интервала $I_{sj}, I_{s(j+1)}, I_{s(j+2)}$ и выберем $\omega \in B \cap I_{s(j+1)}$. Таким образом мы сможем выбрать $n+1$ точек $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$, удовлетворяющих условиям

$$|\omega_i - \omega_j| \geqslant \frac{1}{3k(n+1)} |I| \qquad (i \neq j)$$

и в которых $|P(\omega_i)| < H^{-w}$. Представим $P(\omega)$ в виде интерполяционной формулы Лагранжа

$$P(\omega) = \sum_{l=1}^{n+1} c_l \frac{(\omega - \omega_1) \ldots (\omega - \omega_{l-1})(\omega - \omega_{l+1}) \ldots (\omega - \omega_{n+1})}{(\omega_l - \omega_1) \ldots (\omega_l - \omega_{l-1})(\omega_l - \omega_{l+1}) \ldots (\omega_l - \omega_{n+1})},$$

где c_l — значение многочлена $P(\omega)$ в точке $\omega = \omega_l$. Так как $|\omega - \omega_l| \leqslant I$ для всех $\omega \in I$ и по условию леммы $|c_l| < H^{-w}$, то из представления $P(\omega)$ получаем

$$|P(\omega)| < \sum_{l=1}^{n+1} H^{-w} \frac{|I|^n}{\left(3k(n+1)\right)^{-n} |I|^n} = (3k)^n (n+1)^{n+1} H^{-w}.$$

Лемма 11. *Пусть $P'_n(H, \bar{s})$ подмножество $P_n(H, \bar{s})$, состоящее из таких $P(x)$, для которых существует $\omega \in R$, удовлетворяющее (1). Обозначим через $|P'_n(H, \bar{s})|$ число полиномов подмножества $P'_n(H, \bar{s})$ и пусть для всех полиномов $P(x) \in P_n(H, \bar{s})$ величина $p_1(P) = p_1$ удовлетворяет условию $0 \leqslant p_1 \leqslant 1$. Тогда*

$$|P'_n(H, \bar{s})| < c(n) H^{n - p_1 + (n-1)\varepsilon_1}.$$

Аналогичное лемме 11 утверждение доказано в [13].

3. Доказательство основной леммы.

Лемма 12. *Пусть $\delta > 0$ — некоторое действительное число, s — натуральное, $H = H(\delta, s)$ — достаточно большое действительное число. Пусть далее $P(x), Q(x) \in Z[x]$ два взаимнопростых многочлена,*

$$\max\left(H(P), H(Q)\right) = H^\mu, \quad \deg P(x) \leqslant s, \quad \deg Q(x) \leqslant s.$$

Тогда если для всех ω из некоторого интервала $I \subset (-s, s)$ $|I| = H^{-\eta}$, $\eta > 0$, выполняются неравенства

$$\max\left(|P(\omega)|, |Q(\omega)|\right) < H^{-\tau}, \quad \tau > 0,$$

то

$$\tau + \mu + 2\max(\tau + \mu - \eta, 0) < 2\mu s + \delta.$$

Доказательство. Пусть $\varkappa_1(P), \ldots, \varkappa_{s_1}(P)$ — корни многочлена $P(x)$; $\varkappa_1(Q), \ldots, \varkappa_{s_2}(Q)$ — корни многочлена $Q(x)$. Здесь s_1 и s_2 степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, $s_1 \leqslant s$, $s_2 \leqslant s$. Пусть

$$\nu_i(P) = I \cap \mathscr{S}(\varkappa_i(P)), \quad i = 1, \ldots, s_1,$$
$$\nu_j(Q) = I \cap \mathscr{S}(\varkappa_j(Q)), \quad j = 1, \ldots, s_2.$$

Возможно, что для некоторых i и j, $\nu_i(P) = \emptyset$, $\nu_j(Q) = \emptyset$. Так как число корней у каждого многочлена не превосходит s, то существуют такие i и j, что

$$|\nu_i(P)| \geqslant \frac{|I|}{s} = \frac{H^{-\eta}}{s}, \quad |\nu_j(Q)| \geqslant \frac{|I|}{s} = \frac{H^{-\eta}}{s}.$$

Будем считать для упрощения обозначений $i = j = 1$. Из неравенства (17) при $j = n$ можно заключить, что расстояние корней $\varkappa_1(P)$ и $\varkappa_1(Q)$ до интервала I не превосходит $c(s)H^{-\tau/s}$. Относительно корня $\varkappa_1(P)$ произведем упорядочивание остальных корней

$$(19)\quad |\varkappa_1(P) - \varkappa_2(P)| \leqslant |\varkappa_1(P) - \varkappa_3(P)| \leqslant \ldots \leqslant |\varkappa_1(P) - \varkappa_t(P)| \leqslant$$
$$\leqslant s \leqslant |\varkappa_1(P) - \varkappa_{t+1}(P)| \leqslant \ldots \leqslant |\varkappa_1(P) - \varkappa_{s_1}(P)|.$$

Затем $|\varkappa_1(P) - \varkappa_j(P)|$ обозначим через $H^{-m_j(P)}$, $j = 2, \ldots, s_1$ и положим

$$(20)\quad p_i(P) = m_{i+1}(P) + \ldots + m_t(P), \quad i = 1, 2, \ldots, t-1,$$

$$(21)\quad p'_j(P) = m_{t+j}(P) + \ldots + m_{s_1}(P), \quad j = 1, \ldots, s_1 - t.$$

Из того, как определено t следует, что при достаточно большом H все $m_k(P) \geqslant -\delta/s^2$, $k < t$. Пусть максимальный по модулю коэффициент многочлена a_j,

$$P(x) = a_{s_1}x^{s_1} + \ldots + a_1x + a_0, \quad 0 \leqslant j \leqslant s_1, \quad |a_{s_1}| = H^{\nu_1}, \quad 0 \leqslant \nu_1 \leqslant \mu.$$

Так как

$$P(x) = a_{s_1}(x - \varkappa_1) \ldots (x - \varkappa_{s_1}),$$

то существует набор корней $\varkappa_{i_1}, \ldots, \varkappa_{i_k}$, что

$$(22)\quad |\varkappa_{i_1} \ldots \varkappa_{i_k}| > c(s_1)H^{\mu - \nu_1}.$$

Выбросим из этого набора все корни, по модулю меньшие $2s$. Тогда неравенство (22) сохранится с другой величиной $c(s_1)$. Не умаляя общности будем считать, что все корни $\varkappa_{i_1}, \ldots, \varkappa_{i_k}$ имеют модули превосходящие $2s$. Из условий теоремы и неравенства (16) заключаем, что

$$|\omega - \varkappa_1(P)| < c(s_1)H^{-\tau - \nu_1 + p_1(P) + p'_t(P)}.$$

Ясно, что ни один из корней $\varkappa_2(P), \ldots, \varkappa_t(P)$ не входит в множество $\{\varkappa_{i_1}, \ldots, \varkappa_{i_k}\}$. С другой стороны, поскольку $|\varkappa_1(P)| \leqslant s$, то

$$|\varkappa_{i_j}(P) - \varkappa_1(P)| \geqslant \tfrac{1}{2}|\varkappa_{i_j}(P)|, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Поэтому

$$|\varkappa_1(P) - \varkappa_{t+1}(P)| \ldots |\varkappa_1(P) - \varkappa_{s_1}(P)| = H^{p'_t(P)} > c(s_1)H^{\mu - \nu_1}$$

и

$$(23)\quad |\omega - \varkappa_1(P)| < c(s_1)H^{-\tau - \mu + p_1(P)}.$$

Аналогично (19) упорядочим все корни многочлена

$$Q(x) = b_{s_2}x^{s_2} + \ldots + b_1x + b_0, \quad |b_{s_2}| = H^{\nu_2}, \quad 0 \leqslant \nu_2 \leqslant \mu,$$

относительно корня $\varkappa_1(Q)$, а затем определим $p_i(Q)$, $p'_j(Q)$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, t_2 - 1$, $j = 1, \ldots, s_2 - t_2$ как в (20) и (21). После этого нетрудно получить неравенство аналогичное (23)

$$(24)\quad |\omega - \varkappa_1(Q)| < c(s_2)H^{-\tau - \mu + p_1(Q)}.$$

Рассуждая как при получении неравенства (23), из неравенства (17) при $\omega \in \nu_1(P)$ получаем

$$(25)\quad |\omega - \varkappa_1(P)| < c(s) \min_{1 \leqslant j \leqslant t-1} H^{-\frac{\tau + \mu - p_j(P)}{j}}.$$

Пусть минимум в правой части неравенства (25) достигается при $j = j'$. Возьмем теперь $\omega \in \nu_1(Q)$. Тогда опять с помощью неравенства (17) получаем

$$(26)\quad |\omega - \varkappa_1(Q)| < c(s) \min_{1 \leqslant k \leqslant t_2 - 1} H^{-\frac{\tau + \mu - p_k(Q)}{k}}.$$

Пусть минимум в правой части неравенства (26) достигается при $k = j''$. Из определения j' получаем для любого i, $1 \leqslant i \leqslant s_1$

$$H^{-\frac{\tau + \mu - p_{j'}(P)}{j'}} \leqslant H^{-\frac{\tau + \mu - p_i(P)}{i}},$$

что влечет за собой неравенство

(27) $$i\big(\tau+\mu-p_{j'}(P)\big) \geqslant j'\big(\tau+\mu-p_i(P)\big).$$

Пусть $i<j'$. Тогда из (27) следует

(28) $$m_{i+1}(P) \geqslant \frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}.$$

При $i>j'$ из (27) получаем

(29) $$m_i(P) \leqslant \frac{\tau+\mu-p_i(P)}{i}, \quad i=j'+1,\ldots,s_1.$$

Из определения j'' для многочлена $Q(\omega)$ можно получить формулы, аналогичные (28) и (29):

(30) $$m_{t+1}(Q) \geqslant \frac{\tau+\mu-p_{j''}(Q)}{j''}, \quad t=1,\ldots,j''-1,$$

