Conspectus materiae tomi LV, fasciculi 3

Pagina

С. Т. Туляганов, О распределении значений мультипликативных функций на арифметической прогрессии . . . 201–227
M. Toyoizumi, On certain character sums . . . 229–232
J.-P. Bézivin, Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles II . . . 233–240
J. W. Sander, On the $(3N+1)$-conjecture . . . 241–248
T. Z. Xuan, The average order of $d_k(n)$ over integers free of large prime factors . . . 249–260
J. Cilleruelo, B_2-sequences whose terms are squares . . . 261–265
P. Morton, Governing fields for the 2-classgroup of $Q(\sqrt{-q_1 q_2 p})$ and a related reciprocity law . . . 267–290
Y. Sueyoshi, Explicit reciprocity laws on relative Lubin–Tate groups . . . 291–299

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction	Address of the Editorial Board	Die Adresse der Schriftleitung	Адрес редакции

ACTA ARITHMETICA
skr. poczt. 137, ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, telex PL 816112

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires à l'adresse ci-dessus.
The authors are requested to submit papers in two copies to the above address
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit an die obige Adresse
Рукописи статей редакция просит присылать в двух экземплярах по вышеуказанному адресу

Published by PWN – Polish Scientific Publishers

ISBN 83-01-09723X ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

ACTA ARITHMETICA
LV (1990)

О распределении значений мультипликативных функций на арифметической прогрессии

С. Т. Туляганов (Ташкент)

Введение. Арифметическая функция $g(n)$ называется *аддитивной* (*мультипликативной*), если $g(nm) = g(n)+g(m)$ $(g(nm) = g(n)g(m))$ для взаимно простых n и m. Аддитивная функция $g(n)$ называется *сильно аддитивной*, если для всех простых p и натуральных r выполняется равенство $g(p^r) = g(p)$. Мультипликативная функция $g(n)$ называется *экспоненциально-мультипликативной*, если для всех p и r, $g(p^r) = g^r(p)/r!$.

Пусть

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\operatorname{card}\{n \leqslant N\colon\ g_N(n) \leqslant x\},$$

где для аддитивных функций $g_N(n) = \big(g(n)-A_N\big)/B_N$, а для мультипликативных функций $g_N(n) = |e^{-A_N}g(n)|^{1/B_N}\operatorname{sgn} g(n)$; здесь A_N и B_N — некоторые константы.

Для широкого класса вещественных аддитивных функций доказано, что

$$F_N(x) \to F(x) \tag{0.1}$$

во всех точках непрерывности $F(x)$ при специальном выборе A_N и B_N.

Для изучения распределений значений мультипликативных функций весьма полезным оказалось введенное В. М. Золотаревым характеристическое преобразование [8], на основе которого доказанные теоремы редукции [18, 24] позволяют обобщить на мультипликативные функции все результаты типа (0.1) о распределении значений аддитивных функций.

Работы многих авторов посвящены оценке отклонения $F_N(x)$ от $F(x)$ при $N\to\infty$. Однако, класс функций g, для которых оценена скорость стремления к 0 величины $|F_N(x)-F(x)|$ при $N\to\infty$, гораздо уже, чем класс функций, для которых имеет место сходимость (0.1).

В 1939 г. П. Эрдёш и М. Кац [2, 3] при выборе

$$A_N = \sum_{p\leqslant N} g(p)/p, \qquad B_N^2 = \sum_{p\leqslant N} g^2(p)/p$$

показали, что если вещественная сильно аддитивная функция $g(n)$ обладает свойствами $B_N \to \infty$ при $N \to \infty$ и $|g(p)| \leqslant 1$ для всех p, то при $N \to \infty$

$$F_N(x) \to G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

Оценке отклонения $F_N(x)$ от функции распределения $G(x)$ нормального закона для аддитивных функций, а от функции распределения (0.4) — двустороннего логнормального закона для мультипликативных функций, посвящен ряд работ. Опишем главные из них.

В 1956 г. Й. П. Кубилюс [10] при тех же A_N и B_N, для произвольной сильно аддитивной функции такой, что $B_N \to \infty$ и $(1/B_N)\max_{p \leqslant N}|g(p)| \leqslant \mu_N \to 0$ при $N \to \infty$, доказал, что

$$F_N(x) = G(x) + O\big((e^{-x^2/2}\ln^2(1/\mu_N)+1)\mu_N\big).$$

В 1958 г. для аддитивных функций при условии $g(p) \equiv 1$, $|g(p^r)| \leqslant r^A$ А. Реньи и П. Туран [5] показали, что

$$F_N(x) = G(x) + O(1/\sqrt{\ln_2 N}), \tag{0.2}$$

где $\ln_k u = \ln(\ln_{k-1} u)$, $\ln_1 u = \ln u$.

Позднее этот класс был расширен в работе Б. В. Левина и А. С. Файнлейба [14].

М. Б. Барбан [6] и Р. В. Уждавинис [26] заменили $\ln^2(1/\mu_N)$ на $\ln(1/\mu_N)$ в теореме Й. П. Кубилюса, а в 1964 г. М. Б. Барбан и А. И. Виноградов [7] доказали, что

$$F_N(x) = G(x) + O\big(\mu_N \ln(1/\mu_N)/\ln_2(1/\mu_N)\big) \tag{0.3}$$

равномерно по x.

