STUDIA MATHEMATICA, T. LXXX. (1984)

Le volume des idéaux d'opérateurs classiques

par

JEAN SAINT RAYMOND (Paris)

Abstract. For $1 \leqslant p \leqslant \infty$, let B_n^p be the set of operators t on l_n^2 such that the sequence of the n eigenvalues of $|t|$ belongs to the unit ball of l_n^p. We explicitly compute the volume of B_n^p, and give asymptotic evaluation of this volume when n goes to infinity.

On considère ici, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, la boule unité B_n^p (resp. $\tilde{B}_n^p$) de l'idéal d'opérateurs réel (resp. complexe) sur l_n^2 définie par $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p \leqslant 1$, où les λ_j sont les n valeurs propres de $|t| = (t^* t)^{1/2}$.

On donne une formule explicite pour le volume de B_n^p et $\tilde{B}_n^p$ en fonction de n et p, ainsi que des évaluations asymptotiques de ces quantités quand n tend vers l'infini.

On identifiera toujours un opérateur sur l_n^2 avec sa matrice dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de l_n^2, et l'espace de ces matrices avec $\boldsymbol{R}^{n^2}$ ou $\boldsymbol{C}^{n^2}$, muni du produit scalaire euclidien $(t, s) \mapsto \operatorname{Re}(\operatorname{Trace}(t^* s))$. La norme hilbertienne sur $\boldsymbol{C}^{n^2}$ est alors la norme de Hilbert–Schmidt sur $\mathscr{L}(l_n^2)$. On obtient ainsi que le volume de B_n^2 est v_{n^2} et celui de $\tilde{B}_n^2$ est v_{2n^2} si on note $v_m = \dfrac{\pi^{m/2}}{\Gamma(1+m/2)}$ le volume de la boule unité euclidienne de $\boldsymbol{R}^m$.

THÉORÈME 1. *Les volumes de B_n^p et $\tilde{B}_n^p$ sont donnés par*

$$\operatorname{vol}(B_n^p) = 2^{-n}\Big(\prod_{k=1}^{n} k v_k\Big)^2 \cdot I_n^p,$$

$$\operatorname{vol}(\tilde{B}_n^p) = (2\pi)^{-n}\Big(\prod_{k=1}^{n} 2k v_{2k}\Big)^2 \cdot \tilde{I}_n^p,$$

$$I_n^p = \int_{\Omega_p} \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (\sigma_k^2 - \sigma_j^2)\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_n,$$

$$\tilde{I}_n^p = \int_{\Omega_p} \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (\sigma_k^2 - \sigma_j^2)^2\, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_n,$$

où $\quad \Omega_p = \Big\{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \,\Big|\, 0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_n \text{ et } \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^p < 1\Big\}.$

L'ensemble des opérateurs singuliers étant négligeable, presque tout opérateur t se met de façon unique sous la forme

$$t = uh$$

où $h = (t^* t)^{1/2}$ est hermitien positif et $u \in O(n)$ (resp. $U(n)$) dans le cas réel (resp. complexe). Il existe alors $v \in O(n)$ (resp. $U(n)$) tel que

$$h = v^* dv$$

où d est diagonal de valeurs propres positives $\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \ldots \leqslant \sigma_n$. Pour presque tout opérateur t, les σ_j sont deux à deux distinctes, et v est unique à la multiplication près de ses lignes par des scalaires de module 1.

Notons enfin que $t \in B_n^p$ (resp. $\tilde{B}_n^p$) si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^p \leqslant 1$.

Soit Φ l'application de $O(n) \times O(n) \times \Omega_p$ dans $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ (resp. Ψ: $U(n) \times \times U(n) \times \Omega_p \to \mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n)$) définie par

$$\Phi(u, v, \sigma) = u \circ \sigma \circ v, \qquad \Psi(u, v, \sigma) = u \circ \sigma \circ v$$

en identifiant $\sigma \in \Omega_p \subset \boldsymbol{R}^n$ avec l'opérateur diagonal de valeurs propres $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. On a

$$C_n^p = \Phi(O(n) \times O(n) \times \Omega_p) \subset B_n^p \quad \text{et} \quad \operatorname{vol}(B_n^p \setminus C_n^p) = 0,$$

$$\tilde{C}_n^p = \Psi(U(n) \times U(n) \times \Omega_p) \subset \tilde{B}_n^p \quad \text{et} \quad \operatorname{vol}(\tilde{B}_n^p \setminus \tilde{C}_n^p) = 0.$$

