Les propriétés de réduction et de norme pour les classes de Boréliens

par

A. Louveau et J. Saint Raymond (Paris)

Résumé. We determine which Borel Wadge classes possess the reduction property. We show they all possess the norm property, and between them some mixed reduction property.

Nous travaillons dans cet article sur l'espace de Baire ω^ω des suites infinies d'entiers, muni de la topologie usuelle. Une famille Γ de parties de ω^ω est une *classe* si pour tout $A \in \Gamma$ et toute fonction continue $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$, $f^{-1}(A) \in \Gamma$. Notons $\check{A} = \omega^\omega \setminus A$ le complémentaire de $A \subseteq \omega^\omega$. La classe $\check{\Gamma} = \{A\colon \check{A} \in \Gamma\}$ est la classe *duale* de Γ, et $\Delta(\Gamma) = \Gamma \cap \check{\Gamma}$ la classe ambiguë associée à Γ.

Parmi les propriétés structurelles étudiées sur les classes, deux propriétés ont joué un rôle primordial, dès les débuts de la théorie descriptive, les propriétés de *séparation* et de *réduction*. Une classe Γ a la propriété de *séparation* si toute paire d'éléments disjoints dans Γ peut être séparée par un élément de $\Delta(\Gamma)$. La classe Γ a la propriété de *réduction* si étant donnés A et B dans Γ, on peut trouver A' et B' disjoints dans Γ, contenus respectivement dans A et B, et de même union.

La classe $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$ des ensembles analytiques a la propriété de séparation (Suslin), et la classe $\underset{\sim}{\Pi}^1_1 = \check{\underset{\sim}{\Sigma}}{}^1_1$ des coanalytiques la propriété de réduction (Luzin). Parmi les classes de Boréliens, les classes de Baire multiplicatives ($\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$) ont la séparation (Sierpiński) et les classes de Baire additives ($\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$) la réduction (Kuratowski).

Dans ce qui suit, nous ne considérerons que des classes Γ de boréliens, et qui ne sont pas ambiguës, i.e. $\Gamma \neq \check{\Gamma}$. Soit $\mathscr{W}$ (pour Wadge) l'ensemble de ces classes. D'après les travaux de Wadge [W], si $\Gamma \in \mathscr{W}$, tout ensemble de $\Gamma \setminus \check{\Gamma}$ engendre, par préimage de fonctions continues, la classe Γ, et Γ admet un ensemble universel (dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$, identifié à ω^ω). De plus, Γ peut être engendrée à partir des suites d'ouverts de ω^ω par une opération de Hausdorff borélienne.

La propriété de séparation pour les classes de $\mathscr{W}$ a été étudiée par van Wesep [vW] et Steel [St]. Le résultat principal, dû à Steel, est que pour tout $\Gamma \in \mathscr{W}$, exactement une des deux classes Γ, $\check{\Gamma}$ possède la propriété de séparation.

Il est très facile de voir que si Γ a la propriété de réduction, alors $\check{\Gamma}$ a la propriété de séparation, et qu'une classe ayant la propriété de réduction et admettant un universel ne peut avoir la propriété de séparation. Si donc nous notons COSEP $= \{\Gamma \in \mathscr{W}: \check{\Gamma}$ a la séparation$\}$ et RED $= \{\Gamma \in \mathscr{W}: \Gamma$ a la réduction$\}$, on a nécessairement RED $\subseteq$ COSEP. Par ailleurs, cette inclusion est stricte (van Wesep [vW]). Le premier but de ce travail est de décrire explicitement les classes de RED, en fonction de la description explicite de toutes les classes de $\mathscr{W}$, faite par Louveau dans [Lo].

D'autres propriétés structurelles des classes ont été étudiées en théorie descriptive. Une classe Γ a la propriété de ω-réduction si pour toute suite (A_n) d'éléments de Γ il existe une suite (A'_n) d'éléments deux-à-deux disjoints dans Γ, avec $A'_n \subseteq A_n$ pour tout n, et de même réunion. C'est clairement une propriété plus forte que la réduction; et les classes $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$, $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, ont la ω-réduction (Kuratowski).

Une autre propriété structurelle très importante, implicite dans les travaux de Luzin et Sierpiński sur les ensembles $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$, et explicitée par Moschovakis [M], est la propriété de *norme*, qui est à la base de la plupart des développements récents en théorie descriptive. Une classe Γ a la propriété de *norme* s'il existe, pour tout élément A de Γ, une application φ de A dans les ordinaux (une *Γ-norme sur A*) qui est telle que les deux ensembles suivants:

$$\leqslant^* = \{(\alpha, \beta) \in \omega^\omega \times \omega^\omega: \alpha \in A \text{ et } (\beta \notin A \text{ ou } \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(\beta))\} \quad \text{et}$$

$$<^* = \{(\alpha, \beta) \in \omega^\omega \times \omega^\omega: \alpha \in A \text{ et } (\beta \notin A \text{ ou } \varphi(\alpha) < \varphi(\beta))\}$$

sont dans Γ.

Il n'est pas difficile de vérifier que la propriété de norme entraîne la propriété de réduction. Et les classes $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$, $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, ont la propriété de norme (Moschovakis [M]).

Nous montrons dans cet article que les classes de $\mathscr{W}$ qui ont la propriété de ω-réduction, et celles qui ont la propriété de norme, coïncident avec les classes ayant la propriété de réduction. En fait, nous montrons que pour les classes Γ dans COSEP, ces différentes propriétés sont équivalentes à la propriété beaucoup plus faible suivante: Il existe dans Γ une paire d'ensembles disjoints A et B telle que pour toute autre paire A', B' d'ensembles disjoints dans Γ, il existe une fonction continue f: $\omega^\omega \to \omega^\omega$ avec $A' = f^{-1}(A)$ et $B' = f^{-1}(B)$. Nous ne savons pas s'il s'agit d'un phénomène général pour les classes non ambiguës, même avec des hypothèses supplémentaires de détermination de jeux. Finalement, nous établissons également, pour les classes de RED, des propriétés de (ω-) réduction mixte entre elles.

Nous remercions le référé pour avoir attiré notre attention sur une inexactitude dans la démonstration du théorème 20.

Nous allons tout d'abord rappeler brièvement l'analyse des classes de $\mathscr{W}$, due essentiellement à Wadge, telle qu'on peut la trouver dans Louveau [Lo]. Le point de départ est formé des classes de Baire $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ et $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$, et on obtient toutes les classes en appliquant itérativement les opérations suivantes.

DEFINITION 1. (a) Pour $\xi \geqslant 1$, $\eta \geqslant 1$, $A \in D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi)$ s'il existe une suite croissante $(A_\zeta)_{\zeta<\eta}$ d'ensembles Σ^0_ξ telle que $A = \bigcup\{A_\zeta \setminus \bigcup_{\zeta'<\zeta} A_{\zeta'}: \zeta < \eta,\ \zeta$ et η de parité différente$\}$.

(b) Pour $\xi \geqslant 1$ $\eta \geqslant 1$, Γ une classe, $A \in \mathrm{Sep}(D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi), \Gamma)$ si

$$A = (A_0 \cap C_0) \cup (A_1 \cap \check{C}_0)$$

avec $C_0 \in D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi)$, $A_0 \in \check{\Gamma}$ et $A_1 \in \Gamma$.

(c) Pour $\xi \geqslant 1$, $\eta \geqslant 1$, Γ, Γ' deux classes, $A \in \mathrm{Bisep}(D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi), \Gamma, \Gamma')$ si $A = (A_0 \cap C_0) \cup (A_1 \cap C_1) \cup (B \setminus (C_0 \cup C_1))$ avec C_0, C_1 disjoints dans $D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi)$, $A_0 \in \Gamma$, $A_1 \in \check{\Gamma}$ et $B \in \Gamma'$.

(d) Pour $\xi \geqslant 1$, (Γ_n) une suite de classes, $A \in \mathrm{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n))$ si $A = \bigcup_n (A_n \cap C_n)$ avec (C_n) deux-à-deux disjoints dans $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ et $A_n \in \Gamma_n$. L'ensemble $C = \bigcup_n C_n$ est appelé une *enveloppe* de A.

(e) Pour $\xi \geqslant 1$, $\eta \geqslant 1$, Γ_n une suite de classes, Γ une classe, $A \in \mathrm{SD}_\eta(\mathrm{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n)), \Gamma)$ si $A = \bigcup_{\zeta<\eta} (A_\zeta \setminus \bigcup_{\zeta'<\zeta} C_{\zeta'}) \cup (B \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} C_\zeta)$ où $A_\zeta \in \mathrm{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n))$ et C_ζ est une enveloppe de A, $C_\zeta \subseteq A_{\zeta+1}$ pour tout ζ, et $B \in \Gamma$.

Pour obtenir les classes de $\mathscr{W}$ à partir des opérations précédentes, nous allons restreindre les opérations autorisées. Et comme les restrictions ne dépendent pas seulement (a priori) des classes sur lesquelles les opérations sont effectuées, mais de la façon dont ces classes ont elles-mêmes été obtenues, nous devons travailler sur des "codes", appelés descriptions dans [Lo], et qui apparaissent comme des éléments $u \in \omega_1^\omega$ qui "contiennent l'information" nécessaire pour reconstruire une classe donnée Γ_u. Pour chaque tel code u, l'ordinal $u(0)$ joue un rôle très particulier. Nous l'appelons le *niveau* $\lambda(u)$ de la description u. Dans ce qui suit, les éléments de ω_1^ω sont parfois vus comme des paires $\langle u_0, u_1 \rangle \in \omega_1^\omega \times \omega_1^\omega$, ou comme des suites $(u_n) \in (\omega_1^\omega)^\omega$ — par des bijections fixées une fois pour toutes entre $\omega+\omega$ et ω, et entre $\omega \times \omega$ et ω, respectivement.

DEFINITION 2. Les relations "u est une description" et "u décrit la classe Γ", écrites "$u \in \mathscr{D}$" et "$\Gamma_u = \Gamma$", sont définies inductivement comme les plus petites relations satisfaisant les conditions suivantes:

(0) Si $u(0) = 0$, $u \in \mathscr{D}$ et $\Gamma_u = \{\emptyset\}$.

(1) Si $u(0) = \xi \geqslant 1$, $u(1) = 1$ et $u(2) = \eta \geqslant 1$, $u \in \mathscr{D}$ et $\Gamma_u = D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi)$.

(2) Si $\xi \geqslant 1$, $\eta \geqslant 1$ et $u^* \in \mathscr{D}$ avec $u^*(0) > \xi$, alors $u = \xi^\frown 2^\frown \eta^\frown u^* \in \mathscr{D}$ et $\Gamma_u = \mathrm{Sep}(D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi), \Gamma_{u^*})$.

(3) Si $\xi \geqslant 1$, $\eta \geqslant 1$, u_0 et $u_1 \in \mathscr{D}$ avec $u_0(0) > \xi$, $u_1(0) \geqslant \xi$ ou $u_1(0) = 0$, et $\Gamma_{u_1} \subseteq \Delta(\Gamma_{u_0})$, alors $u = \xi^\frown 3^\frown \eta^\frown \langle u_0, u_1 \rangle$ est dans $\mathscr{D}$, $\Gamma_u = \mathrm{Bisep}(D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi), \Gamma_{u_0}, \Gamma_{u_1})$.

(4) Si $\xi \geqslant 1$, (u_n) est une suite dans $\mathscr{D}$ telle que pour tout n $\Gamma_{u_n} \subseteq \Delta(\Gamma_{u_{n+1}})$, et ou bien $\forall n$ $u_n(0) = \xi' > \xi$ ou bien $\xi_n = u_n(0)$ est une suite strictement croissante et $\sup \xi_n > \xi$ alors $u = \xi^\frown 4^\frown \langle u_n: n \in \omega \rangle$ est dans $\mathscr{D}$, et $\Gamma_u = \mathrm{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_{u_n}))$.

(5) Si $\xi \geqslant 1$, $\eta \geqslant 1$, u_0 et $u_1 \in \mathscr{D}$ et $u_0(0) = \xi$, $u_0(1) = 4$, $u_1(0) \geqslant \xi$ ou $u_1(0) = 0$, et $\Gamma_{u_1} \subseteq \Delta(\Gamma_{u_0})$, alors $u = \xi^\frown 5^\frown \eta^\frown \langle u_0, u_1 \rangle$ est dans $\mathscr{D}$, et $\Gamma_u = \mathrm{SD}_\eta(\Gamma_{u_0}, \Gamma_{u_1})$.