Н. М. Тимофеев [22] и П. Д. Т. А. Эллиот [1] для более широкого класса аддитивных функций показали, что остаточный член в (0.3) можно заменить на $O(\mu_N)$, что является по порядку неулучшаемым.

В 1971 г. Й. П. Кубилюс [11] в предположении

$$\sum_{p,\,a_p \leqslant c} \frac{\ln p}{p} < \infty, \qquad \sum_{p,\,a_p \leqslant c} \frac{a_p \ln p}{p} < \infty,$$

$$\sum_{p,\,a_p > c} \frac{a_p}{p} < \infty, \qquad \sum_{p} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{|g(p^r)|}{p^r} \ln p^r < \infty,$$

где $a_p = |g(p) - \lambda|$, $\lambda = \mathrm{const} \neq 0$, $c = \mathrm{const} > 0$, доказал, что имеет место (0.2). Затем в [12] им же совместно с З. Юшкисом этот результат был обобщен для вещественных мультипликативных функций. Для изучавшегося ими класса они получили оценку

$$F_N(x) = F^{\times}(x) + O(1/\sqrt{\ln_2 N}),$$

где

$$F^{\times}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_1) G(-\ln x) & \text{при } x > 0, \\ \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) G(-\ln(-x)) & \text{при } x < 0, \end{cases} \tag{0.4}$$

$$\omega_k = \prod_p (1 - 1/p)\Big(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)/p^\alpha\Big) \quad (k = 0,\ 1).$$

В 1972 г. результат Н. М. Тимофеева обобщен для мультипликативных функций [23]. В 1974 г. Э. А. Манставичюс [17] расширил класс функций, рассмотренных в [12], а затем этот результат был уточнен З. А. Крижюсом [9]. Диссертация Г. Ф. Липатовой [16] также посвящена исследованию этой задачи для аддитивных функций.

Отклонения функции распределения аддитивных функций от предельной на арифметической прогрессии с растущим модулем изучались Г. А. Поповым и Г. Г. Стяпанаускасом. При обозначении

$$A_N(D) = \sum_{p \leqslant N,\, p \nmid D} \frac{g(p)}{p}, \qquad B_N^2(D) = \sum_{p^r \leqslant N,\, p \nmid D} \frac{g^2(p^r)}{p^r},$$

$$F_{l,D}^N(x) = \left[\frac{N-l}{D} + 1\right]^{-1} \operatorname{card}\{n \leqslant N\colon\ n \equiv l \ (\mathrm{mod}\, D),\ g(n) - A_N(D) \leqslant x B_N(D)\},$$

где $[u]$ — целая часть u, для вещественных аддитивных функций $g(n)$, обладающих свойствами $B_N(D) \to \infty$ и

$$\frac{1}{B_N(D)} \max_{p^r \leqslant N,\, p \nmid D} |g(p^r)| \leqslant \mu_N \to 0$$

при $N \to \infty$, Г. А. Попов [19] получил аналитическим методом оценку

$$F_{l,D}^N(x) = G(x) + O\big(\mu_N(\ln_2 D + \ln D/\ln(1/\mu_N))\big),$$

а Г. Стяпанаускас [21] для $D \leqslant B\ln^{c_0} N$ $(0 < c_0 < \frac{1}{3})$ тем же методом показал существование $c = c(c_0, \varepsilon)$ такого, что

$$F_{l,D}^N(x) = G(x) + O\big(\mu_N + (\ln D)(\ln_2^{\varepsilon} D)\exp\{-c\mu_N^{-2/3}\}\big)$$

равномерно по D и x при $(l, D) = 1$.

Однако этими результатами вопрос об оценке отклонения функции распределения аддитивных и мультипликативных функций соответственно от нормального и двустороннего логнормального законов далеко не исчерпан.

В настоящей статье элементарным методом изучается отклонение функции распределения вещественных мультипликативных функций на арифметической прогрессии с растущим модулем от двустороннего логнормального закона. Доказательство основного результата сводится к выводу асимптотической формулы для средних значений комплексных мультипликативных функций на арифметической прогрессии с растущим модулем, не превосходящих единицы по модулю, и зависящих от параметров. Однако, учитывая и другие применения, исследована сумма $\sum\limits_{n\le N, n\equiv l(\operatorname{mod} D)} f(n;\, t,\, N)$ мультипликативных функций без ограничения $|f(n;\, t,\, N)|\le 1$.

В § 2 исследуется асимптотическая формула для средних значений экспоненциально-мультипликативных функций, а затем на ее основе в § 3 методом свёрток Дирихле делается переход к „произвольным" мультипликативным функциям.

§ 1. Формулировка основного результата. Пусть $N>e^e$, $D\in \mathbf{N}$, $B(N)\le \ln^{B_1} N$ $(B_1>0)$, $a\in \mathbf{R}$, $|a|\le c$, $\eta>0$ — достаточно малое число, $\beta>0$, $\lambda(e^{it})$ — трижды дифференцируемая в окрестности точки $t=0$, $\theta=\lambda'(1)+\lambda''(1)>0$ и $\operatorname{Re}\lambda(e^{it})\le 1-\beta t^2$ при $|t|\le\eta$.