(31) $$m_t(Q) \leqslant \frac{\tau+\mu-p_t(Q)}{t}, \quad t=j''+1,\ldots,s_2.$$

Из определения $\nu_1(P)$ получаем $|\nu_1(P)|>c(s)H^{-\eta}$. Так как величина $|\omega-\varkappa_1(P)|$ при надлежащем выборе $\omega\in\nu_1(P)$ может быть сделана не менее $\frac{1}{2}|\nu_1(P)|$, то из (23) имеем

$$H^{-\frac{\tau+\mu-p_j(P)}{j}} \geqslant H^{-\eta},$$

(32) $$\eta \geqslant \frac{\tau+\mu-p_j(P)}{j}.$$

Аналогичное (32) неравенство можно получить и для многочлена $Q(\omega)$

(33) $$\eta \geqslant \frac{\tau+\mu-p_t(Q)}{t}, \quad t=1,\ldots,s_2.$$

Из определения j' для любого $i=1,\ldots,s_1$ имеем

$$H^{-\frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}} \leqslant H^{-\frac{\tau+\mu-p_i(P)}{i}},$$

откуда и из неравенства (29) при $i>j'$

(34) $$m_i(P) \leqslant \frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}, \quad i=j'+1,\ldots,s_1.$$

Аналогичное (34) неравенство справедливо и для многочлена $Q(\omega)$

(35) $$m_t(Q) \leqslant \frac{\tau+\mu-p_{j''}(Q)}{j''}, \quad t=j''+1,\ldots,s_2.$$

Предположим для определенности, что

(36) $$\frac{\tau+\mu-p_{j''}(Q)}{j''} \geqslant \frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}.$$

Теперь приступим к оценке разностей между корнями многочленов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$. Вначале оценим разность

(37) $$|\varkappa_1(P)-\varkappa_1(Q)| \leqslant |\varkappa_1(P)-\omega'|+|\omega'-\omega''|+|\omega''-\varkappa_1(Q)|.$$

В неравенстве (37) $\omega'\in\nu_1(P)\subset I$, $\omega''\in\nu_1(Q)\subset I$, поэтому $|\omega'-\omega''|\leqslant\leqslant H^{-\eta}$. Разности $|\omega'-\varkappa_1(P)|$ и $|\omega''-\varkappa_1(Q)|$ оценены в (23) и (24). Значит

(38) $$|\varkappa_1(P)-\varkappa_1(Q)| < c(s)\big(H^{-\frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}}+H^{-\frac{\tau+\mu-p_{j''}(Q)}{j''}}+H^{-\eta}\big).$$

Неравенства (32), (33) и (36) позволяют переписать (38) в виде

(39) $$|\varkappa_1(P)-\varkappa_1(Q)| < c(s)H^{-\frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}}.$$

Далее из неравенства

$$\eta \geqslant \frac{\tau+\mu-p_{j''}(Q)}{j''},$$

получающегося из (33) при $t=j''$ и неравенств (30), (36) следует, что

(40) $$|\varkappa_i(Q)-\varkappa_1(P)| \leqslant |\varkappa_i(Q)-\varkappa_1(Q)|+|\varkappa_1(Q)-\varkappa_1(P)| \leqslant \leqslant c(s)H^{-\frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}}$$

для $i=1,\ldots,j''$. Теперь из (40) и неравенства (28) при любых $1\leqslant i\leqslant j''$ и $1\leqslant j\leqslant j'$ получаем

(41) $$|\varkappa_i(Q)-\varkappa_j(P)| \leqslant |\varkappa_i(Q)-\varkappa_1(P)|+|\varkappa_1(P)-\varkappa_j(P)| < < c(s)H^{-\frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}}.$$

Из полученного неравенства (41) заключаем, что

(42) $$\prod_{1\leqslant i\leqslant j''}\prod_{1\leqslant j\leqslant j'} |\varkappa_i(Q)-\varkappa_j(P)| < c(s)H^{-j''(\tau+\mu-p_{j'}(P))}.$$

С другой стороны, из неравенства (34) при любом $i = 1, \ldots, j''$

$$\prod_{j>j'} |\varkappa_i(Q) - \varkappa_j(P)| < c(s) H^{-p_{j'}(P)},$$

откуда

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant j''} \prod_{j>j'} |\varkappa_i(Q) - \varkappa_j(P)| < c(s) H^{-j'' p_j(P)}. \tag{43}$$

Из (42) и (43) следует, что

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant s_1} \prod_{1\leqslant i\leqslant j''} |\varkappa_i(Q) - \varkappa_j(P)| < c(s) H^{-j''(\tau+\mu)}. \tag{44}$$

Так как многочлены $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ не имеют общих корней, то $|R(P, Q)| \geqslant 1$, где R — результант многочленов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$. Используя (44), получаем

$$1 \leqslant |R(P, Q)| \leqslant H^{(r_1+r_2)s} \prod_{1\leqslant i\leqslant s_2} \prod_{1\leqslant j\leqslant s_1} |\varkappa_i(Q) - \varkappa_j(P)| = \tag{45}$$

$$= H^{(r_1+r_2)s} \prod_{1\leqslant i\leqslant t_2} \prod_{1\leqslant j\leqslant t} |\varkappa_i(Q) - \varkappa_j(P)| \prod_{\substack{i>t_2\\ 1\leqslant j\leqslant s_1}} |\varkappa_i(Q) - \varkappa_j(P)| \times$$

$$\times \prod_{1\leqslant i\leqslant s_2} \prod_{j>t} |\varkappa_i(Q) - \varkappa_j(P)|.$$

По лемме 8 два последних произведения оцениваются сверху величиной $c(s) H^{s_1(\mu-r_1)+s_2(\mu-r_2)}$, поэтому неравенство (45) можно переписать в виде

$$1 \leqslant c(s) H^{2\mu s - j''(\tau+\mu)}.$$

Получающееся отсюда неравенство $j''(\tau+\mu) \leqslant 2\mu s + \delta$ при $j \geqslant 3$ сильнее, чем то, которое нам нужно доказать. Рассмотрим случай $j'' = 2$. Если

$$m_3(Q) \geqslant \frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}, \tag{46}$$

то для $1 \leqslant j \leqslant j'$

$$|\varkappa_j(P) - \varkappa_3(Q)| < |\varkappa_j(P) - \varkappa_1(Q)| + |\varkappa_1(Q) - \varkappa_3(Q)|$$

и из (42) и (46) получаем

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant j'} |\varkappa_j(P) - \varkappa_3(Q)| < c(s) H^{-(\tau+\mu-p_{j'}(P))}. \tag{47}$$

При $j > j'$ используя (34) и (46) получаем

$$|\varkappa_j(P) - \varkappa_3(Q)| < |\varkappa_j(P) - \varkappa_1(P)| + |\varkappa_1(P) - \varkappa_1(Q)| + |\varkappa_1(P) - \varkappa_3(Q)| <$$
$$< c(s) H^{-m_j(P)},$$

поэтому

$$\prod_{j>j'} |\varkappa_j(P) - \varkappa_3(Q)| < c(s) H^{-p_{j'}(P)}. \tag{48}$$

Теперь из (47) и (48) следует

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant s_1} |\varkappa_j(P) - \varkappa_3(Q)| < c(s) H^{-(\tau+\mu)}. \tag{49}$$

Из неравенств (44) и (45) получаем при $j'' = 2$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant s_2} \prod_{1\leqslant j\leqslant s_1} |\varkappa_i(Q) - \varkappa_j(P)| < c(s) H^{-(\tau+\mu)} \tag{50}$$

что позволяет получить неравенство $3(\tau+\mu) \leqslant 2\mu s$, которое достаточно для доказательства леммы.

Если вопреки (46)

$$m_3(Q) < \frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}, \tag{51}$$

то из (51) и неравенств

$$|\varkappa_1(P) - \varkappa_i(Q)| \leqslant |\varkappa_1(P) - \varkappa_1(Q)| + |\varkappa_1(Q) - \varkappa_i(Q)|$$

при любом $i \geqslant 3$ получаем

$$\prod_{3\leqslant i\leqslant s_2} |\varkappa_1(P) - \varkappa_i(Q)| < c(s) H^{-p_2(Q)}. \tag{52}$$

Неравенство (52) вместе с (44) приводит к неравенству

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant s_2} \prod_{1\leqslant j\leqslant s_1} |\varkappa_i(Q) - \varkappa_j(P)| < c(s) H^{-2(\tau+\mu)-p_2(Q)}. \tag{53}$$

Воспользуемся неравенством (33) при $t = 2$. Получим $p_2(Q) \geqslant \tau+\mu-2\eta$. Поэтому показатель степени в (53) можно заменить на $-(\tau+\mu) - 2(\tau+\mu-\eta)$, что также приводит к доказательству леммы. При этом, разумеется замена $p_2(Q)$ на $\tau+\mu-2\eta$, производится только в том случае, когда $\tau+\mu-2\eta \geqslant 0$. Случай $j'' = 2$ полностью рассмотрен.

При $j'' = 1$ рассуждаем следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} m_2(Q) &> \big(\tau+\mu-p_{j'}(P)\big)/j', \\ m_3(Q) &> \big(\tau+\mu-p_{j'}(P)\big)/j'. \end{aligned} \tag{54}$$

Тогда аналогично тому, как и в случае неравенства (49) получаем

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant s_1} \prod_{2\leqslant j\leqslant 3} |\varkappa_i(P) - \varkappa_j(P)| < c(s) H^{-2(\tau+\mu)}$$

что вместе с (44) дает неравенство аналогичное (50)

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant s_1}\prod_{1\leqslant j\leqslant s_2}|\varkappa_i(P)-\varkappa_j(Q)|<c(s)H^{-3(\tau+\mu)}.$$

Если теперь

$$(55)\qquad \begin{aligned} m_2(Q) &> \frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'},\\ m_3(Q) &\leqslant \frac{\tau+\mu-p_{j'}(P)}{j'}, \end{aligned}$$

то первое неравенство (55) приводит к неравенству

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant s_1}|\varkappa_i(P)-\varkappa_2(Q)|<c(s)H^{-(\tau+\mu)}$$

а второе — к неравенству (52). Выполнение обоих неравенств, как мы уже видели приводит к доказательству леммы. Осталось проанализировать случай $m_2(Q)\leqslant\big(\tau+\mu-p_{j'}(P)\big)/j'$, который можно рассмотреть также как и при выполнении неравенства (51). Получим неравенство, аналогичное (52)

$$(56)\qquad \prod_{2\leqslant j\leqslant s_2}|\varkappa_1(P)-\varkappa_j(Q)|<c(s)H^{-p_1(Q)}.$$

Если далее $m_2(P)<m_2(Q)$, то получаем при $j\geqslant 2$

$$\begin{aligned}&|\varkappa_j(P)-\varkappa_2(Q)|\leqslant\\ &\quad\leqslant|\varkappa_j(P)-\varkappa_1(P)|+|\varkappa_1(P)-\varkappa_1(Q)|+|\varkappa_1(Q)-\varkappa_2(Q)|<c(s)H^{-m_j(P)},\end{aligned}$$

