STUDIA MATHEMATICA, T. XCI. (1988)

Déformations C^*-équivariantes de germes de faisceaux cohérents

par

J. FERRER et F. PUERTA (Barcelona)

Résumé. L'étude des déformations équivariantes par rapport à l'action d'un groupe a été abordée, entre autres, par H. Pinkham et D. S. Rim dans le cadre algébrique ou formel, et par J. L. Cathelineau dans le cas d'un espace analytique compact. Nous considérons ici le cas analytique local. Plus précisément, nous prouvons l'existence d'une déformation semiuniverselle C^*-équivariante pour un germe d'espace analytique C^*-équivariant, et, plus généralement, pour un germe de faisceau cohérent C^*-équivariant.

0. Introduction. L'étude des déformations équivariantes par rapport à l'action d'un groupe a été abordée, entre autres, par H. Pinkham et D. S. Rim dans le cadre algébrique ou formel, et par J. L. Cathelineau dans le cas d'un espace analytique compact. Nous considérons ici le cas analytique local, suggéré par H. Pinkham dans [10]. Plus précisément, nous prouvons l'existence d'une déformation analytique semiuniverselle C^*-équivariante pour un germe d'espace analytique C^*-équivariant, et, plus généralement, pour un germe de faisceau cohérent C^*-équivariant (1). Le théorème principal est le suivant (cf. 6.7):

THÉORÈME. *Soit* $(\mathcal{F}, 0)$ *le germe à l'origine* 0 *de* C^n *d'un faisceau cohérent* C^**-équivariant tel que* $\dim_C T^1(\mathcal{F}_0)$ *est finie. Alors il existe une déformation semiuniverselle de* $\mathcal{F}_0$ *qui est* C^**-équivariante. Elle est aussi semiuniverselle dans la catégorie des déformations* C^**-équivariantes.*

On remarque qu'on peut remplacer sans changement le groupe C^* par un tore $C^* \times \ldots \times C^*$. C'est seulement pour simplifier les notations dans la preuve qu'on considère C^*.

Le cas particulier de variétés analytiques a été traité par F. Puerta (cf. [11]), et plus récemment par H. Hauser (cf. [7]) avec la hypothèse de singularité isolée.

Sans conditions d'équivariance, Grauert et Donin ont publié des démonstrations de ce résultat. Nous suivons la méthode de ce dernier (cf. [2]), qui utilise la théorie de Douady des espaces analytiques banachiques.

(1) Une version préliminaire de ce travail fut présentée au "Summer Institute on Singularities" d'Arcata (cf. [12]).

Pour l'équivariance nous utiliserons aussi une version d'Hironaka du théorème de préparation de Weierstrass.

Les deux premiers paragraphes sont préliminaires. Au § 1 nous construisons (cf. 1.7.1) des sous-espaces d'un germe $(X, 0)$ d'espace analytique banachique maximaux par rapport à un sous-espace de dimension finie de l'espace tangent $T_0 X$, dont l'existence a été prouvée par Donin (cf. [1]). Ce résultat est clé dans la construction de la base de la déformation semiuniverselle.

Dans le § 2 nous rappelons la version d'Hironaka du théorème de préparation de Weierstrass (cf. 2.2), et le théorème des voisinages privilégiés de Douady tel qu'il se trouve dans [7] (cf. 2.3.3), qui permettent de montrer l'existence de sous-espaces vectoriels équivariants qui soient complémentaires topologiques (cf. 4.5.1).

Dans le § 3 nous introduisons la notion de "graduation topologique" qui permet un traitement systématique des conditions d'équivariance (cf. [5]).

Dans le § 4 nous considérons le cas particulier des graduations topologiques induites par une C^*-action.

Dans le § 5 nous appliquons les résultats des § 3, 4 pour introduire des conditions d'équivariance sur les objets qui interviennent dans la construction de Donin.

Les § 6, 7 contiennent la démonstration du théorème principal énoncé plus haut.

Nous remercions V. Navarro pour les nombreuses conversations sur le sujet. Ses commentaires nous ont été très utiles.

Notations. $C\{x_1, \ldots, x_n\}$ désigne l'algèbre des séries convergentes en $x_1, \ldots, x_n$, qui s'identifie avec $\mathcal{O}_n$, algèbre des germes en $0 \in C^n$ des fonctions analytiques. L'idéal maximal sera noté $\mathfrak{m}$. Si $\sigma \in \mathcal{O}_n$, on notera $\sigma = \sum_J \sigma_J x^J$, où $J = (j_1, \ldots, j_n) \in N^n$, $\sigma_J \in C$, et $x^J = x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$.

1. Espaces analytiques banachiques.

1.0. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème 1.7.1. Pour fixer les notations et la terminologie on inclut un résumé de la théorie locale d'espaces analytiques banachiques (cf. [4] et [7]).

F, B désigneront des espaces de Banach sur C, et U un ouvert de F.

1.1. Un sous-espace E de F est dit *direct* s'il admet un complémentaire topologique, ou de façon équivalente, d'après le théorème de Hahn–Banach, si E est fermé et admet un complémentaire fermé.

Une application linéaire continue v de F dans B est dite *directe* si le noyau et l'image de v sont des sous-espaces directs de F et B respectivement.

1.2. Désignons par $H(U, B)$ l'espace vectoriel des applications analytiques de U dans B.

1.2.1. Notons par $\mu(U, f, B)$ la donnée d'une application analytique $f \in H(U, B)$. Nous appelons $\mu(U, f, B)$ un *modèle d'espace analytique banachique*, et $X = f^{-1}(0)$, muni de la topologie induite par F, *l'ensemble analytique associé au modèle*. Par abus de notation nous notons souvent le modèle par X.

Dans ce qui suit, "modèle" sera synonyme de "modèle d'espace analytique banachique".

1.2.2. Pour tout espace de Banach G on écrit $I(f, G)$ (ou $I(X, G)$) le sous-espace vectoriel de $H(U, G)$ des applications analytiques h de la forme

$$h(x) = w(x)(f(x)), \qquad x \in U,$$

w étant une application analytique de U dans $L(B, G)$, l'espace des applications linéaires continues de B dans G.

Alors au modèle $\mu(U, f, B)$ on associe l'espace vectoriel

$$\Phi(X, G) = H(U, G)/I(X, G).$$

1.2.3. On définit comme dans le cas de dimension finie la notion de germe d'un modèle analytique banachique en un point, (X, x). Si (X, x) est un germe, nous désignons par X un représentant convenablement petit.

1.3. Étant donnés deux modèles $\mu(U, f, B)$, $\mu(U', f', B')$, on considère l'ensemble des applications analytiques $\varphi\colon U \to U'$ telles que $f' \circ \varphi \in I(X, B')$, ou, de manière équivalente, telles que, pour tout espace de Banach G, φ induise par composition un morphisme

$$\varphi_G^*\colon \Phi(X', G) \to \Phi(X, G).$$

On remarque qu'alors $\varphi(X) \subset X'$.

Si φ_1, φ_2 sont deux applications de cet ensemble, on dit qu'elles sont *équivalentes sur* X si $(\varphi_1 - \varphi_2)|_V \in I(f|_V, F')$ pour un ouvert V, $X \subset V \subset U$. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $H(X, X')$, et chaque $\varphi \in H(X, X')$ est dit un *morphisme* de X dans X'.

Si $\varphi \in H(X, X')$, φ est un *isomorphisme* s'il existe $\psi \in H(X', X)$ tel que $(\varphi|_X)^{-1} = \psi|_{X'}$ (homéomorphismes) et $(\varphi_G^*)^{-1} = \psi_G^*$ (pour tout espace de Banach G).

1.4. Un modèle est dit *lisse* s'il est isomorphe à $\mu(F, f, B)$, où f est un épimorphisme direct. Un modèle lisse est une variété analytique banachique.

Un modèle est dit de *dimension finie* (resp. de *définition finie*) s'il est isomorphe à $\mu(U, f, B)$ avec $U \subset F$ de dimension finie (resp. B de dimension finie).

1.5. On dit qu'un modèle $\mu(U, f', B')$ est un *sous-espace* du modèle $\mu(U, f, B)$ si X' est un sous-espace topologique de X, et $\Phi(X', G)$ est un quotient de $\Phi(X, G)$, pour tout espace de Banach G.

On définit l'*intersection* de deux modèles $\mu(U, f_1, B_1)$, $\mu(U, f_2, B_2)$ par $\mu(U, (f_1, f_2), B_1 \times B_2)$; on désigne cette intersection par $X \cap X'$. Il en résulte que $X \cap X'$ est un sous-espace analytique banachique de X et de X'.

1.6. Soit $\mu(U, f, B)$ un modèle et $x_0 \in X$. On définit l'*espace tangent* de X en x_0 par

$$T_{x_0} X = \{h \in H(\delta, H) \colon h(0) = x_0\}$$

où $\delta = \mu(C, \varepsilon^2, C)$ est appelé le *point double*.

Si X, X' sont deux modèles, et $\varphi \in H(X, X')$, l'*application tangente* à φ en x_0

$$T_{x_0} \varphi \colon T_{x_0} X \to T_{\varphi(x_0)} X'$$

est définie de façon naturelle par composition. Si X et X' sont lisses on a $T_{x_0} \varphi = d_{x_0} \varphi$.

1.6.1. LEMME. *Soit $\mu(U, f, B)$ un modèle représentant du germe $(X, 0)$, et soit $T = T_0 X$. Si $d_0 f$ est direct, il existe une variété (lisse) L contenue dans U telle que $X \subset L$ et $T_0 L = T$.*

Démonstration. Par hypothèse il existe une projection analytique $\pi \colon B \to \operatorname{Im} d_0 f$. On prend $L = (\pi_0 f)^{-1}(0)$ et on applique le théorème des fonctions implicites banachique (cf. (1.6.1) de [4]).

1.6.2. COROLLAIRE. *Sous les conditions du lemme, $(X, 0)$ peut être représenté par un modèle $\mu(U', f, B)$, $U' \subset F'$, avec $T_0 X' = F'$.*

1.7. Soit $\mu(U, f, B)$ un modèle tel que $f(0) = 0$ et $\operatorname{Im} T_0 f$ est un sous-espace fermé de B. Soit E un sous-espace de dimension finie de $T_0 X = T$ et Y un sous-espace de X de dimension finie, avec $0 \in Y$. Nous dirons que $(Y, 0)$ est un germe de sous-espace analytique banachique de $(X, 0)$ *maximal par rapport à* E si $T_0 Y = E$ et si $(Y, 0)$ n'est contenu (strictement au sens des modèles) dans aucun germe de sous-espace de X de dimension finie qui ait la même propriété.

