ACTA ARITHMETICA
LIII (1989)

Об одном диофантовом неравенстве

А. А. Карацуба (Москва)

Посвящается памяти
В. Г. Спринджука

Введение. Первые задачи о распределении дробных долей вещественного многочлена $f(x)$ поставлены и решены Г. Харди и Д. Литтлвудом [2] и Г. Вейлем [3] приблизительно в одно время (по этому поводу см. статью Г. Вейля [3]). Г. Вейлю принадлежит открытие „критерия Вейля" равномерности распределения дробных долей $f(x)$. Количественные характеристики указанных задач и, в частности, оценки тригонометрических сумм методом Г. Вейля, были получены И. М. Виноградовым в [4].

В 1935 г. И. М. Виноградов создал свой метод оценок тригонометрических сумм с многочленом в экспоненте (такие суммы И. М. Виноградов назвал „суммами Г. Вейля" и это название стало общепринятым). Метод И. М. Виноградова позволил получить новые принципиально более точные оценки чем те, которые получались по методу Г. Вейля. Одной из первых работ И. М. Виноградова по новому методу явилась работа [5], в которой доказывалась теорема: пусть n целое $\geqslant 10$; существует L, зависящее только от n, что при любом $Q \geqslant 1$ и вещественном α можно удовлетворить системе неравенств

$$|\alpha z^n - m| < LQ^{-\varrho}, \qquad 0 \leqslant z < Q, \qquad 1/\varrho = 15n^2 \ln 10n \tag{1}$$

целыми z и m.

Позднее И. М. Виноградов значительно усовершенствовал свой метод (историю вопроса см. в [6]). Специальные варианты этого метода позволяют получить и более точные результаты, чем (1), правда, в несколько иной постановке вопроса. Так в монографии [7], гл. 3, доказана теорема: пусть $f(x) = a_h x^h + \ldots + a_n x^n$ – вещественный многочлен с g значащими членами, с положительными показателями, расположенными в возрастающем порядке, с $n > 4$ и $D = h + \ldots + n$ – сумма показателей; пусть f – один из показателей,

$$\gamma = \frac{1}{g}, \quad \varphi = \frac{1}{f}, \quad \nu = \frac{1}{n}, \quad \varrho = \frac{\gamma\varphi\nu \ln D}{4(\ln D + 1)\ln(D\ln D + D)},$$

$$a_f = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad q \geqslant c_0; \quad P = \left[\left(\frac{q}{2}\right)^{\varphi}\right];$$

тогда существует $c = c(n)$ с условием, что при любом вещественном A можно удовлетворить системе неравенств

$$|f(z) - w - A| < cq^{-\varrho}, \quad 0 < z < P^2, \tag{2}$$

целыми z и w.

Там же рассмотрен пример:

пусть $f(x) = \alpha x^n + \sqrt{2}\,x$; тогда разрешима система неравенств

$$|f(z) - w - A| < c\tau^{-\varrho}, \quad 0 < z < \tau,$$

$$\varrho = \frac{\ln(n+1)}{32n(\ln(n+1)+1)\ln((n+1)\ln(n+1)+(n+1))},$$

в целых числах z и w.

Легко видеть, что утверждение сформулированной выше теоремы в ряде случаев дает более точный результат чем тот, который будет следовать из общей теоремы И. М. Виноградова [6] о распределении $\{f(x)\}$, в которой величина ϱ равняется $c/n^2 \ln n$, $c > 0$ — абсолютная постоянная. Для частного случая $f(x) = \alpha x^n$ метод И. М. Виноградова [7] был применен Р. Бейкером (см. [1], с. 60–68) и в неравенстве (1) им получено значение $\varrho^{-1} = 4n(\ln n + \ln\ln n + 3)$.

В настоящей статье рассматривается диофантово неравенство (2) с $f(x) = \alpha x^n$. Применение p-адического метода позволяет получить в ряде случаев более точное утверждение чем те, о которых говорилось выше.

2. Леммы. Основу работы составляет лемма 1, подобная лемме 1 из [9]. Результат леммы 1 — это „теорема о среднем значении $2l$-й степени специального вида тригонометрических сумм", некоторый аналог теоремы о среднем И. М. Виноградова (см., например, [6], или [7], с. 53). Ввиду особой важности этой леммы в рассматриваемых вопросах, а также в проблеме Варинга, здесь приводится ее полное доказательство. Из леммы 1 выводится оценка тригонометрической суммы специального вида — лемма 2, из которой стандартным применением „стаканчиков" И. М. Виноградова получается теорема (см., также, [10], [11]).

На протяжении этого раздела считаем n и l – натуральными числами, причем $n \geqslant 2$, $l \geqslant 2$; R – растущий параметр,

$$R \geqslant R_0 = R_0(n, l) = (2nl)^{72n^8 l^8 (1 + 1/(n-1))^l};$$

$p, p_1, \ldots$ — простые числа; при положительных A и B соотношение $A \asymp B$

означает, что $c_1 B \leqslant A \leqslant c_2 B$, где c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные.

Построим множество натуральных чисел специального вида. Эти числа в дальнейшем будем называть v-числами. При $j = 1, 2, \ldots, l$ определим числа R_j, X_j, Y_j, равенствами:

$$R_j = R^{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}}, \quad X_j = \tfrac{1}{4} R_j, \quad Y_j = \tfrac{1}{2} R_j. \tag{3}$$

Пусть, далее, p_j принимают значения всех простых чисел из промежутков $(X_j, Y_j]$, т.е.

$$X_j < p_j \leqslant Y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда v-числами, отвечающими параметрам (n, l, R), или просто v-числами, называем числа вида $v = p_1 p_2 \ldots p_l$. Пусть заданы два v-числа,

$$v_1 = p_1^{(1)} p_2^{(1)} \ldots p_l^{(1)}, \quad v_2 = p_1^{(2)} p_2^{(2)} \ldots p_l^{(2)};$$

тогда $v_1 \neq v_2$, если $p_j^{(1)} \neq p_j^{(2)}$ хотя бы при одном j. Так как для числа π_j простых чисел p_j на промежутке $(X_j, Y_j]$ выполняется соотношение

$$\pi_j \asymp R_j \ln^{-1} R_j,$$

то количество v-чисел V, отвечающих параметрам (b, l, R), удовлетворяет соотношению

$$V \asymp \prod_{j=1}^{l} R_j \ln^{-1} R_j \asymp R^{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l} (\ln R)^{-l},$$

а сами v-числа меняются в границах

$$4^{-l} R^{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l} \leqslant v \leqslant 2^{-l} R^{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l}.$$

Совокупность построенных v-чисел обозначим буквой $\omega = \omega(n, l, R)$. Заметим, что v-числа подобны числам Ю. В. Линника из [13].

