Acknowledgement. I wish to thank Professor D. W. Masser for helpful discussions.

References

[1] C. F. Degen, *Canon Pellianus sive tabula simplicissimam aequationis celebratissimae $y^2 = ax^2+1$ solutionem, pro singulis numeri dati valoribus ab 1 usque ad 1000, in numeris rationalibus iisdemque integris exhibens*, Copenhagen 1817.
[2] L. K. Hua, *On the least solution of Pell's equation*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 731–735.
[3] J. C. Lagarias, *On the computational complexity of determining the solvability or unsolvability of the equation $x^2-dy^2=-1$*, Trans. Amer. Math. Soc. 260 (2) (1980), 485–508 (Appendix A).
[4] J. Pintz, *Elementary methods in the theory of L-functions, VII. Upper bound for $L(1,\chi)$*, Acta Arith. 32 (1977), 397–406.
[5] A. Schinzel, *Integer points on conics*, Ann. Soc. Math. Polon., Ser. I: Comment. Math. 16 (1972), 133–135 (see also 17 (1973), 305).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF MICHIGAN
Ann Arbor, Michigan 48109
U.S.A.

Received on 14.7.1988 (1850)

ACTA ARITHMETICA
LV (1990)

Über die asymptotische Dichte gewisser Teilmengen der natürlichen Zahlen

von

PETER KUNTH (Frankfurt/Main)

1. Überblick. Wir werden als Verallgemeinerung eines wohlbekannten Ergebnisses von B. Saffari, P. Erdös und R. C. Vaughan (vgl. [3], [8]) zeigen: Unter einschränkenden Bedingungen an eine Teilmenge T der natürlichen Zahlen existiert für die Faktoren M_1, M_2 eines direkten Produkts $T = M_1 \times M_2$ ihre "asymptotische Dichte" stets.

2. Asymptotischer und logarithmischer Mittelwert. Im folgenden ist stets $N := \{1, 2, 3, \ldots\}$ (ohne die Null).

DEFINITION. Gegeben sei eine zahlentheoretische Funktion $f\colon N \to C$.

$$\underline{\delta}(f) := \liminf_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} \cdot \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n},$$

$$\overline{\delta}(f) := \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} \cdot \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n}$$

heißen *untere* (resp. *obere*) *logarithmische Dichte* der zahlentheoretischen Funktion f. Gilt dabei sogar

$$\underline{\delta}(f) = \overline{\delta}(f),$$

so besitzt f einen *logarithmischen Mittelwert*

$$\delta(f) := \lim_{x\to\infty} \left\{\frac{1}{\log x} \cdot \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n}\right\}.$$

DEFINITION. Für eine zahlentheoretische Funktion f heißen

$$\underline{M}(f) := \liminf_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sum_{n\le x} f(n),$$

$$\overline{M}(f) := \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sum_{n\le x} f(n)$$

untere (resp. *obere*) *asymptotische Dichte.* Gilt dabei sogar

$$\underline{M}(f) = \bar{M}(f),$$

so besitzt f einen (*asymptotischen*) *Mittelwert*

$$M(f) := \lim_{x\to\infty} \left\{\frac{1}{x} \cdot \sum_{n\leq x} f(n)\right\}.$$

LEMMA 1. *Für den oberen und unteren asymptotischen und logarithmischen Mittelwert einer zahlentheoretischen Funktion* $f\colon N \to [0, 1]$ *gelten stets die Abschätzungen*

$$0 \leq \underline{M}(f) \leq \underline{\delta}(f) \leq \bar{\delta}(f) \leq \bar{M}(f) \leq 1.$$

Der Beweis folgt leicht mittels partieller Summation (vgl. [6], S. 346). Die fünf Ungleichungen in Lemma 1 sind i.a. echt; für eine spezielle Teilklasse zahlentheoretischer Funktionen, die uns im folgenden interessieren wird, tritt allerdings an der dritten und vierten Stelle Gleichheit ein. Zur Formulierung brauchen wir zunächst die

DEFINITION. Eine Teilmenge T der natürlichen Zahlen heißt *teilerabgeschlossen*, falls stets gilt

$$n \in T, \quad d \mid n \Rightarrow d \in T.$$

Die zahlentheoretische Funktion

$$\chi_T(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in T, \\ 0 & \text{falls } n \notin T \end{cases}$$

heißt *charakteristische Funktion der teilerabgeschlossenen Teilmenge* $T \subseteq N$. Für diese Funktionen läßt sich das Lemma 1 verschärfen:

