References

[1] B. Brindza, *On Thue's equations*, in preparation.
[2] J.-H. Evertse, *On sums of S-units and linear recurrences*, Compositio Math. 53 (1984), 225–244.
[3] — *On equations in S-units and the Thue–Mahler equation*, Invent. Math. 75 (1984), 561–584.
[4] J.-H. Evertse and K. Győry, *On the numbers of solutions of weighted unit equations*, Compositio Math. 66 (1988), 329–354.
[5] J.-H. Evertse, K. Győry, C. L. Stewart and R. Tijdeman, *On S-unit equations in two unknowns*, Invent. Math. 92 (1988), 461–477.
[6] — — — — *S-unit equations and their applications*, in *New Advances in Transcendence Theory*, Cambridge, 1980, pp. 110–174.
[7] K. Győry, *On the number of solutions of linear equations in units of an algebraic number field*, Comment. Math. Helv. 54 (1979), 583–600.
[8] — *On the solutions of linear diophantine equations in algebraic integers of bounded norm*, Ann. Univ. Budapest. Eötvös, Sect. Math. 22–23 (1979–80), 225–233.
[9] — *On certain graphs composed of algebraic integers of a number field and their applications I*, Publ. Math. Debrecen 27 (1980), 229–242.
[10] — *Résultats effectifs sur la représentation des entiers par des formes décomposables*, Queen's Papers in Pure and Applied Math., No. 56, Kingston, Canada, 1980.
[11] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer Verlag, 1983.
[12] A. Leutbecher and G. Niklasch, *On cliques of exceptional units and Lenstra's construction of Euclidean fields*, Lecture Notes in Math., 1380, 1989, pp. 150–178.
[13] J. H. Loxton, *Some problems involving powers of integers*, Acta Arith. 46 (1986), 113–123.
[14] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, *Multiplicative dependence in number fields*, ibid. 42 (1983), 291–302.
[15] T. Nagell, *Quelques problèmes relatifs aux unités algébriques*, Arkiv för Mat. 8 (1969), 115–127.
[16] A. J. van der Poorten and H. P. Schlickewei, *The growth conditions for recurrence sequences*, Macquarie Univ. Math. Rep. 82-0041, North Ryde, Australia, 1982.
[17] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. 6 (1962), 64–94.
[18] T. N. Shorey and R. Tijdeman, *Exponential Diophantine Equations*, Cambridge 1986.
[19] C. L. Siegel, *Abschätzung von Einheiten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, 71–86, 1969.
[20] V. G. Sprindžuk, *Classical diophantine equations in two unknowns* (Russian), Nauka, Moskva 1982.
[21] H. M. Stark, *Some effective cases of the Brauer–Siegel theorem*, Invent. Math. 23 (1974), 135–152.
[22] J. S. Sunley, *Class numbers of totally imaginary quadratic extensions of totally real fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 175 (1973), 209–232.
[23] R. Zimmert, *Ideale kleiner Norm in Idealklassen und eine Regulatorabschätzung*, Invent. Math. 62 (1981), 367–380.

SCHOOL OF MATHEMATICS AND PHYSICS
MACQUARIE UNIVERSITY
North Ryde, N.S.W., 2113, Australia

MATHEMATICAL INSTITUTE
KOSSUTH LAJOS UNIVERSITY
4010 Debrecen, Hungary

Received on 13.9.1988 (1867)

ACTA ARITHMETICA
LIII (1990)

Über eine Klasse von gleichverteilten Folgen

von

EDMUND HLAWKA (Wien)

Dem Andenken an V. G. Sprindžuk gewidmet

Es seien $p_1, \ldots, p_s$ verschiedene ganzrationale Primzahlen von der Gestalt $4k+1$. Jede dieser Primzahlen besitzt im Gaußschen Zahlring $Z[i]$ die Zerlegung in Primzahlen

(1) $$p_j = \pi_j \bar{\pi}_j$$

wobei π_j, $\bar{\pi}_j$ Primzahlen in $Z[i]$ sind, dabei ist noch $\bar{\pi}_j$ nicht zu π_j assoziiert, d.h. es ist π_j zu $\bar{\pi}_j$ teilerfremd. Es ist nun für $j = 1, \ldots, s$

(2) $$\frac{\pi_j}{|\pi_j|} = e(\varphi_j)$$

wobei $e(\alpha) = e^{i\alpha}$ sein soll. Wir setzen noch

(3) $$\varphi_j = 2\pi\psi_j$$

und betrachten die Folgen

(4) $$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s),$$

bzw.

(5) $$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_s)$$

und fassen sie als Koordinaten des Punkte φ bzw. ψ in R^s auf.

