STUDIA MATHEMATICA, T. LXXVIII. (1984)

Propriété de Nikodym et propriété de Grothendieck

par

MICHEL TALAGRAND (Paris)

Abstract. Under continuum hypothesis, we construct a (non σ-complete) Boolean algebra $\mathscr{A}$ such that if K is the compact associated to $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}(K)$ is a Grothendieck space but there is a sequence μ_n of measures on K with $\|\mu_n\| \to \infty$, $\mu_n(A) \to 0$, for each clopen A. In other words, $\mathscr{A}$ lacks the Nikodym property.

Dans un travail récent, W. Schachermayer étend l'étude de quelques propriétés classiques des σ-algèbres au cadre des algèbres de Boole non nécessairement σ-complètes.

Par mesure sur une algèbre de Boole, on entendra toujours „mesure bornée finiement additive". On considèrera ici les propriétés de Nikodym (N) et de Grothendieck (G):

(N) Une famille M de mesures sur $\mathscr{A}$ telle que pour tout $A \in \mathscr{A}$ l'ensemble $\{\mu(A);\ \mu \in M\}$ est borné, est uniformément bornée.

(G) L'espace de Banach $B(\mathscr{A})$ des fonctions bornées limites uniformes de fonctions étagées σ-mesurables est un espace de Grothendieck, c'est-à-dire qu'une suite μ_n de $B'(\mathscr{A})$ qui converge pour $\sigma(B'(\mathscr{A}), B(\mathscr{A}))$ converge faiblement.

Le travail de W. Schachermayer ne reponds pas à la question de savoir si (G) $\Rightarrow$ (N). La raison en est sans doute qu'il n'existe peut être pas parmi les objets usuels des mathématiques d'exemple où l'on ait (G) mais pas (N). Le but de ce travail est de montrer que l'hypothèse du continu (HC) permet la construction d'une telle pathologie.

THÉORÈME (HC). *Il existe une algèbre $\mathscr{A}$ satisfaisant* (G) *et non* (N).

En d'autre termes, il existe un compact totalement discontinu K tel que $\mathscr{C}(K)$ soit un espace de Grothendieck et que sur K existe une suite (μ_n) de mesures de Radon telle que $\|\mu_n\| \to \infty$ et $\mu_n(A) \to 0$ pour tout ouvert-fermé A de K. (Bien sûr il existe des fonctions continues f sur K telles que $\mu_n(f) \not\to 0$!.)

On désigne par L l'ensemble $\{-1, 1\}^N$, par dt la mesure canonique de L, par δ_n la fonction coordonnée de rang n sur L, par $\mathscr{A}_n$ la tribu engendrée par les $(\delta_i)_{i\leqslant n}$, et par $\mathscr{B}(L)$ la tribu borélienne de L. La mesure d'un ensemble $A\in\mathscr{B}(L)$ sera notée $|A|$. Pour $A, B\in\mathscr{B}(L)$, on pose

$$\varphi_m(A)=\Big|\int_A\delta_m(t)\,dt\Big|,\qquad \psi_m(A,B)=\Big|\int_A\delta_m(t)\,dt-\int_B\delta_m(t)\,dt\Big|.$$

On désigne par Ω le premier ordinal non dénombrable et par $\alpha\to(\alpha_1,\alpha_2)$ une bijection de Ω sur Ω^2 telle que $\alpha_1\leqslant\alpha\,\forall\alpha<\Omega$.

Soit $(\mathscr{B}_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ une suite croissante de sous-algèbres dénombrables de $\mathscr{B}(L)$. Pour chaque $\alpha<\Omega$, soit $(\nu(\alpha,\beta))_{\beta<\Omega}$ une énumération des suites $\nu(\alpha,\beta)=(\nu(\alpha,\beta,n))_n$ de mesures sur $\mathscr{B}_\alpha$ telles que $\|\nu(\alpha,\beta,n)\|=1$ et qu'il existe une suite disjointe $(H(\alpha,\beta,n))_n$ de $\mathscr{B}_\alpha$ avec $|\nu(\alpha,\beta,n)|(H(\alpha,\beta,n))\geqslant 0{,}95$.

Nous allons effectuer la construction des $\mathscr{B}_\alpha$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout α:

(1) Pour toute famille finie $A_1,\ldots,A_p$ de $\mathscr{B}_\alpha$ et tout $\varepsilon>0$, il existe n de sorte que pour tout atome U de $\mathscr{A}_n$ on ait pour tout $i\leqslant p$, soit $|A_i\cap U|\leqslant\varepsilon|U|/m$, soit $|(L\backslash A_i)\cap U|\leqslant\varepsilon|U|/m$ et que pour $i\leqslant p$ et $m>n$ on ait $\varphi_m(A_i\cap U)\leqslant\varepsilon|U|/m$.