LEMMA 2 (H. Davenport und P. Erdös, 1937). *Sei* $T \subseteq N$ *teilerabgeschlossene Teilmenge. Dann existiert der logarithmische Mittelwert der charakteristischen Funktion* $\delta(\chi_T)$, *und es gilt darüberhinaus*

$$\delta(\chi_T) = \bar{M}(\chi_T).$$

Ein Beweis findet sich im Buch von H. Halberstam und K. F. Roth, [4], Kapitel V, Theorem 12 (für das mengentheoretische Komplement $T^c := N \setminus T$). Lemma 2 kann die Vermutung nahelegen, daß der Mittelwert $M(\chi_T)$ für teilerabgeschlossenes $T \subseteq N$ stets existiert. Daß dem mitnichten so ist, zeigte 1934 A. S. Besicovitch, [1], durch Angabe eines Gegenbeispiels.

Im Falle seiner Existenz heißt der asymptotische Mittelwert $M(\chi_T)$ auch *asymptotische Dichte der Teilmenge* $T \subseteq N$.

Für den Beweis des Hauptergebnisses dieser Arbeit brauchen wir schließlich noch ein hinreichendes Kriterium über die Existenz des (asymptotischen) Mittelwerts des punktweise definierten Produkts $\chi_T \cdot \chi_{T'}$ für teilerabgeschlossene Teilmengen $T, T' \subseteq N$. Wir formulieren dies im

LEMMA 3. *Seien* $T, T' \subseteq N$ *teilerabgeschlossen. Dann gilt*

$$\exists M(\chi_T), M(\chi_{T'}) \Rightarrow \exists M(\chi_T \cdot \chi_{T'}) = M(\chi_{T\cap T'}).$$

Der Beweis folgt unter Benutzung eines tiefliegenden Kriteriums von P. Erdös über die Existenz des Mittelwerts $M(\chi_T)$ für teilerabgeschlossenes $T \subseteq N$ (in [4], Kapitel V, Theorem 13), dessen explizite Formulierung einigen zusätzlichen Formalismus erforderte und deshalb hier der Kürze wegen unterdrückt werden soll (Ausführlicheres dazu siehe in [7], Kapitel II, §5).

3. Die Banach-Algebra $l^1(T)$

DEFINITION. Sei $T \subseteq N$ teilerabgeschlossene Teilmenge. Die Menge der absolutsummierbaren zahlentheoretischen Funktionen

$$l^1(T) := \{f\colon T \to C \mid \sum_{n\in T} |f(n)| < \infty\}$$

ist komplexer Vektorraum unter punktweisen Operationen.

Eine (archimedische) Norm auf $l^1(T)$ wird definiert durch die absolute Summation

$$\|f\|_1 := \sum_{n\in T} |f(n)|.$$

Die *Dirichletsche Faltung* $(f, g \in l^1(T))$

$$(f *_T g)(n) := \sum_{d\mid n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (n \in T)$$

definiert auf $l^1(T)$ eine kommutative, assoziative Multiplikation. Damit wird $(l^1(T), *_T, \|\cdot\|_1)$ kommutative Algebra mit Eins

$$\varepsilon(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{falls } n \neq 1. \end{cases}$$

Bemerkung. $(l^1(T), *_T, \|\cdot\|_1)$ ist sogar Banach-Algebra in der durch die Norm $\|\cdot\|_1$ auf $l^1(T)$ induzierten Topologie.

Übrigens läßt sich diese Banach-Algebra auch kanonisch aus der bekannten Banach-Algebra $l^1(N)$ der absolutsummierbaren komplexen Folgen konstruieren mittels des natürlichen Banachraum-Isomorphismus'

$$l^1(N)/l^1(T^c) \cong l^1(T)$$

(siehe [7], Kapitel I, § 1).

Wie stets in der Theorie der Banach-Algebren, stellt sich auch hier das Problem der multiplikativen Invertierbarkeit:

DEFINITION. Eine zahlentheoretische Funktion $f^{\vee_T} := T \to C$ heißt *formales* $*_T$*-Inverses der zahlentheoretischen Funktion* f, wenn sie punktweise

$$f^{\vee_T} *_T f = \varepsilon$$

erfüllt. Gilt darüber hinaus sogar noch

$$f^{V_T} \in l^1(T),$$

so heißt f^{V_T} *topologisches Inverses von f*, und f ist *invertierbar in* $l^1(T)$.