1. Wir behaupten nun

SATZ 1. *Es sind $\psi_1, \ldots, \psi_s$ über Z linear unabhängig: Sind $h_1, h_2, \ldots, h_{s+1}$ ganze Zahlen, so daß*

(6) $$h_1\psi_1 + \ldots + h_s\psi_s + h_{s+1} = 0$$

so folgt

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_{s+1} = 0.$$

Beweis. Aus (6) folgt

$$h_1\varphi_1+\ldots+h_s\varphi_s+2\pi h_{s+1}=0. \tag{6'}$$

Daraus folgt nach (2)

$$\left(\frac{\pi_1}{|\pi_1|}\right)^{2h_1}\cdots\left(\frac{\pi_s}{|\pi_s|}\right)^{2h_s}=\left(\frac{\pi_1}{\bar\pi_1}\right)^{h_1}\cdots\left(\frac{\pi_s}{\bar\pi_s}\right)^{h_s}=1. \tag{7}$$

Wir wollen nun die Bezeichnung so wählen, daß $h_1, \ldots, h_r$ nicht negativ sind, $h_{r+1}, \ldots, h_s$ die Gestalt $-m_j$ ($m_j \geqslant 0$) haben. Ist $r=s$, so sind alle h_j nicht negativ. Wir erhalten dann aus (7) die Gleichung

$$B=\pi_1^{h_1}\ldots\pi_r^{h_r}\bar\pi_{r+1}^{m_{r+1}}\ldots\bar\pi_s^{m_s}=\bar\pi_1^{h_1}\ldots\bar\pi_r^{h_r}\pi_{r+1}^{m_{r+1}}\ldots\pi_s^{m_s}=A. \tag{8}$$

Da die π_j zu π_k relativ prim sind, wenn $j \neq k$ ist (es sind ja sogar Primzahlen) und stets π_j zu $\bar\pi_k$ (auch für $j=k$) relativ prim sind, so folgt

$$h_1=\ldots=h_s=0, \quad h_{s+1}=0.$$

Wir sehen also, daß der Satz richtig bleibt, unter der alleinigen Voraussetzung

$$ggT(\pi_j, \pi_k)=1 \quad \text{für } j\neq k$$

und

$$ggT(\pi_j, \bar\pi_k)=1 \quad \text{für alle } j,k$$

wobei $j, k=1, \ldots, s$ weil in $Z[i]$ die eindeutige Zerlegbarkeit in Primfaktoren gilt. Wir betrachten nun die Folge

$$\omega_N=(2k\psi)=(2\psi, \ldots, 2N\psi) \tag{9}$$

in R^s modulo 1 und die Weylsche Summe

$$W_N=W_N(h, \omega_N)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e(4\pi k\langle h, \psi\rangle) \tag{10}$$

wobei

$$\langle h, \psi\rangle=h_1\psi_1+\ldots+h_s\psi_s \tag{11}$$

ist, und $h_1, \ldots, h_s$ ganze rationale Zahlen sind, die nicht alle Null sind. Wir können (10) aufsummieren und erhalten sofort die Abschätzung

$$|W_N(h)| \leqslant 2/NL.$$

Dabei ist

$$L=|e(4\pi\langle h, \psi\rangle)-1|=|e(2\langle h, \psi\rangle-1)|, \tag{12}$$

nun ist nach (2)

$$e(2\langle h, \varphi\rangle)=\left(\frac{\pi_1}{\bar\pi_1}\right)^{h_1}\cdots\left(\frac{\pi_s}{\bar\pi_s}\right)^{h_s}.$$

Benützen wir die Bezeichnungen, wie wir sie beim Beweis von Satz 1 benützt haben:

$$h_1\geqslant 0, \ldots, h_r\geqslant 0, h_{r+1}=-m_{r+1}\leqslant 0, \ldots, h_s=-m_s\leqslant 0 \tag{13}$$

so wird

$$L=|B-A|/|A| \tag{14}$$

wobei

$$A=\bar\pi_1^{h_1}\ldots\bar\pi_r^{h_r}\pi_{r+1}^{m_{r+1}}\ldots\pi_s^{m_s} \tag{14'}$$

und

$$B=\pi_1^{h_1}\ldots\pi_r^{h_r}\bar\pi_{r+1}^{m_{r+1}}\ldots\bar\pi_s^{m_s}. \tag{15}$$

Es ist

$$|A|=(p_1^{|h_1|}\ldots p_s^{|h_s|})^{1/2} \tag{16}$$

und

$$|B-A|\geqslant 1.$$

Wir haben also ($h\neq 0$)

$$|W_N|\leqslant\frac{2}{N}(p_1^{|h_1|}\ldots p_s^{|h_s|})^{1/2}. \tag{17}$$

Wir haben nach Erdös–Turán–Koksma für die Diskrepanz der Folge (9)

$$D_N\leqslant C_s\left(\frac{1}{M}+\sum_{0<\|h\|\leqslant M}(R(h))^{-1}|W_N(h)|\right) \tag{18}$$

wobei

$$\|h\|=\operatorname{Max}(|h_1|, \ldots, |h_s|), \qquad R(h)=\prod_{j=1}^{s}\operatorname{Max}(1, |h_j|),$$