1.7.1. THÉORÈME. *Avec les notations précédentes, supposons que $T_0 f$ est direct. Soit L une sous-variété (lisse) de U telle que $X \subset L$ et $T_0 L = T$* (cf. 1.6.1), *et soit $N \subset L$ une sous-variété (lisse) de L telle que $T_0 N = E$. Alors $(X \cap N, 0)$ est un germe de sous-espace analytique banachique de $(X, 0)$ maximal par rapport à E.*

Démonstration. D'après 1.6.2, on peut supposer $L = T = F$. Soit $(Z, 0)$ de dimension finie tel que $T_0 Z = E$, $X \cap N \subset Z \subset X$. Les propositions (1.7) et (7.5.7) de [4] permettent aussi supposer Z défini en un voisinage convenable de $0 \in C^n \subset F$ par un nombre fini de fonctions complexes, et analogiguement pour N et $X' = X \cap C^n$. En définitive, on a réduit le problème au cas de dimension finie. C'est-à-dire on peut supposer que X', Z, N sont tels que:

(i) $X' \cap N \subset Z \subset X' \subset C^n$.
(ii) $T_0(X' \cap N) = T_0(N) = T_0(Z) = E \subset T_0 X' = C^n$.

On peut aussi supposer $Z = X' \cap M$ avec M lisse et $T_0 M = E$. Il s'agit, donc, de démontrer $(X' \cap N, 0) = (X' \cap M, 0)$. Soient f_i, z_j, g_j, h_j $(1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant r)$ des générateurs des idéaux définissant X', E, N et M respectivement. Par hypothèse $(X' \cap N, 0) \subset (X' \cap M, 0)$; donc, pour chaque k, $1 \leqslant k \leqslant r$, il existe des fonctions f_{ki}, g_{kj} telles que

$$h_k = \sum_i f_{ki} f_i + \sum_j g_{kj} g_j. \tag{$*$}$$

Il suffit de voir que la matrice $A = (g_{kj}(0))$ est inversible. Mais, puisque M et N sont lisses et $T_0 M = T_0 N$, les familles de vecteurs $(d_0 h_1, \ldots, d_0 h_r)$ et $(d_0 g_1, \ldots, d_0 g_r)$ sont des bases du même sous-espace de C^n. Et en différentiant les relations $(*)$ on obtient que la matrice A est celle du changement de base.

2. Le théorème de préparation de Weierstrass. Voisinages privilégiés.

Pour les démonstrations des résultats de ce paragraphe nous renvoyons à [7].

2.1. Pour énoncer la version d'Hironaka du théorème de préparation de Weierstrass, nous avons besoin de la construction suivante.

2.1.1. Soit $\bar{w} \colon (N^n)^p \to R_0^+$ une forme linéaire injective sur le semigroupe $(N^n)^p$ à valeurs réelles strictement positives. Cette forme induit un ordre sur $(N^n)^p$. Alors on dit *terme privilégié* d'un élément de $\mathcal{O}_n^p$ de celui à exposant minimal (pour l'ordre induit par $\bar{w}$) parmi les p-tuples des monômes à coefficients non nuls.

2.1.2. Les éléments de $(N^n)^p$ seront notés $\bar{J} = (J(1), \ldots, J(p))$.

Un sous-ensemble Δ de $(N^n)^p$ est un *monoidéal* de $(N^n)^p$ si pour tout $\bar{J}$ de Δ et $\bar{J}'$ de $(N^n)^p$ la somme $\bar{J} + \bar{J}'$ appartient à Δ.

Tout monoidéal Δ de $(N^n)^p$ est engendré par un nombre fini d'éléments $\bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_r$ de $(N^n)^p$:

$$\Delta = \bigcup_{j=1}^{r} (\bar{J}_j + (N^n)^p).$$

2.1.3. Si Q est un sous-ensemble de $\mathcal{O}_n^p$, nous désignons par $\Delta(Q)$ le monoidéal de $(N^n)^p$ engendré par les exposants des termes privilégiés des vecteurs appartenant à Q. Nous notons $C(Q)$ l'ensemble complémentaire de $\Delta(Q)$ dans $(N^n)^p$: $C(Q) = (N^n)^p - \Delta(Q)$.

2.1.4. Nous désignons par $(\mathcal{O}_n^p)^{C(Q)}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}_n^p$ formé des vecteurs $(\sigma^1, \ldots, \sigma^p)$, $\sigma^i = \sum_{\alpha(i)} \sigma^i_{\alpha(i)} x^{\alpha(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, dont les exposants vectoriels $\bar{\alpha} = (\alpha(1), \ldots, \alpha(p)) \in C(Q)$.

2.2. THÉORÈME. *Soit Q un $\mathcal{O}_n$-sous-module de $\mathcal{O}_n^p$. Nous supposons donnée une forme linéaire injective $\bar{w}$: $(N^n)^p \to R_0^+$. Alors l'application naturelle*

$$(\mathcal{O}_n^p)^{C(Q)} \to \mathcal{O}_n^p/Q$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.2.1. Remarques. (i) Le théorème démontre que tout $\mathcal{O}_n$-sous-module Q de $\mathcal{O}_n^p$ admet un complémentaire en tant que sous-espace vectoriel:

$$\mathcal{O}_n^p = Q \oplus (\mathcal{O}_n^p)^{C(Q)}.$$

(ii) D'après une remarque d'Hironaka ([8], § 6), il résulte que $(\mathcal{O}_n^p)^{C(Q)}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{O}_n^p$.

2.3. Suivant [7], si w: $N^n \to R_0^+$ est une forme linéaire injective, pour tout entier positif K nous désignons par $\mathcal{O}_n(K)$ le sous-espace de $\mathcal{O}_n$ constitué des séries $\sigma = \sum_J \sigma_J x^J$ vérifiant

$$\sum |\sigma_J| K^{-w(J)} < +\infty .$$

L'espace $\mathcal{O}_n(K)$ est une algèbre de Banach, et on a

$$\mathcal{O}_n = \bigcup_K \mathcal{O}_n(K).$$

Quel que soit w, les inclusions $\mathcal{O}_n(K) \subset \mathcal{O}_n$ induisent dans $\mathcal{O}_n$ la topologie analytique ou séquentielle (cf. [6]). En particulier, tout sous-module d'un $\mathcal{O}_n$-module de type fini est fermé.

Si $R = \mathcal{O}_n^p/Q$ est un $\mathcal{O}_n$-module de type fini, $R(K)$ est le $\mathcal{O}_n(K)$-module de Banach défini par

$$R(K) = \mathcal{O}_n(K)^p/Q(K),$$

où $Q(K) = \mathcal{O}_n(K)^p \cap Q$.

On dispose d'une injection naturelle $R(K) \to R$, continue (mais non bicontinue, en général).

2.3.1. PROPOSITION. *Soit Q un sous-module de $\mathcal{O}_n^p$, et Q' un complémentaire topologique* (cf. 2.2.1). *Il existe un entier K_0 tel que, pour tout entier $K > K_0$, $Q'(K)$ est un complémentaire topologique de $Q(K)$ dans $\mathcal{O}_n(K)^p$:*

$$\mathcal{O}_n(K)^p = Q(K) \oplus Q'(K).$$

2.3.2. LEMME. *Soient K un entier positif et M un sous-module de $\mathcal{O}_n(K)^p$. Notons Q le sous-module de $\mathcal{O}_n^p$ engendré par M. On a alors $M = Q(K)$.*

2.3.3. PROPOSITION. *Soit u: $R \to R'$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_n$-modules de type fini. Il existe un entier K_0 tel que pour tout entier $K > K_0$ l'homomorphisme restriction de u à $R(K)$*

$$u_K\colon R(K) \to R'(K)$$

est bien défini et direct, et on a

$$\operatorname{Im} u_K = \operatorname{Im} u \cap R'(K), \qquad \operatorname{Ker} u_K = \operatorname{Ker} u \cap R(K).$$

2.3.4. Remarques. (i) Cette proposition est une version du théorème des voisinages privilégiés de Douady ([4]). Dans ce cas, les complémentaires topologiques ayant été construits explicitement selon 2.2.1, les scindages des suites exactes directes obtenues commutent aux projections.

(ii) Puisque la limite inductive stricte est un foncteur exact, il résulte qu'on peut remplacer toute suite de $\mathcal{O}_n$-modules de type fini

$$R \xrightarrow{u} R' \xrightarrow{u'} R''$$

par les suites de $\mathcal{O}_n(K)$-modules de Banach, $K > K_0$,

$$R(K) \xrightarrow{u_K} R'(K) \xrightarrow{u'_K} R''(K)$$

et réciproquement.

3. Graduations topologiques.

3.0. Dans cette section on introduit les notions d'algèbre et de module topologiquement gradués qui correspondent aux notions algébriques analogues et dont on a besoin dans le cas analytique qui nous occupe. Notamment on appliquera 3.2.1, 3.3 et 3.4.1.

3.1. Une *algèbre topologiquement graduée* (brièvement a.t.g.) est la donnée d'une algèbre topologique complexe séparée A, d'une famille $(A^{(k)})_{k\in Z}$ de sous-espaces vectoriels de A et d'une famille de projecteurs continus π_k: $A \to A^{(k)}$, $k \in Z$, telles que:

(i) $C \subset A^{(0)}$, $A^{(k)} A^{(h)} \subset A^{(k+h)}$, $k, h \in Z$.

(ii) Les sous-espaces $A^{(k)}$ forment une somme directe.

(iii) $\pi_k \circ \pi_h = 0$ si $k \neq h$.

(iv) Pour tout $\sigma \in A$ on a

$$\sigma = \sum_k \pi_k(\sigma) \equiv \lim_h \sum_{|k|<h} \pi_k(\sigma).$$

Les éléments non nuls de $A^{(k)}$ sont appelés *quasi-homogènes* (brièvement q-homogènes) *de degré k*. Si $\sigma \in A$, on dit que $\pi_k(\sigma)$ est la *composante q-homogène de degré k* de σ, qui sera notée $\sigma^{(k)}$.

Par exemple $\mathcal{O}_n$ avec la topologie $\mathfrak{m}$-adique et avec la graduation habituelle est une a.t.g.

3.2. Soit A une a.t.g. et M un A-module.

Un *A-module topologiquement gradué* (brièvement m.t.g.) est la donnée d'un A-module topologique séparé M, d'une famille $(M^{(k)})_{k\in Z}$ de sous-espaces vectoriels de M et d'une famille de projecteurs continus π_k: $M \to M^{(k)}$ tels que

(i) $A^{(k)} M^{(h)} \subset M^{(k+h)}$, $k, h \in Z$.