On munit $O(n)$ (resp. $U(n)$) de la structure riemannienne induite par son plongement dans l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^{n^2}$ (resp. $\boldsymbol{C}^{n^2} = \boldsymbol{R}^{2n^2}$) et de la mesure associée μ. Puisque, pour $u \in O(n)$ (resp. $U(n)$), les applications $t \mapsto tu$ et $t \mapsto ut$ sont isométriques pour la norme de Hilbert–Schmidt, μ est une mesure de Haar. Si on note $J(u, v, \sigma)$ (resp. $\tilde{J}(u, v, \sigma)$) le jacobien de Φ (resp. Ψ) en (u, v, σ), c'est-à-dire le déterminant de l'application $\boldsymbol{R}$-linéaire tangente à Φ (resp. Ψ) restreinte à la co-image $(\operatorname{Ker} T\Phi)^\perp$ (resp. $(\operatorname{Ker} T\Psi)^\perp$), on aura, puisque les applications $w \mapsto u \cdot w$ et $w \mapsto w \cdot v$ induisent des isométries de l'espace tangent à $O(n)$ (resp. $U(n)$) en 1 sur les espaces tangents à $O(n)$ (resp. $U(n)$) en u et v,

$$|J(u, v, \sigma)| = |J(1, 1, \sigma)|, \qquad |\tilde{J}(u, v, \sigma)| = |\tilde{J}(1, 1, \sigma)|,$$

qui sont constants sur les fibres $\Phi^{-1}(t)$ et $\Psi^{-1}(t)$. Donc

$$\int_{O(n) \times O(n) \times \Omega_p} |J(u, v, \sigma)|\, d\mu(u)\, d\mu(v)\, d\sigma = \int_{C_n^p} \operatorname{vol}(\Phi^{-1}(t))\, dt,$$

$$\int_{U(n) \times U(n) \times \Omega_p} |\tilde{J}(u, v, \sigma)|\, d\mu(u)\, d\mu(v)\, d\sigma = \int_{\tilde{C}_n^p} \operatorname{vol}(\Psi^{-1}(t))\, dt$$

où $\operatorname{vol}\Phi^{-1}(t)$ et $\operatorname{vol}\Psi^{-1}(t)$ désignent les volumes riemanniens des fibres

$\Phi^{-1}(t)$ et $\Psi^{-1}(t)$. Dans le cas réel on a vu que pour presque tout t, $\Phi^{-1}(t)$ a 2^n points, d'où $\operatorname{vol}(\Phi^{-1}(t)) = 2^n$.

Dans le cas complexe, $\Psi^{-1}(t)$ est paramétré par

$$\varrho\colon\ \omega \in [0, 2\pi]^n \mapsto (u \cdot m_\omega \cdot v^*,\ v \cdot m_\omega^*,\ \sigma)$$

où m_ω est l'opérateur diagonal unitaire de valeurs propres $(e^{i\omega_1}, \ldots, e^{i\omega_n})$. Comme l'application linéaire T_ϱ tangente à ϱ multiplie les distances par $\sqrt{2}$, on obtient

$$\operatorname{vol}\Psi^{-1}(t) = (2\pi)^n \cdot (\sqrt{2})^n.$$

On en déduit

$$\operatorname{vol} B_n^p = \operatorname{vol} C_n^p = \frac{1}{2^n} \int_{\Omega_p} |J(1, 1, \sigma)|\, d\sigma \times (\operatorname{vol} O(n))^2,$$

$$\operatorname{vol} \tilde{B}_n^p = \operatorname{vol} \tilde{C}_n^p = \frac{1}{(2\pi\sqrt{2})^n} \int_{\Omega_p} |\tilde{J}(1, 1, \sigma)|\, d\sigma \times (\operatorname{vol} U(n))^2.$$

L'espace tangent V à $O(n)$ en 1 est le sous-espace de $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ formé des opérateurs antisymétriques dont une base orthonormée est

$$\varepsilon_{j,k} = \frac{e_j \otimes e_k - e_k \otimes e_j}{\sqrt{2}}, \qquad 1 \leqslant j < k \leqslant n$$

où (e_j) est la base canonique de l_n^2 et $e_j \otimes e_k$ identifié à l'opérateur

$$x \mapsto \langle x, e_k \rangle \cdot e_j.$$

L'application linéaire tangente à Φ en $(1, 1, \sigma)$ transforme le vecteur tangent $(a, b, x) \in V \times V \times \boldsymbol{R}^n$ en

$$a\sigma + \sigma b + x.$$

Notant alors $\varepsilon_{j,k}^1$ et $\varepsilon_{j,k}^2$ les vecteurs correspondant à $\varepsilon_{j,k}$ dans le premier et le second facteur V, on a

$$T\Phi \cdot \varepsilon_{j,k}^1 = \frac{\sigma_k e_j \otimes e_k - \sigma_j e_k \otimes e_j}{\sqrt{2}},$$

$$T\Phi \cdot \varepsilon_{j,k}^2 = \frac{\sigma_j e_j \otimes e_k - \sigma_k e_k \otimes e_j}{\sqrt{2}},$$