$|C_s|\leqslant 4^{s^2}$ und $M\geqslant 1$ beliebig ist. Wir setzen noch

$$P_s=p_1\ldots p_s$$

dann ist also nach (17) und (18)

$$D_N\leqslant C_s\left(\frac{1}{M}+\frac{2}{N}\sum_{0<\|h\|\leqslant M}(p_1^{|h_1|}\ldots p_s^{|h_s|})^{1/2}\right)<C_s\left(\frac{1}{M}+\frac{4}{N}P_s^{M/2}(2\log M)^s\right). \tag{19}$$

Wir nehmen nun

$$M=\frac{\log N}{\log P_s}$$

und erhalten

$$D_N \leqslant 4^s C_s \left(\frac{\log P_s}{\log N} + \frac{1}{\sqrt{N}} (\log\log N)^s \right).$$

SATZ 2.

$$D_N(\omega_N) \leqslant 4^s C_s (\log P_s) \frac{(\log\log N)^s}{\log N}. \tag{20}$$

Betrachten wir jetzt statt der Folge (9) die Funktion (Gerade)

$$\omega(t) = 2t\psi \tag{21}$$

im Intervall $0 \leqslant t \leqslant T$. Die Weylsche "Summe" ist

$$W_T(h, \omega) = \frac{1}{T} \int_0^T e(4\pi t \langle \psi, h \rangle)\, dt.$$

Es ist

$$|W_T| \leqslant \frac{2}{2T\langle h, \varphi \rangle}.$$

Es ist nun allgemein

$$|e(\alpha) - 1| = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| \geqslant \frac{2}{\pi}\{\alpha\} > \tfrac{1}{2}\{\alpha\}$$

wobei $\{\alpha\} = \operatorname{Min} |\alpha - n|$ ist. Es ist also

$$\frac{1}{2\langle h, \varphi \rangle} \leqslant \frac{1}{\{2\langle h, \varphi \rangle\}} \leqslant \frac{1}{|e(2\langle h, \varphi \rangle - 1)|}$$

und dies ist nach (12), (13) $\leqslant (A)$. Wir haben also

$$|W(T)| \leqslant \frac{2}{T}|A|$$

und erhalten für die Diskrepanz $D_T(\omega)$

SATZ 3.

$$D_T(\omega) \leqslant 4^s C_s (\log P_s) \frac{(\log\log T)^s}{\log T}. \tag{22}$$

Wir betrachten nun den Punkt

$$\hat{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_s, 1/(2N))$$

in R^{s+1} und die Folge

$$\hat{\omega}_N = (2k\hat{\psi}) = (2\hat{\psi}, \ldots, 2N\hat{\psi}).$$

Die Weylsche Summe ist jetzt, wo

$$\hat{h} = (h, h_{s+1}), \quad h = h_1, \ldots, h_s),$$

$$W_N(\hat{h}, \hat{\omega}_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e(4\pi k \langle \hat{h}, \hat{\psi} \rangle).$$

Es ist

$$\langle \hat{h}, \hat{\psi} \rangle = \langle h, \psi \rangle + \frac{1}{2N} h_{s+1}.$$

Es wird

$$|\hat{W}_N| = |W_N(\hat{h}, \hat{\omega}_N)| \leqslant \frac{2}{N} \hat{L}^{-1},$$

wobei

$$\hat{L} = |e(4\pi \langle \hat{h}, \hat{\psi} \rangle) - 1|.$$

Nun ist (wenn $h \neq 0$, sonst trivial)

$$e(4\pi \langle \hat{h}, \hat{\varphi} \rangle) = e\left(2\langle h, \varphi \rangle + \frac{2\pi h_{s+1}}{N} \right) = e(2\langle h, \varphi \rangle) e\left(\frac{2\pi h_{s+1}}{N} \right)$$

also

$$\hat{L} \geqslant \left| (e(2\langle h, \varphi \rangle) - 1)\, e\left(\frac{2\pi h_{s+1}}{N} \right) \right| - \left| \left(e\left(\frac{2\pi h_{s+1}}{N} \right) - 1 \right) \right|.$$

Daraus folgt nach (14)

$$\hat{L} \geqslant L - \frac{2\pi |h_{s+1}|}{N} \geqslant (p_1^{|h_1|} \ldots p_s^{|h_s|})^{-1/2} - \frac{2\pi |h_{s+1}|}{N}.$$