(ii), (iii) et (iv) étant analogues aux conditions précédentes pour les algèbres.

Les définitions d'élément q-homogène de degré k et de composantes q-homogènes d'un élement sont analogues au cas des algèbres.

3.2.1. Le cas suivant nous intéresse particulièrement. Soit p un entier positif et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \boldsymbol{Z}^p$. On considère

$$M = A^p,$$
$$M^{(k)} = A^{(k+\beta_1)} \times \ldots \times A^{(k+\beta_p)}, \qquad k \in \boldsymbol{Z},$$
$$\pi_k = \pi_{k+\beta_1} \times \ldots \times \pi_{k+\beta_p}.$$

Alors on voit facilement que $(A^p, M^{(k)}, \pi_k)_{k\in \boldsymbol{Z}}$ définit un m.t.g. qui sera noté A^p_{β}. On remarque que $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in A^{p(k)}_{\beta}$ si et seulement si $\theta_i \in A^{(k+\beta_i)}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, et que si $\theta \in A^p_\beta$ alors

$$\theta^{(k)} = (\theta_1^{(k+\beta_1)}, \ldots, \theta_p^{(k+\beta_p)}).$$

3.3. Soit M un m.t.g. et M' un sous-module de M. Si on considère la famille $M'^{(k)} = M' \cap M^{(k)}$ et les restrictions des projecteurs π_k à M', M' est un m.t.g. si et seulement si $\pi_k(M') \subset M'$, $k \in \boldsymbol{Z}$, ou encore si et seulement si $\pi_k(M') = M'^{(k)}$. On dit alors que M' est un *sous-module équivariant* de M (*idéal équivariant*, si $M = A$).

Soit M un m.t.g. et M' un sous-module équivariant fermé. Alors M/M' avec la topologie quotient et les familles $(M/M')^{(k)} = \pi(M^{(k)})$, $\tilde{\pi}_k(\tilde{\theta}) = (\pi_k(\theta))^{\sim}$, $\theta \in M$, $k \in \boldsymbol{Z}$, où π est la projection naturelle, est un m.t.g.

3.4. Soient M_1, M_2 des m.t.g. et u: $M_1 \to M_2$ un morphisme continu de A-modules. Nous dirons que u est *équivariant* si $u(M_1^{(k)}) \subset M_2^{(k)}$ pour tout $k \in \boldsymbol{Z}$, c'est-à-dire que u commute avec les projecteurs. Si $M'_2 \subset M_2$ et $M'_1 \subset M_1$ sont des sous-modules équivariants alors $u(M'_1)$ et $u^{-1}(M'_2)$ sont aussi équivariants. En particulier, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont équivariants.

Si M_1 et M_2 sont des m.t.g. libres de type fini on a la caractérisation suivante des morphismes équivariants. La démonstration est laissée au lecteur.

3.4.1. PROPOSITION. *Avec les notations de* 3.2.1 *soit* u: $A^p_\beta \to A^m_{\beta'}$ *un morphisme continu de A-modules. Alors u est équivariant si et seulement si les colonnes de la matrice de u dans les bases naturelles sont des éléments q-homogènes de $A^m_{\beta'}$ de degrés $-\beta_1, \ldots, -\beta_p$, respectivement.*

On remarque qu'alors l'élément de cette matrice qui correspond à la ligne i et la colonne j appartient à $A^{(\beta'_i - \beta_j)}$.

4. C^*-Actions et graduations topologiques.

4.0. Dans 4.3 nous définissons dans $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O}_n(K)$ (cf. 2.3) des graduations topologiques compatibles induites par une $\boldsymbol{C}^*$-action dans $\boldsymbol{C}^n$ (cf. [5]). Par rapport à ces graduations, la construction de complémentaires topologiques du § 1 conserve l'équivariance. Donc, on obtient la proposition 4.5.1, qui est clé pour les constructions des § 6, 7: le noyau et l'image d'un morphisme équivariant de $\mathcal{O}_n$-modules libres, ainsi que ceux des morphismes restriction de $\mathcal{O}_n(K)$-modules, ont des complémentaires topologiques équivariants compatibles. Finalement, le corollaire 4.6.1 permettra de caractériser dans le § 5 l'équivariance d'un germe de faisceau cohérent et de ses déformations.

4.1. Une *$\boldsymbol{C}^*$-action* dans $\boldsymbol{C}^n$ est une opération continue du groupe multiplicatif $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} - \{0\}$ dans $\boldsymbol{C}^n$. On sait que, dans un système convenable de coordonnées, elle est de la forme

$$(\lambda, x) = (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) \to \lambda \cdot x = (\lambda^{q_1} x_1, \ldots, \lambda^{q_n} x_n),$$

où $q_1, \ldots, q_n$ sont des entiers que l'on appelle *poids* de l'action. Dans tout ce qui suit nous supposerons fixée une $\boldsymbol{C}^*$-action dans $\boldsymbol{C}^n$ de poids $q_1, \ldots, q_n$ pas tous nuls.

4.2. Nous considérons dans $\mathcal{O}_n$ la topologie séquentielle ou analytique (cf. [6]) et dans $\mathcal{O}_n^p$ la topologie produit. Alors $\mathcal{O}_n$ est une algèbre topologique (séparée et non métrisable) et tout sous-module de $\mathcal{O}_n^p$ est fermé. En particulier, tout idéal de $\mathcal{O}_n$ est fermé pour la topologie séquentielle et $\mathcal{O}_n/I$ est une algèbre topologique.

La topologie analytique dans $\mathcal{O}_n$ est la finale par rapport aux inclusions des algèbres de Banach $\mathcal{O}_n(K)$. Aussi, une suite (σ_h) dans $\mathcal{O}_n$ converge à $\sigma \in \mathcal{O}_n$ si et seulement s'il existe un entier positif K tel que $\sigma, \sigma_h \in \mathcal{O}_n(K)$ et $\sigma = \lim \sigma_h$ dans $\mathcal{O}_n(K)$.

4.3. $\boldsymbol{C}^*$ opère dans $\mathcal{O}_n$ par dualité: si $\lambda \in \boldsymbol{C}^*$ et $\sigma = \sum_J \sigma_J x^J \in \mathcal{O}_n$,

$$\lambda \cdot \sigma = \sum_J \sigma_J \lambda^{q \cdot J} x^J,$$

où l'on a noté $q \cdot J = q_1 j_1 + \ldots + q_n j_n$.

Pour $k \in \boldsymbol{Z}$, nous désignons par $\mathcal{O}_n^{(k)}$ le sous-espace propre de $\mathcal{O}_n$ de valeur propre λ^k pour l'action de λ, c'est-à-dire, des éléments $\sigma \in \mathcal{O}_n$ tels que $\lambda \cdot \sigma = \lambda^k \sigma$.

Et soit π_k la projection de $\mathcal{O}_n$ sur $\mathcal{O}_n^{(k)}$ définie par

$$\pi_k\Big(\sum_J \sigma_J x^J\Big) = \sum_{q \cdot J = k} \sigma_J x^J.$$

4.3.1. Pour tout entier positif K, soit $\pi_k(K)$ la restriction de π_k à $\mathcal{O}_n(K)$, et $\mathcal{O}_n(K)^{(k)}$ son image.

4.3.2. PROPOSITION (cf. [5]). (i) *Pour tout entier positif K, $(\mathcal{O}_n(K), \mathcal{O}_n(K)^{(k)}, \pi_k(K);\ k \in \boldsymbol{Z})$ est une algèbre topologiquement graduée.*

(ii) $(\mathcal{O}_n, \mathcal{O}_n^{(k)}, \pi_k;\ k \in \boldsymbol{Z})$ *est une algèbre topologiquement graduée.*

Démonstration. (i) La continuité des projecteurs $\pi_k(K)$ et les conditions (i)–(iii) de 3.1 sont triviales. La condition (iv) résulte facilement de l'inegalité 4.3.3 (ii).

(ii) Les conditions (i)–(iii) de 3.1 sont aussi triviales. La continuité des projecteurs π_k et la condition (iv) résultent de 4.2.

4.3.3. Remarques. (i) De la proposition ci-dessus il résulte que si $\sigma \in \mathcal{O}_n$, on a

$$\sigma = \sum_k \sigma^{(k)} \quad \text{avec } \sigma^{(k)} \in \mathcal{O}_n^{(k)}, \quad \lambda \cdot \sigma = \sum_k \lambda^k \sigma^{(k)} \quad \text{pour } \lambda \in C^*.$$

(ii) L'inégalité

$$|q \cdot J| \leqslant (j_1 + \ldots + j_n) \sup \{|q_1|, \ldots, |q_n|\}$$

montre que si $|q \cdot J|$ croît, le degré $j_1 + \ldots + j_n$ doit croître aussi.

Par contre, on ne dispose pas en général d'une inégalité dans l'autre sens. Ainsi, si on considère dans C^2 une C^*-action de poids $(1, -1)$, on a $x^r y^r \in \mathcal{O}_2^{(0)}$ pour tout $r \in Z$. Par conséquent $A^{(k)}$ n'est pas, en général, de dimension finie et les éléments q-homogènes ne sont pas des polynômes.

(iii) Si $q_i > 0$ pour tout i, on dit que l'action est *bonne*. Dans ce cas $A^{(0)} = C$, $A^{(k)}$ est de dimension finie, $\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathcal{O}_n^{(k)} = C[x_1, \ldots, x_n]$ et $(\bigoplus_{h \geqslant k} \mathcal{O}_n^{(h)})_{k \geqslant 0}$ est une $\mathfrak{m}$-filtration de $C[x_1, \ldots, x_n]$ dont la topologie associée est la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

4.4. Si $I \subset \mathcal{O}_n$ est un ideal équivariant, on a $C^* \cdot I \subset I$. Donc, C^* opère dans $A = \mathcal{O}_n/I$, et pour cette algèbre sont valables des considérations analogues à celles que nous venons de faire pour $\mathcal{O}_n$. On vérifie que $(A, A^{(k)}, \pi_k; k \in Z)$ est une algèbre topologiquement graduée, et qu'elle coïncide avec le quotient selon 3.3.