Ein Kriterium für die Existenz eines formalen $*_T$-Inversen läßt sich leicht angeben:

LEMMA 4. *Ein Element $f \in l^1(T)$ besitzt ein formales $*_T$-Inverses f^{V_T} genau dann, wenn $f(1) \neq 0$ gilt.*

f^{V_T} läßt sich sukzessive ausrechnen:

$$f^{V_T}(1) = \frac{1}{f(1)},$$

$$f^{V_T}(n) = -\frac{1}{f(1)} \cdot \sum_{d|n, d \neq n} f^{V_T}(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right) \quad (n \in T \setminus \{1\})$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \cdot (f(1))^{-(r+1)} \cdot \sum_{\substack{n_1 \geq \ldots \geq n_r \geq 2 \\ n_1 \cdot \ldots \cdot n_r = n}} f(n_1) \cdot \ldots \cdot f(n_r).$$

Damit ist insbesondere jedes formale $*_T$-Inverse im Falle seiner Existenz eindeutig bestimmt. I.a. sind formale $*_T$-Inverse natürlich keine topologischen Inversen; es gilt aber das folgende algebraische Kriterium

LEMMA 5 (B. Saffari, 1976). *Für die Banach-Algebra $(l^1(T), *_T, \|\cdot\|_1)$ sind äquivalent:*

(i) *Jedes formale Inverse f^{V_T} ist auch topologisches Inverses.*

(ii) *Die teilerabgeschlossene Menge $T \subseteq N$ enthält keine nichttriviale multiplikative Unterhalbgruppe.*

Einen elementaren Beweis gibt B. Saffari in [8]; ein funktionalanalytischer findet sich in [7], Kapitel I, § 1 (unter Gültigkeit der Bedingung (ii) aus Lemma 5 ist $l^1(T)$ ein einfaches Beispiel einer Banach-Algebra mit einelementigem maximalem Idealraum).

4. Das Hauptergebnis. Wir verallgemeinern zunächst die bekannte Definition des direkten Produkts von Gruppen (siehe z.B. B. L. van der Waerden, *Algebra I*, 8. Auflage, Springer Verlag, § 53) auf kommutative multiplikative Halbgruppen (o.E. in N) mit direkten Faktoren, die i.a. keine Halbgruppen-Struktur mehr haben:

DEFINITION. Gegeben seien Teilmengen der natürlichen Zahlen T, M_1, M_2. Dann heißt $T = M_1 \times M_2$ *direktes Produkt*, falls gilt

(a) Jedes $t \in T$ ist eindeutig darstellbar als Produkt $t = m_1 \cdot m_2$ für geeignete $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$.

(b) Für alle $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ gilt $m_1 \cdot m_2 \in T$.

Beachte, daß die Faktoren M_1, M_2 i.a. nicht teilerabgeschlossen sind.

Im folgenden setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise für die charakteristischen Funktionen der direkten Faktoren M_1, M_2

$$\chi_{M_1} =: \chi_1, \quad \chi_{M_2} =: \chi_2.$$

Wir werden nun zeigen, daß unter geeigneten Voraussetzungen an die Menge T die asymptotischen Mittelwerte $M(\chi_1)$, $M(\chi_2)$ stets existieren. Dabei werden wir die Beweisansätze, die B. Saffari in [8] sowie P. Erdös, B. Saffari und R. C. Vaughan in [3] für den Spezialfall des direkten Produkts $N = M_1 \times M_2$ angeben, mitbenutzen: Diese Beweisprinzipien lassen sich nämlich partiell auf den teilerabgeschlossenen Fall verallgemeinern — sie sind insofern stärker als die "multiplikativen" von H. Daboussi, [2], die hier nicht mehr anwendbar sind.

Aus beweistechnischen Gründen unterscheiden wir nach dem Saffarischen Ansatz [8] zwei Fälle (*id* bezeichnet wie üblich die Identität):

(D) $\quad \dfrac{\chi_1}{id}, \dfrac{\chi_2}{id} \notin l^1(T) \quad$ ("divergenter Fall"),

(K) $\quad \dfrac{\chi_2}{id} \in l^1(T) \quad$ ("konvergenter Fall").

Der "divergente Fall" ist einfacher zu zeigen:

SATZ 1. *Sei $T \subseteq N$ teilerabgeschlossene Teilmenge. Für das direkte Produkt $T = M_1 \times M_2$ gelte*

(D) $\quad \dfrac{\chi_1}{id}, \dfrac{\chi_2}{id} \notin l^1(T).$

Dann existiert die asymptotische Dichte von M_1, M_2:

$$M(\chi_1) = \frac{\bar{M}(\chi_T)}{\left\|\frac{\chi_2}{id}\right\|_1} = 0, \qquad M(\chi_2) = \frac{\bar{M}(\chi_T)}{\left\|\frac{\chi_1}{id}\right\|_1} = 0.$$

Bemerkungen. (1) Speziell für $T = N$ ist dies wegen $M(\chi_N) = 1$ ein Ergebnis von P. Erdös, B. Saffari, R. C. Vaughan, [3]. Wir werden den Beweis von Satz 1 in wesentlichen Teilen aus dieser Arbeit übertragen.