Пусть, далее, $g(p)$ — последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{p\le N,\, p\equiv l(\operatorname{mod} D)} e^{itg(p)}\ln p=\lambda(e^{it})N/\varphi(D)+O(N\eta(N)) \tag{1.1}$$

для любых $l\le D$, $(l,\, D)=1$, равномерно по D и t при $D\le B(N)$, $|t|\le\eta$, где p — простые числа, причем $\eta(u)$ такова, что $\int\limits_2^\infty \eta(u)d\ln_2 u<\infty$. Для простоты мы ограничимся случаями $\eta(N)=(\ln^{-B} N)\ln_2^{-\alpha} N$, где $B\ge 0$ и при $B=0$, $\alpha>1$.

Через $K_r(g,\, a)$ $(r=0,\, 1)$ обозначим класс вещественных мультипликативных функций $f(n)$, для которых сходятся ряды

$$\sum_{f(p)\ne 0}\frac{b_p}{p},\quad \sum_{(-1)^r f(p)\le 0}\frac{1}{p},\quad \sum_{p}\sum_{\substack{v=2\\ f(p^v)\ne 0}}^{\infty}\frac{\big|\ln|f(p^v)|\big|}{p^v}, \tag{1.2}$$

где

$$b_p=\big|\ln|f(p)|-a\ln p-g(p)\big|,\qquad \|b\|=\begin{cases} b, & \text{если } b\le 1,\\ 1, & \text{если } b>1,\end{cases}$$

и

$$\frac{1}{\ln N}\Bigg(\sum_{\substack{p\le N\\ f(p)\ne 0}}\frac{\|b_p\|}{p}\ln p+\sum_{\substack{p\le N\\ (-1)^r f(p)\le 0}}\frac{\ln p}{p}\Bigg)\to 0\quad \text{при } N\to\infty.$$

Далее, положим

$$\delta_r(z)=\Bigg|\sum_{p\le z,\, p\nmid D}\frac{g(p)-\lambda'(1)}{p}\Bigg|+\sum_{\substack{p\le z,\, p\nmid D\\ \operatorname{sgn}^{1-r} f(p)\le 0}}\frac{|g(p)|}{p}+\sum_{p\le z,\, p\nmid D}\frac{|g(p)|}{p^2},$$

$$y=\sqrt{\theta\ln_2 N},\quad A_1^2(z)=\sum_{p\le z,\, p\nmid D}\frac{g^2(p)+1}{p},\quad \varrho_r(z)=\sum_{\substack{p>z,\, p\nmid D\\ \operatorname{sgn}^{1-r} f(p)\le 0}}\frac{1}{p},$$

$$\varepsilon(N,\, D)=1+\sum_{p\le N/D,\, p\nmid D}\frac{|g(p)|}{p}+D\Bigg(\sum_{N/D<p\le N}\frac{|g(p)|}{p}+\sum_{N/D<p\le N}\frac{b_p}{p}+\sum_{\substack{N/D<p^v\le N\\ p\nmid D,\, v\ge 2}}\frac{\big|\ln|f(p^v)|\big|}{p^v}\Bigg),$$

$$\omega_{kD}=\prod_{p\nmid D}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k f(p^v)}{p^v}\qquad (k=0,\, 1;\ \text{для } f\in K_1(g,\, a),\ \omega_{1D}=0),$$

$$\Phi(x)=\begin{cases}1-\frac12(\omega_{0D}+\omega_{1D})G(-\ln x) & \text{при } x>0,\\ \frac12(\omega_{0D}-\omega_{1D})G(-\ln(-x)) & \text{при } x<0,\end{cases}$$

$$\Phi_{l,D}^N(x)=\left[\frac{N-l}{D}+1\right]^{-1}\operatorname{card}\{n\le N:\ n\equiv l\ (\operatorname{mod} D),\ |N^{-a}(\ln N)^{-\lambda'(1)}f(n)|^{1/y}\operatorname{sgn} f(n)\le x\}.$$

Теорема 1. *Если $f\in K_r(g,\, a)$, то для любого l, $(l,\, D)=1$, равномерно по x и $D\le B(N)$ при*

$$B(N)=o\left(\frac{1}{\eta(N)}\ln\frac{1}{\eta(N)}\right),$$

выполнено равенство

$$\begin{aligned}\Phi_{l,D}^N(x)&=\Phi(x)+O\left(\varrho_r(N)+\frac{\ln D}{\varphi(D)y}+h_r(N)\ln(y\varepsilon(N,\, D))\right)\\ &+O^*\big(R(N,\, D)\ln(y\varepsilon(N,\, D))\big)+O^*\big(\delta_r(z)/y+A_1^2(z)/y^2\big)\\ &+O^*\big(\varrho_r(z)+(1-\operatorname{sgn} B)\ln_2^{1-\alpha} z+B\ln(y\varepsilon(N,\, D))/(\ln_2^{\alpha} z)\ln^B z\big),\end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$h_r(N)=\frac{1}{\ln N}\Bigg(1+\sum_{\substack{p\le N,\, p\nmid D\\ f(p)\ne 0}}\frac{\|b_p\|}{p}\ln p+\sum_{\substack{p\le N,\, p\nmid D\\ (-1)^r f(p)\le 0}}\frac{\ln p}{p}\Bigg),$$

$$R(N,\, D)=\left(\frac{\varphi(D)\ln((\ln^B N)\ln_2^{\alpha} N)}{(\ln^B N)\ln_2^{\alpha} N}\right)^{1/(B+1)}+(1-\operatorname{sgn} B)\frac{D}{\varphi^2(D)\ln_2^{\alpha-1} N}$$