Wir setzen nun voraus, daß für alle j

$$|h_j| \leqslant M \leqslant \log N / \log P_s$$

ist. Dann ist wieder

$$p_1^{|h_1|} \ldots p_s^{|h_s|} \leqslant P_s^{M/2} \sqrt{N}$$

und wir haben

$$\hat{L} \geqslant \frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{2\pi \log N}{\log P_s N}.$$

Wir wählen N so groß, daß

$$\frac{2\pi \log N}{\sqrt{N}} \leqslant 1 \tag{20'}$$

ist. Weiter ist $p_s \geqslant 5$, also $\log p_s \geqslant \log 5 \geqslant 3/4$, da $5^3 \geqslant e^4$. Wir erhalten also

$$\hat{L} \geqslant \frac{1}{\sqrt{N}}\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{N}}.$$

Wir erhalten also $|\hat{W}_N| \leqslant 8N^{-1/2}$ und nach der Formel (18), aber jetzt für Dimension $s+1$,

SATZ 4.

$$D_N(\hat{\omega}_N) \leqslant 8^{s+1} C_{s+1} \frac{(\log\log N)^{s+1}}{\log N} \log P_s \tag{20''}$$

für $N > 2^{14}$, denn dann ist (20′) erfüllt, denn $2\pi \log 2^{14} < 8\cdot 14 < 2^7 = 8\cdot 16$.

2. Wir wollen nun einige einfache Folgerungen aus § 1 (20), (20′), (20″) ziehen. Betrachten wir den s-dimensionalen Einheitswürfel

$$E^s\colon 0 \leqslant x_j < 1 \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{1}$$

Es sei J das Intervall

$$\alpha_j \leqslant x_j < \beta_j \quad (j = 1, \ldots, s) \tag{2}$$

wobei stets $0 \leqslant \alpha_j < \beta_j \leqslant 1$ ist. Es liegt also J in E^s. Es sei $N(J, \omega_N) = N'(J)$ die Anzahl der Glieder der Folge (9), die in J liegen, dann ist nach Definition der Diskrepanz

$$\left|\frac{N'(J)}{N} - V(J)\right| \leqslant D_N$$

wobei $V(J)$ das Volumen von J ist. Es ist also

$$N'(J) \geqslant N(V(J) - D_N).$$

Ist also

$$V(J) > D_N \tag{3}$$

so ist $N'(J) \geqslant 1$, d.h. es liegt mindestens ein Glied der Folge ω_N in J. Gilt sogar für eine natürliche Zahl L

$$V(J) > \frac{L-1}{N} + D_N \tag{3'}$$

dann ist

$$N'(J) > L-1$$

dann liegen sogar L Glieder der Folge ω_N in J. Es muß natürlich $N \geqslant L$ sein. Es gilt sogar noch mehr: Es sei K ein konvexer Körper in E^s, so gilt ([1])

$$\left|\frac{N'(K)}{N} - V(K)\right| \leqslant D_N^{1/s}. \tag{4}$$

Ist also

$$V(K) > \frac{L-1}{N} - D_N^{1/s} \tag{5}$$

so liegen L Punkte der Folge in K. Wenden wir also § 1 (20) an, so folgt, wenn

$$V(J) > \frac{L-1}{N} + C_1^s \frac{(\log\log N)^s}{\log N} \quad (C_1^s = 4^3 C_s \log P_s), \tag{6}$$

bzw.

$$V(K) > \frac{L-1}{N} + C_1 \frac{\log\log N}{(\log N)^{1/s}} \tag{6'}$$

daß in J bzw. K mindestens L Punkte aus § 1 (9) liegen. Nehmen wir zunächst

$$\beta_j = \alpha_j + \delta_j$$

so ist

$$V(J) = \delta_1 \ldots \delta_s.$$

Nehmen wir gleich $\delta_1 = \ldots = \delta_s = \delta$ so folgt also aus (6) mit $L = 1$,

SATZ 5. *Ist*

$$\delta > C_1 \frac{\log\log N}{(\log N)^{1/\delta}} \tag{7}$$

so liegt im Intervall

$$\alpha_j \leqslant x_j < \alpha_j + \delta$$

mindestens ein Glied der Folge $2k\psi_j \bmod 1$, d.h. daß also

$$\alpha_j \leqslant 2k\psi_j < \alpha_j + \delta \pmod 1, \quad j = 1, \ldots, s$$

ist.

