La suite des approximations successives dans le cas general

par

J. P. Delahaye (Lille)

Résumé. Dans ce travail, nous considérons les suites engendrées par l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$, où f est une fonction continue d'un espace topologique séparé E dans lui-même (comme on le sait, ces suites ont une importance fondamentale en mathématiques et spécialement en mathématiques appliquées).

Nous nous intéressons alors à l'ensemble des points d'accumulation (et à l'ensemble des points sous-limite) de la suite (x_n), sans faire d'hypothèse supplémentaire concernant f.

Les diverses études faites jusqu'à présent sur ce sujet se plaçaient dans un cadre relativement restreint (les espaces métriques compacts, le plus souvent) [8] [9] [10] [12]. Nous avons regroupé et généralisé leurs résultats et nous en avons obtenu de nouveaux. Pour justifier les hypothèses utilisées nous donnons des contre-exemples, dont le deuxième, au § 3, est particulièrement important car il montre que l'ensemble des points d'accumulation de (x_n) peut être fini sans être un cycle (c'est la première fois qu'une telle situation est décrite).

§ 1. Définitions et notations. Soit E un espace topologique séparé (c'est-à-dire vérifiant l'axiome de Hausdorff). Si x est un élément de E nous noterons $V(x)$ l'ensemble des voisinages (ouverts ou non) de x.

Soit (x_n) une suite de points de E.

On dit que (x_n) est *convergente* et que x est *sa limite* si et seulement si:

$$\forall v \in V(x), \exists n_0 \in N, \forall n \in N: \ n > n_0 \Rightarrow x_n \in v.$$

On dit que x est un *point d'accumulation de la suite* (x_n), et on note $x \in A(x_n)$, si et seulement si:

$$\forall v \in V(x), \forall n \in N, \exists n_0 \in N: \ n < n_0 \text{ et } x_{n_0} \in v.$$

On dit que x est un *point sous-limite de la suite* (x_n), et on note $x \in L(x_n)$, si et seulement si il existe une sous-suite $(x_{k(n)})$ convergente de limite x.

On montre que $A(x_n)$ est fermé, par contre en général $L(x_n)$ n'est ni fermé ni même séquentiellement fermé [4]. On a $A(x_n) \supset L(x_n)$ et, si tous les points de E admettent un système fondamental dénombrable de voisinages alors $L(x_n) = A(x_n)$.

La suite (x_n) est dite *cyclique* (resp. *asymptotiquement cyclique*) s'il existe un entier non nul p, tel que:

$$\forall n \in N:\ x_{n+p} = x_n,$$

(resp. $(x_{np}), (x_{np+1}), \ldots, (x_{np+p-1})$ soient convergentes), le plus petit entier non nul vérifiant cette relation est appelé *période de* (x_n).

§ 2. Inclusions et égalités entre $L, f(L), A$ **et** $f(A)$. Soit, en plus, une application continue de E dans E. On montre facilement que:

$$f(A(x_n)) \subset A(f(x_n)) \quad \text{et} \quad f(L(x_n)) \subset L(f(x_n)).$$

Supposons maintenant et jusqu'à la fin, que la suite (x_n) est engendrée par f c'est-à-dire que:

$$(*) \qquad \forall n \in N:\ x_{n+1} = f(x_n).$$

PROPOSITION 1. (i) $f(A(x_n)) \subset A(x_n)$; (ii) $f(L(x_n)) \subset L(x_n)$.

Démonstration. Elle résulte des inclusions énoncées au-dessus et des égalités:

$$A(f(x_n)) = A(x_{n+1}) = A(x_n) \quad \text{et} \quad L(f(x_n)) = L(x_{n+1}) = L(x_n).$$

COROLLAIRE. (i) *Si $A(x_n)$ (resp. $L(x_n)$) est réduit à un élément, x, alors $f(x) = x$.*

(ii) *Si $A(x_n)$ (resp. $L(x_n)$) est fini et non vide, alors il contient au moins un cycle.*

(On appelle cycle d'ordre p de f toute suite finie de p éléments distincts $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ telle que $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3, \ldots, f(x_p) = x_1$).

PROPOSITION 2. (i) *Si E est compact alors $f(A(x_n)) = A(x_n)$.*

(ii) *Si E est séquentiellement compact, alors $f(L(x_n)) = L(x_n)$.*

(Rappelons que E est dit séquentiellement compact si toute suite (y_n) de points de E possède au moins un point sous-limite. Il existe des espaces compacts qui ne sont pas séquentiellement compacts, et inversement il existe des espaces séquentiellement compacts qui ne sont pas compacts).