THEOREME 3. (cf. Louveau [Lo]). *Une classe Γ est dans $\mathscr{W}$ si et seulement si il existe une description $u \in \mathscr{D}$ telle que $\Gamma = \Gamma_u$ ou $\Gamma = \check{\Gamma}_u$. En fait $\{\Gamma_u: u \in \mathscr{D}\}$ est exactement l'ensemble* COSEP *des classes Γ de $\mathscr{W}$ telles que $\check{\Gamma}$ a la propriété de séparation.*

Note. La première partie du résultat précédent est essentiellement due à Wadge [W], en des termes assez différents. La seconde assertion est énoncée sans démonstration dans [Lo]. La preuve en est facile par induction, et laissée au lecteur. Nous ne l'utiliserons pas dans la suite.

L'autre résultat fondamental sur $\mathscr{W}$, dû à Wadge (cf. Wadge [W], Martin, Louveau-Saint Raymond [LSR]), est que l'inclusion est un bon ordre sur $\{\Gamma \cup \check{\Gamma}: \Gamma \in \mathscr{W}\}$.

Après ces quelques rappels, nous commençons par préciser la notion de niveau. Tel que nous l'avons défini, le niveau paraît dépendre de la description u d'une classe, non de la classe décrite. Nous allons voir qu'il n'en est rien, en reliant le niveau de u à des propriétés intrinsèques de Γ_u.

Soit Γ une classe, et $\xi \geqslant 1$ un ordinal dénombrable. On note $\underset{\sim}{\Delta}^0_\xi - \mathrm{PU}(\Gamma)$ la classe des ensembles de la forme $\bigcup_n (A_n \cap C_n)$ où $A_n \in \Gamma$ et (C_n) est une partition de ω^ω en ensembles $\underset{\sim}{\Delta}^0_\xi$. Et on dit que Γ est close par $\underset{\sim}{\Delta}^0_\xi$-unions partitionnées si $\underset{\sim}{\Delta}^0_\xi - \mathrm{PU}(\Gamma) = \Gamma$. Dans [Lo], Louveau montre que si u est de niveau $\xi \geqslant 1$, Γ_u est close par $\underset{\sim}{\Delta}^0_\xi$-unions partitionnées. Nous allons affiner ce résultat plus loin.

Les classes $\{\emptyset\}$ et $\{\omega^\omega\}$ sont par définition de niveau 0.

A partir de maintenant, nous supposons que $\underset{\sim}{\Delta}^0_1 \subseteq \Gamma$. Soit donc $\Gamma \in \mathscr{W}$. Nous définissons

$$\lambda_c(\Gamma) = \sup\{\xi|\ \underset{\sim}{\Delta}^0_\xi - \mathrm{PU}(\Gamma) = \Gamma\}.$$

Si Γ est une classe dans $\mathscr{W}$ et $\eta \geqslant 0$ est un ordinal dénombrable, on note Γ^η, la classe *η-expansée de Γ*, la classe définie comme l'ensemble des $f^{-1}(A)$ où $f: \omega^\omega \to \omega^\omega$ est de classe de Baire η et A appartient à Γ. Dans [LSR], nous montrons que si u est de niveau $1+\eta$, la classe Γ_u est de la forme $(\Gamma_{u^*})^\eta$ pour une description u^* de niveau 1. Il est donc naturel de poser, pour toute $\Gamma \in \mathscr{W}$

$$\lambda_E(\Gamma) = \sup\{1+\eta\colon \Gamma = (\Gamma_0)^\eta \text{ pour une classe } \Gamma_0 \in \mathscr{W}\}.$$

Si D est une partie de 2^ω, l'opération de Hausdorff de base D, notée encore D, est définie de la façon suivante: Si (A_n) est une suite de parties, $A = D((A_n))$ est définie par $\alpha \in A \leftrightarrow \{n \in \omega\colon \alpha \in A_n\} \in D$. Si Γ est une classe, on note $D(\Gamma)$ la classe des $D((A_n))$, où (A_n) est une suite d'éléments de Γ. Il n'est pas difficile de vérifier que le théorème 3 montre en particulier que toute classe Γ de $\mathscr{W}$ s'écrit $\Gamma = D(\underset{\sim}{\Sigma}^0_1)$ pour une opération (nécessairement borélienne) D convenable. On définit, pour $\Gamma \in \mathscr{W}$

$$\lambda_H(\Gamma) = \sup\{\xi\colon \exists D \subseteq 2^\omega\ \Gamma = D(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi)\}.$$

Finalement, notons pour $\Gamma \in \mathscr{W}$

$$\lambda_D^-(\Gamma) = \inf\{\xi|\ \exists u \in \mathscr{D}\ (\lambda(u) = \xi \text{ et } (\Gamma = \Gamma_u \text{ ou } \Gamma = \check{\Gamma}_u))\}$$

et

$$\lambda_D^+(\Gamma) = \sup\{\xi|\ \exists u \in \mathscr{D}\ (\lambda(u) = \xi \text{ et } (\Gamma = \Gamma_u \text{ ou } \Gamma = \check{\Gamma}_u))\}.$$

Ces considérations fournissent, pour $\Gamma \in \mathscr{W}$, Γ contenant $\underset{\sim}{\Delta}^0_1$, cinq notions intrinsèques possibles de niveau. Nous allons montrer que ces cinq notions coïncident. Notons $\mathscr{W}^* = \{\Gamma \in \mathscr{W}, \underset{\sim}{\Delta}^0_1 \subseteq \Gamma\}$.

LEMME 4. *Pour $\Gamma \in \mathscr{W}^*$, $\lambda_E(\Gamma) = \lambda_H(\Gamma)$.*

Démonstration. Il suffit de voir qu'une classe Γ est engendrée par les suites d'ensembles $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{1+\eta}$ si et seulement si $\Gamma = (\Gamma_0)^\eta$ pour une classe Γ_0 convenable. Si $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ est de classe de Baire η et $(C_n)_{n\in\omega}$ est une suite d'ouverts, les ensembles $f^{-1}(C_n)$ sont $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{1+\eta}$. Inversement, si (B_n) est une suite de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{1+\eta}$, il existe un fermé F de ω^ω, une fonction bijective f de ω^ω sur F, de classe η et d'inverse continue, et une suite (C_n) d'ouverts de ω^ω avec $B_n = f^{-1}(C_n \cap F)$ (cf. [K]).

Si $\Gamma = (\Gamma_0)^\eta$ avec $\Gamma_0 \in \mathscr{W}$, il existe $D \subseteq 2^\omega$ tel que $\Gamma_0 = D(\underset{\sim}{\Sigma}^0_1)$, et d'après le premier fait ci-dessus, $\Gamma \subseteq D(\underset{\sim}{\Sigma}^0_{1+\eta})$. Réciproquement si $A = D((B_n))$ avec $B_n \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_{1+\eta}$ et (f, F, C_n) sont associés à (B_n) par le second fait, on a

$$A = D(f^{-1}(C_n)) = f^{-1}(D(C_n)),$$

donc $A \in \Gamma$ et $\Gamma = D(\underset{\sim}{\Sigma}^0_{1+\eta})$. Si maintenant $\Gamma = D(\underset{\sim}{\Sigma}^0_{1+\eta})$ pour une opération D, et si on note $\Gamma_0 = D(\underset{\sim}{\Sigma}^0_1)$, la classe Γ_0 est une classe de boréliens, et possède un universel (l'ensemble $D((A_n))$, où (A_n) est une suite d'ouverts universelle pour les suites d'ouverts), donc est dans $\mathscr{W}$ (et différente de $\{\emptyset\}$ et $\{\omega^\omega\}$!). Le même argument que précédemment montre que $\Gamma = (\Gamma_0)^\eta$. ∎

LEMME 5. *Pour $\Gamma \in \mathscr{W}^*$, $\lambda_H(\Gamma) \leqslant \lambda_C(\Gamma)$.*

Démonstration. Soit ξ tel que $\lambda_H(\Gamma) > \xi$. Il existe donc une opération D qui engendre Γ à partir des $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{\xi+1}$. Si (C_n) est une $\underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1}$-partition de ω^ω, et $A_n \in \Gamma$, il existe des ensembles $A_{n,k}$ dans $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{\xi+1}$ avec $A_n = D((A_{n,k})_k)$. Posons

$$A'_k = \bigcup_n (C_n \cap A_{n,k}).$$

Chaque A'_k est $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{\xi+1}$, et clairement $A = D(A'_k)$. Donc $A \in \Gamma$, i.e. Γ est close par $\underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1}$-unions partitionnées, et $\xi < \lambda_C(\Gamma)$. ∎

Il est immédiat que $\lambda_D^- \leqslant \lambda_D^+$.

LEMME 6. *Pour $\Gamma \in \mathscr{W}^*$, $\lambda_D^+(\Gamma) \leqslant \lambda_H$.*

La démonstration de ce lemme se trouve dans [Lo] — et est très facile par induction: on définit, pour u de niveau $\xi = 1+\eta$, une description u^* telle que $(\Gamma_{u^*})^\eta = \Gamma_u$: Intuitivement, u^* est obtenue à partir de u en remplaçant chaque ordinal de niveau $1+\zeta$ dans u par $1+\zeta'$ tel que $1+\eta+\zeta' = 1+\zeta$.

Il reste à montrer que $\lambda_C \leqslant \lambda_D^-$. Pour cela, nous utilisons le lemme suivant, qui est plus précis que ce qui est nécessaire ici, mais qui sera utilisé plus loin.

LEMME 7. *Si $u \in \mathcal{D}$ avec $u(0) = \xi \geqslant 1$, et $A \in \Gamma_u$, il existe une partition dénombrable $(B_i)_{i \in I}$ de ω^ω en ensembles $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ telle que, pour tout i, $A \cap B_i$ soit — ou $\emptyset$ — ou B_i — ou un ensemble d'une classe Γ_i de niveau $> \xi$ contenue dans $\Delta(\Gamma_u)$.*

Puisque les classes de niveau $> \xi$ sont stables par intersections avec les ensembles $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ et que tout $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ est union dénombrable de $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ disjoints, il suffit de montrer l'existence d'un ordinal dénombrable γ et d'une famille croissante $(C_\zeta)_{\zeta \leqslant \gamma}$ d'ensembles $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ avec $C_\gamma = \omega^\omega$ telle que, pour tout ζ $A \cap (C_\zeta \setminus \bigcup_{\zeta' < \zeta} C_{\zeta'})$ soit — ou $\emptyset$ — ou $(C_\zeta \setminus \bigcup_{\zeta'<\zeta} C_{\zeta'})$ — ou dans une classe Γ_ζ de niveau $> \xi$ contenue dans $\Delta(\Gamma_u)$. Ceci se fait par induction sur $u \in \mathcal{D}$. Les cas où $u(1) = 1, 2, 3$ sont immédiats en prenant $\gamma = u(2)$ pour $u(1) = 1$ ou 2, $\gamma = u(2) + u(2)$ pour $u = 3$, et pour $(C_\zeta)_{\zeta < \gamma}$ les ensembles $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ intervenant dans les ensembles $D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi)$ séparants.

Montrons-le si $u(1) = 5$, le cas où $u(1) = 4$ en étant un cas particulier. Alors $\Gamma_u = \mathrm{SD}_\eta(\mathrm{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_{u_n})), \Gamma_{u^*})$ avec $u_n(0) > \xi$, (Γ_{u_n}) strictement croissante, et $u^*(0) \geqslant \xi$ (ou 0), $\Gamma_{u^*} \subset \bigcup_n \Gamma_{u_n}$.