Nun verwenden wir § 1 (1), (2). Wir setzen

$$\pi_j = a_j + ib_j \tag{8}$$

also

$$p_j = a_j^2 + b_j^2.$$

Weiter ist

$$e(2\varphi_j) = e(4\pi\psi_j) = \frac{\pi_j}{\bar{\pi}_j} = \frac{a_j + ib_j}{a_j - ib_j} = \frac{a_j^2 + b_j^2}{a_j^2 + b_j^2} + \frac{2a_j b_j}{a_j^2 + b_j^2} i$$

also

$$e(2k\varphi_j) = \left(\frac{\pi_j}{\bar{\pi}_j}\right)^k = \frac{a_{jk} + ib_{jk}}{a_{jk} - ib_{jk}}. \tag{9}$$

Wir erhalten sofort die Rekursionsformeln

(9') $$a_{j,k+1} = a_{jk}a - b_{jk}b, \quad b_{j,k+1} = a_{jk}b + b_{jk}a.$$

Es wird also

(10) $$\xi_{jk} = \mathrm{Re}\big(e(2k\varphi_j)\big) = \frac{a_{jk}^2 - b_{jk}^2}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2}, \quad \mu_{jk} = \mathrm{Im}\big(e(2k\varphi_j)\big) = \frac{2a_{jk}b_{jk}}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2}.$$

Sie sind also rationale Zahlen und die Punkte (ξ_{jk}, μ_{jk}) liegen auf dem Einheitskreis. Setzen wir $e(2\pi\alpha_j) = A_j + iB_j$; so folgt also aus (7)

Satz 6. *Sind $(A_1, B_1), \ldots, (A_s, B_s)$ Punkte auf dem Einheitskreis, dann gibt es stets s Punkte (ξ_{jk}, μ_{jk}) $(j = 1, \ldots, s)$ mit rationalen Koordinaten, so daß*

(11) $$|\xi_{jk} - A_j| \leqslant 2C_1 \log\log N (\log N)^{-1/s},$$

(11') $$|\mu_{jk} - B_j| \leqslant 2C_1 \log\log N (\log N)^{-1/s}.$$

Diese Punkte werden durch (10) *gegeben. Dabei ist*

(11'') $$1 \leqslant k \leqslant N.$$

Ein verwandter Satz wurde in der Arbeit [2] angegeben. Wir betrachten nun die Sphäre

$$S^2\colon X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1.$$

Wir betrachten die Folge $(1 \leqslant k \leqslant N)$

$$\hat{\omega}_N\big(2k(\psi, 1/(2N))\big)$$

für $s = 1$. Dann betrachten wir auf S^2 die Folge

(12) $$(X_1(k), X_2(k), X_3(k)),$$

(12_1) $$X_1(k) = r_1(k)\cos 2k\varphi = r(k)\frac{a_{jk}^2 - b_{jk}^2}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2},$$

(12_2) $$X_2(k) = r_2(k)\sin 2k\varphi = r(k)\frac{2a_{jk}b_{jk}}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2},$$

(12_3) $$X_3(k) = r_2(k) = 1 - \frac{2k}{N}.$$

Dabei ist

(12_4) $$r_1(k) = \sqrt{1 - r_2^2(k)}.$$

Es haben also die Punkte (X_1^2, X_2^2, X_3^2) rationale Koordinaten. Dann bilden wir uns die Funktion

$$f(x_1, x_2) = F\big(X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2), X_3(x_1, x_2)\big).$$

Dabei ist

$$X_1(x_1, x_2) = r_1(x_1)\cos 2\pi x_2, \; X_2(x_1, x_2) = r_1(x_1)\sin 2\pi x_2, \; X_3(x_1, x_2) = 1 - 2x_1$$

und

$$r_1(x_1) = (1 - x_1^2)^{1/2}.$$

Es ist dann

(13) $$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(X_1(k), X_2(k), X_3(k)) - J\right| \leqslant D_N V(f)$$

wobei ja nach § 1 (20'') mit $C_2 = 8^{s+1}C_{s+1}\log P_s$

(14) $$D_N \leqslant C_2\frac{\log\log N}{\log N}$$

und

$$J = \int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2.$$

Nun ist, wenn man

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\vartheta), \quad 2\pi x_2 = \varphi_k \quad \text{setzt} \quad x_1 = \sin\vartheta,$$

$$I = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, F(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)\sin\vartheta.$$