Dans le cas des espaces métriques compacts cette proposition est classique [8] [12] et de démonstration assez facile. Par contre, dans le cas général traité ici, comme nous allons le voir, la démonstration est un peu moins évidente.

Démonstration. (i) Soit $x \in A(x_n)$. Pour tout voisinage fermé de x, v, l'ensemble $K_v = \{k \in N;\ x_k \in v\}$ est infini. En classant les éléments de K_v par ordre croissant:

$$k_v(0), k_v(1), \ldots, k_v(n), \ldots$$

on obtient une sous-suite $(x_{k_v(n)})$. Puisque E est compact la sous-suite $(x_{k_v(n)-1})$ a au moins un point d'accumulation y_v. Par définition de (x_n) et d'après la continuité de f on a $f(y_v) \in v$.

En utilisant à nouveau la compacité de E on peut alors établir qu'il existe $y \in E$ tel que pour tout voisinage ouvert de y, w, et tout voisinage fermé de x, v, il existe un voisinage fermé de x, u, tel que: $u \subset v$ et $y_u \in w$. Ceci permet alors d'établir que $x = f(y)$ et que $y \in A(x_n)$.

(ii) Soit $x \in L(x_n)$. Par définition il existe $(x_{k(n)})$ une sous-suite de (x_n) convergente vers x. La sous-suite $(x_{k(n)-1})$ admet au moins un point sous-limite y qui, bien sûr, vérifie $f(y) = x$.

Remarque. Même dans le cas très particulier $E = \boldsymbol{R}$, l'ensemble $A(x_n)$ (alors égal à $L(x_n)$) peut être fini ou infini, dénombrable ou non dénombrable, parfait ou non, de mesure nulle ou non [2] [6].

CONTRE-EXEMPLE 1. Une hypothèse de locale compacité (même dans le cas des espaces métriques) ne suffit pas pour obtenir les conclusions de la proposition 2. En effet, soit f l'application de $\boldsymbol{R}$ dans lui-même définie par:

$$\forall x \in]-\infty, 0]:\ f(x) = x/2+1,$$

$$\forall x \in [0, 1]:\ f(x) = x+1,$$

$$\forall n \in \boldsymbol{N}^*, \forall x \in [n, n+1-1/2^n]:$$
$$f(x) = -(n+1-1/2^n)(2^n/(2^n-1))(x-n-1+1/2^n)-1/2^n,$$

$$\forall n \in \boldsymbol{N}^*, \forall x \in [n+1-1/2^n, n+1-1/2^{n+1}]:$$
$$f(x) = (n+2+1/2^{n+1})(2^{n+1})(x-n-1+1/2^n)-1/2^n,$$

$$\forall n \in \boldsymbol{N}^*, \forall x \in [n+1-1/2^{n+1}, n+1]:\ f(x) = x+1.$$

Alors, en prenant $x_0 = -1$, la suite (x_n) définie par $(*)$ à partir de x_0 et f, vérifie:

$$L(x_n) = A(x_n) = \boldsymbol{N} \quad \text{et} \quad f(A(x_n)) = \boldsymbol{N}^*.$$

§ 3. Compacité de A. On considère toujours une suite (x_n) engendrée par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est une application continue de l'espace séparé E dans lui-même.

PROPOSITION 3. *Si E est localement compact alors: l'ensemble $A(x_n)$ est compact si et seulement si l'ensemble des points de la suite (x_n) est contenu dans un compact.*

Un résultat semblable pour des fonctions multivoques dans le cas $E = \boldsymbol{R}^m$ est donné dans [9].

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, raisonnons par l'absurde en supposant que $A(x_n)$ est un compact et que (x_n) n'est contenu dans aucun compact. L'ensemble $A(x_n)$ qui est compact, possède donc un voisinage compact v ([1] p. 65). D'après les hypothèses les ensembles $\{k \in \boldsymbol{N};\ x_k \in v\}$ et $\{k \in \boldsymbol{N};\ x_k \notin v\}$ sont tous les deux infinis, et donc l'ensemble $\{k \in \boldsymbol{N};\ x_k \in v \text{ et } x_{k+1} \notin v\}$ est lui aussi infini. Nous pouvons donc construire une sous-suite $(x_{k(n)})$ telle que pour tout entier n:

$x_{k(n)} \in v$ et $x_{k(n)+1} \notin v$. Puisque v est compact, la sous-suite $(x_{k(n)})$ possède au moins un point d'accumulation x. Le point $y = f(x)$ est un point d'accumulation de $(x_{k(n)+1})$, donc $y \in A(x_n)$, ce qui est impossible car pour tout n: $x_{k(n)+1} \notin v$.