откуда

$$(57)\qquad \prod_{2\leqslant j\leqslant s_1}|\varkappa_j(P)-\varkappa_2(Q)|<c(s)H^{-p_1(P)}.$$

Если же $m_2(P)\geqslant m_2(Q)$, то при $i\geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned}&|\varkappa_2(P)-\varkappa_i(Q)|\leqslant\\ &\quad\leqslant|\varkappa_2(P)-\varkappa_1(P)|+|\varkappa_1(P)-\varkappa_1(Q)|+|\varkappa_1(Q)-\varkappa_i(Q)|<c(s)H^{-m_i(Q)},\end{aligned}$$

откуда

$$(58)\qquad \prod_{2\leqslant i\leqslant s_2}|\varkappa_2(P)-\varkappa_i(Q)|<c(s)H^{-p_1(Q)}.$$

Неравенства (40), (52), (53) и (54) приводят к неравенству

$$(59)\qquad \prod_{1\leqslant i\leqslant s_2}\prod_{1\leqslant j\leqslant s_1}|\varkappa_j(P)-\varkappa_i(Q)|<c(s)H^{-\tau-\mu-p_1(Q)-\min(p_1(Q),p_1(P))}.$$

Из неравенств $\eta\geqslant\tau+\mu-p_1(Q)$ и $\eta\geqslant\tau+\mu-p_1(P)$ получаем, что

$$(60)\qquad \min\big(p_1(P),p_1(Q)\big)\geqslant\tau+\mu-\eta.$$

Если $\eta>\tau+\mu$, то неравенство (60) заменяется тривиальным

$$(61)\qquad \min\big(p_1(P),p_1(Q)\big)\geqslant-\delta/s.$$

Учитывая (60) и (61) неравенство (59) можно переписать в виде

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant s_2}\prod_{1\leqslant j\leqslant s_1}|\varkappa_j(P)-\varkappa_i(Q)|<c(s)H^{-\tau-\mu-2\max(\tau+\mu-\eta,0)},$$

которое, очевидно, доказывает лемму.

Заметим, что если η значительно меньше чем $\tau+\mu$, то лемма 12 может быть усилена за счет добавления к левой части неравенства $\tau+\mu+2\max(\tau+\mu-\eta,0)\leqslant 2\mu s+\delta$ слагаемых вида $2\max(\tau+\mu-k\eta,0)$, $k=2,\ldots,\min(s_1,s_2)$. Аналогично лемме 12 может быть доказана следующая

Лемма 13. *Пусть $\delta>0$ — некоторое вещественное число, s — натуральное число, $H=H(\delta,s)$ — достаточно большое действительное число. Пусть два взаимно простых многочлена $P(x)$, $Q(x)\in Z[x]$ имеют степени $s_1\leqslant s$, $s_2\leqslant s$ и высоты H^{λ_1}, H^{λ_2} соответственно. Пусть для всех ω из некоторого интервала $I\subset(-s,s)$, $|I|=H^{-\eta}$, $\eta>0$ выполняются неравенства*

$$|P(\omega)|<H^{-\tau_1},\quad |Q(\omega)|<H^{-\tau_2},\quad \tau_1>0,\ \tau_2>0.$$

Тогда если $\tau_1+\lambda_1\geqslant 2(\tau_2+\lambda_2)$, то

$$\lambda_1 s_2+\lambda_2 s_1>\tau_2+\lambda_2+\min(\tau_2+\lambda_2,\,\tau_1+\lambda_1-\eta)+\delta.$$

Лемма 14. *Пусть $P(x)\in Z[x]$ имеет степень не более l и высоту не выше H^λ. Пусть для всех ω из некоторого интервала I имеет место неравенство $|P(\omega)|<H^{-v}$, где $v>3\lambda l$. Тогда существует делитель $P(x)$ многочлена $d(x)$ ($\deg d(x)=l_1$, $H\big(d(x)\big)=H^{\lambda_1}$), являющийся степенью неприводимого в рациональном поле многочлена, который для всех $\omega\in I$, удовлетворяет условиям*

$$(62)\qquad |d(x)|<c(l)H^{-v+\lambda l},\quad l_1\leqslant l,\quad H^{\lambda_1}<c(l)H^{\lambda}.$$

Лемма 14 как по формулировке, так и по способу доказательства близка к одной лемме Гельфонда ([3], лемма VI, стр. 183).

Пусть $P(x)=d_1(x)d_2(x)$ и пусть $|d_1(\omega)|>|d_2(\omega)|$ для некоторого множества $B_1\subset I$, $|B_1|\geqslant\frac{1}{2}|I|$. Покажем, что для любого подмножества $B\subset B_1$ с мерой не меньшей $\frac{1}{2}|B_1|$

$$(63)\qquad |d_1(\omega)|>H^{-\lambda l}.$$

Предположим, что существует такое множество $B_2 \subset B_1$, $|B_2| \geqslant \frac{1}{2}|B_1|$ для всех точек которого неравенство не имеет места. Тогда на множестве B_2, $|B_2| \geqslant \frac{1}{4}|I|$ имеем противоположное (63) неравенство и неравенство $|d_2(\omega)| < H^{-\lambda l}$. Обозначим степени и высоты многочленов $d_1(\omega)$, $d_2(\omega)$ через l_1, l_2 и H^{λ_1}, H^{λ_2} соответственно. Тогда поскольку $l_1+l_2 \leqslant l$ и по лемме 1 $H^{\lambda_1+\lambda_2} < c(l)H^{\lambda}$, то имеем

$$H^{\lambda_1 l_2+\lambda_2 l_1} \leqslant c(l)H^{\lambda l}.$$

Используя лемму 12 получаем противоречие. Это означает, что на любом множестве $B_3 \subset B_1$, $|B_3| \geqslant \frac{1}{4}|I|$ выполняется неравенство (63) и, значит,

$$|d_2(\omega)| < H^{-v+\lambda l}$$

для всех $\omega \in B_3$. Тогда по лемме 10 для всех $\omega \in I$ выполняется неравенство

$$|d_2(\omega)| < c(l)H^{-v+\lambda l}. \tag{64}$$

Представим теперь $P(x)$ в виде произведения степеней различных неприводимых многочленов

$$P(x) = d_1(x)\dots d_s(x).$$

Ясно, что существует такая постоянная $c(l) > 0$, что на множестве B_4, $|B_4| > c(l)|I|$ выполняются неравенства

$$|d_{i_1}(\omega)| \leqslant |d_{i_2}(\omega)| \leqslant \dots \leqslant |d_{i_s}(\omega)|. \tag{65}$$

Так как неравенство

$$|d_{i_1}(\omega)\dots d_{i_k}(\omega)| > |d_{i_{k+1}}(\omega)\dots d_{i_s}(\omega)|$$

в силу (65) не может иметь место при $k \geqslant s/2$, то существует такое $\nu < s/2$, что

$$\begin{gathered} |d_{i_1}(\omega)\dots d_{i_{\nu-1}}(\omega)| > |d_{i_\nu}(\omega)\dots d_{i_s}(\omega)|, \\ |d_{i_1}(\omega)\dots d_{i_\nu}(\omega)| < |d_{i_{\nu+1}}(\omega)\dots d_{i_s}(\omega)|. \end{gathered} \tag{66}$$

Но тогда для $\omega \in I$ как и в (64) имеем

$$|d_{i_\nu}(\omega)\dots d_{i_s}(\omega)| < c(l)H^{-v+\lambda l},$$

а с другой стороны, как и (63) для $\omega \in B_4$

$$|d_{i_{\nu+1}}(\omega)\dots d_{i_s}(\omega)| > H^{-\lambda l}.$$

Поэтому для $\omega \in B_4$ получаем из (66)

$$|d_{i_1}(\omega)| \leqslant |d_{i_\nu}(\omega)| < c(l)H^{-v+2\lambda l}, \tag{67}$$

а поскольку $|B_4| > c(l)|I|$, то по лемме 10 аналогичное (67) неравенство справедливо и для всех $\omega \in I$.

Многочлен $t(x) = P(x)d_{i_1}^{-1}(x)$ взаимно прост с $d_{i_1}(x)$. Если предположить, что для некоторого множества B_5, $|B_5| \geqslant \frac{1}{2}|I|$

$$|t(\omega)| < H^{-\lambda l}, \tag{68}$$

то получаем противоречие, поскольку в силу $v > 3\lambda l$ имеем

$$|d_{i_1}(\omega)| < c(l)H^{-\lambda l}.$$

Поэтому неравенство, противоположное (68) выполняется на любом множестве B_6 с мерой, большей $\frac{1}{2}|I|$. Это приводит к неравенству

$$|d_{i_1}(\omega)| < c(l)H^{-v+\lambda l},$$

справедливому для всех $\omega \in B_5$ и по лемме 10 к неравенству

$$|d_{i_1}(\omega)| < c(l)H^{-v+\lambda l},$$

справедливому для всех $\omega \in I$.

4. Частные случаи теоремы. Заметим, что доказываемая теорема уже доказана для многочленов первой ([14], [19]), второй ([18]) и третьей ([13]) степеней. С использованием леммы 11 нетрудно провести доказательство теоремы в том случае, когда $0 \leqslant p_1 \leqslant 1$. Далее, если вектор $\bar{s}$ таков, что справедливо неравенство

$$l_2/T > (n-p_2)/2, \tag{69}$$

то доказательство теоремы несложно и проведено в [13]. Все доказанные частные случаи теоремы сформулируем в виде отдельного предложения.

Предложение 1. *При* $n \leqslant 3$ $\dim \mathscr{L}_n(w) \leqslant (n+1)/(w+1)$. *При любом* $n > 3$, *если вектор* $\bar{s}$ *удовлетворяет условию* $0 \leqslant p_1 \leqslant 1$, *или* $l_2/T > (n-p_2)/2$ *имеем также* $\dim \mathscr{L}_n(w) \leqslant (n+1)/(w+1)$.

Учитывая предложение 1, считаем в дальнейшем

$$n > 3, \quad p_1 > 1, \quad l_2/T \leqslant (n-p_2)/2.$$

Сделаем индуктивное предположение: будем считать, что для всех многочленов степени меньшей n теорема доказана. Это означает, что если мы получим выполнение неравенства $|P(\omega)| < H^{-v}$ для некоторого множества $B \subset R$ в полиномах $P(\omega)$ степени $l \leqslant n-1$ бесконечно часто, то отсюда будем заключать, что $\dim B \leqslant (l+1)/(v+1)$.