$$T\Phi \cdot e_l = e_l \otimes e_l.$$

Donc

$$(T\Phi \cdot \varepsilon_{j,k}^1) \wedge (T\Phi \cdot \varepsilon_{j,k}^2) = \frac{\sigma_k^2 - \sigma_j^2}{2} (e_j \otimes e_k) \wedge (e_k \otimes e_j)$$

et

$$\Big|\Big[\bigwedge_{1\leqslant j<k\leqslant n}(T\Phi\cdot\varepsilon_{j,k}^1)\wedge(T\Phi\cdot\varepsilon_{j,k}^2)\Big]\wedge\Big[\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant n}(T\Phi\cdot e_j)\Big]\Big|$$
$$=\Big[\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}|\sigma_k^2-\sigma_j^2|\Big]\times 2^{-n(n-1)/2}=|J(1,1,\sigma)|,$$

d'où

$$\operatorname{vol} B_n^p=2^{-n}\cdot 2^{-n(n-1)/2}(\operatorname{vol} O(n))^2\int_{\Omega_p}\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(\sigma_k^2-\sigma_j^2)\,d\sigma.$$

De même l'espace tangent $\tilde{V}$ à $SU(n)$ en 1 est le sous-espace de $\mathscr{L}(C^n)$ formé des opérateurs anti-hermitiens dont une base orthonormée est

$$\varepsilon_{j,k}=\frac{e_j\otimes e_k-e_k\otimes e_j}{\sqrt{2}},\qquad 1\leqslant j<k\leqslant n,$$
$$\eta_{j,k}=i\,\frac{e_j\otimes e_k+e_k\otimes e_j}{\sqrt{2}},\qquad 1\leqslant j<k\leqslant n,$$
$$\eta_j=ie_j\otimes e_j,\qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

L'application tangente à Ψ en $(1,1,\sigma)$ transforme $(a,b,x)\in\tilde{V}\times\tilde{V}\times\boldsymbol{R}^n$ en $a\sigma+\sigma b+x$. Il en résulte qu'une base orthonormée de la coimage de $T\Psi$ est formée de

$$\varepsilon_{j,k}^1;\ \varepsilon_{j,k}^2;\ \eta_{j,k}^1;\ \eta_{j,k}^2,\qquad 1\leqslant j<k\leqslant n,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j^1+\eta_j^2);\ e_j,\qquad 1\leqslant j\leqslant n,$$

et que

$$T\Psi\cdot\varepsilon_{j,k}^1=\frac{\sigma_k e_j\otimes e_k-\sigma_j e_k\otimes e_j}{\sqrt{2}},$$
$$T\Psi\cdot\varepsilon_{j,k}^2=\frac{\sigma_j e_j\otimes e_k-\sigma_k e_k\otimes e_j}{\sqrt{2}},$$
$$T\Psi\cdot\eta_{j,k}^1=\frac{\sigma_k\cdot ie_j\otimes e_k+\sigma_j\cdot ie_k\otimes e_j}{\sqrt{2}},$$
$$T\Psi\cdot\eta_{j,k}^2=\frac{\sigma_j ie_j\otimes e_k+\sigma_k ie_k\otimes e_j}{\sqrt{2}},$$
$$T\Psi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j^1+\eta_j^2)=\sigma_j\sqrt{2}\,ie_j\otimes e_j,$$
$$T\Psi\cdot e_j=e_j\otimes e_j.$$

Donc

$$|\tilde{J}(1,1,\sigma)|=\Big|\Big[\bigwedge_{1\leqslant j<k\leqslant n}(T\Psi\cdot\varepsilon_{j,k}^1)\wedge(T\Psi\cdot\varepsilon_{j,k}^2)\wedge(T\Psi\cdot\eta_{j,k}^1)\wedge(T\Psi\cdot\eta_{j,k}^2)\Big]\wedge$$
$$\wedge\Big[\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant n}(T\Psi\cdot e_j)\wedge\Big(T\Psi\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j^1+\eta_j^2)\Big)\Big)\Big]\Big|$$
$$=\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{(\sigma_k^2-\sigma_j^2)^2}{4}\times\prod_{j=1}^n\sigma_j\cdot\sqrt{2}$$
$$=2^{-n(n-1)}\cdot 2^{n/2}\prod_{j=1}^n\sigma_j\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(\sigma_k^2-\sigma_j^2)^2,$$

d'où

$$\operatorname{vol}\tilde{B}_n^p=(2\pi\sqrt{2})^{-n}\cdot 2^{-n(n-1)}\cdot 2^{n/2}\cdot[\operatorname{vol} U(n)]^2\int_{\Omega_p}\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(\sigma_k^2-\sigma_j^2)^2\prod_{j=1}^n\sigma_j\,d\sigma.$$