и $z=z(N)$ удовлетворяет условиям $D\le z\le N$, $\delta_r(z)=O(\sqrt{\ln_2 N/\ln_3 N})$, $A_1(z)=O(\sqrt{\ln_2 N/\ln_3 N})$.

Замечание. Если $g(p)\not\equiv\mathrm{const}$, то O^* означает O. Если же $g(p)\equiv\mathrm{const}$, то O^* всюду заменяется на 0.

Естественно, что теорема 1 не дает асимптотическую формулу для любой рассматриваемой в ней функции. Чтобы формула (1.3) была нетривиальной, необходимо еще наложить ограничение на рост $|g(p)|$, связанное с малостью $h_r(N)$ и $\eta(N)$ и желаемой границей нетривиальности по D.

Для простоты изложения, анализ остаточного члена в теореме 1 проведем только для аддитивных функций.

Следствие 1. *Пусть последовательность $g(p)$ удовлетворяет условию* (1.1) *с* $\eta(N)=(\ln^{-B}N)\ln_2^{-\alpha}N$. *Далее, пусть* $\psi(n)$ — *вещественная аддитивная функция такая, что ряды*

$$\sum_p \frac{a_p}{p}, \quad \sum_p \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{|\psi(p^\nu)|}{p^\nu}$$

сходятся и

$$\sum_{p\leqslant N} \frac{\|a_p\|}{p}\ln p = o(\ln N),$$

где $a_p=|\psi(p)-a\ln p-g(p)|$, $a\in\mathbf{R}$. *Тогда для любых* l, $(l,D)=1$, *равномерно по* x *и* $D\leqslant B(N)$ *для*

$$B(N)=o\left(\frac{1}{\eta(N)}\ln\frac{1}{\eta(N)}\right),$$

справедливо соотношение

$$\text{(1.4)}\quad \operatorname{card}\{n\leqslant N:\ n\equiv l\ (\operatorname{mod} D),\ \psi(n)-a\ln N-\lambda'(1)\ln_2 N\leqslant x\sqrt{\theta\ln_2 N}\}$$
$$=\frac{N}{D}\left[G(x)+O\left(\frac{1}{y}\ln\frac{D}{\varphi(D)}+h(N)\ln(y\varepsilon'(N,D))\right)\right.$$
$$+O^*\big(R(N,D)\ln(y\varepsilon'(N,D))\big)+O^*\left(\frac{\delta(z)}{y}+\frac{A_1^2(z)}{y^2}\right)$$
$$\left.+O^*\big((B(\ln^{-B}z)\ln^{-\alpha}z+(1-\operatorname{sgn}B)\ln_2^{1-\alpha}z)\ln(y\varepsilon'(N,D))\big)\right],$$

где

$$h(N)=\frac{1}{\ln N}\left(1+\sum_{p\leqslant N,\,p\nmid D}\frac{\|a_p\|}{p}\ln p\right),$$

$$\delta(z)=\left|\sum_{p\leqslant z,\,p\nmid D}\frac{g(p)-\lambda'(1)}{p}\right|+\sum_{p\leqslant z,\,p\nmid D}\frac{|g(p)|}{p^2},$$

$z=z(N)$ *удовлетворяет условиям*

$$\delta(z)=O(\sqrt{\ln_2 N/\ln_3 N}),\ A_1(z)=O(\sqrt{\ln_2 N/\ln_3 N}),$$

и

$$\varepsilon'(N,D)=1+\sum_{\substack{p\leqslant N/D\\ p\nmid D}}\frac{|g(p)|}{p}+D\sum_{N/D<p\leqslant N}\frac{|g(p)|}{p}+D\left(\sum_{N/D<p\leqslant N}\frac{a_p}{p}+\sum_{\substack{N/D<p^\nu\leqslant N\\ \nu\geqslant 2}}\frac{|\psi(p^\nu)|}{p^\nu}\right);$$

остальные обозначения те же, что и в теореме 1.