(2) Il existe $B\in\mathscr{B}_{\alpha+1}$, une suite (n_p) de sorte que:

$$\forall p,\qquad B\cap H(\alpha_1,\alpha_2,n_p)\in\mathscr{B}_{\alpha_1}$$

et que

$$p \text{ pair}\Rightarrow\big|\nu(\alpha_1,\alpha_2,n)\big(B\cap H(\alpha_1,\alpha_2,n_p)\big)\big|\geqslant 0{,}3,$$
$$p \text{ impair}\Rightarrow\big|\nu(\alpha_1,\alpha_2,n)\big(B\cap H(\alpha_1,\alpha_2,n_p)\big)\big|\leqslant 0{,}1.$$

Le role de la condition (1) est assez technique; elle sert à garder le contrôle de la situation. Elle signifie en gros que les éléments de $\mathscr{B}_\alpha$ peuvent s'approcher de façon très uniforme par des éléments des $\mathscr{A}_n$. Pour expliquer celui de la condition (2) montrons comment cette construction permet de prouver le théorème. On pose $\mathscr{A}=\bigcup_{\alpha<\Omega}\mathscr{B}_\alpha$. Soit $A\in\mathscr{A}$. Il existe α avec $A\in\mathscr{B}_\alpha<\Omega$. La condition (1) montre que pour tout ε, il existe n avec

$$\varphi_m(A\cap U)\leqslant\varepsilon|U|/m$$

pour $m>n$, U atome de $\mathscr{A}_n$. On a donc

$$\varphi_m(A)\leqslant\varepsilon/m$$

pour $m\geqslant n$. Ceci montre que si on pose

$$\lambda_m(A)=m\int_A\delta_m(t)\,dt$$

on a $\|\lambda_m\|=m\to\infty$ et $\lambda_m(A)\to 0$ pour tout $A\in\mathscr{A}$, et ainsi que $\mathscr{A}$ ne vérifie par (N).

Pour prouver que $B(\mathscr{A})$ vérifie la propriété de Grothendieck, il suffit de montrer, comme cela est connu (voir [3] pour les détails) que si (ν_n) est une suite de mesures sur $\mathscr{A}$, de sorte que $\|\nu_n\|=1$, et qu'il existe des ensembles (H_n) disjoints de $\mathscr{A}$, avec $|\nu_n|(H_n)\geqslant 0{,}95$, alors il existe $B\in\mathscr{A}$ tel que la suite $\nu_n(B)$ ne converge pas. Il existe $\gamma<\Omega$ tel que $H_n\in\mathscr{A}_\gamma$ pour chaque n. Si on désigne par $\bar\nu_n$ la restriction de ν_n à $\mathscr{A}_\gamma$, il existe $\beta<\Omega$ tel que $\bar\nu_n=\nu(\gamma,\beta,n)$, $H_n=H(\gamma,\beta,n)$. Soit α tel que $(\alpha_1,\alpha_2)=(\gamma,\beta)$. Avec les notations de la condition (2), on a par des calculs élémentaires pour tout k, $|\nu_{n_{2k}}(B)|\geqslant 0{,}3$; $|\nu_{n_{2k+1}}(B)|\leqslant 0{,}1$ ce qui suffit.

Procédons à la construction. On choisi pour $\mathscr{B}_0$ la tribu des ouverts-fermés de L. Si $(\mathscr{B}_\gamma)$ est construit pour $\gamma<\beta$, limite, il suffit de poser $\mathscr{B}_\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}\mathscr{B}_\gamma$.

Le point délicat est lorsque $\beta=\alpha+1$, que nous traitons maintenant. Pour simplifier, on va poser $\mathscr{B}=\mathscr{B}_\alpha$, $\mathscr{B}'=\mathscr{B}_{\alpha_1}$, $\nu_n=\nu(\alpha_1,\alpha_2,n)$, $H_n=H(\alpha_1,\alpha_2,n)$.

Par extraction d'une sous-suite, on peut supposer que pour $A\in\mathscr{B}'$, $|\nu_n|(A)\to\mathscr{C}(A)$, où $\mathscr{C}$ est une certaine mesure sur $\mathscr{B}'$. (Rappelons que ν_n n'est définie que sur $\mathscr{B}'$.)