Si $A \in \Gamma_u$, il existe une famille croissante $(C_\zeta)_{\zeta<\eta}$ de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, pour chaque ζ une partition $(W_{\zeta,n})_{n\in\omega}$ de C_ζ en $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, et pour tout (ζ, n) un ensemble $A_{\zeta,n} \in \Gamma_{u_n}$ contenu dans $W_{\zeta,n} \setminus \bigcup_{\theta<\zeta} C_\theta$ tels que $A = (\bigcup_{\zeta,n} A_{\zeta,n}) \cup (A^* \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} C_\zeta)$ avec $A^* \in \Gamma_{u^*}$. Par hypothèse d'induction il existe une famille croissante $(C^*_\zeta)_{\zeta \leqslant \gamma^*}$ d'ensembles $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ avec $C^*_{\gamma^*} = \omega^\omega$ telle que pour tout ζ $(C^*_\zeta \setminus \bigcup_{\theta<\zeta} C^*_\theta) \cap A^*$ soit — ou $\emptyset$ — ou $(C^*_\zeta \setminus \bigcup_{\theta<\zeta} C^*_\theta)$ — ou dans une classe de niveau $> \xi$ inférieure à Γ_{u^*} donc à Γ_u. Si on pose

$$E_{\zeta\cdot\omega+n} = (\bigcup_{\theta<\zeta} C_\theta) \cup (\bigcup_{p \leqslant n} W_{\zeta,p}) \qquad \text{si } \zeta < \eta$$

$$E_{\eta\cdot\omega+\zeta} = (\bigcup_{\theta<\zeta} C_\theta) \cup C^*_\zeta \qquad \text{si } \zeta \leqslant \gamma^*$$

et $\gamma = \eta\cdot\omega + \gamma^*$, on obtient la famille $(E_\zeta)_{\zeta\leqslant\gamma}$ cherchée.

THÉORÈME 8. *Si Γ est une classe dans $\mathscr{W}$, avec $\underset{\sim}{\Delta}^0_3 \subset \Gamma$, on a*

$$\lambda_C(\Gamma) = \lambda_H(\Gamma) = \lambda_E(\Gamma) = \lambda_D^-(\Gamma) = \lambda_D^+(\Gamma)\,.$$

En particulier, tous les suprema des définitions sont atteints. Nous noterons dorénavant $\lambda(\Gamma)$ la valeur commune de ces niveaux.

Il reste à voir que $\lambda_c(\Gamma) \leqslant \lambda_D^-(\Gamma)$, d'après les lemmes 4, 5, 6.

Quitte à remplacer Γ par $\check{\Gamma}$, nous pouvons supposer $\Gamma = \Gamma_u$, avec $\lambda_D^-(\Gamma) = u(0) = \xi$. Supposons que $\lambda_c(\Gamma) > \xi$, i.e. que Γ — et donc $\check{\Gamma}$ — est close par $\underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1}$-unions partitionnées. Par le lemme 7, si $A \in \Gamma$, A est une $\underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1}$-union partitionnée d'ensembles dans $\Delta(\Gamma)$, et donc $A \in \underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1} - \mathrm{PU}(\check{\Gamma}) = \check{\Gamma}$. Ceci contredit le fait que Γ n'est pas ambiguë. ■

Nous introduisons maintenant les notions de paire réductrice pour une classe $\Gamma \in \mathscr{W}$ et de réduction faible.

Soit $\Gamma \in \mathscr{W}$, A_0 et A_1 deux parties disjointes de ω^ω. On dit que (A_0, A_1) est une *paire réductrice pour* Γ si, pour toute paire (B_0, B_1) de parties disjointes appartenant à Γ, il existe une fonction continue $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ avec $f^{-1}(A_0) = B_0$ et $f^{-1}(A_1) = B_1$.

On dit que la classe Γ a la *propriété de réduction faible* si elle n'a pas la propriété de séparation et s'il existe une paire (A_0, A_1) d'éléments de Γ qui est réductrice pour Γ.

THÉORÈME 9. *Si Γ a la propriété de réduction, il existe une paire (A_0, A_1) d'éléments de Γ dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$ qui est universelle pour les paires disjointes d'éléments de Γ.*

Soit H un ensemble universel pour Γ. Si

$$A'_0 = \{(\alpha, \beta_0, \beta_1) \in \omega^\omega \times \omega^\omega \times \omega^\omega \colon (\alpha, \beta_0) \in H\}, \quad \text{et}$$
$$A'_1 = \{(\alpha, \beta_0, \beta_1) \in \omega^\omega \times \omega^\omega \times \omega^\omega \colon (\alpha, \beta_1) \in H\}$$

et si on identifie $\omega^\omega \times \omega^\omega$ à ω^ω, (A'_0, A'_1) est une paire d'éléments de Γ dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$ qui est universelle pour les paires d'éléments de Γ. Si la paire (A_0, A_1) d'éléments de Γ réduit la paire (A'_0, A'_1), on vérifie aisément qu'elle est universelle pour les paires disjointes d'éléments de Γ.

THEOREME 10. *S'il existe une paire d'éléments disjoints de Γ universelle pour les paires disjointes, Γ a la propriété de réduction faible.*

Il est clair qu'une paire universelle pour les paires disjointes est réductrice. De plus, si Γ avait la propriété de séparation, il existerait un élément B dans $\Delta(\Gamma)$ qui séparerait A_0 de A_1. Il est clair alors que B serait universel pour $\Delta(\Gamma)$, ce qui est impossible d'après l'argument classique de la diagonale.

Pour "la plupart" des classes Γ, l'hypothèse qu'existe une paire réductrice entraîne que Γ est dans COSEP.

En effet, si Γ a la propriété de séparation et si (A_0, A_1) est une paire réductrice, tout élément B de $\Delta(\Gamma)$ qui sépare A_0 de A_1 doit être complet pour $\Delta(\Gamma)$; il en résulte que $\Delta(\Gamma)$ est une classe de Wadge ambiguë. En particulier, si Γ est de niveau $\geqslant 2$, ceci est impossible, par les connaissances générales sur les classes de Wadge (cf. [Lo]).

Néanmoins, on peut voir qu'il existe des paires réductrices pour $\underset{\sim}{\Pi}^0_1$, par exemple.

Pour donner un critère de type ensembliste pour qu'une paire soit réductrice, nous définissons maintenant la propriété $(*)$. On dira que deux paires disjointes (A_0, A_1) et (B_0, B_1) *ont la propriété* $(*)$ si $A_0 \cap B_0 = \emptyset$ et $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ et $\check{A}_0 \cap \check{A}_1 \cap \check{B}_0 \cap \check{B}_1 = \emptyset$.

THÉORÈME 11. *Soient $\Gamma \in \mathscr{W}$ et (A_0, A_1) une paire de parties disjointes. Si (A_0, A_1) n'est pas réductrice pour Γ, il existe une paire (B_0, B_1) d'éléments disjoints de Γ telle que (A_0, A_1) et (B_0, B_1) aient $(*)$. Inversement, si Γ est de niveau $\geqslant 2$, et s'il existe une paire (B_0, B_1) d'éléments disjoints de Γ telle que (A_0, A_1) et (B_0, B_1) aient $(*)$, (A_0, A_1) n'est pas réductrice pour Γ.*

Si (A_0, A_1) n'est pas réductrice, il existe une paire (C_0, C_1) d'éléments disjoints de Γ pour laquelle n'existe aucune fonction continue $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ avec $f^{-1}(A_0) = C_0$ et $f^{-1}(A_1) = C_1$. On considère le jeu suivant, où le joueur I joue $\alpha \in \omega^\omega$ et le joueur II joue $\beta \in \omega^\omega$, et où II gagne si

$$(\alpha \in C_0 \leftrightarrow \beta \in A_0) \quad \text{et} \quad (\alpha \in C_1 \leftrightarrow \beta \in A_1).$$

Ce jeu est borélien, donc déterminé, et si II avait une stratégie gagnante, cette stratégie définirait une fonction f telle que $C_0 = f^{-1}(A_0)$ et $C_1 = f^{-1}(A_1)$, ce qui est impossible. Donc I a une stratégie gagnante, qui définit une fonction $g\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ telle que $g^{-1}(C_0) \cap A_0 = \emptyset$, $g^{-1}(C_1) \cap A_1 = \emptyset$ et $g^{-1}(\check{C}_0 \cap \check{C}_1) \cap (\check{A}_0 \cap \check{A}_1) = \emptyset$. Donc $B_0 = g^{-1}(C_0)$ et $B_1 = g^{-1}(C_1)$ sont disjoints, appartiennent à Γ, et (A_0, A_1) et (B_0, B_1) ont $(*)$.

Supposons maintenant que $\lambda(\Gamma) \geqslant 2$, que (A_0, A_1) est réductrice et que (A_0, A_1) et (B_0, B_1) ont $(*)$, et cherchons une contradiction.

On identifie ω^ω à $X = (\omega \cup \{-1\})^\omega$, et on considère $G = \{\alpha \in (\omega \cup \{-1\})^\omega\colon \{n\colon \alpha(n) \neq -1\}$ est infini$\}$ qui est $\underset{\sim}{\Pi}^0_2$ dans X et l'application $\varphi\colon G \to \omega^\omega$ qui à un α associe la suite de ses termes distincts de -1. Cette application φ est continue. Donc $\varphi^{-1}(B_0)$ et $\varphi^{-1}(B_1)$ sont les traces sur G d'éléments de Γ: en effet, il existe une opération de Hausdorff D telle que $\Gamma = D(\underset{\sim}{\Sigma}^0_1)$. Alors il existe pour $i = 0, 1$ une suite d'ouverts $(U^i_n)_{n\in\omega}$ telle que $B_i = D((U^i_n))$. Et puisque $\varphi^{-1}(U^i_n)$ est ouvert dans G, il existe V^i_n ouvert de X tel que $V^i_n \cap G = \varphi^{-1}(U^i_n)$. Alors

$$\varphi^{-1}(B_i) = D((V^i_n)) \cap G.$$

Puisque Γ est de niveau $\geqslant 2$, il existe une classe Γ^* et un $\eta \geqslant 1$ tels que Γ soit la classe η-expansée de Γ. Il existe donc une fonction ψ de classe de Baire η de X dans ω^ω, un fermé F de ω^ω et deux ensembles B_0^* et B_1^* dans Γ^* tels que $G = \psi^{-1}(F)$ et que $\psi^{-1}(B_0^*)$ (resp. $\psi^{-1}(B_1^*)$) soit un ensemble dans Γ dont la trace sur G est $\varphi^{-1}(B_0)$ (resp. $\varphi^{-1}(B_1)$).

Alors, si ρ est une rétraction de ω^ω sur F (c'est-à-dire une application continue de ω^ω dans F telle que $\rho(\alpha) = \alpha$ pour $\alpha \in F$), les ensembles $B_i^{**} = \rho^{-1}(B_i^*)$ $(i = 0, 1)$ sont dans Γ^*, disjoints, et ont même trace sur F que B_i^*. Donc, si on pose $B_i' = \psi^{-1}(B_i^{**})$, on a $\varphi^{-1}(B_i) = B_i' \cap G$, $B_i \in \Gamma$ et $B_0' \cap B_1' = \emptyset$.

Puisque (A_0, A_1) est réductrice, il existe $f\colon X \to \omega^\omega$ telle que $f^{-1}(A_0) = B_0'$ et $f^{-1}(A_1) = B_1'$. On peut alors déterminer une I-stratégie $\tau\colon (\omega \cup \{-1\})^{<\omega} \to \omega \cup \{-1\}$ telle que, pour $\alpha \in X$, $\tau^*(\alpha) \in G$ et $\varphi(\tau^*(\alpha)) = f(\alpha)$. Il suffit d'intercaler des termes (-1) entre les coordonnées de $f(\alpha)$ de sorte que la $p^{\text{ième}}$ coordonnée de α soit jouée à un coup d'indice q assez grand pour que

$$(\beta\restriction_q = \alpha\restriction_q) \to \big(f(\alpha)(p) = f(\beta)(p)\big).$$

Si ψ est la II-stratégie: $\langle\alpha(0), \ldots, \alpha(n)\rangle \to \alpha(n)$, les stratégies τ et ψ construisent ensemble un $\alpha \in X$ tel que $\tau^*(\alpha) = \alpha$, donc $\alpha \in G$. Si $\varphi(\alpha) \in B_0$, $\alpha \in B_0'$,

$$\varphi(\tau^*(\alpha)) = \varphi(\alpha) = f(\alpha) \in A_0.$$

De même si $\varphi(\alpha) \in B_1$, $\alpha \in B_1'$ et $f(\alpha) = \varphi(\tau^*(\alpha)) = \varphi(\alpha) \in A_1$. Et si $\varphi(\alpha) \notin B_0 \cup B_1$, $f(\alpha) = \varphi(\tau^*(\alpha)) = \varphi(\alpha) \notin A_0 \cup A_1$. Et ceci est impossible puisque (A_0, A_1) et (B_0, B_1) ont $(*)$.