Отметим, что когда понижение в остаточном члене (1.1) хорошее, то граница нетривиальности оценки (1.4) для D в основном зависит от суммы

$$\text{(1.5)}\qquad \sum_{p\leqslant N}\|a_p\|\frac{\ln p}{p}.$$

В самом деле, если эта сумма имеет оценку $o(\ln N/\ln_2 N)$ и

$$\text{(1.6)}\quad \eta(N)=\frac{1}{\ln^B N}\quad (B>0),\quad B(N)=\ln^{B_1}N,\quad A_1^2(N)\ll\ln^{B_2}N,\quad 0\leqslant B_2<B,$$

то оценка (1.4) нетривиальна при $D\leqslant\ln^{B_1}N$ для $B_1\leqslant B-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, поскольку в этом случае

$$\text{(1.7)}\qquad \ln(y\varepsilon'(N,D))\ll\ln_2 N,$$

где постоянная зависит от B, и $\delta(N)\ll\sqrt{(\ln^{B_2}N)\ln_2 N}$. Поэтому можно взять $z=\exp\ln_2^4 N$ при $1/B<A<1/B_2$.

Если для суммы (1.5) выполнена оценка $O(\ln N/\ln_2^{3/2}N)$ и в (1.6) условие $0\leqslant B_2<B$ заменено на $0\leqslant B_2<B/3$, то взяв $z=\exp\ln_2^A N$ $(3/B\leqslant 2A<1/B_2)$, для остаточного члена (1.4) получаем оценку

$$O\big((1+\ln(D/\varphi(D)))/\sqrt{\ln_2 N}\big),$$

равномерную по $D\leqslant\ln^{B_1}N$, $B_1\leqslant B-\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

В рассмотренных случаях граница допускаемого роста модуля D в произвольной степени логарифма не дает для $\varepsilon'(N,D)$ лучшую оценку чем (1.7). Однако, когда $h(N)$ стремится к нулю достаточно медленно, то использование (1.7) опять приводит к тривиальной оценке. В таких случаях иногда за счет малости суммы

$$\sum_{N/D<p\leqslant N}\frac{|g(p)|+a_p}{p}+\sum_{N/D<p^\nu\leqslant N,\nu\geqslant 2}\frac{|\psi(p^\nu)|}{p^\nu}$$

удается расширить границу нетривиальности оценки по D, и поэтому целесообразно $\varepsilon'(N,D)$ в следствии 1 оставлять в указанном виде.

Например, пусть в (1.1) $\eta(N) = 1/(\ln^{\alpha} N)\ln_2^2 N$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, $B(N) = \ln^{\alpha_1} N$ $(\alpha_1 \leqslant \alpha)$. Далее, предположим, что

$$\sum_{u<p\leqslant N} \frac{|g(p)|+a_p}{p} + \sum_{\substack{u<p^{\nu}\leqslant N\\ \nu\geqslant 2}} \frac{|\psi(p^{\nu})|}{p^{\nu}} \ll \ln^{1-\alpha_1} N \ln_2^k N \ln\frac{\ln N}{\ln u} \quad (k \geqslant 0),$$

$$A_1(N) \ll \ln^{\alpha/2} N \ln_2 N, \qquad \delta(N) \ll \ln_2 N$$

и сумма (1.5) имеет оценку $O(\ln N/\sqrt{\ln_2 N})$. Тогда в следствии 1, взяв $z = \exp(\sqrt{\ln_2 N}/\ln_3^2 N)$, для остаточного члена в равенстве (1.4) получим оценку $O(\ln_3 N/\sqrt{\ln_2 N})$, равномерную по $D \leqslant \ln^{\alpha_1} N$, $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Как видим, для более конкретных классов функций соотношения (1.3) сильно упрощаются и их нетрудно вывести из теоремы 1. Мы приведем еще два таких следствия.

Следствие 2. *Пусть $f(n)$ — вещественная мультипликативная функция, $k \in \mathbf{N}$ — фиксировано, $\lambda_j \in \mathbf{R}$, $\sum_{j\leqslant k,(j,k)=1} |\lambda_j| \neq 0$ и $a \in \mathbf{R}$ такие, что при $N \to \infty$*

$$\frac{1}{\ln N}\left(\sum_{\substack{j\leqslant k\\ (j,k)=1}} \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv l \,(\mathrm{mod}\, D)}} \frac{\|\,|\ln|f(p)|-a\ln p-\lambda_j|\,\|}{p}\ln p + \sum_{\substack{p\leqslant N\\ (-1)^r f(p)\leqslant 0}} \frac{\ln p}{p}\right) \to 0.$$

Пусть, далее, сходятся ряды (1.2), где для $p \equiv j \pmod k$ $(j \leqslant k,\ (j, k) = 1)$ $g(p) = \lambda_j$. Тогда равномерно по x и $D \leqslant \ln^{B_1} N$ $(B_1 > 0)$ для $(D, k) = 1$

$$\Phi_{l,D}^N(x) = \Phi(x) + O\left(\varrho_r(z) + h_r(N)\ln\bigl(y\varepsilon(N, D)\bigr) + \frac{1}{\sqrt{\ln_2 N}}\left(\ln\frac{D}{\varphi(D)} + \ln_2 z\right)\right),$$

где

$$\lambda(e^{it}) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{j\leqslant k,(j,k)=1} e^{i\lambda_j t},$$

$$\varepsilon(N, D) = 1 + D\left(\frac{\ln D}{\ln N} + \sum_{N/D<p\leqslant N} \frac{b_p}{p} + \sum_{\substack{N/D<p^{\nu}\leqslant N\\ \nu\geqslant 2,\, p\nmid D}} \frac{|\ln|f(p^{\nu})||}{p^{\nu}}\right),$$

и $z = z(N)$ удовлетворяет условию $\ln_2 z = O(\sqrt{\ln_2 N/\ln_3 N})$.