CONTRE-EXEMPLE 2. Le contre-exemple suivant est particulièrement important car il montre que lorsque E n'est pas localement compact, (x_n) peut n'être contenu dans aucun compact, bien que $A(x_n)$ soit compact. Il montre aussi que $A(x_n)$ peut être fini sans être un cycle ni même une réunion de cycles.

L'espace E sera l'ensemble des suites d'entiers (t_n), de l'une des formes suivantes:

Forme A_i, pour $i \in \{0, 1, 2\}$:

$$\forall n \in N;\ t_n = i.$$

Forme B_m, pour $m \in N$, $m \geqslant 3$:

$$t_{m-3} = m \quad \text{et} \quad \forall n \in N:\ n \neq m-3 \Rightarrow t_n = 0.$$

Forme $C_{p,q,m}$, pour $p \in \{1, 2\}$, $q \in N$, $q \geqslant 3$, $m \in N$, $m \geqslant q$:

$$t_{q-3} = m \quad \text{et} \quad \forall n \in N:\ n \neq q-3 \Rightarrow t_n = p.$$

E est muni de la topologie de la convergence simple et l'application continue f de E dans lui-même est définie par:

$$f(A_0) = A_1;\quad f(A_1) = A_2;\quad f(A_2) = A_1;\quad f(B_m) = C_{1,m,m};$$
$$f(C_{1,q,m}) = C_{2,q,m};\quad f(C_{2,q,m}) = C_{1,q-1,m} \quad \text{si} \quad q > 3;$$
$$f(C_{2,3,m}) = B_{m+1}.$$

Si nous prenons $x_0 = B_3$, la suite (x_n) engendrée par f commence par: B_3; $C_{1,3,3}$; $C_{2,3,3}$; B_4; $C_{1,4,4}$; $C_{2,4,4}$; $C_{1,3,4}$; $C_{2,3,4}$; B_5; $C_{1,5,5}$; etc. On montre que (x_n) n'est contenu dans aucun compact, que (x_n) admet les trois points d'accumulation A_0, A_1, A_2 qui ne forment pas un cycle.

§4. L'ensemble A et les cycles de f. Les hypothèses restent les mêmes que celles du §3.

Le lemme suivant est une double généralisation à $A(x_n)$ et à $L(x_n)$ de résultats analogues de [8] et [12].

LEMME. *Supposons que: Pour tout voisinage v de $A(x_n)$ (resp. $L(x_n)$):*

$$\exists n_0 \in N,\ \forall n \in N,\ n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in v.$$

Soit $A \neq \emptyset$ tel que $A \subset A(x_n)$ et $A \neq A(x_n)$ (resp. $A \subset L(x_n)$ et $A \neq L(x_n)$). S'il existe v un voisinage de A et w un voisinage de $A(x_n) - A$ (resp. de $L(x_n) - A$) vérifiant $v \cap w = \emptyset$, alors: $f(A) \not\subset A$.

Démonstration. Supposons que $f(A) \subset A$. Soit v_1 un voisinage de A tel que $f(v_1) \subset v$. Soit alors n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ alors $x_n \in v_1 \cup w$. Il existe un certain entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $x_{n_1} \in v_1$. Par construction $x_{n_1+1} \in v$ et

$x_{n_1+1} \in v_1 \cup w$ et donc $x_{n_1+1} \in v_1$. Par récurrence on montre de même que pour tout entier p: $x_{n_1+p} \in v_1$, ce qui implique que $A(x_n) \subset A$ (resp. $L(x_n) \subset A$), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $A \neq A(x_n)$ (resp. $A \neq L(x_n)$).

Le lemme nous permet maintenant d'établir la proposition suivante qui dans le cas particulier des espaces métriques compacts est énoncée sans démonstration dans [8].