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

Soit $\Gamma \in \mathscr{W}$. Nous définissons la classe $\operatorname{Red}\Gamma$ comme la plus petite classe $\Lambda \in$ COSEP qui contienne Γ et pour laquelle il existe A_0 et A_1 disjoints dans $\Lambda \cup \check{\Lambda}$ tels que la paire (A_0, A_1) soit réductrice pour Γ.

Notons d'abord qu'une telle classe existe car, pour un $\xi < \omega_1$, on a $\Gamma \subset \underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ et puisque $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ a la propriété de réduction, donc de réduction faible, une paire réductrice pour $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ est réductrice pour Γ.

Lemme 12. *Pour toute $\Gamma \in \mathscr{W}$, $\lambda(\Gamma) \leqslant \lambda(\operatorname{Red}\Gamma)$.*

Supposons que $\lambda(\Gamma) > \xi = \lambda(\operatorname{Red}\Gamma)$. Soit (A_0, A_1) une paire réductrice pour Γ, avec $A_0, A_1 \in \operatorname{Red}\Gamma \cup (\operatorname{Red}\Gamma)\check{}$.

D'après le lemme 7, il existe deux partitions (C_m) et (D_n) de ω^ω en $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ telles que chaque $C_m \cap A_0$ (resp. chaque $D_n \cap A_1$) soit, ou $\emptyset$, ou C_m (resp. D_n) ou appartienne à une classe de niveau $\geqslant \xi+1$ inférieure à $\Gamma' = \operatorname{Red}\Gamma$.

Alors les $(C_m \cap D_n)_{m,n\in\omega}$ forment une partition en $\underset{\sim}{\Pi}^0_\xi$ telle que chaque $E_{m,n} = C_m \cap D_n$ coupe A_0 et A_1 en $\emptyset$, en $E_{m,n}$ ou en un ensemble d'une classe de niveau $\geqslant \xi+1$ inférieure à Γ'. Il en résulte que $(A_0 \cap E_{m,n}, A_1 \cap E_{m,n})$ n'est réductrice pour Γ pour aucun (m, n). Il existe donc, d'après le théorème 11, une paire $(B^0_{m,n}, B^1_{m,n})$ d'éléments disjoints de Γ telle que $(A_0 \cap E_{m,n}, A_1 \cap E_{m,n})$ et $(B^0_{m,n}, B^1_{m,n})$ ait $(*)$. Et si on pose

$$B_0 = \bigcup_{m,n} B^0_{m,n} \cap E_{m,n}, \quad B_1 = \bigcup_{m,n} B^1_{m,n} \cap E_{m,n}$$

on vérifie sans peine que (A_0, A_1) et (B_0, B_1) ont $(*)$. De plus, puisque $(E_{m,n})$ est une $\underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1}$-partition et que $\lambda(\Gamma) \geqslant \xi+1$, B_0 et B_1 sont dans Γ. Enfin $\lambda(\Gamma) \geqslant \xi+1 \geqslant 2$; donc par le théorème 11, la paire (A_0, A_1) ne peut être réductrice pour Γ.

Cette contradiction achève la démonstration.

Théorème 13. *Soit Γ^* une classe de Wadge de niveau $> \xi$. Alors $\Gamma = \operatorname{Sep}\big(L_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi), \Gamma^*\big)$ n'a pas la propriété de réduction faible. Si, de plus, Γ_* est une classe de niveau $\geqslant \xi$ inférieure à Γ^*, $\Gamma' = \operatorname{Bisep}\big(D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi), \Gamma^*, \Gamma_*\big)$ n'a pas la propriété de réduction faible.*

Puisque Γ^* et $\check{\Gamma}^*$ sont de niveau $\geqslant 2$ elles ne peuvent avoir toutes deux une paire réductrice. Si Γ^* n'a pas de paire réductrice (dans Γ^*) et si (A_0, A_1) est une paire réductrice pour Γ^*, si H^* est complet dans Γ^*, les paires $(H^*, \emptyset)$ et $(\emptyset, H^*)$ sont des paires disjointes d'éléments de Γ^*. Donc ni A_0, ni A_1 n'est dans $\check{\Gamma}^*$. Il en résulte que $\Gamma^* < \operatorname{Red}\Gamma^*$, et que, puisque $\operatorname{Red}\Gamma^*$ est de niveau $\geqslant \xi+1$,

$$\begin{aligned}\Gamma = \operatorname{Sep}(D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi), \Gamma^*) &\subset \underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1}-\operatorname{PU}(\Gamma^* \cup \check{\Gamma}^*)\\ &\subset \underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1}-\operatorname{PU}(\operatorname{Red}\Gamma^*) = \operatorname{Red}\Gamma^*,\end{aligned}$$

l'inclusion étant stricte puisque Γ et $\operatorname{Red}\Gamma^*$ n'ont pas même niveau. Et si Γ avait la propriété de réduction faible, il existerait une paire réductrice pour Γ, donc pour Γ^*, formée d'éléments de Γ. Et on aurait $\operatorname{Red}\Gamma^* \subset \Gamma$. L'argument est identique si $\check{\Gamma}^*$ ne contient pas de paire réductrice.

Enfin, la même démonstration montre que Γ' ne peut avoir la propriété de réduction faible.

THÉORÈME 14. *Soit (Γ_n) une suite strictement croissante de classes de niveaux $> \xi$. Soit Γ_* une classe de niveau $\geqslant \xi$ contenue dans l'une des Γ_n. Si $\Gamma^* = \operatorname{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n))$ ou $\Gamma = \operatorname{SD}_\eta(\Gamma^*, \Gamma_*)$ a la propriété de réduction faible, il existe une suite (p_n) telle que la suite $(\Gamma'_n) = (\operatorname{Red}\Gamma_{p_n})$ soit strictement croissante et vérifie*

$$\Gamma^* = \operatorname{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma'_n))$$

Puisque Γ^* est le cas particulier $\eta = 1$ et $\Gamma_* = \{\emptyset\}$ de Γ, il suffit de considérer le deuxième cas. S'il existe un n tel que $\operatorname{Red}\Gamma_n \not\subset \bigcup_p \Gamma_p$, la classe $\operatorname{Red}\Gamma_n$ est de niveau $\geqslant \xi+1$ et

$$\Gamma \subset \underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1} - \operatorname{PU}(\bigcup_p \Gamma_p) \subset \underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1} - \operatorname{PU}(\operatorname{Red}\Gamma_n) = \operatorname{Red}\Gamma_n .$$

Et comme plus haut, si Γ avait la propriété de réduction faible, on aurait $\operatorname{Red}\Gamma_n \subset \Gamma$. Puisque Γ et $\operatorname{Red}\Gamma_n$ n'ont pas même niveau, on n'a pas $\Gamma = \operatorname{Red}\Gamma_n$. Il existe donc pour tout n un p tel que $\operatorname{Red}\Gamma_n \subset \Gamma_p$. Donc $\bigcup_n \operatorname{Red}\Gamma_n = \bigcup_n \Gamma_n$. D'où le résultat.

THÉORÈME 15. *Soient (Γ_n) une suite strictement croissante de classes de niveaux $> \xi$, Γ_* une classe de niveau $\geqslant \xi$ contenue dans $\bigcup \Gamma_n$. On pose $\Gamma^* = \operatorname{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n))$ et $\Gamma = \operatorname{SD}_\eta(\Gamma^*, \Gamma_*)$ et on suppose que pour tout n $\operatorname{Red}\Gamma_n \subset \bigcup_p \Gamma_p$. Si, de plus, $\xi = 1+\theta$ et si Λ est une classe telle que $\Lambda^{(\theta)} = \Gamma_*$, on a*

$$\operatorname{Red}\Gamma \supset \operatorname{SD}_\eta(\Gamma^*, (\operatorname{Red}\Lambda)^{(\theta)})$$

Supposons pour commencer $\xi = 1$. Si $\operatorname{Red}\Gamma$ est strictement inférieure à $\operatorname{SD}_\eta(\Gamma^*, \operatorname{Red}\Gamma_*)$, il existe A_0 et A_1 disjoints, dans $\Delta(\operatorname{SD}_\eta(\Gamma^*, \operatorname{Red}\Gamma_*))$ tels que (A_0, A_1) soit une paire réductrice pour Γ. Si on définit par induction pour $\zeta < \eta$ et $i = 0, 1$ les ouverts

$$V^i_\zeta = \{\alpha\colon \exists\, N \text{ voisinage ouvert fermé de } \alpha \text{ tel que } N \cap (A_i \setminus \bigcup_{\theta<\zeta} V^i_\theta) \in \bigcup_n \Gamma_n\}$$

on a, par hypothèse, que $C_i = A_i \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} V^i_\zeta$ est, à la fois, la trace sur $(\omega^\omega \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} V^i_\zeta)$ d'un ensemble de $\operatorname{Red}\Gamma_*$ et d'un ensemble de $(\operatorname{Red}\Gamma_*)^\smile$.

On pose $F = \omega^\omega \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} (V^0_\zeta \cup V^1_\zeta)$. Il existe alors une rétraction ρ sur le fermé F.

Alors $C'_0 = \rho^{-1}(C_0)$ et $C'_1 = \rho^{-1}(C_1)$ sont disjoints et appartiennent à $\Delta(\operatorname{Red}\Gamma_*)$. Il existe donc une paire (B_0, B_1) d'éléments disjoints de Γ_* telle que, pour aucune f continue: $\omega^\omega \to \omega^\omega$, on ne puisse avoir $f^{-1}(C'_0) = B_0$ et $f^{-1}(C'_1) = B_1$.

Soit H un élément complet de $\Lambda = \operatorname{SD}_\eta(\Gamma^*, \{\emptyset\})$. Si on définit inductivement, pour $\zeta < \eta$

$$U_\zeta = \{\alpha\colon \exists\, N \text{ voisinage ouvert fermé de } \alpha \text{ tel que } N \cap (H \setminus \bigcup_{\theta<\zeta} U_\theta) \in \bigcup_n \Gamma_n\}$$

les ouverts $(U_\zeta)_{\zeta<\eta}$ recouvrent H, mais pas ω^ω: on aurait sinon $H \in \check{\Lambda}$, contrairement au fait que H est complet. Il existe donc $\alpha_0 \in \omega^\omega \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} U_\zeta$.

On définit maintenant deux ensembles B'_0 et B'_1 dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$ par

$$B'_0 = \{(\alpha, \beta)\colon \alpha \in H \text{ ou } (\alpha \notin \bigcup_{\zeta<\eta} U_\zeta \text{ et } \beta \in B_0)\}$$

$$B'_1 = \{(\alpha, \beta)\colon \alpha \in (\bigcup_{\zeta<\eta} U_\zeta) \setminus H \text{ ou } (\alpha \notin \bigcup_{\zeta<\eta} U_\zeta \text{ et } \beta \in B_1)\}$$

Alors (B'_0, B'_1) est une paire disjointe de Γ. Il existe donc une fonction $g\colon \omega^\omega \times \omega^\omega \to \omega^\omega$ telle que $g^{-1}(A_0) = B'_0$ et $g^{-1}(A_1) = B'_1$.

On voit clairement par induction sur $\zeta < \eta$ que pour $i = 0, 1$ l'ensemble des (α, β) au voisinage desquels $B'_i \setminus \bigcup_{\theta<\zeta} (U_\theta \times \omega^\omega)$ est dans $\bigcup_n \Gamma_n$ est $U'_\zeta = U_\zeta \times \omega^\omega$. Il en résulte que

$$g^{-1}(V^i_\zeta) \subset U'_\zeta \quad \text{pour } i = 0, 1 \text{ et } \zeta < \eta ,$$

donc que $g^{-1}(F) \supset \omega^\omega \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} U'_\zeta \supset \{\alpha_0\} \times \omega^\omega$.