Лемма 1. *Рассмотрим уравнение*

$$x_1^n + \ldots + x_l^n = y_1^n + \ldots + y_l^n, \tag{4}$$

в котором неизвестные $x_1, \ldots, y_l$ *принимают значения v-чисел, отвечающих параметрам* (n, l, R), *т.е.* $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l \in \omega$. *Тогда для числа* J *решений этого уравнения справедлива следующая оценка:*

$$J \leqslant (2l)^{144nl^2} R^{2l - n + (n-l)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^l}.$$

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений статьи [9].

1. Пусть $S(\alpha)$ — тригонометрическая сумма вида

$$S(\alpha) = \sum_{x \in \omega} \exp 2\pi i \alpha x^n = \sum_{X_1 < p_1 \leqslant Y_1} \ldots \sum_{X_l < p_l \leqslant Y_l} \exp 2\pi i \alpha (p_1 \ldots p_l)^n.$$

Тогда для J имеем равенство:

$$J = \int_0^1 |S(\alpha)|^{2l}\, d\alpha. \tag{5}$$

2. Представим $S(\alpha)$ в следующем виде:

$$S(\alpha) = \sum_{X_1 < p_1 \leq Y_1} S(\alpha; p_1),$$

где введено новое обозначение

$$S(\alpha; p_1) = \sum_{X_2 < p_2 \leq Y_2} \ldots \sum_{X_l < p_l \leq Y_l} \exp 2\pi i \alpha (p_1 p_2 \ldots p_l)^n.$$

Возьмем $H = (2l)^{72nl}$, $H_1 = (Y_1 - X_1) H^{-1}$, и разделим промежуток $(X_1, Y_1]$ изменения p_1 на H промежутков I_r вида

$$(X_1 + (r-1) H_1,\ X_1 + r H_1], \quad r = 1, 2, \ldots, H.$$

Соответственно этому разбиению сумма $S(\alpha)$ представится в виде суммы H слагаемых:

$$S(\alpha) = \sum_{r=1}^{H} S_r(\alpha), \tag{6}$$

где

$$S_r(\alpha) = \sum_{p_1 \in I_r} S(\alpha;\ p_1). \tag{7}$$

Возведем (6) в степень l; получим:

$$S^l(\alpha) = \sum_{r_1=1}^{H} \ldots \sum_{r_l=1}^{H} S_{r_1}(\alpha) \ldots S_{r_l}(\alpha). \tag{8}$$

3. Все наборы $(r_1, \ldots, r_l)$ в кратной сумме (8), а их H^l штук, разобьем на два класса A и B: в класс A отнесем те из них, у которых найдется r_j отличное от всех остальных r_s, $s \neq j$, другими словами, $r_j \neq r_s$, при $s = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, l$; в класс B отнесем все остальные наборы. Кратная сумма в (8) представится суммою двух слагаемых:

$$S^l(\alpha) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \tag{9}$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{(r_1, \ldots, r_l) \in A} \!\!\ldots\!\! \sum S_{r_1}(\alpha) \ldots S_{r_l}(\alpha), \tag{10}$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{(r_1, \ldots, r_l) \in B} \!\!\ldots\!\! \sum S_{r_1}(\alpha) \ldots S_{r_l}(\alpha). \tag{11}$$

После перенумерации $r_1, \ldots, r_l$, слагаемые Σ_1 могут быть представлены так:

$$S_{r_1}(\alpha) S_{r_2}(\alpha) \ldots S_{r_l}(\alpha),$$

причем $r_1 \neq r_j, j = 2, \ldots, l$. Слагаемые суммы Σ_2 имеют следующий вид:

$$S_{r_1}^{\beta_1}(\alpha) \ldots S_{r_t}^{\beta_t}(\alpha), \tag{12}$$

причем $r_i \neq r_j$, $i \neq j$, $\beta_1 \geq 2, \ldots, \beta_t \geq 2$,

$$\beta_1 + \ldots + \beta_t = l. \tag{13}$$

4. Число $\mu(A)$ слагаемых суммы Σ_1 тривиально не превосходит H^l. Оценим сверху число $\mu(B)$ слагаемых суммы Σ_2. Так как $\beta_j \geq 2, j = 1, \ldots, t$, то из (13) находим, что $t \leq 0{,}5\, l$. Пусть $r_1, \ldots r_t$, $\beta_1, \ldots, \beta_t$ заданы, т.е. задано слагаемое вида (12). Это означает, что в наборе $(r_1, \ldots, r_l) \in B$ число r_1 встречается ровно β_1 раз, число r_2 встречается ровно β_2 раза и так далее, наконец, число r_t встречается ровно β_t раз. Другими словами, на l местах число r_1 может занимать β_1 мест, что можно осуществить ровно $l(l-1) \ldots (l - \beta_1 + 1) < l^{\beta_1}$ способами, на оставшихся местах r_2 может занимать β_2 мест, что можно осуществить не более чем l^{β_2} способами, и так далее, наконец, r_t может занимать β_t мест, что можно осуществить не более чем l^{β_t} способами. Таким образом, при заданных $r_1, \ldots, r_t$, $\beta_1, \ldots, \beta_t$, число слагаемых вида (12) не превосходит

$$l!\, l^{\beta_1 + \ldots + \beta_t} < l^{2l}.$$

Далее, если через $\varkappa(t)$ обозначить число решений уравнения (13), то, так как $\varkappa(t) \leq l^{t-1}$, легко находим оценку для $\mu(B)$:

$$\mu(B) < \sum_{1 \leq t \leq 0{,}5l} H^t \varkappa(t)\, l^{2l} < l^{2{,}5l} H^{0{,}5l}.$$