Доказательство. В теореме 1 последовательность $g(p)$ выберем так: $g(p) = \lambda_j$, если $p \equiv j \pmod k$, и $g(p) = 0$, если $p|k$. Эта последовательность удовлетворяет условию (1.1) со сколь угодно большим B. В этом случае

$$A_1^2(z) \ll \ln_2 z, \qquad \sum_{N/D<p\leqslant N} \frac{|g(p)|}{p} \ll \frac{\ln D}{\ln N},$$

$$\delta(z) = O(1) + O\left(\ln\frac{D}{\varphi(D)}\right),$$

и поэтому, на основании теоремы 1, следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Если в предыдущем следствии $k = 1$, то равномерно по x и $D \leqslant \ln^{B_1} N$ $(B_1 > 0)$*

$$\Phi_{l,D}^N(x) = \Phi(x) + O\left(\varrho_r(N) + \frac{\ln_3 D}{\sqrt{\ln_2 N}} + h_r(N)\ln\left(y + D\left(\frac{\ln D}{\ln N} + \sum_{N/D<p\leqslant N}\frac{b_p}{p} + \sum_{\substack{N/D<p^{\nu}\leqslant N\\ \nu\geqslant 2}} \frac{|\ln|f(p^{\nu})p^{-\nu a}||}{p^{\nu}}\right)\right)\right).$$

Доказательство становится очевидным, если учесть замечание относительно O^*.

§ 2. Среднее значение экспоненциально-мультипликативных функций. В этом параграфе всюду $g(n)$ — комплексная экспоненциально-мультипликативная функция.

Лемма 1 (см. доказательство леммы 2 [25]). *Пусть $g(n) \geqslant 0$ и существует $c_1 = \mathrm{const}$ такая, что*

$$\sum_{p\leqslant x} g(p) \leqslant c_1 x/\ln x. \tag{2.1}$$

Тогда существует константа $c_2 = c_2(c_1)$ такая, что при $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\sum_{\substack{n>x,\, n|\Pi_y\\ (n,D)=1}} \frac{g(n)}{n} \leqslant c_2\Bigl(\prod_{p\leqslant y,\, p\nmid D} e^{g(p)/p}\Bigr)e^{-\ln x/\ln y},$$

где $n|\Pi_y$ означает, что все простые делители n не превосходят y или $n = 1$.

Лемма 2. *В условиях предыдущей леммы справедливо неравенство*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\, n|\Pi_y\\ (n,D)=1}} g(n) \leqslant \frac{c_3 x}{\ln y} e^{-\ln x/\ln y} \prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}} e^{g(p)/p},$$

где $c_3 = c_3(c_1)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 [9].

Лемма 3. *Пусть $x \geqslant 2$, $\exp\ln^{\alpha} x \leqslant y \leqslant x$ $(0 < \alpha < 1)$, $B(x) = O(\ln^{B_1} x)$, $B_1 \geqslant 0$, $D \in \mathbf{N}$, χ — характеры Дирихле по модулю D. Пусть далее $g(n)$ такая, что*

$$\sum_{y<p\leqslant x} \frac{|g(p)|}{p} \leqslant A\ln\frac{\ln x}{\ln y} + O(1), \tag{2.2}$$

и для любых l, $(l, D) = 1$, *равномерно по* $D \leqslant B(x)$

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l (\mathrm{mod}\, D)}} g(p) \ln p = \frac{\tau}{\varphi(D)} x + O\big(x\eta(x)\big), \tag{2.3}$$

где $\tau \in \boldsymbol{C}$, $|\tau| \leqslant c_4$, $\eta(x)$ *не возрастает, а* $x\eta(x)$ *не убывает. Тогда равномерно по* χ *и* $D \leqslant B(x)$

$$S(x, y) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n, \Pi_y) = 1}} \chi(n) g(n)$$

$$= 1 + E_0 \frac{e^{-\gamma\tau} x}{\Gamma(\tau) \ln y} t^{\tau - 1} + O\left(\frac{x t^{E_0 \mathrm{Re}\tau - 2}}{\ln y}\right) + O\left(\frac{\varphi(D) x \eta(y)}{\ln y} t^{A - 1} \ln t\right),$$

где $t = \ln x / \ln y$; $E_0 = 1$, *если* $\chi = \chi_0$ — *главный характер, и* $E_0 = 0$, *если* $\chi \neq \chi_0$; *константа в* O *зависит от* c_4; $(n, \Pi_y) = 1$ — *означает, что все простые делители* n *больше* y, *или* $n = 1$.