Alors si f est définie par $f(\beta) = g(\alpha_0, \beta)$, on a

$$f^{-1}(A_i) = f^{-1}(C_i) = f^{-1}(C'_i) = \{\beta\colon (\alpha_0, \beta) \in B'_i\} = B_i ,$$

contrairement au choix de (B_0, B_1). Ceci termine le cas $\xi = 1$.

Si maintenant $1+\theta = \xi \geqslant 2$, la classe $\operatorname{Red}\Gamma$ est de niveau $\geqslant 1+\theta$. Il existe donc une classe Λ_0 telle que $\operatorname{Red}\Gamma = \Lambda_0^{(\theta)}$. Puisque Γ_n est de niveau $> \xi$, il existe une classe Γ'_n de niveau $\geqslant 2$ telle que $\Gamma_n = (\Gamma'_n)^{(\theta)}$. Alors, si $\Gamma'^* = \operatorname{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_1, (\Gamma'_n))$, on a $\Gamma^* = (\Gamma'^*)^{(\theta)}$ et $\Gamma = (\Gamma')^{(\theta)}$ si $\Gamma' = \operatorname{SD}_\eta((\Gamma'^*, \Lambda)$.

Si Λ_0 est strictement inférieure à $\Gamma'' = \operatorname{SD}_\eta((\Gamma'^*, \operatorname{Red}\Lambda)$ il n'existe pas de paire réductrice pour Γ' dans $\Lambda_0 \cup \check{\Lambda}_0$, en vertu de ce qui précède.

Si (A_0, A_1) est une paire réductrice pour Γ dans $\Lambda_0^{(\theta)} \cup \check{\Lambda}_0^{(\theta)}$, il existe une fonction f de classe de Baire θ et deux éléments A'_0 et A'_1 de $\Lambda_0 \cup \check{\Lambda}_0$ tels que $A_0 = f^{-1}(A'_0)$ et $A_1 = f^{-1}(A'_1)$. On peut de plus supposer f injective et d'image fermée Φ dans ω^ω. Alors $A'_0 \cap \Phi$ et $A'_1 \cap \Phi$ sont disjoints, et quitte à remplacer A'_0 et A'_1 par $\rho^{-1}(A'_0)$ et $\rho^{-1}(A'_1)$, où ρ est une rétraction sur Φ, on se ramène au cas où A'_0 et A'_1 sont disjoints.

La paire (A'_0, A'_1) n'étant pas réductrice pour Γ', il existe B'_0 et B'_1 dans Γ' tels que (A'_0, A'_1) et (B'_0, B'_1) aient (*). Mais, avec $B_0 = f^{-1}(B'_0)$ et $B_1 = f^{-1}(B'_1)$, (A_0, A_1) et (B_0, B_1) ont aussi (*). Et par le théorème 11, le niveau de Γ étant $\geqslant 2$, ceci entraîne que (A_0, A_1) n'est pas réductrice pour Γ. Cette contradiction prouve que $\Lambda_0 \supset \Gamma''$ ou $\Lambda_0 = \check{\Gamma}''$. Mais, puisque Λ_0 et Γ'' sont dans COSEP, ce dernier cas est impossible.

Donc $\Lambda_0^{(\theta)} = \operatorname{Red}\Gamma \supset (\Gamma'')^{(\theta)}$, ce qu'il fallait démontrer.

DÉFINITION 16. Nous appelons $\mathscr{R}$ le plus petit sous-ensemble de $\mathscr{W}$ satisfaisant:

(a) $\{\emptyset\} \in \mathscr{R}$.

(b) $\forall \eta \geqslant 1\ \forall \xi \geqslant 1\ D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi) \in \mathscr{R}$.

(c) si (Γ_n) est une suite strictement croissante d'éléments de $\mathscr{R}$, de niveaux $> \xi$ et croissants, $\mathrm{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n)) \in \mathscr{R}$.

(d) si (Γ_n) est une suite strictement croissante d'éléments de $\mathscr{R}$, de niveaux $> \xi$ et croissants, si Γ_* est dans $\mathscr{R}$, de niveau $\geqslant \xi$ et contenue dans $\bigcup\limits_n \Gamma_n$,

$$\forall \eta \geqslant 1 \qquad \mathrm{SD}_\eta(\mathrm{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n)), \Gamma_*) \in \mathscr{R}.$$

Si $\Gamma \in \mathscr{W}$, $A \in \Gamma$ et si φ est une Γ-norme sur A, on prolonge toujours φ en φ^* sur ω^ω en donnant à φ^* une valeur constante sur $\omega^\omega \setminus A$, supérieure à toutes les valeurs prises sur A. Alors, pour $\alpha \in A$, la relation $(\varphi(\alpha) \leqslant \varphi(\beta))$ ou $\beta \notin A)$ [resp. $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ ou $\beta \notin A$] devient $(\varphi(\alpha) \leqslant \varphi^*(\beta))$ [resp. $\varphi(\alpha) < \varphi^*(\beta)$].

L'énoncé suivant est classique.

THÉORÈME 17 (cf. [M]). *Si Γ a la propriété de norme, Γ a la propriété de réduction.*

Soient A_0 et A_1 appartenant à Γ. On considère dans $\{0, 1\} \times \omega^\omega \simeq \omega^\omega$ les ensembles $B_0 = \{(0, \alpha): \alpha \in A_0\}$ et $B_1 = \{(1, \alpha): \alpha \in A_1\}$. Comme Γ est stable par $\underset{\sim}{\Delta}^0_1$-unions partitionnées, $B_0 \cup B_1$ est dans Γ, et il existe une Γ-norme φ sur $B_0 \cup B_1$.

Soient

$$A'_0 = \{\alpha: \alpha \in A_0 \text{ et } \varphi(0, \alpha) \leqslant \varphi^*(1, \alpha)\},$$

$$A'_1 = \{\alpha: \alpha \in A_1 \text{ et } \varphi(1, \alpha) < \varphi^*(0, \alpha)\}.$$

On vérifie sans peine que A'_0 et A'_1 sont dans Γ, et que (A'_0, A'_1) réduit (A_0, A_1).

On définit maintenant une notion voisine de la notion de norme.

DÉFINITION 18. Soient $\Gamma \in \mathscr{W}$ et A un élément de Γ. On appelle famille normante pour A une famille $(A_i, \xi_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble dénombrable, $0 \leqslant \xi_i < \omega_1$, telle que:

(a) $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de A,

(b) pour tout i $A_i \in \underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_i}$,

(c) pour toute famille $(C_i)_{i \in I}$ et toute famille (V_ξ) de parties de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ telle que $C_i \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_{\xi_i}$ et $V_\xi \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ l'ensemble $\bigcup\limits_{i \in I} (A_i \times \omega^\omega) \cap (C_i \setminus V_{\xi_i})$ est dans Γ.

Pour $\xi = 0$, on posera $\underset{\sim}{\Sigma}^0_0 = \underset{\sim}{\Pi}^0_0 = \underset{\sim}{\Delta}^0_1$.

THÉORÈME 19. *Soient $\Gamma \in \mathscr{W}$ et A un élément de Γ. Si A possède une famille normante, il existe une Γ-norme sur A.*

Quitte à réindexer la famille normante, on peut supposer $I = \omega$. Si on définit φ sur A par

$$\varphi(\alpha) = \xi_n \cdot \omega + n \quad \text{ si } \alpha \in A_n.$$

φ est à valeurs dans $\gamma \cdot \omega$, où $\gamma = \sup\{\xi_i + 1: i \in I\}$. De plus

$$G = \{(\alpha, \beta): \alpha \in A \text{ et } \varphi(\alpha) \leqslant \varphi^*(\beta)\} = \bigcup_{n \in \omega} A_n \times [\omega^\omega \setminus \bigcup \{A_p: \xi_p \cdot \omega + p < \xi_n \cdot \omega + n\}]$$
$$= \bigcup_{n \in \omega} (A_n \times \omega^\omega) \cap (\omega^\omega \times C_n \setminus \omega^\omega \times V_{\xi_n})$$

si on a posé

$$C_n = \omega^\omega \setminus \bigcup \{A_p: \xi_p = \xi_n \text{ et } p < n\} \quad \text{et} \quad V_\xi = \bigcup \{A_p: \xi_p < \xi\}.$$

Si $\xi_p < \xi$, $A_p \in \underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_p} \subset \underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$; donc $V_\xi \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, pour $\xi \geqslant 1$, et $V_0 = \emptyset$. Et

$$\bigcup \{A_p: \xi_p = \xi_n \text{ et } p < n\}$$

est une union finie de $\underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_n}$. Il en résulte que G est dans Γ. On voit de même que $\{(\alpha, \beta): \alpha \in A \text{ et } \varphi(\alpha) < \varphi^*(\beta)\}$ est dans Γ. Donc φ est une Γ-norme.

THÉORÈME 20. *Si Γ est dans $\mathscr{R}$, tout élément de Γ possède une famille normante $(A_i, \xi_i)_{i \in I}$. De plus, si $\theta_0 < \lambda(\Gamma)$, on peut avoir $\xi_i \geqslant \theta_0$ pour tout i.*

Soit $\mathscr{R}'$ l'ensemble des classes Γ de $\mathscr{R}$ vérifiant l'énoncé du théorème.

(a) Il est clair que $\{\emptyset\} \in \mathscr{R}'$.

(b) Si $A \in \Gamma = D_\eta(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi)$ et $\theta_0 < \xi$, il existe une famille croissante $(B_\zeta)_{\zeta < \eta}$ de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ telle que

$$A = \bigcup_{\zeta \in P} (B_\zeta \setminus \bigcup_{\theta < \zeta} B_\theta)$$

si P désigne l'ensemble des $\zeta < \eta$ de parité opposée à celle de η.

Si η est un entier impair $2n+1$, on a $A = \bigcup\limits_{p=1}^{n} (B_{2p} - B_{2p-1}) \cup B_0$. Pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une partition $(W_{p,q})_{q \in \omega}$ de B_{2p} en $\underset{\sim}{\Delta}^0_\xi$ et on pose

$$A_{p,q} = W_{p,q} \setminus B_{2p-1} \text{ et } \xi_{p,q} = \xi.$$

Il existe une partition $(W_{0,q})_{q \in \omega}$ de B_0 avec $W_{0,q} \in \underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_q}$ où $\theta_0 \leqslant \xi_q < \xi$, et on pose $A_{0,q} = W_{0,q}$ et $\xi_{0,q} = \xi_q$. Si $I = (n+1) \times \omega$ et si pour $(p, q) \in I$ on définit $A_{p,q}$ et $\xi_{p,q}$ comme ci-dessus les conditions (a) et (b) sont vérifiées.

Soient maintenant $(C_{p,q})$ et (V_ξ) des familles de parties de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ avec $C_{p,q} \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_{\xi_{p,q}}$ et $V_\xi \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$. On définit

$$D_0 = [\bigcup_q (W_{0,q} \times \omega^\omega) \cap (C_{0,q} \setminus V_{\xi_q})];$$

$$D_{2p-1} = (B_{2p-1} \times \omega^\omega) \cup V_\xi \text{ pour } p = 1, \ldots, n;$$

$$D_{2p} = V_\xi \cup (B_{2p-1} \times \omega^\omega) \cup [\bigcup_q (W_{p,q} \times \omega^\omega) \cap C_{p,q}] \text{ pour } 1 \leqslant p \leqslant n.$$

On vérifie sans peine que $D_p \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ pour $0 \leqslant p < 2n+1$ et que

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \times \omega^\omega) \cap (C_i \setminus V_{\xi_i}) = D_0 \cup \bigcup_{p=1}^{n} (D_{2p} \setminus D_{2p-1}) \in \Gamma.$$

Si η est pair, il existe pour tout $\zeta \in P$ une partition $(W_{\zeta,q})_{q\in\omega}$ de B_ζ en $\underset{\sim}{\Delta}^0_\xi$ et on pose

$$A_{\zeta,q} = W_{\zeta,q} \setminus (\bigcup_{\theta<\zeta} B_\theta) \qquad \xi_{\zeta,q} = \xi .$$

On pose alors $I = P\times\omega$, et la famille $(A_{\zeta,q}, \xi_{\zeta,q})_{(\zeta,q)\in I}$ vérifie les conditions a) et b).