5. Невырожденный случай. В дальнейшем будем считать, что $\omega \in (-n-1, n+1)$, так как если $\omega \notin (-n-1, n+1)$, то с помощью неравенств (6), (16) и (17) можно доказать, что неравенство (2) не может выполняться ни при каком $w > 0$. Пусть вопреки (69) выполняется неравенство

$$\frac{l_2}{T} \leqslant \frac{n-p_2}{2}. \tag{70}$$

Разобъем отрезок $(-n-1, n+1)$ на равные части интервалами I, длина каждого из которых равна $H^{-n+p_1+k-1-2n\varepsilon_1}$, где $k \geqslant 1$ некоторое действительное число, выбор которого будет сделан несколько ниже. Скажем, что $P(\omega)$ принадлежит I, если $\exists\, \omega \in I$, $|P(\omega)| < H^{-w}$. Множество многочленов, принадлежащих одному и тому же интервалу I обозначим через $P(I)$. Если многочлен принадлежит двум интервалам I (трем уже не может, что нетрудно доказать), то будем считать, что он принадлежит любому выбранному из них. Пусть $|P(I)|$ — число многочленов, принадлежащих I и пусть $|P(I)| < c(n)H^{k+\theta-1}$ для любого I, где

$$\theta = p_1\left(1-\frac{n+1}{w+1}\right). \tag{71}$$

Тогда общее число полиномов $P(\omega) \in P_n(H, \bar{s})$ не превосходит $c(n)H^{n-p_1+\theta+2n\varepsilon_1}$, поскольку число интервалов I не превосходит $c(n)H^{n-p_1+k+1+2n\varepsilon_1}$. Из неравенства (18) получаем, что все $\omega \in \mathscr{S}(\varkappa_1)$, для которых выполняется неравенство (2) находятся внутри интервала, длина которого не превосходит $c(n)H^{-w-1+p_1+n\varepsilon_1}$.

Так как ряд

$$\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-p_1+\theta+2n\varepsilon_1}\left(H^{-w-1+p_1+n\varepsilon_1}\right)^{\frac{n+1}{w+1}+\varepsilon} < c(n) \sum_{H=1}^{\infty} H^{-1+\theta-p_1\left(1-\frac{n+1}{w+1}\right)-\varepsilon/2}$$

сходится, то $\dim \mathscr{L}_n(w) \leqslant (n+1)/(w+1)$ и теорема доказана. Значит, или мы получаем доказательство теоремы, или остается предположить, что существуют такие интервалы I, которым принадлежит более $c(n)H^{k+\theta-1}$ полиномов. Рассмотрим один из таких интервалов I. Представим k в виде $k = [k]+\{k\}$. Зафиксируем некоторое целое i, $0 \leqslant i \leqslant [k]-1$. Два многочлена из множества $P_n(H, \bar{s})$

$$P_1(x) = Hx^n + a_{n-1}^{(1)}x^{n-1} + \ldots + a_1^{(1)}x + a_0^{(1)},$$
$$P_2(x) = Hx^n + a_{n-1}^{(2)}x^{n-1} + \ldots + a_1^{(2)}x + a_0^{(2)},$$

принадлежащие интервалу I будем относить к одному и тому же классу, если

$$a_{n-1}^{(1)} = a_{n-1}^{(2)}, \quad \ldots, \quad a_{n-[k]+i+1}^{(1)} = a_{n-[k]+i+1}^{(2)},$$

$$b_j H^{1-\frac{i}{n-[k]+i}} \leqslant a_j^{(1)}, \quad a_j^{(2)} < (b_j+1)H^{1-\frac{i}{n-[k]+i}}, \tag{72}$$

$$b_j \in Z, \quad -H^{\frac{i}{n-[k]+i}} \leqslant b_j < H^{\frac{i}{n-[k]+i}}-1, \quad j = 1, \ldots, n-[k]+i.$$

Применим принцип ящиков Дирихле. Так как число различных классов не превосходит $c(n)H^{[k]-1}$, то среди $c(n)H^{k+\theta-1}$ многочленов существует не менее $c(n)H^{\theta+\{k\}}$, принадлежащих одному и тому же классу. Занумеруем эти многочлены $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)$, $m = c(n)H^{\theta}$. Образуем новые многочлены

$$t_1(x) = P_1(x)-P_0(x), \quad \ldots, \quad t_m(x) = P_m(x)-P_0(x).$$

Ясно, что все m многочленов имеют степень не выше $n-[k]+i$, а все их коэффициенты, исключая, возможно, свободный член не превосходят $2H^{1-\frac{i}{n-[k]+i}}$. Однако поскольку $t_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, принимают на I малые значения, то свободный коэффициент многочленов $t_i(x)$ не может превышать $c(n)H^{1-\frac{i}{n-[k]+i}}$. Таким образом имеем

$$\deg t_j(x) \leqslant n-[k]+i, \quad H(t_j(x)) < c(n)H^{1-\frac{i}{n-[k]+i}}. \tag{73}$$

Все многочлены $t_j(x)$ различны, так как в противном случае совпадали бы многочлены $P_j(x)$. Пусть $P(x) \in P(I)$. Разложим $P(\omega)$ в окрестности корня $\varkappa_1$ в ряд Тейлора

$$P(\omega) = P'(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1) + \frac{1}{2}P''(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(\omega)(\omega-\varkappa_1)^n. \tag{74}$$

Из принадлежности $P(\omega)$ интервалу I получаем существование такой точки $\omega(P) \in I$, что $|P(\omega(P))| < H^{-w}$. Из неравенства (16) получаем, что

$$|\omega(P)-\varkappa_1| \leqslant 2^n H^{-w-1+p_1+n\varepsilon_1}.$$

Если ω_1 любая другая точка I, то учитывая, что $w > n$, получаем

$$|\omega_1-\varkappa_1| \leqslant |\omega_1-\omega(P)| + |\omega(P)-\varkappa_1| < c(n)H^{-n+p_1+k-1-2n\varepsilon_1}. \tag{75}$$

Из неравенства (75) и леммы 7 получаем

$$|P'(\varkappa_1)|\,|\omega_1-\varkappa_1| < c(n)H^{-(n-k)-2n\varepsilon_1}.$$

Если $l_2/T+p_1+k \leqslant n+1+2n\varepsilon_1$, то

$$|P''(\varkappa_1)|\,|\omega_1-\varkappa_1|^2 < c(n)H^{-(n-k)-2n\varepsilon_1}.$$

Для любого $i \geqslant 3$

$$|P^{(i)}(\varkappa_1)|\,|\omega_1-\varkappa_1|^i < c(n)H^{1-p_i-i(n-p_1-k+1)-2ni\varepsilon_1} \leqslant c(n)H^{-(n-k)-2n\varepsilon_1}.$$

Поэтому для всех $\omega \in I$

$$|P(\omega)| < c(n)H^{-(n-k)-2n\varepsilon_1}$$

и, значит,

$$|t_i(\omega)| < c(n)H^{-(n-k)-2n\varepsilon_1}. \tag{76}$$

Положим

$$k = n+1-l_2/T-p_1+(n+1)\varepsilon_1. \tag{77}$$

Из (70) следует, что $k \geqslant 1$. В (72) и (73) возьмем $i = 0$. Если среди многочленов $t_1(\omega), \ldots, t_m(\omega)$ имеются хотя бы два без общих корней, то применим лемму 12. Здесь

$$\tau = n-k+2n\varepsilon_1 = l_2/T+p_1-1+(n-1)\varepsilon_1, \quad \mu = 1,$$
$$s = n-[k] = l_2/T+p_1+\{k\}-1-(n-1)\varepsilon_1,$$
$$\eta = n-k-p_1+1 = l_2/T-(n-1)\varepsilon_1.$$

Получаем противоречие. Итак, мы доказали

Предложение 2. *Если среди многочленов $t_1(x), \ldots, t_m(x)$ имеются хотя бы два без общих корней, то* $\dim \mathscr{L}_n(w) \leqslant (n+1)/(w+1)$.

Для завершения доказательства осталось рассмотреть случай, когда среди полиномов $t_1(\omega), \ldots, t_m(\omega)$ нет хотя бы двух без общих корней.

6. Случай вырождения, $n < w < 2n+1$.

Лемма 15. *Пусть данному интервалу I принадлежит $N = c_1(n)H^\tau$ $(\tau > 0)$ многочленов $t_j(\omega)$. Тогда среди них можно всегда выбрать $M = c_2(n)H^\tau$ таких многочленов $t_j(\omega)$, $j = 1, \ldots, M$, которые представимы в виде*

$$t_j(\omega) = k_j(\omega)d(\omega), \tag{78}$$

где уже среди многочленов $k_j(\omega)$ имеются хотя бы два без общих корней.

Доказательство. Зафиксируем некоторый многочлен

$$t_0(\omega) = P_1^{a_1}(\omega)\ldots P_s^{a_s}(\omega),$$

где $P_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, s$, неприводимые многочлены. Если среди N многочленов $t_i(\omega)$ существует $\geqslant N/2$, не имеющих с $t_0(\omega)$ общих корней, то мы получаем (78) с $d = 1$. Если нет, то среди $c(n)H^\tau$ многочленов $t(\omega)$ существуют $M_1 = c(n)H^\tau$ многочленов, имеющих с $t_0(\omega)$ общий множитель $P_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, s$, который мы обозначим $d_1(\omega)$. Тогда

$$t_i(\omega) = k_i(\omega)d_1(\omega), \quad i = 0, \ldots, M_1. \tag{79}$$

Если среди M_1 многочленов $k_i(\omega)$ существует $\geqslant M_1/2$, не имеющих общих корней с многочленом $t_0(\omega)d_1^{-1}(\omega)$, то мы приходим к представлению (78) с $d(\omega) = d_1(\omega)$. Если нет, то существует $M_2 = c(n)H^\tau$ многочленов, имеющих с $t_0(\omega)d_1^{-1}(\omega)$ некоторый общий множитель $P_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, s$, который мы обозначим через $d_2(\omega)$. Приходим к равенствам

$$t_i(\omega) = k_i(\omega)d_1(\omega)d_2(\omega).$$

Если теперь окажется, что среди многочленов $k_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, M_2$, существует $\geqslant M_2/2$, не имеющих с $t_0(\omega)d_1^{-1}(\omega)d_2^{-1}(\omega)$ общих корней, то тем самым получено (78) с $d(\omega) = d_1(\omega)d_2(\omega)$.

В противном случае проделаем выше описанную процедуру еще раз. Так как каждый раз мы увеличиваем степень $d(\omega)$ по крайней мере на единицу, то в конце концов мы придем к (78).