PROPOSITION 4. *Si E est un espace localement compact et si $A(x_n)$ possède un nombre fini non nul de composantes connexes, chacune d'elle étant compacte, alors il est possible de numéroter ces composantes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de telle façon que:*

$$f(A_1) = A_2,\ f(A_2) = A_3,\ \ldots,\ f(A_p) = A_1.$$

Démonstration. $A(x_n)$ est compact, la suite (x_n) est donc contenue dans un compact ce qui permet de montrer que l'hypothèse du lemme est vérifiée. Numérotons provisoirement les composantes connexes de $A(x_n)$: $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Il existe $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des voisinages respectifs de $A_1, A_2, \ldots, A_p$ deux à deux disjoints. D'après le lemme, pour tout i: $f(A_i) \not\subset A_i$.

Montrons que s'il existe $y \in A_i$ tel que $f(y) \in A_j$ alors $f(A_i) \subset A_j$. Il existe $v \in V(y)$ tel que $f(v) \subset v_j$, donc tel que $f(v \cap A_i) \subset A_j$. L'ensemble $B = \{x \in A_i;\ f(x) \in A_j\}$ est donc un ouvert relatif de $A(x_n)$; c'est aussi un fermé car: $B = A_i \cap f^{-1}(A_j)$ et donc $B = A_i$.

On conclut en utilisant la proposition 2 et en appliquant encore une fois le lemme pour montrer qu'il ne peut pas y avoir de „sous-cycles".

Nous pouvons maintenant établir le théoréme suivant qui fournit de nouvelles caractérisations de la convergence cyclique de l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$ et contient comme cas particuliers les résultats de [8] [9] [12].

THÉORÈME. *Soient $p \in N^*$, $x \in E$. Si E est localement compact, les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) *$A(x_n)$ possède p éléments dont x,*

(ii) *x est point isolé de $A(x_n)$, $f^p(x) = x$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$: $f^i(x) \neq x$,*

(iii) *la suite (x_n) est asymptotiquement cyclique de période p et $x \in A(x_n)$,*

(iv) *$A(x_n)$ possède p composantes connexes dont l'une est $\{x\}$,*

(v) *$A(x_n) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\}$.*

Remarques.

1° Une fois de plus le contre-exemple 2 montre que l'hypothèse de locale compacité est essentielle.

2° Dans le cas où E est un intervalle compact de $\boldsymbol{R}$, beaucoup d'autres propriétés intéressantes des cycles de f peuvent être démontrées (voir [2] [3] [6] [7] [11]).

3° Il est possible d'établir que lorsque E est localement compact et que la suite (x_n) ne possède qu'un nombre fini de points d'accumulation alors $A(x_n)$

$= L(x_n)$. Ici on peut donc affirmer que dès que l'une des conditions (i)–(v) est satisfaite alors $A(x_n) = L(x_n)$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). C'est une conséquence de la proposition 4.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons que (ii) est vérifiée et donnons-nous un voisinage compact de x, v, tel que $v \cap A(x_n) = \{x\}$. Puisque l'application f^p est continue, il existe un voisinage compact de x, w, tel que $f^p(w) \subset v$ et $w \subset v$.

L'ensemble $\{k \in N;\ x_k \in w$ et $x_{k+p} \notin w\}$ est fini, car sinon la suite (x_n) admettrait un point d'accumulation $x' \in v - \mathring{w}$ ce qui est impossible. Il existe donc un entier r_0 tel que pour tout $n \in N$: $x_{r_0+np} \in w$. Ceci permet alors d'établir que (x_{r_0+np}) converge vers x et que (x_n) est asymptotiquement cyclique de période p.

(iii) $\Rightarrow$ (iv); (iv) $\Rightarrow$ (v); (v) $\Rightarrow$ (i). Evidents.

§ 5. Ensemble dérivé de L et de A. Les hypothèses sur f et (x_n) sont les mêmes que précédemment. Si $F \subset E$ nous noterons F' l'ensemble dérivé de E, c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation de F:

$$x \in F' \Leftrightarrow \forall v \in V(x), \exists y \in v \cap F: x \neq y.$$

PROPOSITION 5. (i) *Si E est compact alors $A'(x_n) \subset f(A'(x_n))$.*

(ii) *Si E est séquentiellement compact et compact alors*

$$L'(x_n) \subset f(L'(x_n)).$$

Remarque. Dans [8] où la partie (i) était énoncée pour les espaces métriques, Rogers et Metcalf posaient la question: est-il possible que $A'(x_n) \neq f(A'(x_n))$? L'article [5] répond à cette question en donnant un exemple d'espace compact $E \subset \boldsymbol{R}^2$ et d'application f de E dans lui-même tels que:

$$A'(x_n) \neq f(A'(x_n)) \quad \text{et} \quad L'(x_n) \neq f(L'(x_n)).$$

Cependant certaines hypothèses supplémentaires sur f (par exemple que $f^{-1}(a)$ est fini pour tout $a \in E$) assurent que l'égalité a lieu (voir [4] [8]).