4.5. Nous considérons les graduations topologiques sur $\mathcal{O}_n^p$ et $\mathcal{O}_n(K)^p$ définies dans 3.2.1. On remarque que si Q est un sous-module équivariant de $\mathcal{O}_{n,\beta}^p$ alors le complémentaire topologique $(\mathcal{O}_n^p)^{C(Q)}$ (cf. 2.1.4 et 2.2.1) est aussi équivariant. Donc, de 2.3.1 et 2.3.3 il résulte:

4.5.1. Proposition. *Soit u: $\mathcal{O}_{n,\beta}^p \to \mathcal{O}_{n,\beta'}^m$ un morphisme équivariant de $\mathcal{O}_n$-modules.*

(i) *Il existe un sous-espace vectoriel équivariant E de $\mathcal{O}_{n,\beta'}^m$ (resp. G de $\mathcal{O}_{n,\beta}^p$) qui est un complémentaire topologique de* $\operatorname{Im} u$ (*resp.* $\operatorname{Ker} u$):

$$\mathcal{O}_{n,\beta'}^m = E \oplus \operatorname{Im} u, \qquad \mathcal{O}_{n,\beta}^p = G \oplus \operatorname{Ker} u.$$

(ii) *Il existe un entier positif K_0 tel que pour tout entier $K > K_0$ l'homomorphisme restriction*

$$u_K \colon \mathcal{O}_n(K)_\beta^p \to \mathcal{O}_n(K)_{\beta'}^m$$

est bien défini et $E(K)$ (resp. $G(K)$) est un complémentaire topologique équivariant de $\operatorname{Im} u_K$ (*resp.* $\operatorname{Ker} u_K$):

$$\mathcal{O}_n(K)_{\beta'}^m = E(K) \oplus \operatorname{Im} u_K, \qquad \mathcal{O}_n(K)_\beta^p = G(K) \oplus \operatorname{Ker} u_K.$$

4.5.2. On remarque que les scindages et les projections sont équivariants, et qu'elles sont compatibles avec les inclusions $\mathcal{O}_n(K) \subset \mathcal{O}_n(K') \subset \mathcal{O}_n$, pour tout $K' > K > K_0$.

4.6. Proposition. *Soit M un $\mathcal{O}_m$-m.t.g. de type fini et M' un sous-module de M. Alors M' est équivariant si et seulement s'il est engendré par un nombre fini d'éléments q-homogènes.*

Démonstration. Soit Ω l'ensemble des composantes q-homogènes des éléments de M' et soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$. D'après 4.3.1 on a

$$M' \subset \mathcal{O}_n \Omega + \mathfrak{m}^k M \qquad \text{pour tout } k \in N$$

et puisque

$$\mathcal{O}_n \Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathcal{O}_n \Omega + \mathfrak{m}^k M)$$

il résulte que $M' \subset \mathcal{O}_n \Omega$. Alors, si M' est équivariant on a $\mathcal{O}_n \Omega \subset M'$; donc $\mathcal{O}_n \Omega = M'$, et on applique le fait que M est noethérien. Dans l'autre sens la proposition est triviale.

4.6.1. Corollaire. *Avec les notations de 3.2.1 soit u: $\mathcal{O}_{n,\beta}^p \to \mathcal{O}_{n,\beta'}^m$ un morphisme équivariant de $\mathcal{O}_n$-modules. Alors* $\operatorname{Ker} u$ *est engendré par un nombre fini d'éléments q-homogènes de $\mathcal{O}_{n,\beta}^p$.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition et de 3.4.

5. Déformations équivariantes de germes de faisceaux.

5.0. Les germes de faisceaux équivariants sont définis et caractérisés dans 5.2. L'équivariance d'une déformation d'un tel germe $\mathcal{F}_0$ est définie en 5.4 et caractérisée en 5.6.1. Cette caractérisation sera utilisée dans la preuve du théorème 6.7. Dans 5.5 et 5.7 nous rappelons les définitions de Donin (cf. [2]) de $F^j(K)$, δ_K^j, $Z^1(K)$ et F^j, $0 \leqslant j \leqslant 2$, et la caractérisation de l'espace des déformations infinitésimales $T^1(\mathcal{F}_0)$. Finalement, dans 5.8 et 5.9.1 nous introduisons des graduations topologiques sur F^j et sur $T^1(\mathcal{F}_0)$.

5.0.1. Nous allons fixer quelques notations.

Pour la suite, nous désignerons par $(\mathcal{F}, 0)$ le germe à l'origine 0 de C^n d'un faisceau cohérent, et on supposera que si $(U, \mathcal{F})$ est un représentant, $\mathcal{F}$ est cohérent sur U. On remarque qu'un tel germe est déterminé par sa fibre $\mathcal{F}_0$.

De même, soit $(S, 0)$ un germe d'espace analytique, S étant un représentant dans un voisinage ouvert W de l'origine 0 de C^v. Si U est un voisinage ouvert de 0 de C^n, et $\mathscr{G}_S$ un faisceau cohérent sur $U\times S$, nous désignerons par $(G_S, 0)$ le germe de $\mathscr{G}_S$ en $0=(0, 0)\in U\times S$, par $\mathscr{G}_{S,0}$ sa fibre en $0\in U\times S$, et par $\mathscr{G}_S(0)$ le germe de $j_0^*\mathscr{G}_S$ en $0\in U$, où $j_0\colon U\to U\times S$ est définie par $j_0(x)=(x, 0)$. Nous dirons alors que $(\mathscr{G}_S, 0)$ est une *extension* de $\mathscr{G}_S(0)$.

5.1. Pour fixer les notations nous rappelons les définitions de déformation semiuniverselle d'un germe de faisceau (cf. [13]).

5.1.1. Avec les notations précédentes, on dit que $(\mathscr{G}_S, 0)$ est une *déformation de* $(\mathscr{F}, 0)$ ou plus simplement, que $\mathscr{G}_{S,0}$ est une déformation de $\mathscr{F}_0$ si:

(i) $\mathscr{G}_{S,0}$ est un $\mathcal{O}_{S,0}$-module plat, avec la structure induite par la projection $U\times S\to S$.

(ii) Il existe un isomorphisme $\xi\colon \mathscr{G}_S(0)\to\mathscr{F}_0$.

Remarque. Soit $(X, 0)$ un germe d'espace analytique, X étant un représentant dans un ouvert U de C^n. Si on prend $(\mathscr{F}, 0)=(\mathcal{O}_X, 0)$ on obtient la définition habituelle de déformation de germes d'espaces analytiques (cf. 5.5.5, en faisant $p_0=1$).

5.1.2. SI $\mathscr{G}_{S,0}$ et $\mathscr{G}_{S',0}$ sont des déformations de $\mathscr{F}_0$ sur $(S, 0)$ et $(S', 0)$ respectivement, un *morphisme* de $\mathscr{G}_{S,0}$ dans $\mathscr{G}_{S',0}$ est une paire (f, φ) telle que $f\colon (S', 0)\to(S, 0)$ est un morphisme de germes d'espaces analytiques et

$$\varphi\colon (\mathrm{id}\times f)^*\,\mathscr{G}_S\to\mathscr{G}_{S'}$$

est un isomorphisme compatible avec ξ et ξ'.

5.1.3. On dit que $\mathscr{G}_{S,0}$ est une *déformation verselle* (ou *complète*) de $\mathscr{F}_0$ si pour toute déformation $\mathscr{G}_{S',0}$ de $\mathscr{F}_0$ il existe un morphisme de $\mathscr{G}_{S,0}$ dans $\mathscr{G}_{S',0}$.

5.1.4. Soit δ le germe du point double de C. On désigne par $T^1(\mathscr{F}_0)$ l'espace vectoriel des classes d'isomorphisme de déformations de $\mathscr{F}_0$ sur δ.

Si $\mathscr{G}_{S,0}$ est une déformation sur $(S, 0)$, on a une application naturelle de T_0S dans $T^1(\mathscr{F}_0)$. On dit que $\mathscr{G}_{S,0}$ est *effective* si cette application est injective.

5.1.5. Finalement, on dit que $\mathscr{G}_{S,0}$ est une *déformation semiuniverselle* si elle est verselle et effective. Si $\mathscr{G}_{S,0}$ est verselle et $\dim_C T^1(\mathscr{F}_0)$ est finie, $\mathscr{G}_{S,0}$ est effective si et seulement si $\dim T_0S=\dim T^1(\mathscr{F}_0)$.

5.2. Soit $(X, 0)$ un germe d'espace analytique à l'origine 0 de C^n.

Étant donnée une C^*-action dans C^n de poids q_i, $1\leqslant i\leqslant n$, pas tous nuls, nous dirons que le germe $(X, 0)$ est C^*-*équivariant* si l'idéal que définit $\mathcal{O}_{X,0}$ est équivariant.

Plus généralement, avec les notations de 5.0.1, nous dirons que $(\mathscr{F}, 0)$ est C^*-*équivariant*, ou plus simplement, que $\mathscr{F}_0$ est *équivariant* s'il existe une présentation de $\mathscr{F}_0$

$$\mathcal{O}_n^p\xrightarrow{a}\mathcal{O}_n^m\to\mathscr{F}_0\to 0$$

et $\beta\in Z^p$, $\beta'\in Z^m$ tels que a soit un morphisme équivariant de $\mathcal{O}_{n,\beta}^p$ dans $\mathcal{O}_{n,\beta'}^m$ (cf. 3.2.1). Nous rappelons que ceci équivaut à dire que les colonnes de a sont formées par des éléments q-homogènes de $\mathcal{O}_{n,\beta'}^m$ de degrés $-\beta_1, \ldots, -\beta_p$ (cf. 3.4.1).

Dans ce qui suit, "germe de faisceau équivariant" sera synonyme de "germe de faisceau cohérent C^*-équivariant".

5.2.1. Proposition. *Avec les notations précédentes, $\mathscr{F}_0$ est équivariant si et seulement s'il existe une résolution $\mathscr{C}^\cdot$ de $\mathscr{F}_0$*

$$0\to\mathcal{O}_{n,\beta_r}^{p_r}\to\ldots\to\mathcal{O}_{n,\beta_i}^{p_i}\xrightarrow{a^i}\mathcal{O}_{n,\beta_{i-1}}^{p_{i-1}}\to\ldots\to\mathcal{O}_{n,\beta_0}^{p_0}\to\mathscr{F}_0\to 0$$

telle que les morphismes a^i soient équivariants. On dit que $\mathscr{C}^\cdot$ est une résolution équivariante de $\mathscr{F}_0$.

Démonstration. Elle résulte de 4.6.1.

5.3. Nous fixons pour la suite:

(i) Une C^*-action dans C^n de poids q_i, $1\leqslant i\leqslant n$, pas tous nuls.

(ii) Un germe $\mathscr{F}_0$ de faisceau équivariant, $\mathscr{F}$ étant un représentant sur un certain voisinage ouvert U de l'origine 0 de C^n.