5. Из (9) применением неравенства Коши получаем:

$$\begin{aligned} |S(\alpha)|^{2l} \leq\ & 2\mu(A) \sum_{(r_1, \ldots, r_l) \in A} \!\!\ldots\!\! \sum |S_{r_1}(\alpha)|^2 \ldots |S_{r_l}(\alpha)|^2 \\ & + 2\mu(B) \sum_{(r_1, \ldots, r_l) \in B} \!\!\ldots\!\! \sum |S_{r_1}(\alpha)|^2 \ldots |S_{r_l}(\alpha)|^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Слагаемые в первой и второй суммах преобразуем следующим образом: к слагаемым второй суммы применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим; со слагаемыми первой суммы проделаем то же самое, только предварительно выделим первый множитель. Итак, для слагаемых первой суммы имеем:

$$|S_{r_2}(\alpha)|^2 \ldots |S_{r_l}(\alpha)|^2 \leq \frac{1}{l-1} \left(|S_{r_2}(\alpha)|^{2l-2} + \ldots + |S_{r_l}(\alpha)|^{2l-2} \right);$$

для слагаемых второй суммы имеем:

$$|S_{r_1}(\alpha)|^2 \ldots |S_{r_l}(\alpha)|^2 \leq \frac{1}{l} \left(|S_{r_1}(\alpha)|^{2l} + \ldots + |S_{r_l}(\alpha)|^{2l} \right).$$

Из последних двух неравенств, (14) и (5) найдем:

$$J \leq 2\mu^2(A) J_1 + 2\mu^2(B) J_2^{(1)}, \tag{15}$$

где

$$J_1 = \int_0^1 |S_{r_1}(\alpha)|^2 |S_r(\alpha)|^{2l-2}\, d\alpha, \qquad J_2^{(1)} = \int_0^1 |S_{r_2}(\alpha)|^{2l}\, d\alpha, \tag{16}$$

причем r, r_1 и r_2 — фиксированные числа, $r_1 \neq r$, $1 \leqslant r, r_1, r_2 \leqslant H$, и такие, что J_1 и $J_2^{(1)}$ принимают максимальное возможное значение. Отметим также, что $J_2^{(1)}$ имеет такой же вид, что и J; отличие состоит только в том, что промежуток изменения в интеграле J вида $X_1 < p_1 \leqslant Y_1$ заменился в интеграле $J_2^{(1)}$ на более короткий промежуток вида

$$X_1^{(1)} = X_1 + (r-1)H_1 < p_1 \leqslant X_1 + rH_1 = Y_1^{(1)},$$

длина которого H_1,

$$H_1 = Y_1^{(1)} - X_1^{(1)} = (Y_1 - X_1)H^{-1}.$$

6. Займемся преобразованием интеграла J_1. Пользуясь неравенством Гельдера и представлением (7) суммы $S_r(\alpha)$, получаем:

$$|S_r(\alpha)|^{2l-2} = \Big|\sum_{X_1^{(1)} < p_1 \leqslant Y_1^{(1)}} S(\alpha; p_1)\Big|^{2l-2} \leqslant H_1^{2l-3} \sum_{X_1^{(1)} < p_1 \leqslant Y_1^{(1)}} |S(\alpha; p_1)|^{2l-2};$$

$$J_1 \leqslant H_1^{2l-2} \int_0^1 |S_{r_1}(\alpha)|^2 |S(\alpha; p)|^{2l-2}\, d\alpha = H_1^{2l-2} J_3. \tag{17}$$

В последнем неравенстве (17) буквой p обозначено некоторое фиксированное простое число из промежутка

$$X_1 + (r-1)H_1 < p \leqslant X_1 + rH_1; \qquad r \neq r_1.$$

Далее, легко видеть, что интеграл J_3, определенный в (17), равен числу решений следующего уравнения

$$x_1^n - y_1^n = p^n(x_2^n + \ldots + x_l^n - y_2^n - \ldots - y_l^n), \tag{18}$$

в котором неизвестные x_1, y_1 принимают значения чисел вида $p_1 p_2 \ldots p_l$, а неизвестные $x_2, \ldots, x_l$, $y_2, \ldots, y_l$ принимают значения чисел вида $p_2 \ldots p_l$, причем p_1 меняются в промежутке вида

$$X_1 + (r_1 - 1)H_1 < p_1 \leqslant X_1 + r_1 H_1,$$

а $p_2, \ldots, p_l$ меняются в промежутках вида

$$X_j < p_j \leqslant Y_j, \quad j = 2, \ldots, l.$$

Как уже отмечалось выше, $r_1 \neq r$, поэтому $p_1 \neq p$. Из (18) следует, что для J_3 выполняется такая оценка:

$$J_3 \leqslant T J_4, \tag{19}$$

где T – число решений сравнения

$$x_1^n \equiv y_1^n \pmod{p^n}, \tag{20}$$

а J_4 – число решений уравнения

$$x_2^n + \ldots + x_l^n = y_2^n + \ldots + y_l^n \tag{21}$$

в числах $x_2, \ldots, x_l$, $y_2, \ldots, y_l$, вида $p_2 \ldots p_l$.