Если теперь в (72) рассмотреть только многочлены, у которых

$$a_{n-1}^{(1)} = a_{n-1}^{(2)}, \quad \ldots, \quad a_{n-[k]+1}^{(1)} = a_{n-[k]+1}^{(2)},$$

то можно получить, используя принцип ящиков Дирихле и лемму 15, что существует $m = c(n)H^{\theta+\{k\}}$ многочленов

$$t_i(\omega) = k_i(\omega)d(\omega), \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\deg t_i(\omega) \leqslant n-[k], \quad H(t_i(\omega)) \leqslant 2H, \tag{80}$$
$$|t_i(\omega)| < c(n)H^{-(n-k)-2n\varepsilon_1}, \quad \omega \in I,$$

причем уже среди многочленов $k_i(\omega)$ есть хотя бы два без общих корней. Обозначим

$$\deg d(\omega) = l, \quad H(d(\omega)) = H^\lambda.$$

Тогда из леммы 1 заключаем

$$\deg k_i(\omega) \leqslant n-[k]-l, \quad H(k_i(\omega)) < c(n)H^{1-\lambda}.$$

Многочлены $k_i(\omega)$ различны. Отсюда и из того, что число многочленов $t_i(\omega)$ не менее $c(n)H^{\theta+\{k\}}$, получаем, считая, что $k_i(\omega)$ принимают на I малые значения

$$(1-\lambda)(n-[k]-l) \geqslant \theta+\{k\} = p_1\left(1-\frac{n+1}{w+1}\right)+\{k\}. \tag{81}$$

Из (80) следует, что или $d(\omega)$ или $k_i(\omega)$ принимают на I малые значения. Предположим, что

$$|d(\omega)| < H(d)^{-\frac{w+1}{n+1}(l+1)+1} < c(n)H^{-\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda+\lambda} \tag{82}$$

для некоторого множества $B \subset I$, $|B| \geqslant \frac{1}{2}|I|$. Тогда из (82) и леммы 10 получим, что

$$|d(\omega)| < c(n)H^{-\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda+\lambda} \tag{83}$$

для всех $\omega \in I$. Так как $\deg d(\omega) < n$, то по индуктивному предположению размерность Хаусдорфа множества точек ω, принадлежащих бесконечному числу таких интервалов I, во всех точках которых выполняется неравенство (76), не превосходит

$$\frac{l+1}{\frac{w+1}{n+1}(l+1)-1+1}=\frac{n+1}{w+1}. \tag{84}$$

Поэтому теорему остается доказать в том случае, когда ω принадлежит бесконечному числу таких интервалов I, для точек которых не выполняется неравенство (82) на множестве B с мерой $|B|\geqslant\frac{1}{2}|I|$. В этом случае на некотором множестве B_1, $|B_1|>\frac{1}{2}|I|$ в силу неравенства (76) выполняется неравенство

$$|k_i(\omega)|<c(n)H^{-(n-k)+\lambda\frac{w+1}{n+1}(l+1)-\lambda-2n\varepsilon_1}. \tag{85}$$

Опять применим лемму 10. Получим, что неравенство (85) выполняется для всех $\omega\in I$ с несколько большей величиной $c(n)$. Из определения многочленов $k_i(\omega)$ следует, что существуют два многочлена $k'(\omega)$ и $k''(\omega)$ без общих корней. Применим к ним лемму 12. Здесь

$$\mu=1-\lambda,\quad s=n-[k]-l=l_2/T+p_1+\{k\}-l-1,$$

$$\tau=\frac{l_2}{T}+p_1-1+(n-1)\varepsilon_1-\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda+\lambda,\qquad \eta=\frac{l_2}{T}-(n-1)\varepsilon_1.$$

Получим

$$\frac{l_2}{T}+p_1+(n-1)\varepsilon_1-\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda+2\max\left(p_1-\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda,\ 0\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2(1-\lambda)(l_2/T+p_1+\{k\}-l-1). \tag{86}$$

Если

$$p_1<\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda, \tag{87}$$

то вместе с неравенством (81) неравенства (86) и (87) образуют систему неравенств

$$\begin{gathered}(1-\lambda)\left(\frac{l_2}{T}+p_1+\{k\}-l-1\right)\geqslant p_1\left(1-\frac{n+1}{w+1}\right)+\{k\},\\ 2(1-\lambda)\left(\frac{l_2}{T}+p_1+\{k\}-l-1\right)\geqslant\frac{l_2}{T}+p_1-\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda+(n-1)\varepsilon_1,\\ p_1<\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda.\end{gathered} \tag{88}$$

Если

$$p_1\geqslant\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda, \tag{89}$$

то неравенства (81), (86) и (89) приводят к системе неравенств

$$\begin{gathered}(1-\lambda)\left(\frac{l_2}{T}+p_1+\{k\}-l-1\right)\geqslant p_1\left(1-\frac{n+1}{w+1}\right)+\{k\},\\ 2(1-\lambda)\left(\frac{l_2}{T}+p_1+\{k\}-l-1\right)\geqslant\frac{l_2}{T}+3p_1-3\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda+(n-1)\varepsilon_1,\\ p_1\geqslant\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda.\end{gathered} \tag{90}$$

Лемма 16. *Система неравенств* (88) *при* $w<2n+1$ *противоречива.*

Доказательство леммы 16 требует достаточно громоздких вычислений, которые мы как правило будем опускать. Первое и третье неравенство системы (88) в том случае, когда кривые

$$(1-\lambda)\left(\frac{l_2}{T}+\{k\}-l-1\right)=p_1\left(1-\frac{n+1}{w+1}\right)+\{k\}, \tag{91}$$

$$\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda=p_1 \tag{92}$$

пересекаются, определяют область, где мы будем рассматривать функцию

$$f(\lambda,l)=2(1-\lambda)(l_2/T+p_1+\{k\}-l-1)+\frac{w+1}{n+1}(l+1)\lambda.$$

Условие пересечения кривых (91) и (92) имеет вид

$$\frac{l_2}{T}\geqslant 2\sqrt{p_1^2\frac{n+1}{w+1}\left(1-\frac{n+1}{w+1}\right)+p_1\{k\}}. \tag{93}$$

Если (93) имеет место, то в точках пересечения кривых (91) и (92)

$$f(\lambda,l)=2p_1\left(1-\frac{n+1}{w+1}\right)+p_1+2\{k\}.$$

Но при выполнении (93) и $w<2n+1$

$$\frac{l_2}{T}\geqslant 2p_1\left(1-\frac{n+1}{w+1}\right)+2\{k\}$$

и, таким образом, в точках пересечения система (88) противоречива. На границах области (91) и (92) система (88) также оказывается противоречивой. Стационарная точка функции $f(\lambda, l)$ не может лежать внутри области, если в ней

$$f(\lambda, l) < l_2/T + p_1 + (n-1)\varepsilon_1.$$

Это следует из того, что в противном случае существовала бы замкнутая кривая, целиком находящаяся внутри области и содержащая стационарную точку. Но кривая

$$f(\lambda, l) = l_2/T + p_1 + (n-1)\varepsilon_1$$

незамкнута.

Лемма 17. *Система неравенств* (90) *при* $w < 2n+1$ *противоречива.*

Доказательство леммы 17 можно провести аналогично доказательству леммы 16.

Предложение 3. *При* $n < w < 2n+1$ *имеем*

$$\dim \mathscr{L}_n(w) \leqslant (n+1)/(w+1).$$

7. Случай вырождения при $w > 4n+3$. Случай вырождения при $w \geqslant 2n+1$ требует более сложной конструкции. Его рассмотрение мы начнем с построений общих как для случая $2n+1 \leqslant w \leqslant 4n+3$, так и для случая $w > 4n+3$.

Обозначим через ϱ_r некоторое число вида r/T, где r целое неотрицательное число. Если для любого r число интервалов I, каждому из которых принадлежит $H^{k+\theta-1+\varrho_r+\varkappa\varepsilon_1}$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, многочленов, не превосходит $H^{n-p_1-k+1-\varrho_r}$, то теорема доказывается без труда, поскольку в этом случае общее число многочленов с заданным p_1 не превосходит $c(n)H^{n-p_1+\theta+\varepsilon_1}$, а ряд

$$\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-p_1+\theta+\varepsilon_1} H^{(-w+p_1-1)\left(\frac{n+1}{w+1}+\varepsilon\right)}$$

сходится.

Поэтому в дальнейшем предполагаем, что существует хотя бы одно целое число r, для которого имеется не менее $H^{n-k-p_1+1-\varrho_r}$ интервалов I, каждому из которых принадлежит $H^{k+\theta-1+\varrho_r+\varkappa\varepsilon_1}$ многочленов. Зафиксируем одно из таких r и будем обозначать в дальнейшем ϱ_r через ϱ. Множество интервалов I, каждому из которых принадлежит $H^{k+\theta-1+\varrho+\varkappa\varepsilon_1}$ многочленов обозначим через $\mathscr{I}(\varrho)$. Опять воспользуемся принципом ящиков Дирихле и для каждого $I \in \mathscr{I}(\varrho)$ построим множество многочленов $\Psi(I)$, состоящее из многочленов

$$t_1(\omega), \ldots, t_m(\omega), \quad m > c(n)H^{\theta+\varrho+\{k\}},$$

каждый из которых для всех $\omega \in I$ удовлетворяет неравенству

$$|t_j(\omega)| < c(n)H^{-(n-k)-2n\varepsilon_1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{94}$$

причем для всех j согласно (72) и (73)

$$H(t_j) \leqslant 2H^{1-\frac{i}{n-[k]+i}}, \quad \deg t_j \leqslant n-[k]+i.$$

Нетрудно видеть, что многочлен $P_0(x)$ можно выбрать таким образом, чтобы у первых $c(n)H^{\{k\}+\{\theta\}}$ многочленов совпадали коэффициенты и при $x^{n-[k]+i}, \ldots, x^{n-[k]-[\theta]+1}$. Тогда мы получили бы, что

$$H(t_1) \leqslant 2H^{1-\frac{i}{n-[k]+i}}, \quad \deg t_1 \leqslant n-[k]-[\theta]+i. \tag{95}$$

Если среди многочленов $t_j(\omega)$ существует хотя бы один, не имеющий с $t_1(\omega)$ общих корней, то используя лемму 12 и неравенство $\theta \geqslant 1$, получим противоречие. В том случае, когда таких многочленов нет, то по лемме 15 можно перейти к такому подмножеству $\Psi_1(I) \subset \Psi(I)$, состоящему из многочленов

$$t_1(\omega), \ldots, t_{im_1}(\omega), \quad m_1 > c(n)H^{\theta+\varrho+\{k\}},$$

представимых в виде

$$t_j(\omega) = k_j(\omega)d(\omega). \tag{96}$$

Заметим, что уже среди многочленов $k_j(\omega)$, $j \geqslant 2$ существует многочлен взаимнопростой с $k_1(\omega)$. Пусть $I \in \mathscr{I}(\varrho)$. Обозначим через a_1, такое рациональное число со знаменателем T, что неравенство

$$|d(\omega)| < H^{-(n-k)+a_1-n\varepsilon_1}$$

выполняется для некоторого множества $B \subset I$, $|B| \geqslant \frac{1}{2}|I|$, но уже неравенство

$$|d(\omega)| < H^{-(n-k)-a_1-(n+1)\varepsilon_1} \tag{97}$$

выполняется только для некоторого множества $B_1 \subset B$, $|B_1| \leqslant \frac{1}{2}|I|$. Так как для множества $B_2 = I \setminus B_1$ выполняется противоположное (97) неравенство, то из (94) получаем

$$|k_j(\omega)| < c(n)H^{-a_1-(n+1)\varepsilon_1} \tag{98}$$

для всех $\omega \in B_2$, $|B_2| \geqslant \frac{1}{2}|I|$.