(iii) Une résolution équivariante $\mathscr{C}^\cdot$ de $\mathscr{F}_0$ telle que les matrices $a^i=(a^i_{jh})$, $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant p_{i-1}$, $1\leqslant h\leqslant p_i$, qui définissent $\mathscr{C}^\cdot$ soient définies dans U. On notera $d^i_{jh}=\deg a^i_{jh}$.

(iv) Un entier positif K_0 assez grand pour que les fonctions a^i_{jh} ci-dessus soient dans $\mathcal{O}_n(K_0)$ (cf. 2.3).

5.4. Avec les notations de 5.1, une déformation $\mathscr{G}_{S,0}$ de $\mathscr{F}_0$ sur $(S, 0)$ est dite *équivariante* si:

(i) Il existe une C^*-action dans C^s telle que $(S, 0)$ soit équivariant.

(ii) $\mathscr{G}_{S,0}$ est un germe de faisceau équivariant par rapport à la C^*-action dans $C^n\times C^s$ induite par celles dans C^n et C^s.

(iii) L'isomorphisme $\mathscr{G}_S(0)\to\mathscr{F}_0$ est équivariant.

5.5. Pour tout entier positif $K>K_0$, on considère $F^i(K)$, δ^i_K et $Z^1(K)$ définis de la manière suivante.

5.5.1. $F^1(K)$ est l'espace des r-tuples $b=(b^1, \ldots, b^r)$, où $b^i=(b^i_{jh})$ sont des matrices dont les coefficients b^i_{jh} appartiennent à $\mathcal{O}_n(K)$, $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant p_{i-1}$, $1\leqslant h\leqslant p_i$.

$F^2(K)$ est l'espace des $(r-1)$-tuples $c=(c^2, \ldots, c^r)$ de matrices $c^i=(c^i_{jh})$ avec $c^i_{jh}\in\mathcal{O}_n(K)$, $2\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant p_{i-1}$, $1\leqslant h\leqslant p_i$.

Finalement, $F^0(K)$ est l'espace des paires $(e, \theta) = (e^0, \ldots, e^r; \theta_1, \ldots, \theta_n)$, où les matrices $e^i = (e^i_{jh})$ ont comme les précédentes les coefficients dans $\mathcal{O}_n(K)$, $0 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j, h \leqslant p_i$, et les composantes de $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ appartiennent aussi à $\mathcal{O}_n(K)$.

5.5.2. Avec la topologie produit, les $F^i(K)$ sont des espaces de Banach. Dans ces espaces on considère les points distingués suivants:

$$a \in F^1(K), \quad 0 \in F^2(K), \quad (1, z) \in F^0(K),$$

où $a = (a^1, \ldots, a^r)$ est la r-tuple définie par $\mathscr{C}$, et $(1, z)$ est la paire formée en prenant les matrices identités et les fonctions coordonnées de C^n.

On note $F^i(K)$ soit l'espace de Banach correspondant, soit un voisinage convenable du point distingué.

Si $K' > K$, l'inclusion $\mathcal{O}_n(K) \subset \mathcal{O}_n(K')$ induit des inclusions continues $F^i(K) \subset F^i(K')$, $0 \leqslant i \leqslant 2$.

5.5.3. Soient K, K' des entiers positifs, et supposons $K > K' > K_0$. Si (e, θ) et b appartiennent à des voisinages convenables des points distingués dans $F^0(K)$ et $F^1(K')$ respectivement, il est bien défini $\omega((e, \theta), b) \in F^1(K)$ moyennant

$$\omega((e, \theta), b) = (e^{i-1} b^i(\theta)(e^i)^{-1})_{1 \leqslant i \leqslant r}.$$

Alors, la fonction ω est analytique.

En particulier, dans des voisinages convenables des points distingués on a la suite

$$F^0(K) \xrightarrow{\delta^0_K} F^1(K) \xrightarrow{\delta^1_K} F^2(K),$$

où

$$\delta^0_K(e, \theta) = (e^{i-1} a^i(\theta)(e^i)^{-1})_{1 \leqslant i \leqslant r}, \qquad \delta^1_K(b) = (b^{i-1} b^i)_{2 \leqslant i \leqslant r}.$$

Il est évident que les points distingués s'appliquent dans les points distingués, et que $\delta^1_K \circ \delta^0_K = 0$.

5.5.4. On note $Z^1(K)$ le modèle d'espace analytique banachique (cf. 1.2) défini par

$$Z^1(K) = \mu(F^1(K), \delta^1_K, F^2(K)).$$

On remarque qu'avec les notations ci-dessus, si $b \in Z^1(K')$, alors $\omega((e, \theta), b) \in Z^1(K)$, quel que soit (e, θ).

5.5.5. Proposition. (i) *Soit $\mathscr{G}_{S,0}$ une déformation de $\mathscr{F}_0$ sur $(S, 0)$. Alors il existe une extension $^*\mathscr{C}$ de $\mathscr{C}$, résolution libre de $\mathscr{G}_{S,0}$:*

$$0 \to \mathcal{O}^{p_r}_{U \times S,0} \to \ldots \to \mathcal{O}^{p_i}_{U \times S,0} \xrightarrow{A^i} \mathcal{O}^{p_{i-1}}_{U \times S,0} \to \ldots \to \mathcal{O}^{p_0}_{U \times S,0} \to \ldots \to \mathscr{G}_{S,0} \to \ldots \to 0.$$

Réciproquement, soit $(S, 0)$ un germe d'espace analytique et $^*\mathscr{C}$ un complexe de $\mathcal{O}_{U \times S,0}$-modules libres qui soit une extension de $\mathscr{C}$. Alors $^*\mathscr{C}$ est une résolution libre de quelque $\mathscr{G}_{S,0}$, déformation de $\mathscr{F}_0$ sur $(S, 0)$.

(ii) *De même, la donnée d'une déformation $\mathscr{G}_{S,0}$ de $\mathscr{F}_0$ sur $(S, 0)$ est équivalente à celle d'un entier positif K et d'un morphisme $\varphi\colon (S, 0) \to (Z^1(K), a)$.*

Démonstration. Elle est analogue à celle de (1.3) et (2.2°) dans [2], où $p_0 = 1$.

5.5.6. Compte tenu de 5.5.5 (iii), on a

Proposition. *Avec les notations ci-dessus, soient $\varphi\colon S \to Z^1(K)$, $\varphi'\colon S \to Z^1(K')$ des déformations du germe de faisceau cohérent $\mathscr{F}_0$. Alors φ et φ' sont isomorphes si et seulement s'il existe des entiers positifs K_1, K_2 avec $K_2 > K_1 > K$, K', et un morphisme $\eta\colon S \to F^0(K_2)$ tels que la composition*

$$S \xrightarrow{(\eta, \varphi)} F^0(K_2) \times Z^1(K_1) \xrightarrow{\omega} Z^1(K_2)$$

coïncide avec φ', où ω a été défini en 5.5.3.

5.5.7. Remarque. Les définitions et propositions de cette section sont valables sans conditions d'équivariance sur $\mathscr{F}$.

5.6. Compte tenu de la définition 5.4 et de la proposition 5.5.5 il résulte la caractérisation suivante des déformations équivariantes:

5.6.1. Proposition. *Avec les notations précédentes, la déformation $\mathscr{G}_{S,0}$ est équivariante si et seulement si:*

(i) *$(S, 0)$ est équivariant.*

(ii) *Les matrices A^i sont formées d'éléments q-homogènes A^i_{jh} tels que* $\deg A^i_{jh} = \deg a^i_{jh}$, $1 \leqslant j \leqslant p_{i-1}$, $1 \leqslant h \leqslant p_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

5.6.2. On remarque que les C^*-actions dans C^n et C^s donnent une C^*-action dans $C^n \times C^s$. C'est par rapport à cette action que les éléments $A^i_{jh} \in C\{x, t\}$ sont q-homogènes, en notant les coordonnées dans C^n par $(x_1, \ldots, x_n)$ et dans C^s par $(t_1, \ldots, t_s)$. Les fibres pour t fixe ne sont pas, en général, q-homogènes par rapport à l'action dans C^n, sauf, naturellement, pour $t = 0$.

5.7. Avec les notations de 5.5 écrivons

$$\delta^0_K = d\delta^0_{K,(1,z)}, \quad \delta^1_K = d\delta^1_{K,a}$$

les différentielles des applications δ^0_K et δ^1_K aux points distingués. On a alors la suite d'espaces de Banach

$$F^0(K) \xrightarrow{\delta^0_K} F^1(K) \xrightarrow{\delta^1_K} F^2(K).$$

Par passage à la limite inductive, K parcourant les entiers positifs, on obtient la suite de $\mathcal{O}_n$-modules libres

$$F^0 \xrightarrow{\delta^0} F^1 \xrightarrow{\delta^1} F^2,$$

où $F^i = \lim F^i(K)$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, et

$$\delta^0(e^0, \ldots, e^r; \theta_1, \ldots, \theta_n) = \left(e^{i-1} a^i - a^i e^i + \sum_l \frac{\partial a^i}{\partial x_l} \theta_l\right)_{1 \leqslant i \leqslant r},$$

$$\delta^1(b^1, \ldots, b^r) = (b^{i-1} a^i + a^{i-1} b^i)_{2 \leqslant i \leqslant r}.$$

Alors on obtient

5.7.1. Lemme. *Avec les notations précédentes on a*

$$T^1(\mathscr{F}_0) = \operatorname{Ker} \delta^1 / \operatorname{Im} \delta^0.$$

5.7.2. Remarque. Les définitions et le lemme de cette section sont valables sans conditions d'équivariance sur $\mathscr{F}_0$.

5.8. Sur ces $\mathcal{O}_n$-modules F^i, $0 \leqslant i \leqslant 2$, nous définissons les graduations topologiques naturelles induites par 5.3(iii) et les homomorphismes δ^0 et δ^1. En particulier, ils seront utilisés dans 5.9 et 6.3. On rappelle (cf. 3.4.1) que d^i_{jh} est de la forme $d^i_h - d^{i-1}_j$, où d^i_h, $d^{i-1}_j \in \mathbf{Z}$. Alors, avec les notations de 5.5 et 5.7, nous dirons que:

(i) $b \in F^1$ est de *degré* k si $b^i_{jh} \in \mathcal{O}_n^{(d^i_{jh}+k)}$,

(ii) $c \in F^2$ est de *degré* k si $c^i_{jh} \in \mathcal{O}_n^{(d^i_h - d^{i-2}_j + k)}$,

(iii) $(e, \theta) \in F^0$ est de *degré* k si $e^i_{jh} \in \mathcal{O}_n^{(d^i_h - d^i_j + k)}$, $\theta_l \in \mathcal{O}_n^{(q_l + k)}$,

où $1 \leqslant j \leqslant p_{i-1}$, $1 \leqslant h \leqslant p_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

5.8.1. Donc, par construction il résulte que les homomorphismes δ^0 et δ^1 sont équivariants, et que le point distingué $a \in F^1$ est de degré 0.