En considérant l'application $u\mapsto u(e_1)$ de $O(n)$ sur S^{n-1} (resp. $U(n)$ sur S^{2n-1}) dont la fibre est isométrique à $O(n-1)$ (resp. $U(n-1)$), on obtient comme plus haut, en examinant l'application tangente,

$$\operatorname{vol}(O(n))=2^{(n-1)/2}\operatorname{vol}(S^{n-1})\cdot\operatorname{vol}(O(n-1))$$

et puisque $O(1)=\{+1,-1\}$,

$$\operatorname{vol}(O(n))=2^{n(n-1)/4}\times\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{vol}(S^k)\times 2$$
$$=2^{1+n(n-1)/4}\times\prod_{k=2}^n kv_k=2^{n(n-1)/4}\prod_{k=1}^n kv_k,$$

donc

$$\operatorname{vol}(B_n^p)=2^{-n}\cdot\Big(\prod_{k=1}^n kv_k\Big)^2\int_{\Omega_p}\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(\sigma_k^2-\sigma_j^2)\,d\sigma_1\ldots d\sigma_n,$$

qui est la formule cherchée. De même,

$$\operatorname{vol}(U(n))=2^{n-1}\cdot\operatorname{vol}(S^{2n-1})\cdot\operatorname{vol}(U(n-1)),$$

et puisque $U(1)=\{e^{i\theta}|\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,

$$\operatorname{vol}(U(n))=2\pi\cdot 2^{n(n-1)/2}\cdot\prod_{k=2}^n\operatorname{vol}(S^{2k-1})=2^{n(n-1)/2}\cdot\prod_{k=1}^n(2kv_{2k}),$$

donc

$$\operatorname{vol}(\tilde{B}_n^p)=(2\pi)^{-n}\cdot\Big(\prod_{k=1}^n 2kv_{2k}\Big)^2\cdot\int_{\Omega_p}\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(\sigma_k^2-\sigma_j^2)^2\prod_{j=1}^n\sigma_j\,d\sigma,$$

ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 2. *Si on pose*

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (kv_k), \qquad \tilde{P}_n = \prod_{k=1}^{n} (2kv_{2k}),$$

on a, pour n tendant vers l'infini

$$\log P_n^{1/n^2} = \tfrac{1}{4} \log (2\pi e^{3/2}) - (\log n)/4 + O((\log n)/n),$$
$$\log \tilde{P}_n^{1/2n^2} = \tfrac{1}{4} \log (2\pi e^{3/2}) - (\log 2n)/4 + O((\log n)/n).$$

Ceci se déduit aisément de $v_k = \dfrac{\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}$ et de la formule de Stirling.

THÉORÈME 3. *La limite, quand n tend vers l'infini, de* $(I_n^{\infty})^{1/n^2}$ *vaut* 1/2, *ainsi que celle de* $(\tilde{I}_n^{\infty})^{1/2n^2}$.

Ces deux résultats se prouvent de manière similaire. Nous laissons au lecteur la démonstration pour $(\tilde{I}_n^{\infty})^{1/2n^2}$.

Soit δ_k le diamètre d'ordre k de $[0, 1]$, défini par

$$\delta_k = \sup_{\tau_1,\ldots,\tau_k \in [0,1]} \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |\tau_j - \tau_i| \Big)^{2/k(k-1)}.$$

On sait ([2], p. 268) que δ_k tend en décroissant vers le diamètre transfini de $[0, 1]$ qui vaut 1/4. Il en résulte que

$$I_n^{\infty} \leqslant \int_{\Omega_\infty} (\delta_n)^{n(n-1)/2} \, d\sigma_1 \ldots d\sigma_n = (\delta_n)^{n(n-1)/2} \operatorname{vol}(\Omega_\infty) = (\delta_n)^{n(n-1)/2} \times (1/n!),$$

donc

$$\limsup_{n\to\infty} (I_n)^{1/n^2} \leqslant \limsup_{n\to\infty} (\delta_n)^{1/2} = \sqrt{1/4} = 1/2.$$

On sait aussi que δ_k est approché par la suite

$$\tau_j = \sin^2 \frac{(j-1)\pi}{2(k-1)}.$$

En effet

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \left(\sin^2 \frac{(j-1)\pi}{2(k-1)} - \sin^2 \frac{(i-1)\pi}{2(k-1)} \right) = \left(\frac{2(k-1)}{4^{k-1}} \right)^{k/2}.$$