Si $(C_{\zeta,q})$ est une famille de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ et $V_\xi \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, on définit

$$\text{si } \zeta\in P \qquad D_\zeta = V_\xi \cup [(\bigcup_{\theta<\zeta} B_\theta)\times\omega^\omega] \cup [\bigcup_q (W_{\zeta,q}\times\omega^\omega)\cap C_{\zeta,q}] ,$$

$$\text{si } \zeta\notin P \qquad D_\zeta = V_\xi \cup (B_\zeta\times\omega^\omega) .$$

On vérifie sans peine que $(D_\zeta)_{\zeta<\eta}$ est une famille croissante de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ et que

$$\bigcup_{i\in I} (A_i\times\omega^\omega)\cap(C_i\setminus V_\xi) = \bigcup_{\zeta\in P} (D_\zeta \setminus \bigcup_{\theta\in\zeta} D_\theta) \in \Gamma .$$

Enfin, si η est infini impair, on définit $(W_{\zeta,q})$, $(A_{\zeta,q})$ et $\xi_{\zeta,q} = \xi$ comme ci-dessus, et $I = P\times\omega$. La famille $(A_i, \xi_i)_{i\in I}$ vérifie les conditions (a) et (b). Et si $(C_{\zeta,q})$ est une famille de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ de $\omega^\omega\times\omega^\omega$, et $V_\xi \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, on définit

$$D_0 = \varnothing, \qquad D_1 = V_\xi ,$$

$$\text{si } \zeta = 2+\zeta' \in P \qquad D_\zeta = V_\xi \cup [(\bigcup_{\theta<\zeta'} B_\theta)\times\omega^\omega] \cup [\bigcup_q (W_{\zeta',q}\times\omega^\omega)\cap C_{\zeta',q}] ,$$

$$\text{si } \zeta = 2+\zeta' \notin P \qquad D_\zeta = V_\xi \cup (B_{\zeta'}\times\omega^\omega) .$$

On vérifie encore que, puisque $2+\eta = \eta$, $(D_\zeta)_{\zeta<\eta}$ est une famille croissante de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ et que

$$\bigcup_{i\in I} (A_i\times\omega^\omega)\cap(C_i\setminus V_\xi) = \bigcup_{\zeta\in P} (D_\zeta \setminus \bigcup_{\theta<\zeta} D_\theta) \in \Gamma .$$

Ceci montre que $\Gamma \in \mathscr{R}'$.

(c) Si (Γ_n) est une suite strictement croissante d'éléments de $\mathscr{R}'$ de niveaux $>\xi$, et $\Gamma^* = \mathrm{SU}(\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n))$, il existe pour tout A de Γ^* une suite $(B_n)_{n\in\omega}$ d'éléments deux-à-deux disjoints de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, et une suite $(A_n)_{n\in\omega}$ avec, pour tout n, $A_n \subset B_n$ et $A_n \in \Gamma_n$, dont A est réunion.

Il existe, puisque $\Gamma_n \in \mathscr{R}'$, un ensemble I_n dénombrable et une famille $(A_{n,i}, \xi_{n,i})_{i\in I_n}$, avec $\xi_{n,i} \geqslant \xi$ Γ_n-normante pour A_n. On pose

$$I = \{(n, i) \colon n\in\omega \text{ et } i\in I_n\}$$

et on considère la famille $(A_{n,i}, \xi_{n,i})_{(n,i)\in I}$. Les $(A_{n,i})$ forment une partition de A, et $A_{n,i} \in \underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_{n,i}}$.

Si $(C_{n,i})_{(n,i)\in I}$ et (V_λ) sont deux familles de parties de $\omega^\omega\times\omega^\omega$, avec $C_{n,i} \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_{\xi_{n,i}}$, et $V_\lambda \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_\lambda$, $G = \bigcup_{(n,i)\in I} (A_{n,i}\times\omega^\omega)\cap(C_{n,i}\setminus V_{\xi_{n,i}})$ est la réunion des G_n, où

$$G_n = \bigcup_{i\in I_n} (A_{n,i}\times\omega^\omega)\cap(C_{n,i}\setminus V_{\xi_{n,i}})$$

qui appartient à Γ_n par hypothèse. De plus, $G_n \subset B_n\times\omega^\omega$, et les $(B_n\times\omega^\omega)$ forment une famille de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ deux-à-deux disjoints. Donc $G\in\Gamma^*$, et Γ^* est dans $\mathscr{R}'$.

(d) Si, de plus Γ_* est de niveau $\geqslant\xi$ et $\Gamma_* \subsetneq \bigcup_n \Gamma_n$, si $\Gamma = \mathrm{SD}_\eta((\Gamma^*, \Gamma_*)$ et si $A\in\Gamma$, il existe une famille croissante $(B_\zeta)_{\zeta<\eta}$ de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, pour tout $\zeta<\eta$ une partition $(B_{\zeta,n})_{n\in\omega}$ de B_ζ en $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ et un ensemble $A_{\zeta,n}$ de Γ_n contenu dans $B_{\zeta,n} \setminus \bigcup_{\lambda<\zeta} B_\lambda$, et un ensemble A_* de Γ_* tels que

$$A = (\bigcup_{\zeta,n} A_{\zeta,n}) \cup (A_* \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} B_\zeta) .$$

Si $(A'_i, \xi_i)_{i\in I_*}$ est une Γ_*-famille normante pour A_* et si on pose

$$J_* = \{i\in I_* \mid \xi_i < \xi\}, \qquad B = \bigcup_{i\in J_*} A'_i ,$$

l'ensemble B est dans $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$, et on peut se ramener au cas où $B \subset \bigcup_{\zeta<\eta} B_\zeta = V$.

En effet, si (B', V') est une paire de $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\xi$ qui réduit (B, V) et si on pose

$$B'_\zeta = (B_\zeta\cap V')\cup B' ;$$

$$B'_{\zeta,n} = (B_{\zeta,n}\cap V')\cup B' ;$$

$$A'_{\zeta,n} = A_{\zeta,n}\cap V' \qquad \text{si } (\zeta>0 \text{ ou } n>0) ;$$

$$A'_{0,0} = (A_{0,0}\cap V')\cup(B'\setminus V) ;$$

en supposant, sans perte de généralité, que, pour tout $n\in\omega$ le niveau de Γ_n est $>\xi$, on a, puisque $B'\setminus V \in \underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi+1}$, donc $B'\setminus V \in \underset{\sim}{\Delta}^0_{\xi_0}$,

$$\forall n\in\omega\ \forall\zeta<\eta \qquad A'_{\zeta,n}\in\Gamma_n , \qquad A = (\bigcup_{\zeta,n} A'_{\zeta,n}) \cup (A_* \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} B'_\zeta) \quad \text{et} \quad B \subset \bigcup_{\zeta<\eta} B'_\zeta$$

On supposera désormais que $B \subset V = \bigcup_{\zeta<\eta} B_\zeta$. Si pour tout $(\zeta, n)\in\eta\times\omega$ $(A_{\zeta,n,i};\ \xi_{\zeta,n,i})_{i\in I_{\zeta,n}}$ est une Γ_n famille normante pour $A_{\zeta,n}$ avec $\xi_{\zeta,n,i}\geqslant\xi$, on pose $A_i = A'_i \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} B_\zeta$ pour $i\in I_*$, (donc $A_i = \varnothing$ si $i\in J_*$)

$$I = \{(\zeta, n, i);\ \zeta<\eta,\ n\in\omega,\ i\in I_{\zeta,n}\}\cup I_* .$$

Alors la famille $(A_j, \xi_j)_{j\in I}$ est une partition de A, $\xi_j \geqslant \theta_0$ et

$$A_{\zeta,n,i} \in \underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_{\zeta,n,i}} \qquad \text{si } i\in I_{\zeta,n} ;$$

$$A_i \in \underset{\sim}{\Pi}^0_{\xi_i} \qquad \text{pour } i\in I_* .$$

Enfin, si $(C_j)_{j\in I}$ et (V_λ) sont deux familles de parties de $\omega^\omega\times\omega^\omega$, avec $C_j \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_{\xi_j}$ et $V_\lambda \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_\lambda$, et si $G = \bigcup_{j\in I} (A_j\times\omega^\omega)\cap(C_j\setminus V_{\xi_j})$, on a

$$G = \bigcup_{\zeta<\eta} (A'_\zeta \setminus \bigcup_{\lambda<\zeta} B'_\lambda) \cup (A'_* \setminus \bigcup_{\zeta<\eta} B'_\zeta)$$

où on a posé

$$B'_\zeta = B_\zeta \times \omega^\omega \in \utilde{\Sigma}^0_\xi\ ;$$

$$A'_\zeta = \bigcup_n \bigcup_{i \in I_{\zeta,n}} (A_{\zeta,n,i} \times \omega^\omega) \cap (C_{\zeta,n,i} \setminus V_{\xi_{\zeta,n,i}});$$

$$A'_* = \bigcup_{i \in I_*} (A_i \times \omega^\omega) \cap (C_i \setminus V_{\xi_i}).$$

Alors $A'_* \in \Gamma_*$, $A'_\zeta \in \Gamma^*$ et B'_ζ est enveloppe de A'_ζ. Donc G est dans Γ, ce qui prouve que Γ est dans $\mathscr{R}'$.

Puisque $\mathscr{R}'$ a les mêmes propriétés de stabilité que $\mathscr{R}$, et par minimalité de $\mathscr{R}$, on a $\mathscr{R} = \mathscr{R}'$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 21. *Si $\Gamma \in \mathscr{R}$, et $\xi < \omega_1$, $\Gamma^{(\xi)} \in \mathscr{R}$.*

Ceci se montre aisément par induction. Si $\mathscr{R}''$ est l'ensemble des $\Gamma \in \mathscr{R}$ telles que $\Gamma^{(\xi)} \in \mathscr{R}$, on voit que $\mathscr{R}''$ a les mêmes propriétés de stabilité que $\mathscr{R}$, donc que $\mathscr{R}'' = \mathscr{R}$.

Lemme 22. *Si $\Gamma \in \mathscr{W}$, $\Lambda \in \mathscr{R}$ et $\Gamma \subset \Lambda$, on a* $\mathrm{Red}\,\Gamma \subset \Lambda$.

Puisque Λ a la propriété de réduction faible, il existe une paire (A_0, A_1) d'éléments de Λ qui est réductrice pour Λ, donc a fortiori pour Γ. Donc $\mathrm{Red}\,\Gamma \subset \Lambda$.

Théorème 23. *Soit $\Gamma \in \mathscr{W}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $\Gamma \in \mathscr{R}$;

(ii) *Tout élément de Γ possède une famille normante*;

(iii) *Γ a la propriété de norme*;

(iv) *Γ a la propriété de réduction*;

(v) *Γ a la propriété de réduction faible*;

De plus, pour toute classe Γ de $\mathscr{W}$, $\mathrm{Red}\,\Gamma$ *est dans* $\mathscr{R}$.

D'après les théorèmes 20, 19, 17, 9 et 10, on sait que (i) → (ii) → (iii) → (iv) → (v). Il suffit donc de montrer (v) → (i) et que $\mathrm{Red}\,\Gamma \in \mathscr{R}$ pour toute Γ dans $\mathscr{W}$.

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des $\Lambda \in \mathscr{W}$ telles que Λ ait la propriété de réduction faible sans être dans $\mathscr{R}$ *ou* que $\mathrm{Red}\,\Lambda$ ne soit pas dans $\mathscr{R}$. On veut montrer que $\mathscr{C}$ est vide.

Supposons que $\mathscr{C} \neq \emptyset$, il existerait alors dans $\mathscr{C}$ une classe minimale Λ_0, donc aussi une description $u_0 \in \mathscr{D}$ telle que $\Lambda_0 = \Gamma_{u_0}$ ou $\Lambda_0 = \check{\Gamma}_{u_0}$.

(i) Si $u_0(0) = 0$, $\Gamma_{u_0} = \{\emptyset\} \in \mathscr{R}$ et $\check{\Gamma}_{u_0} = \{\omega^\omega\}$. Et puisque $\utilde{\Sigma}^0_1 \in \mathscr{R}$, le lemme 22 entraîne que $\mathrm{Red}\,\check{\Gamma}_{u_0} = \utilde{\Sigma}^0_1 \in \mathscr{R}$.

Donc $u_0(0) \neq 0$.