Доказательство. Из (2.3) следует, что равномерно по $D \leqslant B(x)$

$$\sum_{p \leqslant x} \chi(p) g(p) \ln p = E_0 \tau x + O\big(x\varphi(D)\eta(x)\big). \tag{2.4}$$

Согласно ограничению на y, отсюда находим

$$\sum_{\substack{n \leqslant y^t \\ (n, \Pi_y) = 1}} \chi(n) g(n) \ln n = \sum_{\substack{n \leqslant y^{t-1} \\ (n, \Pi_y) = 1}} \chi(n) g(n) \sum_{y < p \leqslant y^t / n} \chi(p) g(p) \ln p$$

$$= E_0 \tau \int_y^{y^t} \sum_{\substack{n \leqslant y^t / u \\ (n, \Pi_y) = 1}} \chi(n) g(n)\, du + O\Big(y^t \varphi(D) \eta(y) \prod_{y < p \leqslant y^t} e^{|g(p)|/p}\Big).$$

Преобразуя это соотношение и используя неравенство (2.2), приходим к приближенному интегральному уравнению

$$t y^{-t} S(y^t, y) - \int_0^t y^{-u} S(y^u, y)\, du - E_0 \tau \int_0^{t-1} y^{-u} S(y^u, y)\, du = O\left(\varphi(D) \eta(y) \frac{t^A}{\ln y}\right),$$

из которого, как в [15], стр. 1077–1079, находим

$$S(y^t, y) = 1 + \int_1^t y^u z'(u)\, du + O\left(\frac{y^t \varphi(D) \eta(y)}{\ln y} t^{A - 1} \ln t\right), \tag{2.5}$$

где $z(t)$ — непрерывное при $t > 0$ решение дифференциально-разностного уравнения $t z'(t) = E_0 \tau z(t - 1)$ с начальным условием $z(t) \equiv 1$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Подставляя асимптотику $z'(u)$ ([14], лемма 1.3.1)

$$z'(t) = E_0 \frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(\tau)} t^{\tau - 1} + O(t^{\mathrm{Re}\tau - 2})$$

в (2.5), получаем доказательство утверждения.

Лемма 4. *Пусть* $x \geqslant 2$, $\exp \ln^\alpha x \leqslant y \leqslant x$ $(0 < \alpha < 1)$, $g(n)$ *удовлетворяет условию* (2.3), *а* $|g(n)|$ *условию* (2.1), *причем* $\eta(u)$ *такова, что* $\int_2^\infty \eta(u)\, d\ln_2 u < \infty$ *и* $B(x) = O(\ln^{B_1} x)$, $B_1 \geqslant 0$. *Тогда для любых* $l \leqslant D$, $(l, D) = 1$, *равномерно по* $D \leqslant B(x)$

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l (\mathrm{mod}\, D)}} g(n) = \frac{(\varphi(D))^{\tau - 1} x \ln^{\tau - 1} x}{D^\tau \Gamma(\tau)} \prod_{p \nmid D} e^{g(p)/p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\tau \Big(1 + O\big(\int_y^\infty \eta(u)\, d\ln_2 u\big)\Big)$$

$$+ O\left(x (\ln^{A - 1} x) \left(\frac{t^{\mathrm{Re}\tau - 1 - A}}{\varphi(D)} + t^{-(A + 1)} + \varphi(D) \eta(y) \ln t\right)\right),$$

где $t = \ln x / \ln y$, A *удовлетворяет условию* $\sum_{z < p \leqslant x} |g(p)|/p \leqslant A \ln(\ln x / \ln z) + O(1)$, *существование которого следует из* (2.1), *константа зависит от* c_1 *и* c_4.

Доказательство. Оценим сумму $\sum_{n \leqslant x} \chi(n) g(n)$. В силу леммы 3 находим

$$\sum_{n \leqslant y^t} \chi(n) g(n) = \frac{E_0 e^{-\gamma\tau} x}{\Gamma(\tau) \ln y} \sum_{\substack{n \leqslant y^{t-1} \\ n | \Pi_y}} \chi(n) \frac{g(n)}{n} \left(t - \frac{\ln n}{\ln y}\right)^{\tau - 1}$$

$$+ \sum_{\substack{n \leqslant y^t \\ n | \Pi_y}} \chi(n) g(n) + O\left(\frac{x}{\ln y} \sum_{\substack{n \leqslant y^{t-1} \\ n | \Pi_y}} \frac{|g(n)|}{n} \left(t - \frac{\ln n}{\ln y}\right)^{E_0 \mathrm{Re}\tau - 2}\right)$$

$$+ O\left(\frac{x \varphi(D) \eta(y)}{\ln y} \sum_{\substack{n \leqslant y^{t-1} \\ (n, D) = 1, n | \Pi_y}} \frac{|g(n)|}{n} \left(t - \frac{\ln n}{\ln y}\right)^{A - 1} \ln\left(t - \frac{\ln n}{\ln y}\right)\right)$$

$$= \frac{E_0 e^{-\gamma\tau} x t^{\tau - 1}}{\Gamma(\tau) \ln y} \sum_{\substack{n \leqslant y^{t-1} \\ n | \Pi_y}} \frac{\chi(n) g(n)}{n} + \sum_{\substack{n \leqslant y^t \\ n | \Pi_y}} \chi(n) g(n)$$