P r e m i è r e r é d u c t i o n. On peut écrire $\mathscr{B}=\bigcup\mathscr{B}_p$, où $\mathscr{B}_p$ est finie et où la réunion est croissante. On va montrer qu'il suffit de construire des suites (n_p) et (m_p) d'entiers, des ensembles disjoints $N_p\in\mathscr{B}'$, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées, où l'on pose $B_p=\bigcup_{q\leqslant p}(N_q\backslash\bigcup_{2q<r\leqslant 2p}H_{n_r})$:

(3) Pour $A\in\mathscr{B}_q$ $(q\leqslant p)$, U atome de $\mathscr{A}_{m_q}$, et A' l'un des ensembles $A\cap B_p$, $A\backslash B_p$, on a:

soit $|A'\cap U|\leqslant 2^{-q-m_q}(1-2^{-p})/m_q$ soit $|U\backslash A'|\leqslant 2^{-q-m_q}(1-2^{-p})/m_q$ ainsi que

$$m>m_q\Rightarrow\varphi_m(A'\cap U)\leqslant 2^{-q-m_q}(1-2^{-p})/m,$$

(4) (a) On a $N_p\cap H_{n_q}=\emptyset$ si $q<2p$;

(b) On a $|\nu_{n_{2p}}(N_p\cap H_{n_{2p}})|\geqslant 0{,}4$ pour tout p;

(c) On a $|\nu_{n_{2p}}|(B_{p-1})<0{,}1$ pour tout p.

En effet, si on pose

$$B=\bigcup_q(N_q\backslash\bigcup_{2q<r}H_{n_r})$$

et on prends pour $\mathscr{B}_{\alpha+1}$ l'algèbre engendrée par $\mathscr{B}$ et B, la condition (3), en faisant tendre p vers l'infini et en fixant q, implique que $\mathscr{B}_{\alpha+1}$ vérifie la condition (1).

Deuxième réduction. On va par induction sur p construire les m_q, N_q pour $q \leqslant p$ et les n_q pour $q \leqslant 2p$. Pour permettre à la construction de se poursuivre on impose la condition supplémentaire suivante:

(5) $$\mathcal{O}(B_p) < 0,1.$$

Supposons la construction effectuée au rang p (Le cas $p = 1$ est analogue au cas général.) D'après la condition (1), il existe un entier m_{p+1} qui possède la propriété suivante:

(6) Si $A \in \mathscr{B}_{p+1}$, U est un atome de $\mathscr{A}_{m_{p+1}}$, et A' est l'un des ensembles $A\cap B_p$, $V\setminus B_p$, on a:

soit $|A'\cap U| \leqslant 2^{-p-2}|U|/m_{p+1}$, soit $|U\setminus A'| \leqslant 2^{-p-2}|U|/m_{p+1}$

et

$$m > m_{p+1} \Rightarrow \varphi_m(A'\cap U) \leqslant 2^{-p-2}|U|/m.$$

Désignons par $\mathscr{C}$ la famille des atomes de la tribu engendrée par $\mathscr{B}_{p+1}$, B_p, $\mathscr{A}_{m_{p+1}}$. Soit

$$\varepsilon = 10^{-2}\inf\{|C|;\ C\in\mathscr{C}, |C| > 0\}.$$

La condition (1) montre qu'il existe t tel que pour $C\in\mathscr{C}$, U atome de $\mathscr{A}_t$ on a soit $|C\cap U| < \varepsilon|U|$, soit $|U\setminus C| < \varepsilon|U|$. Ainsi à chaque $C\in\mathscr{C}$ avec $|C| > 0$ on peut associer un atome U_C de $\mathscr{A}_t$ tel que $|U_C\cap C| > 0,99\,|U_C|$.

Posons $\xi = 0,1 - \mathcal{O}(B_p)$. On peut trouver deux mesures $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ sur $\mathscr{B}'$ telles que $\mathcal{O}_1 \ll dt$, $\mathcal{O}_2 \perp dt$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$. Soit $X\in\mathscr{B}'$ tel que $|X| < 2^{-t-10}$ et $\mathcal{O}_2(L\setminus X) < \xi/3$. Soit η_1 tel que $A\in\mathscr{B}'$, $|A| < \eta_1 \Rightarrow \mathcal{O}_1(A) \leqslant \xi/3$.