(ii) Si $u_0 = \xi\hat{\ }1\hat{\ }\eta\hat{\ }u_*$, $\Gamma_{u_0} = D_\eta(\utilde{\Sigma}^0_\xi)$. Alors $\Gamma_{u_0} \in \mathscr{R}$ et $\mathrm{Red}\,\Gamma_{u_0} = \Gamma_{u_0} \in \mathscr{R}$. Donc $\Gamma_{u_0} \notin \mathscr{C}$.

Et si $\Lambda_0 = \check{\Gamma}_{u_0}$, Λ_0 n'est pas dans COSEP, donc n'a pas la propriété de réduction faible. De plus $\mathrm{Red}\,\Lambda_0$ est une classe de COSEP et de niveau $\geqslant \xi$ contenant Λ_0. Et puisque la plus petite classe de COSEP et de niveau $\geqslant \xi$ contenant Λ_0 est

$D_{\eta+1}(\utilde{\Sigma}^0_\xi)$, qui est dans $\mathscr{R}$, on a $\mathrm{Red}\,\Lambda_0 = D_{\eta+1}(\utilde{\Sigma}^0_\xi) \in \mathscr{R}$ d'après le lemme 22. Donc $u_0(1)$ ne peut être 1.

(iii) Si $u_0 = \xi\hat{\ }2\hat{\ }\eta\hat{\ }u^*$, on a $\Gamma_{u_0} = \mathrm{Sep}(D_\eta(\utilde{\Sigma}^0_\xi), \Gamma_{u^*})$, avec $\lambda(\Gamma_{u^*}) > \xi$.

Il résulte du théorème 13 que Γ_{u_0} n'a pas la propriété de réduction faible, et puisque $\check{\Gamma}_{u_0} = \mathrm{Sep}(D_\eta(\utilde{\Sigma}^0_\xi), \check{\Gamma}_{u^*})$ que $\check{\Gamma}_{u_0}$ n'a pas non plus la propriété de réduction faible.

Par ailleurs, puisque Γ_{u^*} et $\check{\Gamma}_{u^*}$ sont inférieures à Λ_0, on a $\mathrm{Red}\,\Gamma_{u^*} \in \mathscr{R}$ et $\mathrm{Red}\,\check{\Gamma}_{u^*} \in \mathscr{R}$. De plus, l'une au moins de ces deux classes, qui sont toutes deux de niveau $> \xi$, est supérieure à Γ_{u^*} et à $\check{\Gamma}_{u^*}$, donc à Λ_0. Il résulte donc du lemme 22, que $\mathrm{Red}\,\Lambda_0$ est la plus grande des deux classes $\mathrm{Red}\,\Gamma_{u^*}$ et $\mathrm{Red}\,\check{\Gamma}_{u^*}$, donc est dans $\mathscr{R}$.

Donc $u_0(1)$ ne peut être égal à 2.

(iv) Le même argument que ci-dessus montre que $u_0(1) \neq 3$.

(v) Si $u_0(1) = 4$, $\Gamma_{u_0} = \mathrm{SU}(\utilde{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n))$. Si Γ_{u_0} a la propriété de réduction faible, il résulte du théorème 14 qu'existe une suite (p_n) telle que $(\Gamma'_n) = (\mathrm{Red}\,\Gamma_{p_n})$ soit strictement croissante et que $\mathrm{SU}(\utilde{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n)) = \mathrm{SU}(\utilde{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma'_n))$. Puisque $\Gamma_{p_n} < \Lambda_0$, on a $\mathrm{Red}\,\Gamma_{p_n} = \Gamma'_n \in \mathscr{R}$. Donc $\Lambda_0 \in \mathscr{R}$ et $\mathrm{Red}\,\Lambda_0 = \Lambda_0 \in \mathscr{R}$.

Si $\Lambda_0 = \check{\Gamma}_{u_0}$, Λ_0 n'a pas la propriété de réduction faible car $\Lambda_0 \notin$ COSEP. S'il existe un n tel que $\mathrm{Red}\,\Gamma_n \not\subset \bigcup \Gamma_p$, la classe $\mathrm{Red}\,\Gamma_n$ est de niveau $> \xi$ et contient Λ_0, car

$$\Lambda_0 \subset \utilde{\Delta}^0_{\xi+1} - \mathrm{PU}(\bigcup_p \Gamma_p) \subset \utilde{\Delta}^0_{\xi+1} - \mathrm{PU}(\mathrm{Red}\,\Gamma_n) = \mathrm{Red}\,\Gamma_n\,.$$

Et puisque $\Gamma_n < \Lambda_0$, on a $\Gamma_n \notin \mathscr{C}$, donc $\mathrm{Red}\,\Gamma_n \in \mathscr{R}$, donc $\mathrm{Red}\,\Lambda_0 = \mathrm{Red}\,\Gamma_n \in \mathscr{R}$ par le lemme 22. Si au contraire $\mathrm{Red}\,\Gamma_n \subset \bigcup_p \Gamma_p$ pour tout n, on voit comme plus haut que $\Gamma_{u_0} = \check{\Lambda}_0$ est dans $\mathscr{R}$.

Alors $\mathrm{Red}\,\Lambda_0$ est une classe de niveau $\geqslant \xi$ contenant strictement $\check{\Lambda}_0$. Et la plus petite classe de niveau $\geqslant \xi$ qui contienne strictement $\check{\Lambda}_0$ et soit dans COSEP est la classe $\mathrm{SD}_1((\utilde{\Sigma}^0_\xi, \check{\Lambda}_0), \utilde{\Sigma}^0_\xi)$ qui est dans $\mathscr{R}$. D'après le lemme 22,

$$\mathrm{Red}\,\Lambda_0 = \mathrm{SD}_1((\utilde{\Sigma}^0_\xi, \check{\Lambda}_0), \utilde{\Sigma}^0_\xi) \in \mathscr{R}\,.$$

Donc $u_0(1) \neq 4$.

(vi) Si $u_0(1) = 5$, $\Gamma_{u_0} = \mathrm{SD}_\eta(\Gamma^*, \Gamma_*)$, où Γ^* est $\mathrm{SU}(\utilde{\Sigma}^0_\xi, (\Gamma_n))$ et Γ_* de niveau $\geqslant \xi$ strictement contenue dans Γ^*.

Si $\Lambda_0 = \Gamma_{u_0}$ a la propriété de réduction faible, il résulte du théorème 14 que, pour tout n, $\mathrm{Red}\,\Gamma_n \subset \bigcup_p \Gamma_p$, donc, comme ci-dessus, que $\Gamma^* \in \mathscr{R}$.

De plus, puisque Γ_* est de niveau $\geqslant \xi = 1 + \theta$, il existe une classe Λ telle que $\Lambda^{(\theta)} = \Gamma_*$. Alors $\Lambda \subset \Lambda^{(\theta)} \subset \Delta(\Lambda_0)$. Donc $\Lambda \notin \mathscr{C}$ et $\mathrm{Red}\,\Lambda \in \mathscr{R}$. Par conséquent $(\mathrm{Red}\,\Lambda)^{(\theta)} \in \mathscr{R}$ par le lemme 21. Et puisque $\Lambda \subset \mathrm{Red}\,\Lambda$, on a $\Lambda^{(\theta)} \subset (\mathrm{Red}\,\Lambda)^{(\theta)} \in \mathscr{R}$. Donc, d'après le lemme 22, $\mathrm{Red}(\Lambda^{(\theta)}) = \mathrm{Red}\,\Gamma_* \subset (\mathrm{Red}\,\Lambda)^{(\theta)}$. Par ailleurs $\Gamma_* \subset \Delta(\Gamma^*)$ et $\Gamma^* \subset \Lambda_0$. Donc $\Gamma_* \notin \mathscr{C}$ et $\mathrm{Red}\,\Gamma_* \in \mathscr{R}$. Enfin, d'après le théorème 15,

$$\Gamma_{u_0} = \mathrm{Red}\,\Gamma_{u_0} \supset \mathrm{SD}_\eta(\Gamma^*, (\mathrm{Red}\,\Lambda)^{(\theta)}) \supset \mathrm{SD}_\eta(\Gamma^*, \mathrm{Red}\,\Gamma_*) \supset \Gamma_{u_0}\,.$$

Puisque il existe n tel que $\Gamma_* \subset \Gamma_n$, on a $\operatorname{Red}\Gamma_* \subset \operatorname{Red}\Gamma_n \subset \bigcup_p \Gamma_p$. Donc $SD_\eta(\Gamma^*, \operatorname{Red}\Gamma_*) \in \mathscr{R}$ et est égal à Γ_{u_0} et à $\operatorname{Red}\Gamma_{u_0}$. Donc $\Gamma_{u_0} \notin \mathscr{C}$.

Enfin, si $\Lambda_0 = \check{\Gamma}_{u_0}$, Λ_0 n'est pas dans COSEP, donc n'a pas la réduction faible, et puisque $\check{\Gamma}_{u_0} = SD_\eta(\Gamma^*, \check{\Gamma}_*)$ les mêmes arguments que précédemment donnent, avec $\xi = 1+\theta$ et $\Gamma_* = \Lambda^{(\theta)}$, $\operatorname{Red}\check{\Gamma}_{u_0} \supset SD_\eta(\Gamma^*, (\operatorname{Red}\Lambda)^\theta) \supset SD_\eta(\Gamma^*, \operatorname{Red}\check{\Gamma}_*) \supset \Gamma_{u_0}$. Mais puisque $\operatorname{Red}\check{\Gamma}_*$ est dans $\mathscr{R}$, la classe $SD_\eta(\Gamma^*, \operatorname{Red}\check{\Gamma}_*)$ est dans $\mathscr{R}$, donc est égale à $\operatorname{Red}\check{\Gamma}_{u_0}$ d'après le lemme 22.

Ceci montre que $\Lambda_0 \notin \mathscr{C}$, donc que $u_0(1) \neq 5$. Il en résulte que u_0 ne peut exister, donc que $\mathscr{C} = \emptyset$, et le théorème est prouvé.

On peut noter que, par conséquent, quelle que soit la classe Γ dans $\mathscr{W}$, $\operatorname{Red}\Gamma$ est la plus petite classe contenant Γ qui possède la propriété de réduction.

Définition 24. Si $(\Gamma_p)_{p\in\omega}$ est une famille de classes de Wadge, on dit qu'elle possède la *propriété de réduction mixte* si, pour toute famille $(A_p)_{p\in\omega}$ d'ensembles tels que $A_p \in \Gamma_p$, il existe une famille $(A'_p)_{p\in\omega}$ avec $A'_p \in \Gamma_p$ qui réduit $(A_p)_{p\in\omega}$, c'est-à-dire qui satisfait

(a) $\forall p \in \omega\ A'_p \subset A_p$;
(b) $\bigcup A'_p = \bigcup A_p$;
(c) $A'_p \cap A'_q = \emptyset$ si $p \neq q$.

Dans le cas où $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma$ et $\Gamma_p = \{\emptyset\}$ pour $p \geqslant 2$, (Γ_p) a la propriété de réduction mixte si et seulement si Γ a la propriété de réduction. Et dans le cas où $\Gamma_p = \Gamma$ pour tout p, (Γ_p) a la propriété de réduction mixte si et seulement si Γ a la propriété de ω-réduction.

Théorème 25. *Si chacune des classes Γ_p a la propriété de réduction, la famille (Γ_p) a la propriété de réduction mixte.*

Soit (A_p) une famille de parties de ω^ω telle que $A_p \in \Gamma_p$. Les Γ_p ont dans $\mathscr{R}$, et il existe pour tout p une famille Γ_p-normante $(A_{p,i}, \xi_{p,i})_{i\in\omega}$ pour A_p. On définit, pour $\alpha \in A_p$ $\varphi_p(\alpha) = \xi_{p,i}\cdot\omega + 2^p(2i+1)$ si $\alpha \in A_{p,i}$ qu'on prolonge à ω^ω en posant

$$\varphi_p^*(\alpha) = \gamma \quad \text{si } \alpha \notin A_p$$

où

$$\gamma = \sup_{p,i}(\xi_{p,i}\cdot\omega+\omega) < \omega_1 .$$

Alors, pour tout p, φ_p est une Γ_p-norme sur A_p, comme dans le théorème 19. De plus, on remarque que, si $p \neq q$, $\varphi_p(\alpha) \neq \varphi_q^*(\beta)$ quels que soient α et β pourvu que $\alpha \in A_p$. On définit, pour $p \in \omega$,

$$G_p = \{\alpha = (\alpha_n) \in (\omega^\omega)^\omega\colon\ \alpha_p \in A_p \text{ et } \forall q \in \omega\ \varphi_p(\alpha_p) \leqslant \varphi_q^*(\alpha_q)\}$$

et $A'_p = \delta^{-1}(G_p)$, où $\delta\colon \omega^\omega \to (\omega^\omega)^\omega$ est l'application diagonale: $\alpha \to (\alpha, \alpha, \ldots)$.