От множества многочленов $\Psi_1(I)$ перейдем ко множеству многочленов $\Psi_2(I)$, состоящему из многочленов $t_{i1}(\omega), \ldots, t_{im_1}(\omega)$, т.е. исключим из множества $\Psi_2(I)$ многочлен $t_1(\omega)$. Все многочлены из множества $\Psi_2(I)$ представимы в виде (96), однако среди многочленов $k_{i1}(\omega), \ldots$ $\ldots, k_{im_1}(\omega)$ возможно не окажется многочленов взаимнопростых. Применим лемму 15. Получим, что многочлены из некоторого подмножества $\Psi_3(I) \subset \Psi_2(I)$ представимы в виде

$$t_j(\omega) = k_j(\omega)d_1(\omega), \quad j = 1, \ldots, m_2, \quad m_2 > c(n)H^{\theta+\varrho+\{k\}} \tag{99}$$

и уже среди многочленов $k_j(\omega)\in\Psi_3(I)$ существуют многочлены без общих корней. Из (96) и (99) можно получить, что $d(\omega)\,|\,d_1(\omega)$, откуда, используя лемму 1, можно получить

(100) $$\deg d \leqslant \deg d_1, \quad H(d) < c(n)H(d_1).$$

Обозначим через a такое рациональное число со знаменателем T, что неравенство

$$|d_1(\omega)| < H^{-(n-k)+a-n\varepsilon_1}$$

выполняется для некоторого множества с мерой не меньше $\frac{1}{2}|I|$, но уже неравенство

(101) $$|d_1(\omega)| < H^{-(n-k)+a-(n+1)\varepsilon_1}$$

выполняется только для некоторого множества с мерой не больше $\frac{1}{2}|I|$. Тогда аналогично (98) получим, что

(102) $$|k_j(\omega)| < c(n)H^{-a-(n-1)\varepsilon_1}$$

для некоторого множества с мерой не меньшей $\frac{1}{2}|I|$ и любого $k_j(\omega)\in\in\Psi_3(I)$.

Нетрудно видеть, что для каждого j $(j = 1, \ldots, m_2)$ существует такое рациональное число $\sigma = m/T \geqslant 0$, что неравенство (102) выполняется для всех ω из некоторого интервала I', $|I'| = H^{-l_2/T+\sigma}$ с центром в точке $O_{I'}$, но не выполняется для любого подмножества интервала $[O_{I'}-H^{-l_2/T+\sigma+\varepsilon_1},\ O_{I'}+H^{-l_2/T+\sigma+\varepsilon_1}]$ с мерой большей $H^{-l_2/T+\sigma+\varepsilon_1}$. Так как σ может принимать конечное, зависящее от n и ε число значений, то будем далее считать, что для некоторых σ существует не менее $c(n)H^{\varrho+\theta}$ многочленов $k_j(\omega)$ с одним и тем же σ. Зафиксируем одно из таких значений σ, а множество полиномов $t_j(\omega)$ с одним и тем же σ обозначим через $\Psi_4(I)$.

Поскольку $\Psi_4(I)\subset\Psi_3(I)$, то для любого $t_j(\omega)$ справедливо разложение на множители вида (99). Однако уже среди многочленов $k_j(\omega)$ при $t_j(\omega)\subset\Psi_4(I)$ может уже не найтись двух без общих корней. Тогда опять следует применить лемму 15 и перейти ко множеству $\Psi_5(I)$, состоящему не менее, чем из $c(n)H^{\theta+\varrho}$ многочленов $t_j(\omega)$, представимых в виде $t_j(\omega) = k_j(\omega)d_2(\omega)$. Далее опять для многочленов $d_2(\omega)$ и $k_j(\omega)$ получим неравенства, аналогичные (101) и (102). Поскольку каждый раз мы получаем увеличение по крайней мере на единицу степени многочленов $d_i(\omega)$, то в конце концов мы получим множество $\Psi_s(I)$ состоящее из не менее, чем $c(n)H^{\theta+\varrho+\{k\}}$ многочленов, причем все $t_j(\omega)\in\Psi_s(I)$ имеют вид $t_j(\omega) = k_j(\omega)d_{j(s)}(\omega)$ а среди многочленов $k_j(\omega)$ есть хотя бы два без общих корней. Чтобы не изменять обозначения, будем считать, что мы остановились на первом шаге и, таким образом, $\Psi_s(I) = \Psi_4(I)$.

Положим

(103) $$H(d_1) = H^{\lambda_1}, \quad \deg d_1 = l_1.$$

Далее считаем, что множество $\mathcal{I}(\varrho)$ содержит не менее $c(n)H^{l_2/T-\varrho}$ интервалов I таких, что многочлены $k_j(\omega)$, $d(\omega)$, $d_1(\omega)$, построенные для различных интервалов I, имеют одну и ту же степень и высоты, лежащие между рациональными степенями H вида p/T и $(p+1)/T$. Одинаковыми будем считать также показатели a в неравенствах вида (102) и числа σ. Это объясняется тем, что число различных возможностей для a, σ степеней и рациональных значений показателей степеней у высот $k_j(\omega)$, $d_1(\omega)$, $d(\omega)$ конечно и зависит от n и ε.

Составим множество χ из многочленов $d_1(\omega)$, построенных для различных интервалов I. Оно состоит из не менее чем $c(n)H^{l_2/T-\varrho}$ не обязательно различных многочленов. Ясно, что существует такое рациональное число $\gamma = s/T$, что число совпадающих многочленов множества χ заключено между $H^{s/T}$ и $H^{(s+1)/T}$, а число различных многочленов множества χ не менее $c(n)H^{l_2/T-\varrho-\gamma-\varepsilon_1}$. Множество интервалов $I\subset\mathcal{I}(\varrho)$ с одним и тем же многочленом $d_1(\omega)$ обозначим через $\mathcal{I}_\gamma(\varrho)$.

Пусть

$$\chi_1 = \bigcup_{I\in\mathcal{I}_\gamma(\varrho)}\ \bigcup_{j=1}^{m_2} k_j(\omega).$$

Тогда множество χ_1 состоит не менее, чем из $c(n)H^{\theta+\varrho+\gamma+\{k\}}$ многочленов. Однако каждый из многочленов $k_j(\omega)$ может встречаться у $H^{\sigma+\varkappa_1\varepsilon_1}$, $0\leqslant\varkappa_1\leqslant 1$ интервалов. Отсюда заключаем, что число различных многочленов $k_j(\omega)$ во множестве χ_1 не менее $c(n)H^{\theta+\varrho+\gamma+\{k\}-\sigma-\varepsilon_1}$. Для многочленов $k_j(\omega)\in\Psi_4(I)$ неравенство (102) выполняется на множестве с мерой, не меньшей $H^{-l_2/T}$. Поскольку во множестве $\Psi_4(I)$ есть многочлены без общих корней, то применяя лемму 12, имеем

(104) $$\left(1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i\right)(n-[k]+i-l_i)\geqslant$$
$$\geqslant a+1-\frac{i}{n-[k]+i}+2\max\left(a+1-\frac{i}{n-[k]+i}-\frac{l_2}{T}+\sigma,\ 0\right).$$

Так как число различных многочленов $d_1(\omega)$ не менее $c(n)H^{l_2/T-\varrho-\gamma-\varepsilon_1}$, а число различных многочленов $k_j(\omega)$ не менее $c(n)H^{\theta+\varrho+\gamma+\{k\}-\sigma-\varepsilon_1}$, то по лемме 9 имеем

(105) $$\lambda_i(l_i+1)\geqslant l_2/T-\varrho-\gamma-\varepsilon_1,$$
$$\left(1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i\right)(n-[k]+i-l_i+\max(0,\ -a-(n-1)\varepsilon_1)\geqslant$$
$$\geqslant\theta+\varrho+\gamma+\{k\}-\sigma-\varepsilon_1.$$

Будем считать в дальнейшем, что $\max(0, -a-(n-1)\varepsilon_1) = 0$, так как в противном случае нам будет легче показать, что показатель $n-k-a$ не мал, а это и является целью наших дальнейших рассмотрений. В этом случае второе неравенство (105) примет вид

$$\left(1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i\right)(n-[k]+i-l_i) \geqslant \theta+\varrho+\gamma-\sigma-\varepsilon_1,$$

которое вместе с неравенствами (104) и (105) запишем в виде системы неравенств

$$\left(1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i\right)(n-[k]+i-l_i) \geqslant \theta+\varrho+\gamma-\sigma+\{k\}-\varepsilon_1,$$

(106) $$2\left(1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i\right)(n-[k]+i-l_i) \geqslant a+1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i l_i \geqslant$$

$$\geqslant \frac{l_2}{T}-\varrho-\gamma-\varepsilon_1-\lambda_i+2\max\left(a+1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i-\frac{l_2}{T}+\sigma,\, 0\right).$$

Положим $\tau = \gamma+\varrho$ и будем считать далее, что

(107) $$l_2/T = p_1.$$

Для упрощения записи ε_1 в правых частях неравенств будем в дальнейшем опускать. Тогда система неравенств (106) примет вид

$$\left(1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i\right)(n-[k]+i-l_i) \geqslant \theta+\tau-\sigma+\{k\},$$

(108) $$2\left(1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i\right)(n-[k]+i-l_i) \geqslant a+1-\frac{i}{n-[k]+i}-$$

$$-\lambda_i+\lambda_i l_i \geqslant p_1-\tau+2\max\left(a+1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i-p_1+\sigma,\, 0\right).$$

Лемма 18. *Система неравенств*

$$\left(1-\frac{i}{n-[k]+i}-\lambda_i\right)(n-[k]+i-l_i) > (1-\sqrt{c})^2(n-k),$$

$$\lambda_i l_i > c(n-k)$$

противоречива при любом $i,\ \lambda_i,\ l_i$; $0 \leqslant i \leqslant [k]$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1-\dfrac{i}{n-[k]+i}$, $0 \leqslant l_i \leqslant n-[k]+i$, $0<c<1$.