(2) Über die Existenz des Mittelwerts $M(\chi_T)$ wird nichts vorausgesetzt. Es ist nicht bekannt, ob unter den Bedingungen von Satz 1 die asymptotische Dichte von T stets existiert.

Beweis (von Satz 1).

1. Schritt. Bezeichne $\tau_2(n)$ den größten Teiler des Elements $n \in T$, der in M_2 liegt ($1 \in M_2$!). Wir führen damit mit $k \in N$ die folgenden Teilmengen von

T ein:

$$T^{(k)} := \{n \in T \mid \tau_2(n) \leqslant k\} \subseteq T, \qquad M_1^{(k)} := T^{(k)} \cap M_1 \subseteq T^{(k)}.$$

Die Menge $T^{(k)}$ ist teilerabgeschlossen, weil T teilerabgeschlossen ist. Wir zeigen nun: Für jedes $k \in N$ existiert der Mittelwert $M(\chi_{T^{(k)}})$, und dafür gilt $M(\chi_{T^{(k)}}) = 0$.

Zunächst können wir, da das Produkt $T = M_1 \times M_2$ direkt ist, die Menge $T^{(k)}$ als disjunkte Vereinigung geeigneter Teilmengen schreiben

$$T^{(k)} = \bigcup_{\substack{m_2 \in M_2 \\ m_2 \leqslant k}} m_2 \cdot M_1 \subseteq \bigcup_{n \leqslant k} n \cdot M_1. \tag{1}$$

(Dabei ist $n \cdot M$ punktweise definiert: $n \cdot M := \{n \cdot m \in N \mid m \in M\}$.) Wegen Lemma 2 und (1) folgt

$$\bar{M}(\chi_{T^{(k)}}) = \delta(\chi_{T^{(k)}}) \leqslant \sum_{n \leqslant k} n \cdot \delta(\chi_1). \tag{2}$$

Da aber, wie wegen $\frac{\chi_2}{id} \notin l^1(T)$ leicht nachzurechnen ist, für den logarithmischen Mittelwert $\delta(\chi_1) = 0$ gilt, zeigt (2) die Behauptung des 1. Schritts.

2. Schritt. Jede zahlentheoretische Funktion $f \in l^1(T)$ ist kanonisch auch $l^1(N)$-Funktion (mit der trivialen Fortsetzung $f \equiv 0$ auf T^c). Damit gilt offensichtlich für alle $n \in N$ die Aufspaltung

$$\frac{1}{x} \cdot \sum_{n \leqslant x} \chi_1(n) = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n \leqslant x} \chi_{M_1^{(k)}}(n) + \frac{1}{x} \cdot \sum_{n \leqslant x} \chi_{(M_1 \setminus M_1^{(k)})}(n) =: \Sigma_1(x, k) + \Sigma_2(x, k).$$

Wir schätzen die beiden Teilsummen ab: Wir zeigen zunächst für die erste Teilsumme

$$\lim_{x \to \infty} \Sigma_1(x, k) = 0 \quad \text{(unabhängig von } k\text{):} \tag{3}$$

das folgt aber sofort aus dem 1. Schritt wegen

$$0 \leqslant \underline{M}(\chi_{M_1^{(k)}}) \leqslant \bar{M}(\chi_{M_1^{(k)}}) \leqslant M(\chi_{T^{(k)}}) = 0.$$

Wir zeigen nun für die zweite Teilsumme

$$\Sigma_2(x, k) = O(k^{-1}) \quad \text{(unabhängig von } x\text{):} \tag{4}$$

Mit $m_1, m_1' \in M_1 \setminus M_1^{(k)}$, $m_1 \neq m_1'$ erhalten wir

$$\frac{m_1}{\tau_2(m_1)} \neq \frac{m_1'}{\tau_2(m_1')}$$

(denn: $T = M_1 \times M_2$, direkt) und

$$\frac{m_1}{\tau_2(m_1)} \leqslant \frac{m_1}{k+1} \leqslant \frac{x}{k+1}$$

(denn: $\tau_2(m_1) \geqslant k+1$). Folglich besitzt $\Sigma_2(x, k)$ höchstens $x/(k+1)$ Summanden, und das bedeutet gerade

$$0 \leqslant \Sigma_2(x, k) \leqslant \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

Aus (3) und (4) folgt damit schließlich durch Grenzübergang in x, unabhängig von $k \in N$:

$$\bar{M}(\chi_1) = \lim_{x \to \infty} (\Sigma_1(x, k) + \Sigma_2(x, k)) = 0 + O(k^{-1}),$$

und das ist die erste Behauptung des Satzes.