7. Число T решений сравнения (20) легко оценить сверху. Действительно, неизвестные этого сравнения x_1, y_1 принимают значения чисел вида $p_1 \ldots p_l$; в силу определения p_j и ввиду того, что $p \neq p_1$, следует взаимная простота p с x_1 и y_1. Кроме того, $p > n$, и поэтому $(p, n) = 1$. Далее, сравнение

$$\xi^n \equiv a \pmod{p^n}$$

где ξ принимает значения из приведенной системы вычетов по модулю p^n имеет не более n решений. В нашем случае числа x_1 и y_1 не превосходят величины

$$2^{-l} R_1 \ldots R_l = 2^{-l} R^{1-(1-1/n)^l},$$

в то время, как

$$p^n > 2^{-2n} R > 2^{-l} R^{1-(1-1/n)^l}.$$

Тем самым x_1 и y_1 принимают значения из части приведенной системы вычетов по модулю p^n. Фиксируя y_1, для количества x_1, а затем для T получаем оценку:

$$T \leqslant n \prod_{j=1}^{l} (Y_j - X_j) = n(Y_1 - X_1) T_1, \tag{22}$$

где правая часть (22) служит одновременно определением величины T_1.

8. Подставим (22), (19), (17) в (15). Для J получаем неравенство:

$$\begin{aligned} J &\leqslant 2n\mu^2(A) H_1^{2l-2} (Y_1 - X_1) T_1 J_4 + 2\mu^2(B) J_2^{(1)} \\ &\leqslant 2nH^{2l} H_1^{2l-2} (Y_1 - X_1) T_1 J_4 + 2l^{5l} H^l J_2^{(1)}. \end{aligned} \tag{23}$$

В последней формуле символом T_1 обозначена величина

$$T_1 = (Y_2 - X_2) \ldots (Y_l - X_l),$$

символом J_4 обозначено число решений уравнения (21) в числах $x_2, \ldots, y_l$ вида $p_2 \ldots p_l$. Кроме того, интеграл $J_2^{(1)}$ имеет такой же вид, что и первоначальный интеграл J, только величины X_1, Y_1, которые входят в определение J, заменились в $J_2^{(1)}$ на величины $X_1^{(1)}$, $Y_1^{(1)}$. Чтобы удобно было применять (23), перепишем его в следующей форме:

$$J^{(0)} \leqslant 2nH^{2l}H_1^{2l-2}(Y_1^{(0)}-X_1^{(0)})\,T_1\,J_4+2l^{5l}H^lJ^{(1)}, \tag{24}$$

где введены новые обозначения:

$$J^{(0)}=J,\qquad J^{(1)}=J_2^{(1)};\qquad Y_1^{(0)}=Y_1,\qquad X_1^{(0)}=X_1.$$

9. Теперь будем последовательно применять (24) к оценке $J^{(1)}$, затем — к оценке $J^{(2)}$ и так далее. Например, на первом шаге получим неравенство:

$$J^{(1)} \leqslant 2nH^{2l}H_2^{2l-2}(Y_1^{(1)}-X_1^{(1)})\,T_1\,J_4+2l^{5l}H^lJ^{(2)},$$

где

$$Y_1^{(1)}-X_1^{(1)}=(Y_1^{(0)}-X_1^{(0)})H^{-1},\qquad H_2=(Y_1^{(1)}-X_1^{(1)})H^{-1},$$

интеграл $J^{(2)}$ имеет такой же вид, что и интеграл J, только уже величины X_1, Y_1 заменились на величины $X_1^{(2)}$, $Y_1^{(2)}$.

Определим натуральное число μ из соотношений

$$H^{\mu+2}<Y_1-X_1\leqslant H^{\mu+3}.$$

Из (24) при $j=0,1,\ldots,\mu$ последовательно находим:

$$J^{(j)} \leqslant 2nH^{2l}H_{j+1}^{2l-2}(Y_1^{(j)}-X_1^{(j)})\,T_1\,J_4+2l^{5l}H^lJ^{(j+1)}, \tag{25}$$

где

$$Y_1^{(j)}-X_1^{(j)}=(Y_1^{(j-1)}-X_1^{(j-1)})H^{-1}=(Y_1-X_1)H^{-j},$$

$$H_{j+1}=(Y_1^{(j)}-X_1^{(j)})H^{-1}=(Y_1-X_1)H^{-j-1};$$

кроме того, промежуток изменения p_1 в интеграле $J^{(j+1)}$ имеет вид

$$X_1^{(j+1)}<p_1\leqslant Y_1^{(j+1)}.$$

Наконец, величину $J^{(\mu+1)}$ оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} J^{(\mu+1)} &= \int_0^1 \Big|\sum_{X_1^{(\mu+1)}<p_1\leqslant Y_1^{(\mu+1)}} S(\alpha;p_1)\Big|^{2l}d\alpha \\ &\leqslant (Y_1^{(\mu+1)}-X_1^{(\mu+1)})^{2l}\int_0^1|S(\alpha;p)|^{2l}\,d\alpha \\ &= (Y_1-X_1)^{2l}H^{-2l(\mu+1)}I_l, \end{aligned} \tag{26}$$

где через I_l обозначено число решений уравнения (4) при условии, что неизвестные $x_1,\ldots,x_l,y_1,\ldots,y_l$ принимают значения чисел вида $p_2\ldots p_l$. Далее, для I_l легко находим оценку нужного нам вида:

$$I_l\leqslant(Y_2-X_2)^2\ldots(Y_l-X_l)^2J_4, \tag{27}$$

где J_4 — число решений уравнения (21).