Доказательство. Функция

$$f(\lambda_i, l_i) = \left(\frac{n-k}{n-[k]+i}-\lambda_i\right)(n-[k]+i-l_i)$$

может принимать наибольшее значение или на границе области, определяемой системой неравенств

$$0 \leqslant \lambda_i \leqslant \frac{n-k}{n-[k]+i}, \quad 0 \leqslant l_i \leqslant n-[k]+i,$$

$$\lambda_i l_i \geqslant c(n-k)$$

или в стационарной точке. Но стационарная точка функции $f(\lambda_i, l_i)$ лежит на границе области. На прямых $\lambda_i = (n-k)/(n-[k]+i)$ и $l_i = n-[k]+i$, $f(\lambda_i, l_i) = 0$, а на кривой $\lambda_i l_i = c(n-k)$ имеем

$$f(\lambda_i, l_i) \leqslant (1-\sqrt{c})^2(n-k).$$

Введем обозначения

(109) $$\mu_i = 1-\frac{i}{n-[k]+i}, \quad n_i = n-[k]+i, \quad p = 2p_1-1.$$

Так как из (108) нам надо получить по возможности лучшую оценку для a сверху, то в (108) полагаем $\{k\} = 0$.

Поскольку $w > 4n+3$, то из леммы 18 заключаем, что система неравенств

$$(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i) > 0{,}75p_1-0{,}375,$$

$$\lambda_i l_i > 0{,}16p$$

противоречива. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только $\lambda_i l_i$, лежащие в интервале $[0;\ 0{,}16p]$. Этот интервал разобьем на непересекающиеся интервалы $(0{,}1225p;\ 0{,}16p]$, $(0{,}09p;\ 0{,}1225p]$, $(0{,}0625p;\ 0{,}09p]$, $(0{,}04p;\ 0{,}0625p]$, $(0{,}0225p;\ 0{,}04p]$, $(0{,}01p;\ 0{,}0225p]$, $[0;\ 0{,}01p]$. Пусть $\lambda_i l_i \in (0{,}1225p;\ 0{,}16p]$. Тогда из третьего неравенства системы (108) получаем, что $\tau > 0{,}34p+0{,}5$. По лемме 18 система неравенств

$$(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i) > 0{,}4225p,$$

$$\lambda_i l_i > 0{,}1225p$$

противоречива. Поэтому если $\sigma < 0{,}2925p+0{,}875$, то первое неравенство системы (108) примет вид $(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i) > 0{,}4225p$ и система (108) с условием $\lambda_i l_i \in (0{,}1225p;\ 0{,}16p]$ станет противоречивой. Если $\sigma \geqslant 0{,}2925p+0{,}875$, то из второго неравенства системы (108) получаем $3a+3(\mu_i-\lambda_i)-0{,}415p+0{,}75 < 0{,}845p$, так как противоположное неравенство опять привело бы к противоречию. Имеем далее $a \leqslant 0{,}42p + (-\mu_i + \lambda_i) - 0{,}25$, откуда $n-k-a \geqslant 0{,}58p + \mu_i - \lambda_i + 0{,}25$. Используем лемму 14. Получим, что существует $d'_{1i}(\omega)$, делитель $d_{1i}(\omega)$, имеющий степень не выше l_i и высоту не более $c(n)H^{\lambda_i}$, являющийся или неприводимым многочленом, или степенью неприводимого многочлена и такой, что

$$|d'_{1i}(\omega)| < c(n)H^{-0{,}42p-0{,}25} \tag{110}$$

для всех ω из некоторого объединения интервалов I. Так как показатель степени в (110) меньше 0, то используя лемму 9 в первом неравенстве (105) $\lambda_i(l_i+1)$ можно заменить на $\lambda_i l_i$.

Получим сейчас оценки сверху для высоты многочлена $d'_{1i}(\omega)$ и его степени. При этом будем считать, что $(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i)$ принадлежит достаточно малой окрестности $0{,}4225p$. Если $(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i)$ принимает другие значения интервала $[0{,}375p; 0{,}4225p]$, то в этом случае пришлось бы сделать более мелкие разбиения интервала $[0; 0{,}16p]$. Будем, например, считать, что $(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i) > 0{,}41p$. Так как $\lambda_i \geqslant 0$, то получаем $l_i < 0{,}59(p+i)$, откуда из $\lambda_i l_i > 0{,}1225p$ следует $\lambda_i > 0{,}1225p/0{,}59(p+i)$. Теперь из неравенства $0{,}8\mu_i(n_i-l_i) > 0{,}41p$ получаем, что $l_i < 0{,}5n_i$, откуда $\lambda_i > 0{,}24\mu_i$ и т.д. Через несколько шагов мы получим $l_i < 0{,}4n_i$. Аналогичное рассуждение проведем и для λ_i. Получим $\lambda_i < 0{,}4\mu_i$.

Таким образом мы получили существование многочлена $d'_{1i}(\omega)$, удовлетворяющего неравенству (110). При этом степень и высота этого многочлена удовлетворяют неравенствам

$$H(d'_{1i}) < c(n)H^{0{,}4\mu_i}, \qquad \deg d'_{1i} < 0{,}4n_i.$$

Если $\lambda_i l_i \in (0{,}09p; 0{,}1225p]$ или любому другому интервалу вплоть до интервала $(0{,}01p; 0{,}0225p]$, то можно провести аналогичные рассуждения. При этом получим следующие результаты.

Если $\lambda_i l_i \in (0{,}09p; 0{,}1225p]$, то

$$|d'_{1i}(\omega)| < H^{-0{,}39p-0{,}25}, \quad l_i < 0{,}35n_i, \quad \lambda_i < 0{,}35\mu_i. \tag{111}$$

Если $\lambda_i l_i \in (0{,}0625p; 0{,}09p]$, то

$$|d'_{1i}(\omega)| < H^{-0{,}37p-0{,}25}, \quad l_i < 0{,}3n_i, \quad \lambda_i < 0{,}3\mu_i. \tag{112}$$

Если $\lambda_i l_i \in (0{,}04p; 0{,}0625p]$, то

$$|d'_{1i}(\omega)| < H^{-0{,}29p-0{,}25}, \quad l_i < 0{,}25n_i, \quad \lambda_i < 0{,}25\mu_i. \tag{113}$$

Если $\lambda_i l_i \in (0{,}0225p; 0{,}04p]$, то

$$|d'_{1i}(\omega)| < H^{-0{,}21p-0{,}25}, \quad l_i < 0{,}2n_i, \quad \lambda_i < 0{,}2\mu_i. \tag{114}$$

Если $\lambda_i l_i \in (0{,}01p; 0{,}0225p]$, то

$$|d'_{1i}(\omega)| < H^{-0{,}13p-0{,}25}, \quad l_i < 0{,}13n_i, \quad \lambda_i < 0{,}13\mu_i. \tag{115}$$

Если $\lambda_i l_i < 0{,}01p$, то от множества многочленов $\Psi_2(I)$ перейдем к рассмотрению множества многочленов $\Psi_1(I)$. Применим лемму 12 к многочлену $k_1(\omega)$ и любому взаимнопростому с ним из множества $\Psi_1(I)$. Получим, учитывая что степень $t_1(\omega)$ не превосходит $0{,}625p + \{\theta\} + \{k\} + i$

$$\begin{gathered}(\mu_i-\lambda_i)(1{,}625p+2i+2\{k\}-\{\theta\}-2l_i) \geqslant \\ \geqslant a+\mu_i-\lambda_i+2\max(a+\mu_i-\lambda_i-p_1, 0), \\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant \mu_i, \quad 1 \leqslant l_i \leqslant 0{,}625p+i+\{k\}+\{\theta\}.\end{gathered} \tag{116}$$

Из (116) аналогично тому, как это сделано при получении (110)–(115) можно получить существование многочленов $d'_{1i}(\omega)$, имеющих небольшую или степень, или высоту и принимающих малые значения для всех $\omega \in I$. Так как эта процедура аналогична (110)–(115), то мы ее опустим.

Покажем сейчас, что нарушение условия (107) как правило приводит к увеличению показателей в неравенствах (110)–(115). Если же показатель и уменьшается, то на незначительную величину. Пусть $l_2/T < p_1$. Обратимся к системе неравенств (106), положив $\delta = p_1 - l_2/T$. Из определения $l_2/T, \delta, p_1$, можно получить $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{n-1}{n}p_1$. Опять положим $\{k\}=0$, опустим ε_1. Получим

$$\begin{gathered}(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i-\delta) > \theta+\tau-\sigma, \\ 2(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i-\delta) \geqslant \\ \geqslant a+\mu_i-\lambda_i+2\max(a+\mu_i-\lambda_i-0{,}5p-0{,}5+\delta+\sigma, 0), \\ \lambda_i l_i \geqslant p_1-\tau-\sigma.\end{gathered} \tag{117}$$

Выполнив несложные преобразования запишем (117) в виде близком к (108)

$$\begin{gathered}(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i) \geqslant \theta+\tau-\sigma+\delta(\mu_i-\lambda_i), \\ 2(\mu_i-\lambda_i)(n_i-l_i) \geqslant a+\mu_i-\lambda_i+2(\mu_i-\lambda_i)\delta+ \\ +2\max(a+\mu_i-\lambda_i-0{,}5p-0{,}5+\delta+\sigma, 0), \\ \lambda_i l_i \geqslant p_1-\tau-\delta.\end{gathered} \tag{118}$$

Опять разобъем интервал $[0; 0{,}16)$ на те же семь непересекающихся интервалов и проведем рассуждения, аналогичные как при получении (110)–(115). Получим, что если показатели степени в (110)–(112) и изменятся, то останутся не более

(119) $$-0{,}41p-0{,}25;\quad 0{,}38p-0{,}25;\quad -0{,}36p-0{,}25$$

соответственно.