5.8.2. Sur les $\mathcal{O}_n(K)$-modules $F^i(K)$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, nous considérons les graduations topoloqiques induites.

5.9. Finalement, il résulte de 5.7.1, 3.4 et 3.3 une graduation topologique sur $T^1(\mathscr{F}_0)$:

5.9.1. Proposition. *L'espace vectoriel $T^1(\mathscr{F}_0)$ est un $\mathcal{O}_n$-module (en fait, un $\mathcal{O}_{X,0}$-module) topologiquement gradué. Si on note $T^1(v)$ le sous-espace des éléments q-homogènes de degré v de $T^1(\mathscr{F}_0)$, et par π la projection naturelle de* $\operatorname{Ker} \delta^1$ *sur* $T^1(\mathscr{F}_0)$, *alors on a*

$$T^1(v) = \pi\left((\operatorname{Ker} \delta^1)^{(v)}\right).$$

5.9.2. C'est-à-dire que les *déformations infinitésimales de degré* v (on appelle ainsi les élémentes de $T^1(v)$) sont celles qui peuvent être représentées par des éléments $(b^1, \ldots, b^r)$ appartenant à $F^{1(v)}$. Si $b^i = (b^i_{jh})$ ceci équivaut à dire que

(i) $b^i_{jh} \in \mathcal{O}_n^{(d^i_{jh}+v)}$,

(ii) $b^{i-1} a^i + a^{i-1} b^i = 0$,

où $1 \leqslant j \leqslant p_{i-1}$, $1 \leqslant h \leqslant p_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

6. Équivariance de la déformation semiuniverselle.

6.0. Les notations de 5.4, 5.5 et 5.7 restent en vigueur.

Pour la suite, nous fixons un entier positif K_0 vérifiant les conditions de 5.3(iv) et de 4.5.1 par rapport aux homomorphismes δ^0 et δ^1 (cf. 5.8.1). Voir aussi la remarque 6.4.1. Nous supposerons tous les entiers K, K', ... plus grands que K_0.

6.1. Voici le plan de la construction de la déformation semiuniverselle. D'après Donin, la base est obtenue comme sous-espace analytique maximal de $Z^1(K)$ par rapport à $E \approx T^1(\mathscr{F}_0)$.

En appliquant 1.7.1 nous construisons ce sous-espace maximal comme l'intersection de $Z^1(K)$ avec une sous-variété $N(K)$ d'une variété lisse $L(K)$, qui contient aussi $Z^1(K)$, pour un entier $K > K_0$. Ces objets E, $L(K)$ et $N(K)$ sont construits respectivement dans 6.4, 6.5 et 6.6 (la démonstration de ce dernier est renvoyée au § 7). Le déformation semiuniverselle est alors définie par l'inclusion de la base dans $Z^1(K)$ (cf. 5.5.5). Pour qu'elle soit équivariante il faut que E soit équivariant et que $N(K)$ soit parametrée de façon équivariante au sens de 6.3.

6.2. Dans tout ce qui reste on suppose que $T^1(\mathscr{F}_0)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $(= s)$. Selon 5.9.1, il existe alors une base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ de $T^1(\mathscr{F}_0)$ telle que $\alpha_i \in T^1(\mathscr{F}_0)^{(v_i)}$. On identifie $T^1(\mathscr{F}_0)$ avec $\mathbf{C}^s$ à travers cette base et on note $(t_1, \ldots, t_s)$ les coordonnées dans $\mathbf{C}^s$.

6.2.1. Alors, dans $\mathbf{C}^s$ nous considérons la $\mathbf{C}^*$-action de poids $-v_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, c'est-à-dire

$$\lambda \cdot t = (\lambda^{-v_1} t_1, \ldots, \lambda^{-v_s} t_s), \quad \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

6.3. Nous dirons qu'une série à coefficients dans $F^1(K)$ et à variables t dans $\mathbf{C}^s$ est *équivariante* si chaque monôme est de degré 0 par rapport à la $\mathbf{C}^*$-action sur $\mathbf{C}^s$ ci-dessus et à la graduation topoloqique de $F^1(K)$ définie en 5.8.2. Explicitement, une telle série est une famille de séries de la forme $\sum_l (a_{l_1 \ldots l_s})^i_{jh} t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}$. Nous dirons qu'elle est équivariante si chaque coefficient $(a_{l_1 \ldots l_s})^i_{jh}$ est q-homogène de degré $d^i_{jh} + l_1 v_1 + \ldots + l_s v_s$.

Par exemple, $a + \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_s t_s$ est équivariant.

6.4. Proposition. (i) *Il existe un sous-espace vectoriel E de* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *qui est un complémentaire topologique équivariant de* $\operatorname{Im}\delta^0$ *et qui est isomorphe à* $T^1(\mathscr{F}_0)$.

(ii) *Pour tout entier $K > K_0$ on peut déterminer un sous-espace vectoriel équivariant $E(K)$ de* $\operatorname{Ker}\delta_K^1$ *qui est un complémentaire topologique de* $\operatorname{Im}\delta_K^1$ *et qui est égal à E pour K assez grand.*

Démonstration. (i) D'après 4.5.1, il existe un sous-espace vectoriel équivariant E' de F^1 qui est un complémentaire topologique de $\operatorname{Im}\delta^0$. On achève la démonstration en prenant $E = E' \cap \operatorname{Ker}\delta^1$, et en appliquant 5.7.1.

(ii) résulte de 4.5.1 et de ce que $E = \lim_{\to} E(K)$ est de dimension finie.

6.4.1. Remarque. Pour la suite, nous supposerons K_0 assez grand pour que $E(K) = E$ pour tout $K > K_0$. Puisque $E \cong T^1(\mathscr{F}_0)$, nous identifions tous ces sous-espaces avec $\mathbf{C}^s$, à travers la base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ considérée dans 6.2.

6.5. Proposition. *Pour tout entier $K > K_0$, il existe une sous-variété (lisse) $L(K)$ de $F^1(K)$ telle que:*

(i) *$Z^1(K)$ est un sous-espace analytique banachique de $L(K)$.*

(ii) $T_a Z^1(K) = T_a L(K) = \operatorname{Ker}\delta_K^1$.

(iii) *Si $K' > K$, l'inclusion $F^1(K) \subset F^1(K')$ induit une inclusion continue $L(K) \subset L(K')$.*

Démonstration. On construit, en appliquant 4.5.1, un complémentaire topologique équivariant de $\operatorname{Im}\delta_K^1$ dans $F^2(K)$, et soit π_K la projection de $F^2(K)$ sur $\operatorname{Im}\delta_K^1$. Alors $L(K) = (\pi_K \circ \delta_K^1)^{-1}(0)$ vérifie les conditions voulues (cf. 1.6.1).

6.6. Proposition. *Avec les notations précédentes, il existe $K > K_0$ et $N(K)$ tels que:*

(i) *$N(K)$ est une sous-variété (lisse) de $F^1(K)$.*

(ii) *$N(K)$ est contenue dans $L(K)$.*

(iii) *$a \in N(K)$ et $T_a N(K) = E(K)$.*

(iv) *$N(K)$ admet une paramétrisation dans un voisinage W de l'origine de $E(K)$,*

$$\Psi_K\colon W \to N(K),$$

définie par une série équivariante.

Démonstration. Voir le § 7.

6.6.1. Remarque. $N(K)$ étant de dimension finie, nous pouvons la considérer comme une sous-variété (lisse) de $L(K')$ pour tout entier $K' > K$.

6.7. Théorème. *Soit $(\mathscr{F}, 0)$ le germe à l'origine 0 de $\mathbf{C}^n$ d'un faisceau cohérent $\mathbf{C}^*$-équivariant tel que $\dim_{\mathbf{C}} T^1(\mathscr{F}_0)$ est finie. Alors il existe une déformation semiuniverselle de $\mathscr{F}_0$ qui est équivariante. Elle est aussi semiuniverselle dans la catégorie des déformations équivariantes. Donc, elle est unique à un isomorphisme $\mathbf{C}^*$-équivariant près, non canonique.*

Démonstration. Comme nous l'avons dit, la construction de la déformation et la démonstration de la semiuniversalité sont essentiellement comme dans [2].

Le long de la démonstration on supposera toujours que les entiers $K, K', \ldots$ sont plus grands que K_0 (cf. 6.0).

(i) *Construction de la déformation.* Soit $N(K)$ comme dans 6.6 et S le modèle d'espace analytique banachique défini par $S = N(K) \cap Z^1(K)$. S est de dimension finie et le morphisme d'inclusion $(S, 0) \to (Z^1(K), a)$ définit une déformation de $\mathscr{F}_0$.

On remarque que si $K' > K$, on a $N(K) \cap Z^1(K) = N(K) \cap Z^1(K')$.

(ii) *Versalité.* Dans ce qui suit on écrira pour simplifier S, $Z^1(K), \ldots$, au lieu de $(S, 0)$, $(Z^1(K), a), \ldots$

Il résulte de 1.7.1 que S est un germe de sous-espace de $Z^1(K)$ maximal par rapport à $E(K)$, tel que pour tout $K' > K$, l'égalité $N(K) \cap Z^1(K) = N(K) \cap Z^1(K')$ permet de considérer S comme un sous-espace de $Z^1(K')$ maximal par rapport à $E(K') = E(K)$. Pour montrer que $\varphi\colon S \to Z^1(K)$ est verselle, soit $\psi\colon S' \to Z^1(K')$ une déformation de $\mathscr{F}_0$. Soient K_1 et K_2 tels que $K, K' < K_1 < K_2$. Il faut trouver des morphismes ε, η tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
S' & \xrightarrow{\psi} & Z^1(K') & \longrightarrow & Z^1(K_2) \\
{\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle\omega} \\
S & & \xrightarrow{(\eta,\varphi)} & & F^0(K_2) \times Z^1(K_1)
\end{array}$$

soit commutatif (cf. 5.5.6). Pour ceci, soit G un complémentaire topologique de $\operatorname{Ker}\delta_{K_2}^0$ dans $F^0(K_2)$ (cf. 4.5.1), et P la variété linéaire parallèle à G par le point distingué. Il suffit de montrer que

$$(*) \qquad \omega|_{P \times S}\colon P \times S \to Z^1(K_2)$$

est un isomorphisme.