Обозначим буквой a множитель, стоящий перед $J^{(j+1)}$ в формуле (25):

$$a=2l^{5l}H^l.$$

Умножая обе части неравенства (25) на a^j и суммируя получившееся соотношение по $j=0,1,\ldots,\mu$, найдем:

$$\begin{aligned} &J^{(0)}+\sum_{j=1}^{\mu}a^jJ^{(j)} \\ &\leqslant 2nH^2(Y_1-X_1)^{2l-1}\,T_1\,J_4\sum_{j=1}^{\mu}a^jH^{-(2l-1)j}+\sum_{j=1}^{\mu}a^jJ^{(j)}+a^{\mu+1}J^{(\mu+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда, из (22) и (26) следует:

$$\begin{aligned} J=J^{(0)} &\leqslant 2nH^2(Y_1-X_1)^{2l-2}\prod_{j=1}^{l}(Y_j-X_j)J_4 \\ &+a^{\mu+1}\big((Y_1-X_1)H^{-\mu-1}\big)^{2l}(Y_2-X_2)^2\ldots(Y_l-X_l)^2J_4. \end{aligned}$$

10. Докажем теперь, что первое слагаемое в последнем выражении больше второго; более того, докажем, что

$$H^2(Y_1-X_1)^{2l-2}\prod_{j=1}^{l}(Y_j-X_j)\geqslant a^{\mu+1}\big((Y_1-X_1)H^{-\mu-1}\big)^{2l}\prod_{j=2}^{l}(Y_j-X_j)^2. \tag{28}$$

Произведем сокращение на общий множитель в левой и правой части (28); вместо (28) получим:

$$H^{2l(\mu+1)+2}\geqslant a^{\mu+1}\prod_{j=1}^{l}(Y_j-X_j). \tag{29}$$

Так как

$$(2l)^{9l}\geqslant 2l^{5l},\qquad l\geqslant 2,$$

то заменим в (29) величину a большей, $a\leqslant a_1$,

$$a\leqslant(2l)^{9l}H^l=a_1,$$

и будем доказывать неравенство

$$H^{2l(\mu+1)+2}\geqslant a_1^{\mu+1}\prod_{j=1}^{l}(Y_j-X_j),$$

которое эквивалентно такому:

$$H^{l(\mu+1)+2}\geqslant(2l)^{9l(\mu+1)}\prod_{j=1}^{l}(Y_j-X_j). \tag{30}$$

В силу определения μ имеем:

$$H^{\mu+1} \geqslant (Y_1 - X_1) H^{-2};$$

кроме того,

$$(2l)^{9l} = H^{1/(8n)}.$$

Поэтому, вместо (30) докажем еще более сильное неравенство:

$$(Y_1 - X_1)^{l-(1/8n)} \geqslant H^{2l-(1/4n)} \prod_{j=1}^{l} (Y_j - X_j). \tag{31}$$

Так как

$$Y_j - X_j = \tfrac{1}{4} R^{(1/n)(1-1/n)^{j-1}},$$

то вместо (31) получаем неравенство:

$$R^{l/n - 1/8n^2 - 1 + (1-1/n)^l} \geqslant H^{2l-(1/4n)}.$$

Далее, при $l \geqslant 2$ имеем

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^l + \frac{l}{n} - 1 \geqslant \frac{1}{8n},$$

что следует из индуктивного предположения и преобразований:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l+1} + \frac{l+1}{n} - 1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^l + \frac{l}{n} + \frac{1}{n} - 1 \geqslant \frac{1}{8n}.$$

Поэтому, воспоминая, что

$$R \geqslant R_0 = (2nl)^{72n^8 l^8 (1+1/(n-1))^l}, \quad H = (2l)^{72nl},$$

легко убеждаемся в справедливости доказываемого неравенства.

Возвращаясь к последней оценке величины J и учитывая только-что доказанное неравенство, получаем основное рекуррентное неравенство:

$$J = J^{(0)} \leqslant 3nH^2 (Y_1 - X_1)^{2l-2} \prod_{j=1}^{l} (Y_j - X_j) J^{(1)}, \tag{32}$$

где $J^{(1)} = J_4$ — число решений уравнения (21).

11. Для оценки $J^{(1)}$ применим те же самые рассуждения и так далее. Заметим, что при каждом шаге рассуждений величину H мы оставляем одной и той же:

$$H = (2l)^{72nl}.$$

Далее, при $s \leqslant l-1$ величина $J^{(s)}$ равняется числу решений следующего уравнения:

$$x_{s+1}^n + \ldots + x_l^n = y_{s+1}^n + \ldots + y_l^n$$

в числах $x_{s+1}, \ldots, x_l, y_{s+1}, \ldots, y_l$ вида $p_{s+1} \ldots p_l$. Интеграл $J^{(l-1)}$, равный числу решений уравнения

$$x_l^n = y_l^n$$

где x_l, y_l принимают значения p_l, $X_l < p_l \leqslant Y_l$, не превосходит

$$Y_l - X_l.$$

Все другие интегралы $J^{(s)}$, $s < l-1$, оценим с помощью приведенного выше рассуждения; получим следующую формулу:

$$J^{(s)} \leqslant 3nH^2 (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(l-s-1)} \prod_{j=1}^{l-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}) J^{(s+1)}. \tag{33}$$

Для вывода последнего неравенства достаточно повторить рассуждения пунктов 1–10. Аналогом соотношения (28) будет такое:

$$H^2 (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(l-s-1)} \prod_{j=1}^{l-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}) \tag{34}$$

$$\geqslant a^{\mu+1} \left((Y_{s+1} - X_{s+1}) H^{-\mu-1}\right)^{2(l-s)} \prod_{j=2}^{l-s} (Y_{s+j} - X_{s+j})^2.$$

Здесь величина μ определяется из неравенств:

$$H^{\mu+2} < Y_{s+1} - X_{s+1} \leqslant H^{\mu+3};$$

кроме того,

$$a \leqslant 2l^{5l} H^{l-s}.$$

Как и в п. 10 заменим a большей величиной a_1, и будем доказывать такое неравенство:

$$a_1 = (2l)^{9l} H^{l-s},$$

$$H^{(\mu+1)(l-s)+2} \geqslant (2l)^{9l(\mu+1)} \prod_{j=1}^{l-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}).$$

Так как

$$H^{\mu+1} \geqslant (Y_{s+1} - X_{s+1}) H^{-2}, \quad (2l)^{9l} = H^{1/(8n)},$$