Soit $\eta_2 \leqslant \eta_1/10$ un nombre qui sera choisi ultérieurement. Soient $n_{2p} < n' < n''$ deux entiers tels que $|H_{n'}| \leqslant \eta_2$, $|H_{n''}| \leqslant \eta_2$, et $|\nu_{n''}|(B_p) < 0,1$. On a $|\nu_{n''}|(H_{n''}\setminus B_p) \geqslant 0,85$, et donc il existe $Y\in\mathscr{B}'$, $Y\subset H_{n''}\setminus B_p$ avec $|\nu_{n''}|(Y) \geqslant 0,4$.

On va utiliser le fait suivant, qui sera prouvé dans la troisième réduction: si η_2 est assez petit, il existe un ensemble $N\in\mathscr{B}'$, vérifiant les conditions suivantes, où l'on pose $a = \operatorname{card}\mathscr{C}$:

(7) $$N\cap(B_p\cup X\cup H_{n'}\cup H_{n''}) = \emptyset,$$

(8) $$|N| \leqslant \operatorname{Inf}(\eta_1/2,\ t^{-1}2^{-m_{p+1}-2p-2}),$$

(9) $$\forall C\in\mathscr{C},\quad \forall m > t,\quad \psi_m((N\cup Y)\cap C;\ B_p\cap(H_{n'}\cup H_{n''})\cap C) \leqslant (a\,m)^{-1}2^{-m_{p+1}-2p-2}.$$

On pose alors $N_{p+1} = N\cup Y$, $n_{2p+1} = n'$, $n_{2p+2} = n''$. On a $N_{p+1}\in\mathscr{B}'$. D'après (8), on a $|N_{p+1}| < \eta_1$, d'où $\mathcal{O}_1(N_{p+1}) \leqslant \xi/3$. Puisque $N\cap X = \emptyset$, on a $\mathcal{O}_2(N_{p+1}) \leqslant \xi/3 + \mathcal{O}_2(Y) = \xi/3$ puisque $\mathcal{O}_2(H_q) = 0$ pour tout q. Ainsi $\mathcal{O}(N_{p+1}) < \xi$, et (5) est satisfaite au rang $p+1$. De plus, la condition (4) est satisfaite par construction. Reste à vérifier (3). On va se borner au cas ou $A' = A\cap B_{p+1}$, $A\in\mathscr{B}_q$, $q \leqslant p+1$, le cas $A' = A\setminus B_{p+1}$ étant analogue. On a

$$|(A\cap B_{p+1})\triangle(A\cap B_p)| \leqslant |B_p\triangle B_{p+1}| \leqslant |N| + |Y| + |H_{n'}| + |H_{n''}| \leqslant |N| + 3\eta_2.$$

Puisque l'on peut supposer $3\eta_2 \leqslant t^{-1}2^{-m_{p+1}-2p-2}$ la première partie de (3) ainsi que la seconde pour les valeurs de $m \leqslant t$, résultent de (8). Si $t > m$, on a

$$\varphi_m(A\cap B_{p+1}\cap U) \leqslant \varphi_m(A\cap B_p\cap U) + \psi_m((N\cup Y)\cap A\cup U;\ B_p\cap(H_{n'}\cup H_{n''})\cap A\cup U)$$

Mais puisque $(A\cap U)$ est réunion d'au plus a atomes de $\mathscr{C}$, le résultat découle de (9).

Troisième réduction. Il nous suffit donc de prouver le résultat suivant: Soient $\mathscr{C}'$ une famille d'ensembles disjoints de $\mathscr{B}$, et $t > 0$ tels que pour $C\in\mathscr{C}'$ il existe un atome U_C de $\mathscr{A}_t$ avec $|U\setminus C| \geqslant 0,99\,|U|$. Soient $X\in\mathscr{B}'$ tel que $|X| \leqslant 2^{-t-10}$ et soit $\eta > 0$. Alors il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout W, Y, $H\in\mathscr{B}'$, $W, Y\subset H$, $|H| < \eta_2$, il existe un ensemble $A\in\mathscr{B}'$ possèdant les propriétés suivantes:

(10) $$A\cap(X\cup H) = \emptyset,$$

(11) $$|A| < \eta,$$

(12) $$\forall C\in\mathscr{C}',\quad \forall m > t,\quad \psi_m((A\cup Y)\cap C;\ W\cap C) \leqslant \eta/m.$$

En effet, dans l'étape précédente, on a utilisé ce résultat avec

$$\mathscr{C}' = \{C\in\mathscr{C};\ C\cap B_p = \emptyset\};\quad H = H_{n'}\cup H_{n''};\quad W = B_p\cap H,$$

$$\eta = \operatorname{Inf}\{\eta_1/2,\ t^{-1}2^{-2p-m_{p+1}-2},\ a^{-1}2^{-2p-m_{p+1}-2}\}$$

on a $\bigcup\mathscr{C}' = L\setminus B_p$, et il suffit alors de prendre $N = A\setminus B_p$.