On remarque d'abord que la différentielle $d\omega_{((1,z),a)}$ est un monomorphisme sur $G \oplus E(K)$, d'image $\operatorname{Im}\delta_{K_2}^0 \oplus E(K) = \operatorname{Ker}\delta_{K_2}^1$. Donc, $\omega(P \times N(K))$ est une sous-variété de $F^1(K_2)$ isomorphe à $L(K_2)$. On a donc la situation

$$\begin{array}{ccccc}
P \times N(K) & \xrightarrow{\omega} & \omega(P \times N(K)) & \xrightarrow{\tau} & L(K_2) \\
\cup & & \cup & & \cup \\
P \times S & \xrightarrow{\omega} & \omega(P \times S) & \subset & Z^1(K_2)
\end{array}$$

où toutes les flèches sont des isomorphismes. On remarque qu'on peut prendre ε de façon qu'il soit l'identité sur $\omega(P\times S)$.

Alors, en identifiant à travers ces isomorphismes, on a

$$P\times S\subset Z^1(K_2)\subset P\times N(K)\quad (=L(K_2)).$$

Par construction on a $S=Z^1(K_2)\cap N(K)$. Donc, l'isomorphisme $(*)$ résulte d'un lemme de Douady ([3], 5.1).

(iii) *Semiuniversalité.* Ceci résulte de ce que l'espace tangent à la base de la déformation est $E(K)\approx T^1(\mathscr{F}_0)$.

(iv) *Équivariance.* D'après 6.6, il existe une paramétrisation Ψ_K de $N(K)$ définie par une série équivariante. Ceci nous permet de considérer des matrices $\bar{A}^i$, $1\leqslant i\leqslant r$, du type $p_i\times p_{i-1}$ ayant pour coefficients des fonctions analytiques en x, t ($x\in K$, $|t_j|<\varrho$, $1\leqslant j\leqslant s$) qui induisent de manière naturelle des morphismes

$$C\{x,t\}^{p_i}\to C\{x,t\}^{p_{i-1}},\quad 1\leqslant i\leqslant r.$$

Intersecter $N(K)$ avec $Z^1(K)$ équivaut à imposer la condition que ces morphismes définissent un complexe, ce qui se traduit en l'annulation des séries composantes des matrices produit correspondantes. En exprimant ces séries comme des séries en x, cette annulation définit un idéal $J\subset C\{t\}$ engendré par les coefficients des séries considérées. Il est clair, alors, que le complexe induit

$$A^i\colon (C\{x,t\}/J)^{p_i}\to (C\{x,t\}/J)^{p_{i-1}},\quad 1\leqslant i\leqslant r,$$

vérifie les conditions de 5.6.1.

(v) Finalement, il faut démontrer que toute autre déformation équivariante peut être obtenue comme "pull-back" équivariant de la déformation construite. La démonstration est analogue à celle du théoreme (2.3) de [10].

7. Démonstration de 6.6.

7.0. Les notations de la section précédente restent en vigueur. On rappelle que $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ est une base d'éléments q-homogènes de $T^1(\mathscr{F}_0)$ de dégrés respectifs $v_1,\ldots,v_s$, et que $t_1,\ldots,t_s$ sont les fonctions coordonnées correspondantes.

Si $J=(j_1,\ldots,j_s)\in N^s$, alors

$$|J|=j_1+\ldots+j_s,\qquad t^J=t_1^{j_1}\ldots t_s^{j_s},$$

$$J\pm J'=(j_1\pm j_1',\ldots,j_s\pm j_s').$$

On écrira J_m pour indiquer que $|J|=m$.

Dans le cas où l'on considère $J-J'$, on supposera toujours que $j_1\geqslant j_1',\ldots,j_s\geqslant j_s'$. On identifie l'indice inférieure j avec $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, où 1 est placé au j-ième lieu.

Si b, $c\in F^1(K)$, on désignera par bc l'élément de $F^2(K)$ défini par

$$bc=(b^{i-1}c^i)_{2\leqslant i\leqslant r}.$$

En particulier, $\delta_K^1(b)=bb$.

Finalement, on utilise le même symbole pour un élément de $H(K)$, $F^0(K),\ldots$ que pour son image dans $C\{x\}$, $F^0,\ldots$

7.1. L'idée de la démonstration de 6.6 est la suivante: Soit $N'(K)$ telle que:

(i) $N'(K)$ est une sous-varieté (lisse) de $F^1(K)$,

(ii) $N'(K)\subset L(K)$,

(iii) $a\in N'(K)$, $T_aN'(K)=E(K)$,

et soit Θ_K' une paramétrisation de $N'(K)$ dans un voisinage W de l'origine de $E(K)$:

(iv) $\Theta_K'\colon W\to F^1(K)$, $0\in W\subset E(K)$.

Alors

$$\Theta_K'(t)=\sum\theta_J't^J,\qquad \theta_J'\in F^1(K),$$

où $\theta_0'=a$, $\theta_j'=\alpha_j$, c'est-à-dire

$$\Theta_K'(t)=a+\sum\alpha_jt_j+\sum\theta_{jk}'t_jt_k+\ldots$$

En genéral cette série ne sera pas équivariante. Il s'agit de la modifier pour qu'elle le soit, et de façon qu'elle paramétrise une sous-variété $N(K)$ vérifiant les conditions (i)–(iii) ci-dessus.

Nous allons construire une telle série $\Psi_K(t)$ en plusieurs étapes.

7.2. Puisque $N'(K)\subset L(K)$, on a

$$(\pi_K\circ\delta_K^1)(\Theta_K'(t))=0,\qquad t\in W,$$

où π_K est la projection de $F^2(K)$ sur $\operatorname{Im}\delta_K^1$ considerée dans la preuve de 6.5. Si on définit $\psi_J'\in F^2(K)$ par

$$\sum\psi_J't^J=\delta_K^1(\Theta_K'(t)),$$

on a

$$\psi_0'=aa=0,$$

$$\psi_j'=a\alpha_j+\alpha_ja=0,$$

$$\psi_{jk}'=a\theta_{jk}'+\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j+\theta_{jk}'a,\qquad \text{etc.}$$

Puisque $\pi_K(\psi_J')=0$, pour tout J, et π_K est équivariante, les projections des parties q-homogènes de ψ_J' seront aussi nulles.

Soit θ_J la composante q-homogène de degré $j_1 v_1+\ldots+j_s v_s$ de θ'_J. On définit Θ_K et ψ_J par

$$\Theta_K(t)=\sum\theta_J t^J,\qquad \sum\psi_J t^J=\delta^1_K(\Theta_K(t));$$

alors on obtient que ces deux séries son équivariantes et que

$$\theta_0=a,\quad \theta_j=\alpha_j,\quad \psi_0=\psi_j=0.$$

Aussi, ψ_J est la composante q-homogène de degré $\langle J, v\rangle$ de ψ'_J si $|J|=2$ ou 3, mais pas en général si $|J|>3$. Donc, comme nous venons d'observer,

$$\pi_K(\psi_J)=0\quad \text{si } |J|=2 \text{ ou } 3,$$

$$\pi_K(\psi_J)\neq 0\quad \text{en général, si } |J|>3.$$

7.3. Avec cette première modification de Θ'_K, nous avons obtenu une série équivariante Θ_K qui vérifie (i) et (iii) de 7.1, mais pas (ii). Pour corriger cela, la deuxième étape consistera à construire par récurrence une suite de séries Θ_m telle que:

(i) $\Theta_1=\Theta_K$.

(ii) $\Theta_m-\Theta_{m-1}$ est d'ordre $\geqslant m$.

(iii) $(\pi_K\circ\delta^1_K)(\Theta_m(t))$ est d'ordre $\geqslant m+1$.

(iv) Θ_m est équivariante.

Nous dirons qu'une série $\sum_J\beta_J t^J$ est *d'ordre* $\geqslant m$ si $\beta_J=0$ pour $|J|<m$.

7.3.1. Pour définir les séries Θ_m il nous faut introduire un morphisme inverse de δ^1_K. De façon précise, soit $M(K)$ (resp. M) des complémentaires topologiques équivariants de $\operatorname{Ker}\delta^1_K$ (resp. $\operatorname{Ker}\delta^1$) dans $F^1(K)$ (resp. F^1) (cf. 4.5.1). Alors $\delta^1_K|_{M(K)}\colon M(K)\to\operatorname{Im}\delta^1_K$ est une application C-linéaire bijective et continue, donc un isomorphisme équivariant d'espaces de Banach. On désigne par γ_K l'inverse de cet isomorphisme.

7.3.2. On commence la récurrence en définissant

$$\Theta_3=\Theta_2=\Theta_1=\Theta_K.$$

On a vu que $(\pi_K\circ\delta_K)(\Theta_3(t))=\sum_{|J|\geqslant 4}\pi_K(\psi_J)t^J$. Soit, pour $|J|=4$,

$$\varphi_J=\gamma_K(\pi_K(\psi_J)).$$

Donc $\pi_K(\psi_J-\delta^1_K(\varphi_J))=0$. C'est ainsi que si l'on définit

$$\Theta_4(t)=\Theta_3(t)-\sum_{|J|=4}\varphi_J t^J,$$

les conditions de 7.3 sont vérifiées pour $m=4$.

En général, on définit φ_{J_m} comme l'image par γ_K du coefficient correspondant de la partie principale de $(\pi_K\circ\delta^1_K)(\Theta_{m-1}(t))$, i.e.

$$\begin{aligned}\varphi_{J_m}=(\gamma_K\circ\pi_K)\Big(\psi_{J_m}&-\sum_{J_1}(\alpha_{J_1}\varphi_{J_m-J_1}+\varphi_{J_m-J_1}\alpha_{J_1})\\&-\sum_{J_2}(\theta_{J_2}\varphi_{J_m-J_2}+\varphi_{J_m-J_2}\theta_{J_2})-\ldots\\&-\sum_{J_{m-4}}(\theta_{J_{m-4}}\varphi_{J_m-J_{m-4}}+\varphi_{J_m-J_{m-4}}\theta_{J_{m-4}})\Big).\end{aligned}$$

Alors

$$\Theta_m=\Theta_{m-1}-\sum_{J_m}\varphi_{J_m}t^{J_m}.$$

7.3.3. D'après la construction, il est clair que la suite Θ_m vérifie (i), (ii), (iv) de 7.3. Et (iii) résulte de

$$\Theta_m(t)=\Theta_K(t)-\sum_{J_4}\varphi_{J_4}t^{J_4}-\ldots-\sum_{J_m}\varphi_{J_m}t^{J_m}.$$

7.4. Donc, la limite formelle

$$\Psi_K=\lim\Theta_m$$

existe, c'est-à-dire, Ψ_K est une série formelle $\sum\Psi_J t^J$ telle que si on écrit $\Theta_m(t)=\sum_J\Theta_{m,J}t^J$, il résulte que

$$\sum_{|J|\leqslant m}\Psi_J t^J=\sum_{|J|\leqslant m}\Theta_{m',J}t^J$$

pour tout $m'\geqslant m$.