Analog folgt: $M(\chi_2)$ existiert mit $M(\chi_2) = 0$. ∎

Schwieriger zu beweisen ist der "konvergente Fall", für dessen Formulierung die Angabe einer zusätzlichen Voraussetzung (nämlich die Existenz des Mittelwerts $M(\chi_T)$) notwendig ist:

Satz 2. *Sei $T \subseteq N$ teilerabgeschlossene Teilmenge. Für das direkte Produkt $T = M_1 \times M_2$ gelte*

$$\frac{\chi_2}{id} \in l^1(T). \tag{K}$$

Existiert die asymptotische Dichte der Menge T, dann existiert auch die asymptotische Dichte von M_1, M_2:

$$M(\chi_1) = \frac{M(\chi_T)}{\left\|\frac{\chi_2}{id}\right\|_1} \geqslant 0, \qquad M(\chi_2) = \frac{M(\chi_T)}{\left\|\frac{\chi_1}{id}\right\|_1} = 0.$$

Bemerkungen. (1) Speziell für $T = N$ ist dies wegen $M(\chi_N) = 1$ ein Ergebnis von B. Saffari, [8].

(2) Das Beispiel von A. S. Besicovitch, [1], zeigt, daß in Satz 2 die Voraussetzung "$M(\chi_T)$ existiert" nicht weggelassen werden darf.

Beweis (von Satz 2).

1. Schritt. Unter der Voraussetzung des konvergenten Falls, $\sum_{n \in N} \frac{\chi_2(n)}{n} < \infty$, folgt

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \chi_2(n) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi_2(n)}{n} \left(\frac{x}{n}\right)^{-1}$$
$$= \sum_{n \leqslant x^{1/2}} \frac{\chi_2(n)}{n} \frac{n}{x} + \sum_{x^{1/2} < n \leqslant x} \frac{\chi_2(n)}{n} \frac{n}{x} = O(x^{-1/2}) + O\left(\sum_{n > x^{1/2}} \frac{\chi_2(n)}{n}\right).$$

Das liefert mit $x \to \infty$ für den Mittelwert $M(\chi_2) = 0$.

2. Schritt. Wir zeigen: Für jedes $d \in N$ existiert der Mittelwert

$$M(d \cdot \chi_{(d\cdot N)\cap T}) = M\left(d \cdot (1 - \chi_{(d\cdot N)^c}) \cdot \chi_T\right) \leq 1 \tag{5}$$

(dabei sind die Produkte punktweise definiert; die zahlentheoretische Funktion 1 ist (punktweise) definiert durch $1(n) := 1$ für alle $n \in N$). Es existieren die Mittelwerte

$$M(\chi_T) \ (\leq 1),$$

$$M(\chi_{(d\cdot N)^c}) = M(1 - \chi_{d\cdot N}) \left(= 1 - \frac{1}{d}\right),$$

ersterer nach Voraussetzung. Da die beiden Mengen T (nach Voraussetzung) und $(d \cdot N)^c$ teilerabgeschlossen sind, liefert Lemma 3 schließlich auch die Existenz des Mittelwerts

$$M(\chi_T \cdot \chi_{(d\cdot N)^c}) = M(\chi_{(d\cdot N)^c \cap T}).$$

Die Identität in (5) ist damit klar.

3. Schritt. Wir betrachten hier zunächst Satz 2 für den Spezialfall des direkten Produkts $S = M_1 \times M_2$, wobei die Menge S die Bedingung (ii) von Lemma 5 erfülle (also: teilerabgeschlossen und ohne nichttriviale multiplikative Unterhalbgruppe); d.h. wir haben unter diesen Voraussetzungen die Existenz des Mittelwerts $M(\chi_1)$ zu zeigen: Offensichtlich gilt, da $S = M_1 \times M_2$ direkt, die Identität