Admettons un instant le résultat combinatoire suivant:

Lemme. *Soit $0 < t$, $0 < \eta < 2^{-t-19}$. Alors il existe $n_0 \geqslant t$, tel que pour $n \geqslant n_0$, tous ensembles $R, Z\in\mathscr{A}_n$ avec $|R|$, $|Z| \leqslant 2^{-8}\eta^2$, tout ensemble $Q\in\mathscr{A}_n$, tel qu'il existe un atome G de $\mathscr{A}_t$, avec $|Q\cap G| \geqslant 0,95\cdot|G|$, on puisse trouver une partie $M\subset Q$ telle que $M\in\mathscr{A}_n$, $|M| \leqslant \eta$ et*

$$m > t \Rightarrow \psi_m(M\cup(Z\cap Q);\ R\cap Q) \leqslant \eta/m.$$

On peut supposer $\eta < 2^{-t-10}$. Soit $a = \operatorname{card}\mathscr{C}$. Soit $\eta_2 = a^{-2}2^{-10}\eta^2$. D'après la condition (1) il existe un entier $n > n_0$ tel que pour tout élément A de l'algèbre $\mathscr{D}$ engendrée par $\mathscr{C}'$, $\mathscr{A}_t$, X, W, Y, H, et tout atome V de $\mathscr{A}_n$, on ait

(13) $$\text{Soit } |A\cap V| \leqslant \eta|V|/3n,\quad \text{soit } |V\setminus A| \leqslant \eta|V|/3n$$

et

(14) $$m > n \Rightarrow \varphi_m(A\cap V) < \eta|V|/2m.$$

Pour $A \in \mathscr{D}$, soit $\tilde{A}$ la réunion des atomes V de $\mathscr{A}_n$ tels que $|V \backslash A| \leqslant \eta |V|/3n$. L'application $A \to \tilde{A}$ est un homorphisme d'algèbre de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{A}_n$. Posons $Z = \tilde{Y}$; $R = \tilde{V}$. Pour $C \in \mathscr{C}$, soit $Q_C = \tilde{C} \backslash (\tilde{X} \cup \tilde{H})$. On a sans peine $|Q_C \cap U_C| \geqslant 0{,}95 |U_C|$. Le lemme montre qu'il existe un ensemble

$$M_C \subset Q_C, \quad M_C \in \mathscr{A}_n, \quad |M_C| \leqslant \eta/2a,$$

et tel que

$$m > t \Rightarrow \psi_m(M_C \cup (Z \cap Q_C);\ R \cap Q_C) \leqslant \eta/3ma \leqslant \eta/3m. \tag{15}$$

Posons $A = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} M_C \backslash (X \cup H)$. Alors A vérifie (10) et (11). Pour $m > n$, et V atome $\mathscr{A}_n$, on a d'après (13):

$$\varphi_m((A \cup Y) \cap C \cap V) \leqslant \eta |V|/3m; \quad \varphi_m(W \cap C \cap V) \leqslant \eta |V|/3m$$

puisque $(A \cup Y) \cap C$, $W \cap C \in \mathscr{D}$. Ainsi (12) est vérifiée si $m > t$.

Pour $t \leqslant m < n$, on a

$$\psi_m((A \cup Y) \cap C;\ W \cap C) \leqslant \psi_m(((A \cup Y) \cap C)^\sim;\ (W \cap C)^\sim) + \\ + |((A \cup Y) \cap C) \triangle ((A \cup Y) \cap C)^\sim| + |(W \cap C) \triangle (W \cap C)^\sim|$$

or

$$((A \cup Y) \cap C)^c = M_C \cup (Z \cap Q_C),$$
$$(W \cap C)^\sim = R \cap Q_C.$$

Il résulte de (13) et (15) que $\varphi_m((A \cup Y) \cap C;\ W \cap C) \leqslant \eta/m$, ce qui termine cette étape.

Conclusion: Preuve du lemme. On peut supposer Z, $R \subset Q$. On pose $a_m = \int_Z \delta_m(t)\,dt - \int_R \delta_m(t)\,dt$, $b_m(M) = \int_M \delta_m(t)\,dt$ pour tout m et tout $M \in \mathscr{A}_n$.