Alors si on pose

$$\varphi(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\sigma_j^2 - \sigma_i^2),$$

$$\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*) \quad \text{où} \quad \sigma_j^* = \sin \frac{(j-1)\pi}{2(n-1)},$$

on aura $\varphi(\sigma) \geqslant \varphi(\sigma^*)(1-\varepsilon)^{n^2}$ sur un voisinage de σ^* de mesure suffisamment grande pour que

$$\Big(\int_{\Omega_\infty} \varphi(\sigma) \, d\sigma \Big)^{1/n^2} \geqslant (\varphi(\sigma^*))^{1/n^2} (1-2\varepsilon)$$

pour n assez grand. De façon plus précise, si

$$m = \inf_{i \neq j} |\sigma_i^{*2} - \sigma_j^{*2}| = \sin^2 \frac{\pi}{2(n-1)} \geqslant \frac{1}{(n-1)^2}$$

et

$$\sup_i |\sigma_i - \sigma_i^*| \leqslant \delta m,$$

on a

$$|\sigma_i^2 - \sigma_i^{*2}| = (\sigma_i + \sigma_i^*) |\sigma_i - \sigma_i^*| \leqslant 2\delta m,$$

d'où

$$\sigma_j^2 - \sigma_i^2 \geqslant \sigma_j^{*2} - \sigma_i^{*2} - |\sigma_j^2 - \sigma_j^{*2}| - |\sigma_i^2 - \sigma_i^{*2}|$$
$$\geqslant \sigma_j^{*2} - \sigma_i^{*2} - 4\delta m \geqslant (1-4\delta)(\sigma_j^{*2} - \sigma_i^{*2})$$

et

$$\varphi(\sigma) \geqslant (1-4\delta)^{n(n-1)/2} \varphi(\sigma^*).$$

Cette condition est réalisée sur l'ensemble

$$[0, \delta m] \times \prod_{2}^{n-1} [\sigma_i^* - \delta m, \sigma_i^* + \delta m] \times [1-\delta m, 1]$$

dont la mesure est $2^{n-2}(\delta m)^n$, donc

$$I_n^{\infty} \geqslant (1-4\delta)^{n(n-1)/2} \cdot 2^{n-2} (\delta m)^n \varphi(\sigma^*)$$

et avec $\delta = 1/2(n+1)$

$$(I_n^{\infty})^{1/n^2} \geqslant 2^{-2/n^2} \frac{(n-1)^{(n-5)/2n}}{(n+1)^{(n+1)/2n}} (\varphi(\sigma^*))^{1/n^2};$$

et puisque $(\varphi(\sigma^*))^{1/n^2} = \left(\dfrac{2(n-1)}{4^{n-1}} \right)^{1/2n}$,

$$\liminf_{n\to\infty} (I_n^{\infty})^{1/n^2} \geqslant 1/2,$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 4. *Lorsque n tend vers l'infini, on a*

$$[\operatorname{vol}(B_n^{\infty})]^{1/n^2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi e^{3/2}}{n}}, \qquad [\operatorname{vol}(\tilde{B}_n^{\infty})]^{1/2n^2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi e^{3/2}}{n}}.$$

Ceci résulte des trois théorèmes précédents, et améliore un résultat de Gluskin prouvant l'existence d'un $C > 0$ tel que, pour tout n, $(\operatorname{vol}(B_n^{\infty}))^{1/n^2} \geqslant \dfrac{C}{\sqrt{n}}$.

On va généraliser le résultat précédent pour évaluer $(I_n^p)^{1/n^2}$. Posons, pour $0 < q < +\infty$,

$$\Delta_n(q) = \sup_{0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n} n^{1/q} \cdot \frac{\left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\tau_j - \tau_i|\right)^{2/n(n-1)}}{\left(\sum \tau_i^q\right)^{1/q}},$$

qui tend vers le diamètre d'ordre n de $[0, 1]$ quand q tend vers l'infini.

Lemme 5. *La suite $\Delta_n(q)$ décroit vers une quantité $\Delta(q)$ quand n tend vers l'infini et*

$$\Delta(q) \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1/2)}\right)^{1/q}.$$

Pour $q \geqslant 1/2$ on a $1/4 \leqslant \Delta(q) \leqslant 4$.

Soient $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_{n+1}$ des nombres positifs. Alors, si $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} |\tau_j - \tau_i|\right)^{n-1} &= \prod_{k=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n\\ i,j \neq k}} |\tau_j - \tau_i|\right)\\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n+1}\left[n^{-1/q}\Delta_n(q)\left(\sum_{i \neq k}\tau_i^q\right)^{1/q}\right]^{n(n-1)/2}\\ &\leqslant \left(n^{-1/q}\Delta_n(q)\right)^{n(n+1)(n-1)/2}\left[\prod_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{i \neq k}\tau_i^q\right)\right]^{n(n-1)/2q}.\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique, ceci se majore par

$$\begin{aligned}&\left(n^{-1/q}\Delta_n(q)\right)^{n(n+1)(n-1)/2}\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{i \neq k}\tau_i^q\right)\right]^{n(n+1)(n-1)/2q}\\ &\qquad = \left[(n+1)^{-1/q}\Delta_n(q)\left(\sum_{i=1}^{n+1}\tau_i^q\right)\right]^{(1/q)(n(n+1)(n-1)/2)},\end{aligned}$$