то будем доказывать, что

$$(Y_{s+1} - X_{s+1})^{l-s-1/(8n)} \geqslant H^{2(l-s-1)-1/(4n)} \prod_{j=1}^{l-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}). \tag{35}$$

Подставим теперь вместо Y_{s+j}, X_{s+j}, $j = 1, \ldots, l-s$, их значения. Вместо (35) получаем соотношение:

$$R^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s \left(\frac{l-s}{n} - \frac{1}{8n^2} - 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{l-s}\right)} \geqslant 4 H^{2(l-s-1)-\frac{1}{4n}},$$

которое, как это легко проверить, выполняется, если вспомнить, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{l-s}+\frac{l-s}{n}-1 \geqslant \frac{1}{8n}, \qquad H=(2l)^{72nl},$$

$$R^{(1-1/n)^s} \geqslant R^{(1-1/n)^l} \geqslant R_0^{(1-1/n)^l} \geqslant (2nl)^{72n^8l^8}.$$

12. Перемножая неравенства (33) при $s=0, 1, \ldots, l-2$, находим:

$$J^{(0)} \leqslant (3nH^2)^{l-1} \prod_{s=0}^{l-2} (Y_{s+1}-X_{s+1})^{2(l-s-1)} \prod_{j=1}^{l-s} (Y_{s+j}-X_{s+j})\, J^{(l-1)}.$$

Пользуясь тем, что

$$Y_{s+1}-X_{s+1} = 4^{-1} R^{(1/n)(1-1/n)^s};$$

$$\prod_{j=1}^{l-s} (Y_{s+j}-X_{s+j}) = 4^{-l+s} R^{-(1-1/n)^l+(1-1/n)^s};$$

$$\prod_{s=0}^{l-2} 4^{-2(l-s-1)-l+s} R^{\frac{2(l-s-1)}{n}(1-1/n)^s+(1-1/n)^s-(1-1/n)^l}$$

$$= 2^{-3(l-1)l-2(l-1)} R^{2l-n+(n-l-1/(n-1))(1-1/n)^l},$$

получаем оценку для $J^{(0)}=J$:

$$J^{(0)} = J \leqslant 2^{-3l(l-1)-2l} (3nH^2)^{l-1} R^{2l-n+(n-l)(1-1/n)^l}$$

$$\leqslant (2l)^{144nl^2} R^{2l-n+(n-l)(1-1/n)^l},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть вещественное число α представлено в виде*

$$\alpha = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad |\theta| \leqslant 1; \qquad q \geqslant 3.$$

Рассмотрим двойную тригонометрическую сумму $W(\alpha)$,

(36) $$W(\alpha) = \sum_{x\in\omega} \sum_{y\in\omega} e^{2\pi i \alpha m x^n y^n},$$

где $\omega = \omega(n, l, R)$ — множество v-чисел, отвечающих параметрам n, l, R, $R \geqslant R_0$, $0 < m$ — целое число.

Тогда для $|W(\alpha)|$ справедлива следующая оценка:

$$|W(\alpha)| \leqslant (2l)^{4n} R^{2-2(1-1/n)^l} \Delta,$$

где

$$\Delta = \left(\frac{m}{(m,q)q}+\frac{(m,q)}{q}+\frac{m}{(m,q)^2} R^{-n+n(1-1/n)^l} + R^{-n+n(1-1/n)^l}+\frac{q}{(m,q)} R^{-2n+2n(1-1/n)^l}\right)^{1/(4l^2)} (\ln q)^{1/(4l^2)}.$$

Доказательство. Из (36) применением неравенства Гельдера получаем:

(37) $$|W(\alpha)|^{2l} \leqslant V^{2l-1} \sum_{x\in\omega} \Big|\sum_{y\in\omega} e^{2\pi i \alpha m x^n y^n}\Big|^{2l} = V^{2l-1} \sum_{x\in\omega} \sum_{\lambda} J(\lambda)\, e^{2\pi i \alpha m x^n \lambda},$$

где $J(\lambda)$ — число решений уравнения

$$x_1^n+\ldots+x_l^n = y_1^n+\ldots+y_l^n+\lambda$$

в v-числах $x_1, \ldots, y_l$. Меняя в (37) порядок суммирования и опять применяя неравенство Гельдера, находим:

(38) $$|W(\alpha)|^{4l^2} \leqslant V^{4l^2-2l} \Big(\sum_{\lambda} J(\lambda) \Big|\sum_{x\in\omega} e^{2\pi i \alpha m \lambda x^n}\Big|\Big)^{2l}$$

$$\leqslant V^{4l^2-2l} \Big(\sum_{\lambda} J(\lambda)\Big)^{2l-1} \sum_{\lambda} J(\lambda) \Big|\sum_{x\in\omega} e^{2\pi i \alpha m \lambda x^n}\Big|^{2l}$$

$$\leqslant V^{8l^2-4l} J(0) \sum_{\lambda,\mu} J(\mu)\, e^{2\pi i \alpha m \lambda \mu}.$$

При выводе (38) мы воспользовались тем, что

$$\sum_{\lambda} J(\lambda) = V^{2l}, \qquad J(\lambda) \leqslant J(0).$$

Так как числа λ и μ меняются в границах

$$-N = -l2^{-l} R^{n-n(1-1/n)^l} \leqslant \lambda,\ \mu \leqslant l2^{-l} R^{n-n(1-1/n)^l} = N,$$

то применяя известное неравенство (см., напр., [8], с. 254, лемма 6) получаем:

(39) $$\sum_{\lambda,\mu} J(\mu)\, e^{2\pi i \alpha m \lambda \mu} \leqslant \sum_{\mu} J(\mu) \min(2N, 1/2\|\alpha m \mu\|) \leqslant J(0) \sum_{\mu} \min(2N, 1/2\|\alpha m \mu\|).$$