$$\chi_S = \chi_1 *_S \chi_2,$$

und damit erhalten wir die formale Darstellung von χ_1

$$\chi_1 = \chi_2^{V_S} *_S \chi_S.$$

Dieser Ansatz liefert nun

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leq x} \chi_1(n) = \frac{1}{x}\sum_{n \leq x} (\chi_2^{V_S} *_S \chi_S)(n)$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n \leq x}\sum_{d \mid n} \chi_2^{V_S}(d)\,\chi_S\left(\frac{n}{d}\right)\chi_S(n)$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n \leq x}\sum_{d \mid n} \chi_2^{V_S}(d)\,\chi_S(n)$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{d \leq x} \chi_2^{V_S}(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0(d)}} \chi_S(n)$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{d \leq x} \chi_2^{V_S}(d) \sum_{n \leq x} \chi_{(d\cdot N)\cap S}(n)$$

$$= \sum_{d \leq N} \frac{\chi_2^{V_S}(d)}{d} M(d \cdot \chi_{(d\cdot N)\cap S})$$

$$+ \sum_{d \leq N} \frac{\chi_2^{V_S}(d)}{d} \cdot \left\{\frac{1}{x}\sum_{n \leq x} d \cdot \chi_{(d\cdot N)\cap S}(n) - M(d \cdot \chi_{(d\cdot N)\cap S})\right\}$$

$$+ \sum_{N < d \leq x} \frac{\chi_2^{V_S}(d)}{d} \cdot \frac{1}{x}\sum_{n \leq x} d \cdot \chi_{(d\cdot N)\cap S}(n)$$

$$=: \Sigma_H + \Sigma_1 + \Sigma_2$$

für beliebiges (fest gewähltes) $N < x$.

Diese drei Teilsummen lassen sich jetzt leicht berechnen: Nach Voraussetzung ist $\frac{\chi_2}{id} \in l^1(S)$, so daß nach Lemma 5 gilt

$$\frac{\chi_2^{V_S}}{id} = \left(\frac{\chi_2}{id}\right)^{V_S} \in l^1(S). \tag{6}$$

Für $x \to \infty$ gelten die Abschätzungen (mit $N < x$, beliebig aber fest)

$$\Sigma_1 = \sum_{d \leq N} \frac{\chi_2^{V_S}(d)}{d} \cdot o(1) = o(1), \tag{7}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{N < d \leq x} \frac{\chi_2^{V_S}(d)}{d} \cdot O(1) = O\left(\sum_{n > N} \left(\frac{\chi_2}{id}\right)^{V_S}(n)\right). \tag{8}$$

Schließlich besitzt Σ_H die (nach (6) absolut konvergente) Majorante $\sum_{n \in N} \frac{\chi_2^{V_S}}{id}(n)$ und ist damit konvergent (mit dem Grenzwert $M(\chi_1)$ wegen (7) und (8)).

4. Schritt. Wir gehen nun wieder von den allgemeinen Voraussetzungen in Satz 2 aus und definieren zunächst die teilerabgeschlossene Menge der "k-(Potenz-) freien Zahlen" durch

$$N^{(k)} := \{n \in N \mid p^k \nmid n \text{ für alle primen } p \in N\}.$$

Damit ist nach Definition von T die Schnittmenge

$$T^{(k)} := T \cap N^{(k)}$$

ebenfalls teilerabgeschlossen. Die Menge $T^{(k)}$ besitzt keine nichttriviale multiplikative Unterhalbgruppe. Wir setzen noch zur Abkürzung

$$\chi^{(k)} := \chi_{T^{(k)}}.$$

Zunächst existieren die Mittelwerte $M(\chi_T)$ (nach Voraussetzung) sowie

$$M(\chi_{N^{(k)}}) = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) = \frac{1}{\zeta(k)}.$$

Damit liefert Lemma 3:

$$M(\chi^{(k)}) \quad \text{existiert für alle } k \in N. \tag{9}$$

Weiter haben wir, da $T = M_1 \times M_2$ direktes Produkt, die Zerlegung

$$\chi^{(k)} = \chi_{M_1 \cap T} *_{T^{(k)}} \chi_{M_2 \cap T} =: \chi_1^{(k)} *_k \chi_2^{(k)};$$

und schließlich folgt aus der Voraussetzung $\frac{\chi_2}{id} \in l^1(T)$ erst recht

$$\frac{\chi_2^{(k)}}{id} \in l^1(T^{(k)}).$$

Dies liefert zusammen mit (9) für beliebiges $k \in N$ die Existenz der asymptotischen Mittelwerte $M(\chi_1^{(k)})$, $M(\chi_2^{(k)})$ wie im 3. Schritt.