d'où $\Delta_{n+1}(q) \leqslant \Delta_n(q) \leqslant \ldots \leqslant \Delta_2(q) = 2^{1/q}$, quantité majorée par 4 si $q \geqslant 1/2$. Ceci prouve que $\Delta_n(q)$ décroît vers $\Delta(q) = \inf_n \Delta_n(q)$. Si on prend

$$\tau_j = \sin^2\frac{(j-1)\pi}{2(n-1)}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

on a

$$\Delta_n(q) \geqslant \frac{\left(\dfrac{2(n-1)}{4^{n-1}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n(n-1)}}}{\left(\dfrac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sin^{2q}\dfrac{j\pi}{2(n-1)}\right)^{1/q}} = \frac{[2(n-1)]^{1/(n-1)}}{4\left(\dfrac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sin^{2q}\dfrac{j\pi}{2(n-1)}\right)^{1/q}},$$

et puisque

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sin^{2q}\frac{j\pi}{2(n-1)} \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2q}t\cdot dt = \frac{2}{\pi}\,\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(q+1/2)}{\Gamma(q+1)},$$

on obtient

$$\liminf_{n\to\infty}\Delta_n(q) \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1/2)}\right)^{1/q}.$$

De plus, si on considère le développement en série de

$$\frac{d^2}{dq^2}\left(\log\Gamma(q+1) - \log\Gamma(q+1/2)\right),$$

on voit que $\log\dfrac{\Gamma(q+1)\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma(q+1/2)}$ est fonction concave de q, nulle en 0. Il en résulte que $\dfrac{1}{q}\log\dfrac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1/2)}$ est décroissante de q, donc positive puisque cette fonction tend vers 0 à l'infini. Ceci achève la démonstration du lemme.

Lemme 6. *Il existe un $\tau^* = (\tau_1^*, \ldots, \tau_n^*)$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{n}\tau_i^{*q} = 1,$$

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}|\tau_j^* - \tau_i^*| = \left(\frac{\Delta_n(q)}{n^{1/q}}\right)^{n(n-1)/2}, \qquad m = \inf_{i \neq j}|\tau_j^* - \tau_i^*| \geqslant \left(\frac{2}{n(n-1)}\right)^{1+1/q}.$$

Par homogénéité, $\Delta_n(q)$ peut être défini comme la borne supérieure de $n^{1/q}\ \psi(\tau)$ sur l'ensemble des τ vérifiant $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$ et $\|\tau\|_q = 1$ si

$$\psi(\tau) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}|\tau_j - \tau_i|,$$

borne qui est atteinte par compacité, en un τ^*. Il est clair que τ_1^* est nul, car $\psi(0, \tau_2^* - \tau_1^*, \ldots, \tau_n^* - \tau_1^*) = \psi(\tau^*)$ et

$$\|0, \tau_2^* - \tau_1^*, \ldots, \tau_n^* - \tau_1^*\|_q < \|\tau^*\|_q \quad \text{ si } \quad \tau_1^* \neq 0.$$

On a donc, puisque $\log\psi$ est maximum en τ^* sur $\{\|\tau\|_q = 1\}$,

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{d\tau_j}{\tau_j^*} + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n}\frac{d\tau_j - d\tau_i}{\tau_j^* - \tau_i^*} = \lambda\sum_{i=2}^{n}(\tau_i^*)^{q-1}\,d\tau_i$$

et donc

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i}\frac{1}{\tau_i^* - \tau_j^*} = \lambda(\tau_i^*)^{q-1}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Il en résulte que

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i^*\alpha_i = \sum_{i=2}^{n} \tau_i^*\alpha_i = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\tau_i^*-\tau_j^*}{\tau_i^*-\tau_j^*} = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\tau_i^*)^q = \lambda = n(n-1)/2.$$

De plus, pour $2\leqslant k\leqslant n$

$$\sum_{i=k}^{n} \alpha_i = \lambda\sum_{i=k}^{n} (\tau_i^*)^{q-1} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=2}^{n}(\tau_i^*)^{q-1}$$

$$= \sum_{i=k}^{n}\Big(\sum_{j\neq i}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_j^*}\Big) = \sum_{j<k\leqslant i}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_j^*} \geqslant \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{\tau_i^*-\tau_{k-1}^*};$$

ceci donne, pour $k=2$,

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^*} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=2}^{n}(\tau_i^*)^{q-1} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=2}^{n} (\tau_i^*)^{q\cdot q/(q+1)}\Big(\frac{1}{\tau_i^*}\Big)^{1/(q+1)}$$

$$\leqslant \frac{n(n-1)}{2}\Big(\sum_{i=2}^{n}(\tau_i^*)^q\Big)^{q/(q+1)}\Big(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^*}\Big)^{1/(q+1)}$$

$$\leqslant \frac{n(n-1)}{2}\Big(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^*}\Big)^{1/(q+1)},$$

donc

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\tau_i^*}\leqslant\Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^{(q+1)/q}$$