Докажем, что все многочлены $d'_{1i}(\omega)$ $(i=0,\ldots,[k])$ могут быть только степенями одного и того же многочлена. Рассмотрим многочлены $d'_{1i}(\omega)$ и $d'_{1,i+1}(\omega)$. Если они не являются степенями одного и того же многочлена, то к ним можно применить лемму 12. При этом если $\lambda_i l_i \in (0{,}1225p;\, 0{,}16p]$, $\lambda_{i+1} l_{i+1} \in (0{,}09p;\, 0{,}1225p]$ то

(120) $$H^{\lambda_i l_{i+1}+\lambda_{i+1} l_i} < H^{0{,}4\frac{p}{p+i}\cdot 0{,}35(p+i+1)+0{,}35\frac{p}{p+i+1}0{,}4(p+i)} < $$
$$< H^{0{,}14p\left(\frac{p+i+1}{p+i}+\frac{p+i}{p+i+1}\right)}.$$

Но $\dfrac{p+i+1}{p+i}+\dfrac{p+i}{p+i+1} < 2+\dfrac{1}{p(p+1)}$ для всех i. Поскольку $p\geqslant 2$, то правую часть неравенства (119) можно оценить сверху величиной $H^{0,28p+0,5}$.

Учитывая неравенства (110)–(115) и (119), (120) можно переписать в виде $\lambda_i l_i \in (0{,}1225p;\, 0{,}16p]$, $\lambda_{i+1} l_{i+1} \in (0{,}09p;\, 0{,}1225p]$

(121) $$H^{\lambda_i l_{i+1}+\lambda_{i+1} l_i} < H^{0{,}28p+0{,}05},$$
$$\max\left(|d'_{1i}(\omega)|,\, |d'_{1,i+1}(\omega)|\right) < H^{-0{,}37p-0{,}25}.$$

Проанализировав оставшиеся возможности для $\lambda_i l_i$ и $\lambda_{i+1} l_{i+1}$ мы убедимся, что в том случае, если $d'_{1i}(\omega)$ и $d_{1,i+1}(\omega)$ не являются степенями одного и того же неприводимого многочлена, получаем по лемме 12 противоречие.

Итак, существует неприводимый многочлен $d_0(\omega)$, что $d'_{1,i}(\omega) = d_0^{s_i}(\omega)$. Рассмотрим $i=0$ и $i=[k]-1$. Из того, что $\lambda_i l_i$ принадлежит одному из шести выделенных интервалов, получаем

(122) $$|d_0^{s_0}(\omega)| < H^{-\nu_j p-0{,}25},$$
$$\deg d_0^{s_0}(\omega) < \tau_j p,\quad j=1,\ldots,6,$$

где ν_j и τ_j зависят от номера выбранного интервала и определяются из неравенств (110)–(115) и (119). Из этих же неравенств и (122) имеем

(123) $$|d_0(\omega)| < H^{-(\nu_j p+0{,}25)/s_0},\qquad \deg d_0 \leqslant \frac{\tau_j}{s_0}p,$$

$\nu_1=0{,}41$; $\nu_2=0{,}38$; $\nu_3=0{,}36$; $\nu_4=0{,}29$; $\nu_5=0{,}21$; $\nu_6=0{,}13$,
$\tau_1=0{,}4$; $\tau_2=0{,}35$; $\tau_3=0{,}3$; $\tau_4=0{,}25$; $\tau_5=0{,}2$; $\tau_6=0{,}13$.

(124) $$|d_0(\omega)| < H^{-\frac{\nu_{j'}p+0{,}25}{s_k}},\qquad H(d_0) < c(n)H^{\frac{\tau_{j'}}{s_k}\frac{p}{n}}.$$

Сопоставив (123) и (124) получаем

(125) $$|d_0(\omega)| < H^{-\max\left(\frac{\nu_j p+0{,}25}{s_0},\, \frac{\nu_{j'}p+0{,}25}{s_k}\right)},$$
$$H(d_0) < c(n)H^{\frac{\tau_{j'}}{s_k}\frac{p}{n}},\qquad \deg d_0 < \frac{\tau_j}{s_0}p.$$

Многочлен $d_0(\omega)$ не имеет ни с каким многочленом $P(\omega)$, принадлежащим I общих корней. Применим к этим многочленам лемму 13. Получим

$$\frac{\tau_j}{s_0}p\cdot 1+\frac{\tau_{j'}}{s_k}\cdot\frac{p}{n}\cdot n < 2\max\left(\frac{\nu_j p}{s_0},\, \frac{\nu_{j'}p}{s_k}\right),$$

поскольку $\nu_j \geqslant \tau_j$, $\nu_{j'} \geqslant \tau_{j'}$. Таким образом, нами доказано

Предложение 4. *При* $w \geqslant 4n+3$ *имеем* $\dim \mathscr{L}_n(w) \leqslant (n+1)/(w+1)$.

8. Случай вырождения при $2n+1 \leqslant w \leqslant 4n+3$. Рассуждения предыдущего параграфа основывались на том, что мы получали хорошую аппроксимацию нуля на интервалах I значениями многочленов, у которых степень и высота относительно невелики. Сейчас заметим еще, что если $|d(\omega)| < H^{-(n-k)+a}$ то поскольку $d(\omega)$ имеет степень меньшую n, то должно выполняться неравенство

(126) $$\frac{l+1}{\frac{n-k-a}{\lambda}+1} > \frac{n+1}{w+1},$$

так как в противном случае все доказано. Неравенство (126) перепишем в виде

(127) $$\lambda(l+1) > \frac{n+1}{w+1}(n-k-a+\lambda).$$

Неравенство (127) вместе с системой неравенств (108) взятой при $i=0$ и $\{k\}=0$ образуют систему неравенств

(128) $$\begin{gathered}(1-\lambda_0)(p-l_0) \geqslant \theta+\tau-\sigma,\\ 2(1-\lambda_0)(p-l_0) \geqslant a+1-\lambda_0+2\max(a+1-\lambda_0-p_1+\sigma,\, 0),\\ \lambda_0 l_0 \geqslant p_1-\tau = 0{,}5p+0{,}5+\tau,\\ \lambda_0(l_0+1) > \frac{n+1}{w+1}(p-a+\lambda_0).\end{gathered}$$

Поскольку $\theta \geqslant 0{,}5p_1$, то $\lambda_0 l_0 \leqslant 0{,}25p$, поскольку в противном случае по лемме 18 получим, что система неравенств (128) противоречива.

Интервал $[0; 0{,}25p)$ разобъем на непересекающиеся интервалы $[0{,}2209p; 0{,}25p)$, $[0{,}2205p; 0{,}2209p)$, $[0{,}16p; 0{,}2025p)$ и далее как в случае $w > 4n+3$.

Пусть $\lambda_0 l_0 \in [0{,}2209p; 0{,}25p)$. Тогда из третьего неравенства системы (128) получаем $\tau > 0{,}25p+0{,}5$. Если теперь $\sigma \leqslant 0{,}2191p+0{,}75$, то по лемме 18 первое и третье неравенства системы (128) противоречивы. Поэтому считаем $\sigma > 0{,}2191p+0{,}75$. Тогда из второго неравенства (128) заключаем $a < 0{,}38p-1{,}16+\lambda_0$, откуда $p-a+\lambda_0 \geqslant 0{,}62p+1{,}16$. При $2n+1 \leqslant w \leqslant 2{,}3n+1{,}3$ учитывая $p \geqslant 3$ получаем, что четвертое неравенство системы неравенств (128) противоречиво.

Если $w \geqslant 2{,}3n+1{,}3$, то $\theta > 0{,}281p$ и по лемме 18 получаем противоречие. Теперь будем считать, что $\lambda_0 l_0 \in [0{,}2025p; 0{,}2209p)$. Снова проделаем такую же процедуру. Опять получим, что система неравенств (128) противоречива. Противоречие получается также при $\lambda_0 l_0$, принадлежащих другим интервалам. Мы доказали

Предложение 5. *При $2n+1 \leqslant w \leqslant 4n+3$ имеем*

$$\dim \mathscr{L}_n(w) \leqslant \frac{n+1}{w+1}.$$

Таким образом доказательство теоремы завершено.

Литература

[1] В. И. Берник, *Метрическая теорема о приближении нуля значениями целочисленных многочленов*, Изв. АН СССР, сер. матем., 44 (1980).

[2] — *О гипотезе Бейкера–Шмидта*, Доклады АН БССР 23 (5) (1979), стр. 392–395.

[3] А. О. Гельфонд, *Трансцендентные и алгебраические числа*, Москва 1952.

[4] Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*, Москва 1961.

[5] Ю. В. Нестеренко, *Оценка снизу совокупности полиномов. Тезисы докладов и сообщений всесоюзной школы по теории чисел*, Душанбе 1977.

[6] В. Г. Спринджук, *О гипотезе Малера*, ДАН СССР, 154 (4) (1964), стр. 783–786.

[7] — *Еще о гипотезе Малера*, ibid. 155 (1) (1964), стр. 54–56.

[8] — *Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел*, Изв. АН СССР, сер. матем., 29 (2) (1965), стр. 379–436.

[9] — *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Наука и техника, Минск 1967.

[10] Н. И. Фельдман, *Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел I*, Изв. АН СССР, сер. матем., 15 (1) (1951), стр. 53–74.

[11] A. Baker and W. M. Schmidt, *Diophantine approximation and Hausdorff dimension*, Proc. London Math. Soc. (3) 21 (1970), стр. 1–11.

[12] A. Baker, *On a theorem of Sprindžuk*, Proc. Roy. Soc. A., 292 (1966), стр. 92–104.

[13] R. Baker, *Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension*, Mathematika 23 (1976), стр. 184–197.

[14] A. S. Besicovitch, *On linear sets of points of fractional dimension*, Math. Ann. 101 (1929), стр. 161–193.

[15] R. Güting, *On Mahler's function θ_1*, Michigan Math. J. 10 (1963), стр. 161–179.

[16] F. Hausdorff, *Dimension und äusseres Maß*, Math. Ann. 79 (1918), стр. 157–179.

[17] V. Jarník, *Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Maß*, Recueil Math., Moscow, 36 (1929), стр. 371–382.

[18] F. Kasch und B. Volkmann, *Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen*, Math. Ann. 136 (1958), стр. 442–453.

[19] A. Khintschine, *Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen*, ibid. 92 (1924), стр. 115–125.

[20] E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, J. Reine Angew. Math. 106 (1961), стр. 67–77.

Поступило 11. 9. 1980
и в исправленной форме 2. 2. 1982 (1198)