5. Schritt. Wir können nach diesen Vorbereitungen die Behauptung für den allgemeinen Fall zeigen: Unter den Voraussetzungen des Satzes existiert der Mittelwert $M(\chi_1)$, und dieser berechnet sich zu

$$M(\chi_1) = \lim_{k \to \infty} M(\chi_1^{(k)}). \tag{10}$$

Denn: Offensichtlich gelten für jedes $k \in N$ die Inklusionen

$$M_1 \cap T^{(k)} \subseteq M_1 \subseteq (M_1 \cap T^{(k)}) \cup (N^{(k)})^c.$$

Damit folgt für die zugeordneten charakteristischen Funktionen

$$\begin{aligned} M(\chi_1^{(k)}) &\leqslant \underline{M}(\chi_1) \leqslant \bar{M}(\chi_1) \\ &\leqslant \bar{M}(\chi_{(M_1 \cap T^{(k)}) \cup (N^{(k)})^c}) \\ &\leqslant M(\chi_1^{(k)}) + M(\chi_{(N^{(k)})^c}); \end{aligned} \tag{11}$$

dabei berechnet sich der letzte Mittelwert zu

$$M(\chi_{(N^{(k)})^c}) = 1 - \frac{1}{\zeta(k)}.$$

Weil schließlich $M(\chi_1^{(k)})$ beschränkte ($\leqslant 1$), nichtfallende Funktion in k und zudem bekanntlich $\lim_{k \to \infty} \zeta(k) = 1$ ist, haben wir aus (11) die Behauptung (10) erhalten.

6. Schritt. Wir rechnen zum Schluß die Mittelwerte der direkten Faktoren aus: Nach dem eben Bewiesenen und der Voraussetzung existieren alle (asymptotischen) Mittelwerte, und diese sind nach Lemma 1 identisch mit den logarithmischen Mittelwerten. Da $T = M_1 \times M_2$ direktes Produkt ist, gilt zunächst für $x \geqslant 2$

$$\frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi_T}{id}(n) = \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{m_1 \in M_1 \\ m_1 m_2 \leqslant x}} \sum_{m_2 \in M_2} \frac{1}{m_1 m_2} \leqslant \left\{ \frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi_1}{id}(n) \right\} \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi_2}{id}(n).$$

Mit dem Grenzübergang $x \to \infty$ erhalten wir daraus

$$M(\chi_T) \leqslant M(\chi_1) \left\| \frac{\chi_2}{id} \right\|_1. \tag{12}$$

Andererseits gilt für beliebiges $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\eta} \left\{ \frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi_1}{id}(n) \right\} \sum_{n \leqslant x^\eta} \frac{\chi_2}{id}(n) &\leqslant \frac{1}{(1+\eta)\log x} \sum_{\substack{m_1 \in M_1 \\ m_1 m_2 \leqslant x}} \sum_{m_2 \in M_2} \frac{1}{m_1 m_2} \\ &\leqslant \frac{1}{\log(x^{1+\eta})} \sum_{n \leqslant x^{1+\eta}} \frac{\chi_T}{id}(n), \end{aligned}$$

so daß für $x \to \infty$ daraus folgt

$$\frac{1}{1+\eta} M(\chi_1) \left\| \frac{\chi_2}{id} \right\|_1 \leqslant M(\chi_T). \tag{13}$$

$\eta \to 0$ in (13) liefert jetzt zusammen mit (12) die im Satz angegebene Darstellung des Mittelwerts $M(\chi_1)$.

7. Schritt. Falls auch $\frac{\chi_1}{id} \in l^1(T)$ gilt, so erhalten wir die Darstellung für den anderen Mittelwert $M(\chi_2)$ analog dem Vorhergehenden (und damit ist zugleich $M(\chi_T) = 0$, was auch leicht durch direkte Rechnung folgt). Falls $\frac{\chi_1}{id} \notin l^1(T)$, ist evident $M(\chi_T) \Big/ \left\| \frac{\chi_1}{id} \right\|_1 = 0$. ∎

5. Eine Folgerung aus Satz 2. Mit Hilfe eines bekannten Ergebnisses von F. Mertens über die Konvergenz von Doppelreihen (siehe [5], Kapitel 10) erhalten wir aus Satz 2 schließlich das

KOROLLAR. *Sei $T \subseteq N$ teilerabgeschlossene Teilmenge. Für das direkte Produkt $T = M_1 \times M_2$ gelte*

$$\frac{\chi_2}{id} \in l^1(T). \tag{K}$$

Dann erfüllen die asymptotischen Dichten

$$M(\chi_T) \text{ existiert} \Leftrightarrow M(\chi_1) \text{ existiert}.$$

Existieren die Dichten, so gilt ferner

$$M(\chi_T) \neq 0 \Leftrightarrow M(\chi_1) \neq 0.$$

Literatur

[1] A. S. Besicovitch, *On the density of certain sequences of integers*, Math. Ann. 110 (1935), 336–341.