et

$$\sum_{i=2}^{n}(\tau_i^*)^{q-1}\leqslant\sum_{i=2}^{n}(\tau_i^*)^{q\cdot q/(q+1)}\Big(\frac{1}{\tau_i^*}\Big)^{1/(q+1)}\leqslant\Big(\sum_{i=2}^{n}(\tau_i^*)^q\Big)^{q/(q+1)}\Big(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^*}\Big)^{1/(q+1)}$$

$$\leqslant\Big(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^*}\Big)^{1/(q+1)}\leqslant\Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^{1/q},$$

c'est-à-dire enfin

$$\frac{1}{\tau_k^*-\tau_{k-1}^*}\leqslant\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_{k-1}^*}\leqslant\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=2}^{n}(\tau_i^*)^{q-1}\leqslant\Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^{1+1/q},$$

d'où le lemme puisque

$$m=\inf_k(\tau_k^*-\tau_{k-1}^*)\geqslant\Big(\frac{2}{n(n-1)}\Big)^{1+1/q}\geqslant\Big(\frac{1}{n-1}\Big)^{2+2/q}.$$

THÉORÈME 7. *Lorsque n tend vers l'infini,*

$$(I_n^p)^{1/n^2}\sim n^{-1/p}\sqrt{\Delta(p/2)},$$

$$(\tilde{I}_n^p)^{1/2n^2}\sim n^{-1/p}\sqrt{\Delta(p/2)}.$$

On a comme dans le théorème 3, pour tout $\sigma\in\Omega_p\subset\Omega_\infty$

$$\varphi(\sigma)\leqslant\Big[\frac{\Delta_n(p/2)}{n^{2/p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}(\sigma_i^2)^{1/2}\Big)^{2/p}\Big]^{n(n-1)/2}\leqslant\frac{1}{n^{n(n-1)/p}}(\Delta_n(p/2))^{n(n-1)/2},$$

d'où

$$I_n = \int_{\Omega_p}\varphi(\sigma)\,d\sigma \leqslant \mathrm{vol}(\Omega_p)\cdot\frac{1}{n^{n(n-1)/p}}(\Delta_n(p/2))^{n(n-1)/2}$$

$$\leqslant \mathrm{vol}(\Omega_\infty)\cdot n^{-n(n-1)/p}(\Delta_n(p/2))^{n(n-1)/2}$$

$$=\frac{1}{n!}\,n^{-n(n-1)/p}(\Delta_n(p/2))^{n(n-1)/2},$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{n\to\infty}(I_n^p)^{1/n^2}\cdot n^{1/p}\leqslant\sqrt{\Delta(p/2)}.$$

Inversement, il existe d'après le lemme 6 un $\tau^*=(\tau_0^*,\ldots,\tau_n^*)$ avec

$$\tau_0^*=0,\qquad \|\tau^*\|_{p/2}=1,\qquad \psi(\tau^*)=\Big(\frac{\Delta_{n+1}(p/2)}{(n+1)^{2/p}}\Big)^{n(n+1)/2}$$

et

$$m=\inf(\tau_{k+1}^*-\tau_k^*)\geqslant\Big(\frac{2}{n(n+1)}\Big)^{1+2/p}\geqslant\Big(\frac{1}{n^2}\Big)^{1+2/p}\geqslant\frac{1}{n^6}.$$

Posant alors $\sigma_i^*=\sqrt{\tau_i^*}$, $i=1,2,\ldots,n$, on a comme dans le théorème 3, pour tout σ tel que $\sigma_i^*-\delta m\leqslant\sigma_i\leqslant\sigma_i^*$,

$$\varphi(\sigma_i)\geqslant\varphi(\sigma_i^*)(1-4\delta)^{n(n-1)/2},\qquad \sigma\in\Omega_p,$$

et l'ensemble de ces σ a une mesure égale à $(\delta m)^n$. Donc

$$I_n^p\geqslant(\delta m)^n\varphi(\sigma^*)(1-4\delta)^{n(n-1)/2}.$$

De plus

$$\varphi(\sigma^*)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\sigma_j^{*2}-\sigma_i^{*2})\geqslant\prod_{i=1}^{n}\sigma_i^{*2}\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\sigma_j^{*2}-\sigma_i^{*2})$$

$$\geqslant\psi(\tau^*)=[\Delta_{n+1}(p/2)\cdot(n+1)^{-2/p}]^{n(n+1)/2}.$$

Donc

$$(I_n^p)^{1/n^2}\geqslant\Big(\frac{\delta}{n^6}\Big)^{1/n}(1-4\delta)^{(n-1)/2n}(n+1)^{\frac{-1}{p}\cdot\frac{n+1}{n}}(\Delta_{n+1}(p/2))^{\frac{n+1}{2n}},$$