Es ist also die Folge (12) auf S^2 gleichverteilt. Liegen die ersten und zweiten Ableitungen von F auf S^2 unter einer Schranke M (dem Betrage nach), so ist

$$\left(F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \; F_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}\right)$$

$$V(f) = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\big((F_{11} + F_{22})\cos\varphi\sin\varphi + 2F_{12} + F_{13} + F_{23}\big)$$

$$\times\left((F_1\cos\varphi + F_2\sin\varphi)\frac{1}{\sin\vartheta}\right)(1 - \cos\vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta$$

also

$$V(f) \leqslant 18M.$$

3. Wir wollen nun noch einen anderen, einfacheren Weg einschlagen, um Resultate von der Gestalt § 1 (22) bis (25) zu erhalten. Die Resultate, die wir so erhalten sind für $L = 1$ gleich gut, für $L > 1$ schwächer. Es muß vorausgesetzt werden, daß K ein konvexer Körper mit Mittelpunkt ist. Weiter muß dann noch über K, wenn man explizite Resultate erhalten will, vorausgesetzt werden, daß K ein Intervall, ein Polyeder, oder ein glatter Körper ist. Die Methode findet sich im eindimensionalen Fall bei Koksma, *Diophantische Approxima-*

tionen, und geht auf einen Brief von C. L. Siegel an Koksma zurück. Die Methode wird dort nur benützt, um einen metrischen Satz herzuleiten. Da natürlich im eindimensionalen Fall jeder konvexe Körper ein Intervall ist, kommt die allgemeine Idee, die hinter der Methode steht, nicht zum Vorschein und erscheint damit undurchsichtig, während sie im mehrdimensionalen Fall vollkommen durchsichtig wird. In der Geometrie der Zahlen wurde sie von C. L. Siegel zum Beweis des Minkowskischen Fundamentalsatzes benutzt. In meiner Arbeit [3] habe ich die Methode allgemein dargestellt, vielleicht zu allgemein, so daß sie im Formalismus untergeht. Es sei mir daher gestattet, sie für den Spezialfall, für den wir sie hier benötigen, noch einmal darzustellen. Es sei also K ein konvexer Körper der in E^s liegt. Weiter soll K einen Mittelpunkt besitzen. Es besitzt dann $K-a=K_1$ den Nullpunkt als Mittelpunkt. Es sei nun φ (diese Funktion hat natürlich nichts mit den Winkeln φ_j aus § 1 zu tun) die Indikatorfunktion von $\frac{1}{2}K_1$, d.h. es ist $\varphi(x)=1$, wenn x in $\frac{1}{2}K_1$, also $2x$ in K_1 liegt und $\varphi(x)=0$, wenn dies nicht der Fall ist. Wir bilden uns nun die periodische Funktion

$$\Phi(x)=\sum_h \varphi(x+h) \tag{1}$$

wo sich die Summe über alle Gitterpunkte, also über alle Punkte h mit ganzzahligen Koordinaten erstreckt. (Wir brauchen hier noch nicht vorauszusetzen, daß die Translate $K+h$ nicht übereinandergreifen. Die Summe ist natürlich eine endliche Summe, da ja K_1 beschränkt ist. Wir entwickeln nun Φ in eine Fourierreihe

$$\sum_h c_h e(2\pi\langle h, x\rangle). \tag{2}$$

Es ist

$$\begin{aligned} c_h &= \int_{E^s} \Phi(x)e(-2\pi\langle h, x\rangle)dx \\ &= \sum_h \int_{E^s} \varphi(x)e(-2\pi\langle h, x\rangle)dx = \int_{R^s} \varphi(x)e(-2\pi\langle h, x\rangle)dx \end{aligned} \tag{3}$$

also

$$c_h=\int_{x\in\frac{1}{2}K_1} e(-2\pi\langle h, x\rangle)dx. \tag{4}$$

Nun ist $K_1=K-a$, also wird

$$c_h=\frac{1}{2^s}e(2\pi\langle h, a\rangle)\int_K e(-\pi\langle h, x\rangle)dx \tag{5}$$

insbesondere ($0=(0, \ldots, 0)$ Nullpunkt)

$$c_0=V(K)/2^s. \tag{5'}$$

Wir wenden nun die Parsevalsche Gleichung an:

$$\int_{E^s} \Phi(x)\Phi(x+y)dx=\sum_h |c_h|^2 e(2\pi\langle h, y\rangle). \tag{6}$$

Es sei nun

$$\omega_N: x_1, \ldots, x_N$$

eine Folge in E^s. Wir setzen nun in (6)

$$y=x_k+a$$

und summieren über alle k. Wenn wir

$$M(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Phi(x+x_k+a) \tag{7}$$

setzen, so erhalten wir

$$J=\int_{E^s}\Phi(x)M(x)dx=\sum_h |c_h|^2 W_N(h, \omega_N) \tag{8}$$

wobei

$$W_N(h)=W_N(h, \omega_N)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e(2\pi\langle h, x_k\rangle) \tag{9}$$

die Weylsche Summe der Folge ω_N zum Gitterpunkt h ist. Wir trennen nun in (9) das Glied mit $h=0$ ab, berücksichtigen (5′) und haben also