Далее имеем:

$$\alpha m = \frac{am}{q}+\frac{\theta m}{q^2} = \frac{am_1}{q_1}+\frac{\theta m_1}{q q_1},$$

где

$$m_1 = \frac{m}{(m,q)}, \qquad q_1 = \frac{q}{(m,q)};$$

следовательно,

$$\alpha m \mu = \varphi(\mu) = (am_1\mu+\psi(\mu))/q_1,$$

где

$$\psi(\mu) = \theta m_1 \mu / q.$$

Разбивая промежуток суммирования по μ в (39) на не более чем $(2N/q_1)+1$ промежутков вида $[f, f+q'-1]$, $q' \leqslant q_1$, и применяя к каждой из получившихся сумм лемму 8, из [8], с. 254, находим:

$$\sum_{\mu} \min\left(2N, \frac{1}{2\|\alpha m\mu\|}\right) \leqslant 12 N^2 \Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = \frac{m_1}{q} + \frac{1}{q_1} + \frac{\ln q_1}{N} + \frac{m_1 q_1}{qN} + \frac{1}{N} + \frac{q_1 \ln q_1}{N^2}.$$

Из (38), (39) и последней оценки следует:

$$|W(\alpha)|^{4l^2} \leqslant 12\, V^{8l^2-4l} J^2(0) N^2 \Delta_1.$$

По лемме 1

$$J(0) \leqslant (2l)^{144nl^2} R^{2l-n+(n-l)(1-1/n)^l};$$

кроме того,

$$V \leqslant R^{1-(1-1/n)^l};$$

$$2^{-l} R^{n-n(1-1/n)^l} \leqslant N \leqslant R^{n-n(1-1/n)^l};$$

следовательно,

$$\begin{aligned} |W(\alpha)|^{4l^2} &\leqslant 12 (2l)^{288nl^2} R^{8l^2-4l-(8l^2-2l)(1-1/n)^l} \\ &\quad \times R^{4l-2n+2(n-l)(1-1/n)^l} R^{2n-2n(1-1/n)^l} \Delta_1 \\ &\leqslant 12 (2l)^{288nl^2} R^{8l^2-8l^2(1-1/n)^l} \Delta_1; \end{aligned}$$

$$|W(\alpha)| \leqslant (2l)^{4n} R^{2-2(1-1/n)^l} \Delta,$$

$$\Delta = \left(\frac{m}{(m,q)q} + \frac{(m,q)}{q} + R^{-n+n(1-1/n)^l} + \frac{m}{(m,q)^2} R^{-n+n(1-1/n)^l} + \frac{q}{(m,q)} R^{-2n+2n(1-1/n)^l}\right)^{1/(4l^2)} (\ln q)^{1/(4l^2)},$$

что и требовалось доказать.

3. Теорема. Сформулируем и докажем теорему о разрешимости диофантовой системы неравенств (2) с $f(z) = \alpha z^n$.

Теорема. *Пусть c_1, c_2 — абсолютные постоянные, причем*

$$0 < c_1 < c_2 < 1; \quad n \geqslant 2; \quad nc_1 \geqslant 1; \quad P \geqslant P_0(n) > 0;$$

вещественное число α имеет вид:

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad P^{c_1 n} \leqslant q \leqslant P^{c_2 n}.$$

Тогда при любом вещественном числе A найдутся целые числа w и z такие, что выполняются неравенства:

$$|\alpha z^n - w - A| \ll P^{-\varrho}, \quad 0 < z < P,$$

где

$$\varrho = \frac{\min(c_1, 1-c_2)}{8n\left(\ln \dfrac{2}{1-c_2}\right)^2},$$

и постоянная в знаке $\ll$ зависит только от n.

Доказательство. Возьмем в лемме 2 $R = P^{0,5}$, $l = \left[n \ln \dfrac{2}{1-c_2}\right]$. Пусть $\omega = \omega(n,l,R)$ — множество v-чисел, отвечающих параметрам n, l, R и V — количество этих чисел. Рассмотрим числа $\{\alpha x^n y^n\}$ при условии, что $x, y \in \omega$, и будем обозначать их буквами δ_s, $s = 1, 2, \ldots, Q = V^2$. Применим к δ_s, $1 \leqslant s \leqslant Q$, лемму В из [12], с. 16, полагая в ней $r = [\ln P]$, $\Delta = P^{-1/n}$, $0 \leqslant a < b < 1$. Имеем:

$$U(a,b) = \sum_{s=1}^{Q} \psi(\delta_s) = (\dot{b}-a)Q + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} g(m) \sum_{s=1}^{Q} e^{2\pi i m \delta_s},$$

где

$$|g(m)| \leqslant \min\left(b-a, \frac{1}{\pi |m|}, \frac{1}{\pi |m|}\left(\frac{r}{\pi |m| \Delta}\right)^r\right).$$

Тригонометрическую сумму по s при $|m| > \Delta^{-1} \ln P$ оценим тривиально количеством слагаемых Q, а при $0 < |m| \leqslant \Delta^{-1} \ln P$ — пользуясь леммой 2; получим:

$$\left|\sum_{|m| > \Delta^{-1}\ln P} g(m) \sum_{s=1}^{Q} e^{2\pi i m \delta_s}\right| \leqslant 2Q \sum_{m > \Delta^{-1}\ln P} \frac{1}{\pi m}\left(\frac{r}{\pi m \Delta}\right)^r \leqslant 1;$$

$$\begin{aligned} \left|\sum_{0 < |m| \leqslant \Delta^{-1}\ln P} g(m) \sum_{s=1}^{Q} e^{2\pi i m \delta_s}\right| &\leqslant 2 \sum_{0 < m \leqslant \Delta^{-1}\ln P} \frac{1}{\pi m} \left|\sum_{x,y \in \omega} e^{2\pi i \alpha m x^n y^n}\right| \\ &\ll Q\big(P^{-c_1 n + 1/n} + P^{-0,5n+0,5n(1-1/n)^l} \\ &\quad + P^{c_2 n - n + n(1-1/n)^l}\big)^{1/(4l^2)} (\ln P)^{2l+1} \ll QP^{-\varrho}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $I(a,b)$ — количество дробей $\{\alpha x^n y^n\}$, x, $y \in \omega$, попадающих в промежуток вида $[a,b)$, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, то

$$I(a,b) = (b-a)V^2 + O(V^2 P^{-\varrho}).$$

В доказанном соотношении содержится утверждение теоремы.