c'est-à-dire, prenant $\delta=1/n$

$$\liminf_{n\to\infty}(I_n^p)^{1/n^2}\cdot n^{1/p}\geqslant\sqrt{\Delta(p/2)},$$

d'où le résultat, dans le cas réel. Dans le cas complexe, les mêmes inégalités donnent le résultat, compte tenu de ce que, sur Ω_p, $\prod_{j=1}^{n} \sigma_j \leqslant 1$ et que

$$\prod_{j=1}^{n} \sigma_j^* \cdot \prod_{j,k} (\sigma_k^{*2} - \sigma_j^{*2}) \geqslant \prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{*2} \cdot \prod_{j,k} (\sigma_k^{*2} - \sigma_j^{*2}) = \psi(\tau^*),$$

donc que $|\tilde{J}(1, 1, \sigma)| \geqslant (1-\delta)^n (1-4\delta)^{n(n-1)} [\psi(\tau^*)]^2$ sur un ensemble de mesure $\geqslant (\delta m)^n$.

COROLLAIRE 8. *Lorsque n tend vers l'infini, on a*

$$(\mathrm{vol}\,(B_n^p))^{1/n^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi e^{3/2} \cdot \Delta(p/2)}}{n^{1/2+1/p}},$$

$$(\mathrm{vol}\,(\tilde{B}_n^p))^{1/2n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi e^{3/2} \cdot \Delta(p/2)}}{n^{1/2+1/p}}.$$

En particulier $\Delta(1) = e^{-1/2}$.

Ceci résulte immédiatement des théorèmes 1, 2 et 7. Dans le cas $p = 2$, B_n^2 est la boule unité euclidienne de $\boldsymbol{R}^{n^2}$. Donc

$$(\mathrm{vol}\,(B_n^2))^{1/n^2} = (v_{n^2})^{1/n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{(\Gamma(1+n^2/2))^{1/n^2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{n^2}{2}}\, e^{-1/2}} = \frac{\sqrt{2\pi e}}{n},$$

d'où

$$\frac{\sqrt{2\pi e^{3/2} \cdot \Delta(1)}}{n} = \frac{\sqrt{2\pi e}}{n},$$

c'est-à-dire $\Delta(1) = e^{-1/2}$.

THÉORÈME 9. *Le quotient volumique (= volume ratio) de la boule nucléaire B_n^1 a une limite inférieure à $2 \cdot e^{-1/4}$ quand n tend vers l'infini.*

La boule B_n^1 est le polaire de la boule B_n^∞. L'inégalité de Blaschke–Santaló ([1], [3]) entraîne donc

$$\mathrm{vol}\,(B_n^1) \cdot \mathrm{vol}\,(B_n^\infty) \leqslant (v_{n^2})^2$$

et donc $[\mathrm{vol}\,(B_n^1)]^{1/n^2} \cdot [\mathrm{vol}\,(B_n^\infty)]^{1/n^2} \leqslant [\mathrm{vol}\,(B_n^2)]^{2/n^2}$, c'est-à-dire $\Delta(1/2) \times \times \Delta(\infty) \leqslant (\Delta(1))^2 = e^{-1}$, ou encore, puisque $\Delta(\infty) = 1/4$, $\Delta(1/2) \leqslant 4e^{-1}$.

L'unicité de l'ellipsoïde de John de B_n^1 montre qu'il est invariant par $SO(n)$, donc que cet ellipsoïde est un homothétique de la boule B_n^2; le rapport d'homothétie est alors évidemment $n^{-1/2}$, d'où

$$\mathrm{vr}\,(B_n^1) = \frac{(\mathrm{vol}\,(B_n^1))^{1/n^2}}{n^{-1/2} (\mathrm{vol}\,(B_n^2))^{1/n^2}} \to \sqrt{\frac{\Delta(1/2)}{\Delta(1)}} \leqslant 2e^{-1/4} < 2.$$

Ceci améliore, au moins pour les grandes valeurs de n, un résultat de Szarek et Tomczak-Jaegermann qui majorent $\mathrm{vr}\,(B_n^1)$ par 32000. En fait, en raffinant les majorations faites ici, on obtient avec des calculs fastidieux

$$\sup_n \mathrm{vr}\,(B_n^1) < 5.$$

Bibliographie

[1] W. Blaschke, *Über affine Geometrie* VII. *Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid*, Sitz. Ber. Akad. Wiss. Leipz. Math. Nat. Kl. 69 (1917), 306–318.

[2] E. Hille, *Analytic functions theory* II, Chelsea Publishing Company, New York.

[3] L. A. Santaló, *Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones*, Portugal. Math. 8 (1949), 155–161.

[4] S. J. Szarek and N. Tomczak-Jaegermann, *On nearly euclidean decomposition for some classes of Banach spaces*, Compositio Math. 40 (1980), 367–385.

ÉQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITÉ PARIS VI
4, Place Jussieu, 75230-Paris Cedex 05
Tour 46, 4ème étage

Received June 1, 1983 (1907)