$$J\geqslant\frac{1}{4^s}V^2(K)-\sum_{h\neq 0}|c_0|^2|W_N(h)|. \tag{10}$$

Nehmen wir nun an, daß für eine natürliche Zahl $L\geqslant 1$

$$4^{-s}V^2(K)>\sum_{h\neq 0}|c_h|^2|W_N(h)|+\frac{1}{N}(L-1) \tag{11}$$

ist. Aus (8) und (10) folgt dann

$$N\int_{E^s}\Phi(x)M(x)dx>L-1. \tag{12}$$

Nun ist das Integral in (12), wie bei der Herleitung von (4), gleich

$$\sum_h\int_{R^s}\varphi(x)\sum_{k=1}^{N}\varphi(x+x_k+k+a)dx \tag{12'}$$

und ist nach (12) größer als $L-1$. Nun ist (12) eine ganze Zahl, also ist sie sogar $\geqslant L_n$. Nun ist φ die Indikatorfunktion von $\frac{1}{2}K_1$. Es muß also ein x in $\frac{1}{2}K_1$ so liegen, so daß

$$\sum_h\sum_{k=1}^{N}\varphi(x+x_k+h+a)\geqslant L \tag{13}$$

ist. Es gibt also Gitterpunkte h_k, so daß

$$(14)\qquad \sum_{k=1}^{N} \varphi(x+x_k+h_k+a) \geqslant L.$$

Es gibt daher L Punkte x_k, z.B. $x_1, \ldots, x_L$, so daß

$$x+x_k+h_k+a$$

in $\frac{1}{2}K$ liegen. Da K_1 den Mittelpunkt Null besitzt, liegt mit x auch $-x$ in $\frac{1}{2}K_1$, also liegt für $k=1, \ldots, L$

$$x_k+h_k+a$$

in K_1, also liegen

$$(15)\qquad x_k+h_k$$

in K. Es muß aber $h_k = 0$ sein, denn x_k liegt in K, also in E^s und E^s und E^s+h sind für $h \neq 0$ stets disjunkt. Zur Anwendungs dieses Resultats ist eine Diskussion von (10) notwendig. Es sei zunächst K ein Intervall I. Dann folgt sofort aus (5)

$$(16)\qquad |c_h| \leqslant (2^s R(h))^{-1}.$$

Es ist für $M \geqslant 1$

$$(17)\qquad \sum_{|h| \geqslant M} |c_h|^2 |W_N(h)| \leqslant \frac{1}{4^s} \sum_{|h| \geqslant M} \frac{1}{R(h)^2} \leqslant \frac{s}{4^s M}.$$

Ist also

$$(18)\qquad V^2(K) > 4^s \frac{(L-1)}{N} - \left(\frac{1}{M} + \sum_{|h| \leqslant M} \frac{1}{R(h)^2} |W_N(h)|\right)$$

so gilt also für die Anzahl $N'(J, \omega_N)$ der Punkte von ω_N

$$(19)\qquad N'(J, \omega_N) \geqslant L.$$

Ist K ein glatter konvexer Körper, so gilt

$$(20)\qquad |c_h| \leqslant \frac{1}{2^s} G(K) |h|^{(s+1)/2}$$

wo $G(K)$ von der Gaußschen Krümmung des Eichkörpers von K abhängt. Es ist

$$\sum_{|h| \geqslant M} |c_h|^2 |W_N(h)| \leqslant \frac{G(K)}{4^s} \sum_{|h| \geqslant M} |h|^{-(s+1)} < \frac{G^2(K)}{4^s} \frac{1}{M}.$$

Ist also

$$(21)\qquad V^2(K) > 4^s \frac{(L-1)}{N} - G^2(K) \left(\frac{1}{M} + \sum_{|h| \leqslant M} |h|^{-(s+1)} |W_N(h)|\right)$$

so ist

$$(22)\qquad N'(K, \omega_N) \geqslant L$$

(§ 1 (9)). Wenden wir nun (18) für unsere Folge (8) an, und benützen wir (12), dann gilt

$$\frac{1}{M} + \sum_{|h| \leqslant M} \frac{1}{R(h)^2} |W_N(h)| \leqslant \frac{1}{M} + \frac{4}{N^2} \sum_{|h| \leqslant M} (R(h))^{-2} (p_1^{|h_1|} \ldots p_s^{|h_s|})^{1/2}$$
$$\leqslant \frac{1}{M} + \frac{4}{N^2} P_s^{M/2} \sum_{|h| \leqslant M} \frac{1}{(R(h))^2} \leqslant \frac{1}{M} + 2^s P_s^{M/2} N^{-2}.$$

Wir nehmen $M = \log N |\log P_s|$. Wir können also sagen: Ist

$$(23)\qquad V(K) > \left(\frac{L-1}{N} + 4^s G^2(K) \frac{\log P_s}{\log N}\right)^{1/2}$$

so ist

$$(24)\qquad N'(K, \omega_N) \geqslant L.$$

Ist also insbesondere

$$(25)\qquad V(K) \geqslant 2^s G(K) \left(\frac{\log P_s}{\log N}\right)^{1/2}$$

so ist

$$(26)\qquad N'(K, \omega_N) \geqslant 1.$$

Vergleicht man (23) und (25) mit § 2 (6), (6') so sieht man, daß sie in Abhängigkeit von L schlechter ist, aber in s und N besser ist.