Soit $Q' = Q \backslash (Z \cup R)$. On a $|Q \cap G| \geqslant 0{,}9 |G|$.

Soit $\eta > \eta' > \eta/2$, qui soit de la forme $k 2^{-n}$.

Soit $M \subset Q$, $M \in \mathscr{A}_n$, $|M| = \eta'$ choisi de sorte que

$$S(M) = \sum_{t < m \leqslant n} (b_m(M) + a_m)^2$$

soit minimal. Soient U, V deux atomes de $\mathscr{A}_n$ avec $U \subset M$, $V \subset Q \backslash M$. Soit $M' = (M \backslash U) \cup V$. Pour $m \leqslant n$, soit x_m tel que $t \in U \Rightarrow \delta_m(t) = x_m$ (resp. y_m tel que $t \in V \Rightarrow \delta_m(t) = y_m$). On a $b_m(M') = b_m + 2^{-n}(y_m - x_m)$, où $b_m = b_m(M)$. Puisque $S(M') \geqslant S(M)$ un calcul direct donne

$$\sum_{t < m \leqslant n} (y_m - x_m)(b_m + a_m) + 2^{-n-1} \sum_{m \leqslant n} (y_m - x_m)^2 \geqslant 0.$$

En particulier

$$\sum_{t < m \leqslant n} (y_m - x_m)(b_m + a_m) + n \cdot 2^{-n+1} \geqslant 0.$$

On a $|(Q' \backslash M) \cap T(Q' \backslash M)| > 3|G|/4$, où T désigne la transformation de L qui change de signe les coordonnées d'indice $t < i \leqslant n$.

On déduit de l'inégalité de Paley–Zygmund [1], qu'il existe $V \subset (Q' \backslash M) \cap T(Q' \backslash M)$ tel que

$$\Big| \sum_{p < m \leqslant n} y_m (b_m + a_m) \Big| \geqslant (S(M))^{1/2}/4.$$

En remplaçant au besoin V par $T(V)$ on peut supposer

$$\sum_{t < m \leqslant n} y_m (b_m + a_m) \leqslant -(S(M))^{1/2}/4.$$

On a donc, quel que soit $U \subset M$:

$$\sum_{t < m \leqslant n} x_m (b_m + a_m) \leqslant n \cdot 2^{-n+1} - (S(M))^{1/2}/4.$$

Puisque $x_m = 2^n \int_U \delta_m(t)\,dt$, on en déduit par sommation sur $U \subset M$

$$\sum_{p < m \leqslant n} b_m (b_m + a_m) \leqslant \eta' [n \cdot 2^{-n+1} - (S(M))^{1/2}/4].$$

D'autre part on a

$$\sum_{t < m \leqslant n} a_m (b_m + a_m) \leqslant \Big(\sum_{t < m \leqslant n} a_m^2 \Big)^{1/2} (S(M))^{1/2}$$

et $\big(\sum_{t < m \leqslant n} a_m^2 \big)^{1/2} \leqslant |Z \cup R|^{1/2} \leqslant \eta/8 \leqslant \eta'/4$, la famille δ_m étant orthonormale dans $L^2(dt)$. On a ainsi

$$S(M) \leqslant \sum_{p < m \leqslant n} b_m (b_m + a_m) + \sum_{p < m \leqslant n} a_m (b_m + a_m) \leqslant \eta n \cdot 2^{-n+1}.$$

Si n_0 est tel que $(\eta n \cdot 2^{-n+1})^{1/2} \leqslant \eta/n$ pour $n \geqslant n_0$, on a alors $|b_m + a_m| \leqslant \eta/n \leqslant \eta/m$ pour $p < m \leqslant n$ si $n \geqslant n_0$, ce qui prouve le lemme, et termine la preuve.

Bibliographie

[1] J. P. Kahane, *Random Series of functions*, D. C. Heath et Cie.

[2] W. Schachermayer, *On some Classical Measure-Theoretic Theorems for non-sigma-complete Boolean Algebras* (à paraître).

[3] M. Talagrand, *Un nouveau $\mathscr{C}(K)$ qui possède la propriété de Grothendieck*, Israël J. of Math. 37 (1980), 181–191.

EQUIPE D'ANALYSE
EQUIPE DE RECHERCHE
ASSOCIÉE AU C.N.R.S. N° 294
UNIVERSITE PARIS VI, PARIS

Received June 29, 1982 (1776)