[2] H. Daboussi, *On the density of direct factors of the set of positive integers*, J. London Math. Soc. (2) 18 (1978), 1–4.

[3] P. Erdös, B. Saffari, R. C. Vaughan, *On the asymptotic density of sets of integers*, ibid. 19 (1979), 17–20.
[4] H. Halberstam and K. F. Roth, *Sequences*, vol. I, Clarendon Press, Oxford, London 1966.
[5] G. H. Hardy, *Divergent Series*, corrected sheet of the first edition, Clarendon Press, Oxford, London 1967.
[6] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fifth edition, Clarendon Press, Oxford, London 1979.
[7] P. Kunth, *Einige funktionalanalytische Aspekte in der Theorie der zahlentheoretischen Funktionen*, Dissertation, Universität Frankfurt/Main, 1988.
[8] B. Saffari, *On the asymptotic density of sets of integers*, J. London Math. Soc. (2) 13 (1976), 475–485.

FACHBEREICH MATHEMATIK
JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT
Robert-Mayer-Str. 8 10
6000 Frankfurt/Main
Bundesrepublik Deutschland

Eingegangen am 21.9.1988
und in revidierter Form am 13.12.1988 (1869)

Abonnements	Subscriptions	Abonnement	Подписка
Échange	Library exchange	Austausch	Книгообмен
Numéros antérieurs	Back numbers	Ankauf	Продажа

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
skr. poczt. 137, 00-950 Warszawa, telex PL 816112

BOOKS PUBLISHED BY THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES INSTITUTE OF MATHEMATICS

S. Banach, Oeuvres, vol. II, 1979, 470 pp.
S. Mazurkiewicz, Travaux de topologie et ses applications, 1969, 380 pp.
W. Sierpiński, Oeuvres choisies, vol. I, 1974, 300 pp.; vol. II, 1975, 780 pp.; vol. III, 1976, 688 pp.
J. P. Schauder, Oeuvres, 1978, 487 pp.
K. Borsuk, Collected papers, Parts I, II, 1983, xxiv+1357 pp.
H. Steinhaus, Selected papers, 1985, 899 pp.
K. Kuratowski, Selected papers, 1988, LII+610 pp.
W. Orlicz, Collected papers, Parts I, II, 1988, LIV+viii+1688 pp.
T. Ważewski, Selected papers, 1990, xx+572 pp.

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

43. J. Szarski, Differential inequalities, 2nd ed., 1967, 256 pp.
50. K. Borsuk, Multidimensional analytic geometry, 1969, 443 pp.
51. R. Sikorski, Advanced calculus. Functions of several variables, 1969, 460 pp.
58. C. Bessaga and A. Pełczyński, Selected topics in infinite-dimensional topology, 1975, 353 pp.
59. K. Borsuk, Theory of shape, 1975, 379 pp.
62. W. Narkiewicz, Classical problems in number theory, 1986, 363 pp.

BANACH CENTER PUBLICATIONS

Vol. 10. Partial differential equations, 1983, 422 pp.
Vol. 11. Complex analysis, 1983, 362 pp.
Vol. 12. Differential geometry, 1984, 288 pp.
Vol. 13. Computational mathematics, 1984, 792 pp.
Vol. 14. Mathematical control theory, 1985, 643 pp.
Vol. 15. Mathematical models and methods in mechanics, 1985, 725 pp.
Vol. 16. Sequential methods in statistics, 1985, 554 pp.
Vol. 17. Elementary and analytic theory of numbers, 1985, 498 pp.
Vol. 19. Partial differential equations, 1987, 397 pp.
Vol. 20. Singularities, 1988, 498 pp.
Vol. 21. Mathematical problems in computation theory, 1988, 597 pp.
Vol. 22. Approximation and function spaces, 1989, 486 pp.
Vol. 23. Dynamical systems and ergodic theory, 1989, 479 pp.
Vol. 24. Numerical analysis and mathematical modelling, 1990, 566 pp.
Vol. 25. Combinatorics and graph theory, 1989, 251 pp.
Vol. 26. Topics in algebra, Parts 1 and 2, in the press.