Bemerkung 1. Es wurde im Beweis von (10) nur von den Punkten h benützt, daß sie ein Gitter mit Gitterdeterminante 1 bilden. Es gelten daher diese Ungleichungen, wenn es eine s-zeilige Matrix A mit $\operatorname{Det} A = 1$ gibt, so daß jedes h die Gestalt Al besitzt, wobei 0 ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten ist. Es muß allerdings $W_N(h, \omega_N)$ ersetzt werden durch

$$W_N(h^*, \omega_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e(2\pi \langle h^*, x_k \rangle)$$

wo h^* dem dualen Gitter (Bl) angehört, wobei $B = A^{*-1}$ ist (A^* transponierte Matrix zu A).

Bemerkung 2. Wie mir Prof. Browkin mitteilt, findet sich § 1 (6') nach Division durch 4 bei S. Świerczkowski, *On Pythagorean angles*, Colloq. Math. 7 (1959), 103–105. Diese Arbeit war mir nicht bekannt. Die Literatur über Pythagoreische Tripel ist außerordentlich umfangreich. Prof. A. Schinzel hat mich auf das Buch von Babaev *Distribution of integral points on algebraic surfaces* (Russian) aufmerksam gemacht und auf andere Arbeiten, so auf

V. P. Myakhishev, *Distribution of primitive integer points on certain cones*, Doklady ANSSSR 143 (1962), 785–786. Ich selbst füge hinzu: F. Fricker, Archiv d. Math. 28 (1977), 391–394.

Wie ich sehe ist in der Literatur nur der "eindimensionale" Fall behandelt. Die Sätze 2 und 3 kommen meines Wissens nach nicht vor, vor allem nicht die Anwendung auf die Gleichverteilung auf Sphären und auf numerische Berechnung von Integralen. Dies wird in einer weiteren Arbeit noch weiter ausgearbeitet werden. §3 ist an sich interessant.

Literatur

[1] E. Hlawka, *Funktionen von beschränkter Schwankung in der Theorie der Gleichverteilung*, Ann. Mat. Pura Appl. IV. Ser., 54 (1961), 325–334.

[2] – *Approximation von Irrationalzahlen und pythagoreische Tripel*, Bonner Math. Schriftenreihe 121 (1980), 1–32.

[3] – *Zur Theorie des Figurengitters*, Math. Ann. 125 (1952), 183–207.

Eingegangen am 19.9.1988
und in revidierter Form am 14.11.1988 (1868)

ACTA ARITHMETICA
LIII (1990)

Ramanujan's modular equations

by

K. G. Ramanathan (Bombay)

Dedicated to the memory of V. G. Sprindžuk

1. Let $\tau = x+iy$, $y > 0$ be a point in the upper half complex τ-plane H and let $\Gamma = \mathrm{SL}(2, Z)$ be the group of two-rowed integral matrices of determinant 1:

$$\Gamma = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \text{ integers}, \; ad-bc = 1 \right\}.$$

The group Γ acts on H discontinuously

$$\tau \to \tau_M = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}.$$

Let G be a subgroup of finite index in Γ. A meromorphic function $\varphi(\tau)$ on H is called a *modular function belonging to G* if for every $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in G,

$$\varphi(\tau_M) = \varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varphi(\tau)$$

and $\varphi(\tau)$ has nice behaviour at all parabolic vertices of G in H (see [3]). If $n > 0$ is a rational integer, $\varphi(\tau)$ and $\varphi(n\tau)$ are modular functions belonging to a subgroup of finite index in Γ and hence are algebraically related. This algebraic relation may be called a *modular equation* for $\varphi(\tau)$ of degree n.

Let K and iK' be the fundamental quarter periods of an elliptic function field so that

$$\tau = iK'/K$$

has positive imaginary part. Put $q = e^{\pi i\tau}$ and let k^2 and $k'^2 = 1-k^2$ be the squares of the moduli associated with K and K' respectively. Then

$$k^{1/4} = \sqrt{2}\cdot q^{1/8}\cdot \frac{1+q+q^3+q^6+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}. \tag{1}$$

Let us put, with Ramanujan, $k^2 = \alpha$ so that $k'^2 = 1-\alpha$. If $n > 0$ is a positive