On voit aisément que $(A'_p)_{p\in\omega}$ réduit $(A_p)_{p\in\omega}$. Et puisque δ est continue, il suffit, pour achever la démonstration, de remarquer que G_p est dans Γ_p.

Pour cela, on identifie $(\omega^\omega)^\omega$ à $\omega^\omega \times \omega^\omega$ en associant à $\alpha = (\alpha)_{n n\in\omega}$ le couple (α_p, β), où $\beta = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_{p+1}, \ldots)$ est dans $(\omega^\omega)^{\omega\setminus\{p\}}$ identifié à ω^ω.

Si on pose alors

$$\check{C}_i = \{\alpha = (\alpha_n)\colon \exists j \exists n\, [(\alpha_n \in A_{n,j}) \quad \text{et} \quad (\xi_{n,j} = \xi_{p,i}) \text{ et } (2^n(2j+1) < (2^p(2i+1))]\}$$

et

$$V_\xi = \{\alpha = (\alpha_n)\colon\ \exists j \exists n\ [(\alpha_n \in A_{n,j}) \text{ et } (\xi_{n,j} < \xi)]\} ,$$

$\check{C}_i$ est une réunion finie de $\utilde{\Pi}^0_{\xi_{p,i}}$; donc $C_i \in \utilde{\Sigma}^0_{\xi_{p,i}}$, et V_ξ, union dénombrable $\utilde{\Sigma}^0_\xi$ puisque, si $\xi_{n,j} < \xi$, $A_{n,j} \in \utilde{\Pi}^0_{\xi_{n,j}} \subset \utilde{\Sigma}^0_\xi$, est lui-même dans $\utilde{\Sigma}^0_\xi$, si $\xi > 1$. Et $\check{V}_0 = \emptyset$. Alors, $G_p = \bigcup_i (A_{p,i} \times \omega^\omega) \cap (C_i \setminus V_{\xi_{p,i}})$ est dans Γ_p.

Ceci achève la démonstration.

Rappelons que, si Γ est une classe, et $A \in \Gamma$, une *Γ-échelle* $\bar{\varphi}$ sur A est une suite (φ_n) de Γ-normes sur A vérifiant la propriété suivante: "si (α_i) est une suite de points de A qui converge vers α et si, pour tout n, la suite $(\varphi_n(\alpha_i))_i$ stationne à un ordinal λ_n, le point α est dans A et $\varphi_n(\alpha) \leqslant \lambda_n$". On dit que Γ a la propriété d'échelle si tout A de Γ possède une Γ-échelle.

Si ξ est un ordinal dénombrable, on notera $\mathscr{R}_\xi$ l'ensemble de toutes les classes Γ de $\mathscr{R}$ pour lesquelles tout élément A de Γ admet une famille normante $(A_n, \xi_n)_{n\in\omega}$ telle que $\forall n\ \xi_n < \xi$.

Il résulte du théorème 20 que $\mathscr{R} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathscr{R}_\xi$ et que $\utilde{\Sigma}^0_\xi = D_1(\utilde{\Sigma}^0_\xi) \in \mathscr{R}_\xi$, pour $\xi \geqslant 1$.

Théorème 26. *Les classes Γ de $\mathscr{W}$ qui ont la propriété d'échelle sont les éléments de $\mathscr{R}$.*

Par définition d'une échelle, toute classe qui a la propriété d'échelle a la propriété de norme. D'après le théorème 23, il suffit donc de démontrer, par récurrence sur ξ, que toute classe Γ de $\mathscr{R}_\xi$ possède la propriété d'échelle.

Pour $\xi = 0$, on a $\mathscr{R}_0 = \{\{\emptyset\}\}$, et l'énoncé est clair.

Pour $\xi = 1$, $\mathscr{R}_1 = \{\utilde{\Sigma}^0_1, \{\emptyset\}\}$. Et si $A \in \utilde{\Sigma}^0_1$, il existe une partition $(A_i)_{i\in\omega}$ de A en ensembles $\utilde{\Delta}^0_1$. Alors, si on pose, pour $\alpha \in A$

$$\varphi_0(\alpha) = i \quad \text{si } \alpha \in A_i$$

φ_0 est une $\utilde{\Sigma}^0_1$-norme sur A, et la suite $\bar{\varphi}$ définie par $\forall n \in \omega\ \varphi_n(\alpha) = \varphi_0(\alpha)$, est clairement une $\utilde{\Sigma}^0_1$-échelle.

Supposons maintenant que toute classe Λ dans $\bigcup_{\eta<\xi} \mathscr{R}_\eta$ ait la propriété d'échelle, que $\Gamma \in \mathscr{R}_\xi$ et $A \in \Gamma$. Il existe alors une famille normante $(A_n, \xi_n)_{n\in\omega}$ pour A avec $\forall n\ \xi_n < \xi$. Et puisque $A_n \in \utilde{\Pi}^0_{\xi_n}$, il existe des $A_{n,q} \in \bigcup_{\eta<\xi_n} \utilde{\Sigma}^0_\eta$ avec $A_n = \bigcap_q A_{n,q}$. Il existe $\xi_{n,q} < \xi_n$ tel que $A_{n,q} \in \utilde{\Sigma}_{\xi_{n,q}} \in \mathscr{R}_{\xi_n}$. Donc $\utilde{\Sigma}^0_{\xi_{n,q}}$ a la propriété d'échelle par l'hypothèse de récurrence, et il existe $\bar{\varphi}_{n,q} = (\varphi_{n,q,k})_k$ une $\utilde{\Sigma}^0_{\xi_{n,q}}$-échelle sur $A_{n,q}$.

On définit alors, pour $\alpha \in A$:

$$\psi_0(\alpha) = \xi_i \cdot \omega + i \quad \text{si } \alpha \in A_i ;$$

$$\psi_{n,q,k}(\alpha) = \begin{cases} \xi i \cdot \omega + i & \text{si } \alpha \in Ai \text{ et } \xi_i < \xi_n , \\ \xi_n \cdot \omega + \varphi_{n,q,k}(\alpha) & \text{si } \alpha \in A_n , \\ \xi_n \cdot \omega + (\sup\limits_{A_{n,q}} \varphi_{n,q,k}(\beta)) + \xi_i \cdot \omega + i & \text{si } \alpha \in \underset{i \neq n}{A_i} \text{ et } \xi_i \geqslant \xi_n . \end{cases}$$

On va montrer que la suite $\bar{\psi}$ obtenue en énumérant ψ_0 et les $(\psi_{n,q,k})_{\substack{n \in \omega \\ q \in \omega \\ k \in \omega}}$ est une Γ-échelle sur A.

On a déjà vu au théorème 19 que ψ_0 est une Γ-norme sur A.

Si (α_p) est une suite qui converge vers α et si ψ_0 et chacune des $\psi_{n,q,k}$ stationne sur α_p à λ_0 et $\lambda_{n,q,k}$ respectivement, on peut d'abord supposer que

$$\forall p \quad \psi_0(\alpha_p) = \lambda_0$$

Il en résulte clairement que pour un certain m, tous les α_p sont dans A_m (donc, a fortiori dans chaque $A_{m,q}$), et que $\lambda_0 = \xi_m \cdot \omega + m$.

Puisque les α_p sont tous dans $A_{m,q}$, et puisque $\varphi_{m,q}$ est une échelle sur $A_{m,q}$, le point α est dans $A_{m,q}$ et $\varphi_{m,q,k}(\alpha) \leqslant \lambda_{m,q,k}$. Il en résulte que $\alpha \in \bigcap_q A_{m,q} = A_m$, donc que $\psi_0(\alpha) = \xi_m \cdot \omega + m = \lambda_m$.

Si $\xi_n > \xi_m$, on a pour tout k et tout q

$$\psi_{n,q,k}(\alpha_p) = \xi_m \cdot \omega + m = \psi_{n,q,k}(\alpha)$$

d'où

$$\psi_{n,q,k}(\alpha) = \lambda_{n,q,k} .$$

Si $\xi_n \leqslant \xi_m$ et $n \neq m$, on a pour tout k et tout q

$$\psi_{n,q\,k}(\alpha_p) = \xi_n \cdot \omega + (\sup_{\beta \in A_{n,q}} \varphi_{n,q,k}(\beta)) + \xi_m \cdot \omega + m ,$$

$$\psi_{n,q,k}(\alpha) = \xi_n \cdot \omega + (\sup_{\beta \in A_{n,q}} \varphi_{n,q,k}(\beta)) + \xi_m \cdot \omega + n$$

d'où

$$\psi_{n,q,k}(\alpha) = \lambda_{n,q,k} .$$

Il reste seulement à prouver que chaque $\psi_{n,q,k}$ est une Γ-norme sur A. Or l'ensemble $G = \{(\alpha, \beta) | \alpha \in A \text{ et } \psi_{n,q,k}(\alpha) \leqslant^* \psi_{n,q,k}(\beta)\}$ est égal à $\bigcup_{i \in \omega} A_i \times \omega^\omega \cap (C_i \setminus V_{\xi_i})$ où on a posé

$$V_\lambda = \bigcup \{A_j \colon \xi_j < \lambda\} ;$$

$$C_i = \begin{cases} \{(\alpha, \beta) | \; \alpha \in A_{n,q} \text{ et } \varphi_{n,q,k}(\alpha) \leqslant^* \varphi_{n,q,k}(\beta)\} & \text{si } i = n , \\ \{(\alpha, \beta) | \beta \notin \bigcup \{A_j \colon \xi_j = \xi_i \text{ et } j < i\} & \text{si } \xi_i < \xi_n , \\ \{(\alpha, \beta) | \beta \notin A_n \cup \bigcup \{A_j \colon \xi_j = \xi_i \text{ et } j < i\} & \text{si } \xi_i \geqslant \xi_n \text{ et } i \neq n . \end{cases}$$

Il est clair que $V_0 = \emptyset$ et que $V_\lambda \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_\lambda$ pour $\lambda \geqslant 1$, et que $C_i \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_{\xi_i}$. Par définition des familles normantes, ceci prouve que $G \in \Gamma$.

On voit de même que la relation $[\alpha \in A \text{ et } \psi_{n,q,k}(\alpha) <^* \psi_{n,q,k}(\beta)]$ est dans Γ.

Ceci achève de prouver que $\bar{\psi}$ est une Γ-échelle, donc que toute classe appartenant à $\mathscr{R}_\xi$ a la propriété d'échelle. ■

Réferences

[K] K. Kuratowski, *Topologie*, Vol. 1, Warszawa 1958.

[Lo] A. Louveau, *Some results in the Wadge Hierarchy of Borel sets*, CABAL Seminar 79–81, Lecture Notes in Math. 1019, Springer-Verlag, 1983.

[L–Sr] A. Louveau et J. Saint Raymond, *The strength of Borel Wadge Determinacy*, à paraître.

[Lu] N. Luzin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris, Gauthier-Villars, 1930.

[M] Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, North Holland, 1980.

[Si] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ambigus*, Fund. Math. 6 (1924), 1–5.

[St] J. R. Steel, *Detereminateness and the separation property*, J. Symbolic Logic 46 (1981), 41–44.

[vW] R. van Wesep, *Separation principles and the axiom of determinateness*, J. Symbolic Logic 43 (1978), 77–81.

[W] W. W. Wadge, *Thesis*, Berkeley, 1984.

EQUIPE D'ANALYSE
U. A. N° 754 au C. N. R. S.
UNIVERSITE PARIS VI
Tour 46 — 4ème Etage
4, Place Jussieu
75252 — PARIS CEDEX 05

Received 14 January 1987;
in revised form 25 May 1987