Démonstration. Supposons E compact (resp. séquentiellement compact et compact). Soit $a \in A'(x_n)$ (resp. $a \in L'(x_n)$). Pour tout voisinage w de a soit un point b_w tel que; $b_w \neq a$ et $b_w \in w \cap A(x_n)$ (resp. $b_w \in w \cap L(x_n)$). Soit $c_w \in A(x_n)$ (resp. $c_w \in L(x_n)$) tel que $f(c_w) = b_w$. La compacité de E entraîne qu'il existe un point c de E tel que:

$$\forall w \in V(c),\ \forall v \in V(a), \exists u \in V(a): u \subset v \text{ et } c_u \in w.$$

Ceci permet alors de montrer que $f(c) = a$ et que $c \in A'(x_n)$ (resp. $c \in L'(x_n)$).

§ 6. Applications. Les généralisations présentées ont principalement consisté en la suppression de l'hypothèse de métrisabilité pour l'espace E. Les espaces non métrisables se rencontrent fréquemment en mathématiques, y compris en mathématiques appliquées. Par exemple l'espace des fonctions de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ muni de la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable. Plus concrètement encore, l'espace de fonctions $D(U)$ (U: ouvert de $\boldsymbol{R}^m$) et l'espace des distributions $D'(U)$ ne sont pas métrisables quand on les munit de leurs topologies naturelles (voir par exemple [13] [14]). Les propositions et théorèmes démontrés ici peuvent donc s'appliquer à ces espaces-là.

Par exemple supposons donnée l'équation distributionnelle:

$$(*) \qquad \Phi T = 0, \quad T \in D'(U)$$

où Φ est un opérateur continu de $D'(U)$. Définissons Ψ en posant $\Phi T + T = \Psi T$. Le corollaire de la proposition 1 fournit immédiatement la caractérisation suivante:

L'équation $(*)$ admet une solution si et seulement si il existe $T_0 \in D'(U)$ tel que la suite $\Psi^n T_0$ n'ait qu'un point d'accumulation.

Si dans un problème d'équation fonctionnelle ou distributionnelle, on applique une méthode d'approximations successives, le comportement de la suite obtenue même lorsqu'elle ne converge pas est intéressant à étudier, les énoncés généraux de cet article s'appliquent et fournissent des informations utiles.

Références

[1] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Ch. 1–4, Hermann, Paris 1971.

[2] M. Y. Cosnard, *Étude du chaos dans l'itération d'une transformation ponctuelle du premier ordre; application à des modèles de biologie*, C. R. Acad. Sci. Paris 286 (1978), pp. 639–642.

[3] — *On the behavior of successive approximations*, SIAM J. Numer. Anal. 16 (1979), pp. 300–310.

[4] J.-P. Delahaye, *Quelques problèmes posés par les suites de points non convergentes et algorithmes pour traiter de telles suites*, Thèse, Lille 1979.

[5] — *A counterexample concerning iteratively generated sequences*, J. Math. Anal. and Applic. 75 (1980), pp. 236–241.

[6] — *Fonctions admettant des cycles d'ordre n'importe quelle puissance de 2 et aucun autre cycle*, C. R. Acad. Sci. Paris 291 (1980), pp. 323–325.

[7] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82 (1975), pp. 985–992.

[8] F. T. Metcalf and T. D. Rogers, *The cluster set of sequences of successive approximations*, J. Math. Anal. and Applic. 31 (1970), pp. 206–212.

[9] G. G. L. Meyer, *Asymptotic properties of sequences iteratively generated by point-to-set maps*, Math. Programming Study 10 (1979), pp. 115–127.

[10] — and R. C. Raup, *On the structure of cluster point sets of iteratively generated sequences*, J. of Opt. Th. Appl. 28 (1979), pp. 353–362.

[11] A. N. Sharkovsky, *Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrain. Mat. Z. 16 (1) (1964), pp. 61–71.

[12] — *Attracting and attracted sets*, Soviet Math. 6 (1965), pp. 268–270.

[13] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris 1966.

[14] Vo-Khac Khoan, *Distribution, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, Vuibert, Paris 1972.

Accepté par la Rédaction le 2. 6. 1981