Пример. Пусть $\alpha = \sqrt{2}$; тогда при любом $P \geqslant P_0(n)$ и любом вещественном числе A существуют целые числа w и z такие, что

$$\left|\sqrt{2}\, z^n - w - A\right| \ll P^{-c/n}, \quad 0 < z < P, \quad c = 1/(16 \ln^2 4).$$

Действительно, рассмотрим последовательность знаменателей подходящих дробей при разложении $\sqrt{2}$ в цепную дробь: $1 < q_1 < q_2 < \ldots$. Найдем r из условий:

$$q_r \leqslant P^{0,5n} < q_{r+1}.$$

Так как неполные частные $\sqrt{2}$ ограничены, то $q_{r+1} \ll q_r$. Полагая в теореме $q = q_r$, $c_1 = c_2 = 0,5$, получим утверждение примера.

Литература

[1] R. C. Baker, *Diophantine inequalities*, Oxford 1986.

[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of Diophantine approximation*, Internat. Congress of Math. Cambridge, vol. 1, 1912, 223–229.

[3] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Ann. 77(1916), 313–352.

[4] И. М. Виноградов, *Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена*, Известия АН СССР, 6 серия, 21(1927), 567–578.

[5] — *О приближениях посредством рациональных дробей, имеющих знаменателем точную степень*, Доклады АН СССР, 2(1935), 1–5.

[6] — *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, 2-е изд., „Наука", Москва 1980.

[7] — *Особые варианты метода тригонометрических сумм*, „Наука" Москва 1976.

[8] — *Избранные труды*, Изд-во АН СССР, Москва 1952.

[9] А. А. Карацуба, *О функции G(n) в проблеме Варинга*, Известия АН СССР, сер. матем., 49(5)(1985), 935–947.

[10] — *О некоторых арифметических задачах с числами, имеющими малые простые делители*, Acta Arith. 27(1975), 489–492.

[11] — *Тригонометрические суммы и их применения*, Труды МКМ, Ванкувер, 1(1975), 365–368.

[12] — *Основы аналитической теории чисел*, 2-е изд., „Наука", Москва 1983.

[13] Ю. В. Линник, *О суммах Вейля*, Матем. сб. 12(1942), 28–39.

Поступило 17.6.1988 (1835)

Les volumes IV et suivants sont à obtenir chez	Volumes from IV on are available at	Die Bände IV und folgende sind zu beziehen durch	Томы IV и следующие можно получить через

Ars Polona, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

Les volumes I-III sont à obtenir chez	Volumes I-III are available at	Die Bände I-III sind zu beziehen durch	Томы I-III можно получить через

Johnson Reprint Corporation, 111 Fifth Ave., New York, N. Y.

BOOKS PUBLISHED BY THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES INSTITUTE OF MATHEMATICS

S. Banach, Oeuvres, vol. II, 1979, 470 pp.
S. Mazurkiewicz, Travaux de topologie et ses applications, 1969, 380 pp.
W. Sierpiński, Oeuvres choisies, vol. I, 1974, 300 pp.; vol. II, 1975, 780 pp.; vol. III,1976, 688 pp.
J. P. Schauder, Oeuvres, 1978, 487 pp.
K. Borsuk, Collected papers, Parts I, II, 1983, xxiv + 1357 pp.
H. Steinhaus, Selected papers, 1985, 899 pp.
K. Kuratowski, Selected papers, 1988, LII + 610 pp.
W. Orlicz, Collected papers, Parts I, II, 1988, LIV + 1688 pp.

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

43. J. Szarski, Differential inequalities, 2nd ed., 1967, 256 pp.
51. R. Sikorski, Advanced calculus. Functions of several variables, 1969, 460 pp.
58. C. Bessaga and A. Pełczyński, Selected topics in infinite-dimensional topology, 1975, 353 pp.
59. K. Borsuk, Theory of shape, 1975, 379 pp.
62. W. Narkiewicz, Classical problems in number theory, 1986, 363 pp.

BANACH CENTER PUBLICATIONS

Vol. 1. Mathematical control theory, 1976, 166 pp.
Vol. 5. Probability theory, 1979, 289 pp.
Vol. 6. Mathematical statistics, 1980, 377 pp.
Vol. 7. Discrete mathematics, 1982, 224 pp.
Vol. 8. Spectral theory, 1982, 603 pp.
Vol. 10. Partial differential equations, 1983, 422 pp.
Vol. 11. Complex analysis, 1983, 362 pp.
Vol. 12. Differential geometry, 1984, 288 pp.
Vol. 13. Computational mathematics, 1984, 792 pp.
Vol. 14. Mathematical control theory, 1985, 643 pp.
Vol. 15. Mathematical models and methods in mechanics, 1985, 725 pp.
Vol. 16. Sequential methods in statistics, 1985, 554 pp.
Vol. 17. Elementary and analytic theory of numbers, 1985, 498 pp.
Vol. 19. Partial differential equations, 1987, 397 pp.
Vol. 20. Singularities, 1988, 498 pp.
Vol. 21. Mathematical problems in computation theory, 1988, 597 pp.
Vol. 22. Approximation and function spaces, 1989, 486 pp.
Vol. 23. Dynamical systems and ergodic theory, in the press.
Vol. 24. Numerical analysis and mathematical modelling, in the press.
Vol. 25. Combinatorics and graph theory, in the press.
Vol. 26. Topics in algebra, in the press.