On va démontrer tout de suite la convergence de $\Psi_K(t)$ pour tout t d'un voisinage W' de 0 contenu dans W, et la démonstration sera achevée. En effet, la variété $N(K)$ paramétrisée par $\Psi_K(t)$ vérifie les conditions désirées, compte tenu que:

(a) Les termes de degré 0 et 1 de Ψ_K coïncident avec ceux de θ'_K.

(b) L'équivariance de Ψ_J, θ_J, π_K, γ_K nous donne que Ψ_K est aussi équivariante.

(c) $(\pi_K\circ\delta^1_K)(\Psi_K(t))=0$ pour $t\in W'\subset W$.

7.5. Pour prouver cette convergence on introduit les notations suivantes:

$$\lambda_J=\|\theta_J\|\quad(\text{en particulier } \lambda_0=\|a\|),$$

$$\mu_J=\|\psi_J\|,\quad \eta_J=\|\varphi_J\|.$$

De même,

$$\lambda_m=\sum_{J_m}\lambda_{J_m},\quad \mu_m=\sum_{J_m}\mu_{J_m},\quad \eta_m=\sum_{J_m}\eta_{J_m}.$$

Finalement,

$$\lambda_\varrho = \|\Theta_K\|_\varrho = \lambda_0 + \ldots + (\sum_{J_m} \lambda_{J_m})\varrho^m + \ldots = \sum_m \lambda_m \varrho^m,$$

$$\lambda_{\varrho,s} = \sum_m \lambda_m \binom{s-1+m}{s-1} \varrho^m,$$

$$\mu_\varrho = \|\delta^1 \circ \Theta_K\|_\varrho = \mu_2 \varrho^2 + \ldots + (\sum_{J_m} \mu_{J_m})\varrho^m + \ldots = \sum_m \mu_m \varrho^m,$$

où les séries sont convergentes pour $\varrho > 0$ convenablement petit et $s = \dim E(K)$ (cf. 7.0).

7.5.1. Soit ϱ assez petit pour que

$$\lambda_{\varrho,s} - \lambda_0 < \tfrac{1}{2} \|\gamma_K\|^{-1}$$

et voyons qu'il existe une constante A_ϱ telle que

$$\|\Theta_m\|_\varrho = \sum_J \|\Theta_{m,J}\| \varrho^{|J|} \leqslant A_\varrho,$$

ce qui montrera la convergence désirée.

7.5.2. Il résulte des définitions que pour $m \geqslant 4$

$$\|\Theta_m\|_\varrho \leqslant \|\Theta_{m-1}\|_\varrho + \eta_m \varrho_m \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\varrho + \eta_4 \varrho^4 + \ldots + \eta_m \varrho^m,$$

$$\|\varphi_{J_m}\| \leqslant \|\gamma_K\| \mu_{J_m} + \|\gamma_K\| 2\lambda_1 \sum_{J_1} \|\varphi_{J_m - J_1}\| + \ldots$$

$$\ldots + \|\gamma_K\| 2\lambda_{m-4} \sum_{J_{m-4}} \|\varphi_{J_m - J_{m-4}}\|.$$

Alors

$$\eta_m = \sum_{J_m} \|\varphi_{J_m}\| \leqslant \mu'_m + \lambda'_1 \eta_{m-1} + \ldots + \lambda'_{m-4} \eta_4,$$

où

$$\mu'_m = \|\gamma_K\| \mu_m, \qquad \lambda'_m = 2\|\gamma_K\| \lambda_m \binom{s-1+m}{s-1}$$

et $\binom{s-1+m}{s-1}$ est le nombre des $J = (j_1, \ldots, j_s)$ tels que $|J| = m$. On remarque que la série $\sum_m \lambda'_m \varrho^m$ est convergente car

$$\sum_m \binom{s-1+m}{s-1} \lambda_m \varrho^m = \frac{d^{s-1}}{d\varrho^{s-1}} \sum_m \frac{1}{(s-1)!} \lambda_m \varrho^{m+s-1}.$$

Cette derniere inégalité implique que pour tout $m \geqslant 4$

$$\eta_m \leqslant \mu'_m + \mu'_{m-1} \beta_1 + \ldots + \mu'_4 \beta_{m-4},$$

où les β_j sont définis formellement à travers

$$\frac{1}{1 - (\lambda'_1 z + \lambda'_2 z^2 + \ldots)} = 1 + \beta_1 z + \beta_1 z^2 + \ldots$$

En effet, on voit que

$$\beta_j = \lambda'_j + \lambda'_{j-1} \beta_1 + \ldots + \lambda'_1 \beta_{j-1}$$

et par récurrence sur m on obtient

$$\eta_m \leqslant \mu'_m + \lambda'_1 (\mu'_{m-1} + \mu'_{m-2} \beta_1 + \ldots + \mu'_4 \beta_{m-5}) + \ldots + \lambda'_{m-4} \mu'_4$$
$$= \mu'_m + \mu'_{m-1} \beta_1 + \ldots + \mu'_4 \beta_{m-4}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|\Theta_m\|_\varrho &\leqslant \lambda_\varrho + \mu'_4 \varrho^4 + (\mu'_5 + \mu'_4 \beta_1) \varrho^5 + \ldots \\
&\quad + (\mu'_m + \mu'_{m-1} \beta_1 + \ldots + \mu'_4 \beta_{m-4}) \varrho^m \\
&= \lambda_\varrho + (\mu'_4 \varrho^4 + \mu'_5 \varrho^5 + \ldots + \mu'_m \varrho^m) \\
&\quad + \beta_1 \varrho (\mu'_4 \varrho_4 + \ldots + \mu'_{m-1} \varrho^{m-1}) + \ldots + \beta_{m-4} \varrho^{m-4} (\mu'_4 \varrho^4) \\
&\leqslant \lambda_\varrho + \|\gamma_K\| \mu_\varrho (1 + \beta_1 \varrho + \beta_2 \varrho^2 + \ldots + \beta_{m-4} \varrho^{m-4}) \\
&\leqslant \lambda_\varrho + \frac{\|\gamma_K\| \mu_\varrho}{1 - 2\|\gamma_K\| (\lambda_{\varrho,s} - \lambda_0)} = A_\varrho
\end{aligned}$$

puisque on a choisi ϱ tel que $2\|\gamma_K\| (\lambda_{\varrho,s} - \lambda_0) < 1$. Donc

$$\|\Theta_m\|_\varrho \leqslant A_\varrho \quad \text{pour tout } m \geqslant 4$$

et la démonstration est finie.

Références

[1] I. F. Donin, *On analytic Banach spaces and on the space of modules of holomorphic fiberings*, Soviet Math. Dokl. 11 (1970), 1591–1594.

[2] —, *Complete families of deformations of germs of complex spaces*, Math. USSR-Sb. 18 (1972), 397–406.

[3] A. Douady, *Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes (d'après M. Kuranishi)*, Sém. Bourbaki 1964/65, no. 277.

[4] —, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compactes d'un espace analytique donné*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 (1) (1966), 1–95.

[5] J. Ferrer y F. Puerta, *Deformaciones de gérmenes analíticos equivariantes*, Collect. Math. 1981 (2), 121–148.

[6] H. Grauert und R. Remmert, *Analytische Stellenalgebren*, Grundl. Math. Wiss. 176, Springer, Heidelberg 1971.

[7] H. Hauser, *La construction de la déformation semi-universelle d'un germe de variété analytique complexe*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 18 (1985), 1–56.

[8] H. Hironaka, in: Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Noordhoff, 248–265.
[9] H. Pinkham, *Deformations of algebraic varieties with G_m-action*, Astérisque 20 (1974).
[10] –, *Deformations of normal singularities with C^*-action*, Math. Ann. 232 (1978), 65–84.
[11] F. Puerta, *Déformations semi-universelles et germes d'espaces analytiques C^*-équivariantes*, in: Lecture Notes in Math. 961, Springer, 1982, 267–274.
[12] –, *C^*-equivariant deformations of coherent sheaves*, in: Proc. Sympos. Pure Math. 40, 1983, 407–409.
[13] G. Trautman, *Deformations of coherent analytic sheaves with isolated singularities*, in: Proc. Sympos. Pure Math. 30, 1977, 85–89.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES ETSEIB
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spain

Received February 16, 1987 (2277)

STUDIA MATHEMATICA, T. XCI. (1988)

Lower s-numbers and their asymptotic behaviour

by

VLADIMIR RAKOČEVIĆ (Niš) and JAROSLAV ZEMÁNEK (Warszawa)

Abstract. We introduce geometric characteristics of Banach space operators, analogous to the s-numbers, which are suitable for the lower part of the spectrum. For Hilbert space operators these quantities coincide with the eigenvalues below the bottom of the essential spectrum of the modulus. In general, their asymptotic behaviour corresponds to the distribution of the jumps of the minimum index in the semi-Fredholm domain. The paper is a continuation of [14].

1. Lower approximation numbers. Let T be a bounded linear operator on a complex Banach space X. Let U denote the closed unit ball of X. Let

$$m(T) = \inf\{\|Tx\|:\ \|x\| = 1\}$$

be the minimum modulus of T, and let

$$q(T) = \sup\{\varepsilon \geqslant 0:\ TU \supset \varepsilon U\}$$

be the surjection modulus of T. We note that both $m(T)$ and $q(T)$ are positive if and only if T is invertible, and in this case $m(T) = q(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$.

For each $r = 1, 2, \ldots, \infty$ we define the following lower analogues of the approximation numbers:

$$m_r(T) = \sup\{m(T+F):\ \operatorname{rank} F < r\},$$

$$q_r(T) = \sup\{q(T+F):\ \operatorname{rank} F < r\},$$

$$g_r(T) = \max\{m_r(T),\ q_r(T)\}.$$

We note that $g_\infty(T) > 0$ if and only if T is a semi-Fredholm operator, i.e. either the null space $N(T)$ is finite-dimensional and the range $R(T)$ is closed, or the codimension of $R(T)$ is finite. For such operators it will be useful to consider the index

$$\operatorname{ind} T = \dim N(T) - \operatorname{codim} R(T),$$

AMS Subject Classification: 47A53, 47A55.