$$+ O\left(\frac{x}{\ln y}\left(t^{E_0 \mathrm{Re}\tau - 2} \sum_{\substack{n \leqslant y^{t/2} \\ (n, D) = 1, n | \Pi_y}} \frac{|g(n)|}{n} + \sup_{1 \leqslant u \leqslant t} u^{E_0 \mathrm{Re}\tau - 2} \sum_{\substack{n > y^{t/2} \\ (n, D) = 1, n | \Pi_y}} \frac{|g(n)|}{n}\right)\right)$$

$$+ O\left(\frac{x \varphi(D) \eta(y)}{\ln y}\left(t^{A - 1} \ln t \sum_{\substack{n \leqslant y^{t/2} \\ (n, D) = 1, n | \Pi_y}} \frac{|g(n)|}{n} + \sup_{1 \leqslant u \leqslant t} u^{A - 1} \ln u \sum_{\substack{n > y^{t/2} \\ (n, D) = 1}} \frac{|g(n)|}{n}\right)\right).$$

Далее, применяя леммы 1, 2 имеем

$$\sum_{n\leqslant y^t}\chi(n)g(n)=\frac{E_0e^{-\gamma\tau}xt^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)\ln y}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{g(p)/p}+O\Bigg(E_0\frac{xt^{\operatorname{Re}\tau-1}}{\ln y}e^{-t}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{|g(p)|/p}\Bigg)$$
$$+O\Bigg(\frac{x}{\ln y}e^{-t}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{|g(p)|/p}\Bigg)+O\Bigg(E_0\frac{x}{\ln y}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{|g(p)|/p}\int_1^t u^{\operatorname{Re}\tau-2}e^{-(t-u)}\,du\Bigg)$$
$$+O\Bigg(\frac{x}{\ln y}\Bigg(t^{E_0\operatorname{Re}\tau-2}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{|g(p)|/p}+\sup_{1\leqslant u\leqslant t}u^{E_0\operatorname{Re}\tau-2}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{|g(p)|/p}e^{-t/2}\Bigg)\Bigg)$$
$$+O\Bigg(\frac{x\varphi(D)\eta(y)}{\ln y}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{|g(p)|/p}\Big(t^{A-1}\ln t+\sup_{1\leqslant u\leqslant t}(u^{A-1}\ln u)e^{-t/2}\Big)\Bigg)$$
$$=E_0\frac{e^{-\gamma\tau}xt^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)\ln y}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{g(p)/p}+O\big(x(\ln^{A-1}y)(t^{E_0\operatorname{Re}\tau-2}+\varphi(D)\eta(y)t^{A-1}\ln t)\big).$$

Отсюда следует

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\operatorname{mod}D)}}g(n)=\frac{e^{-\gamma\tau}xt^{\tau-1}}{\varphi(D)\Gamma(\tau)\ln y}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{g(p)/p}$$
$$+O\Bigg(x(\ln^{A-1}y)\Bigg(\frac{t^{\operatorname{Re}\tau-2}}{\varphi(D)}+t^{-2}+\varphi(D)\eta(y)t^{A-1}\ln t\Bigg)\Bigg).\tag{2.6}$$

Преобразуем главный член. Так как

$$\sum_{y<p\leqslant z}\frac{g(p)}{p}=\tau\ln\frac{\ln z}{\ln y}+O\Big(\int_y^\infty\eta(u)\,d\ln_2u\Big),$$

то

$$\prod_{p>y}e^{g(p)/p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^\tau=1+O\Big(\int_y^\infty\eta(u)\,d\ln_2u\Big).\tag{2.7}$$

Поэтому

$$\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{g(p)/p}=\prod_{p\nmid D}e^{g(p)/p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^\tau\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-\tau}\Big(1+O\Big(\int_y^\infty\eta(u)\,d\ln_2u\Big)\Big).$$

Кроме того из формулы Мертенса [20, стр. 94] следует

$$\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-\tau}=\Big(\frac{\varphi(D)}{D}\Big)^\tau e^{\gamma\tau}(\ln^\tau y)\big(1+O(e^{-c\sqrt{\ln y}})\big).$$

Следовательно,

$$\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid D}}e^{g(p)/p}=\Big(\frac{\varphi(D)}{D}\Big)^\tau e^{\gamma\tau}(\ln^\tau y)\prod_{p\nmid D}e^{g(p)/p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^\tau\Big(1+O\Big(\int_y^\infty\eta(u)\,d\ln_2u\Big)\Big),$$

что вместе с (2.6) дает доказательство леммы 4.

Теорема 2. *Пусть* $D\in\mathbf{N}$, $\tau\in\mathbf{C}$, $|\tau|\leqslant c_4$, $a\in\mathbf{R}$, $|a|\leqslant c_5$, $g(n)$ — *комплексная экспоненциально-мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям:*

1) $\sum_{p\leqslant x}|g(p)|\leqslant c_1x/\ln x$;
2) *для любых* l, $(l,D)=1$, *равномерно по* $D\leqslant B(x)$

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(\operatorname{mod}D)}}g(p)\ln p=\frac{\tau}{\varphi(D)}x+O\big(x/(\ln^Bx)\ln_2^\alpha x\big),$$

где $B\geqslant0$ *и при* $B=0$, $\alpha>1$. *Тогда для любых* l, $(l,D)=1$, *равномерно по* D *для* $D\leqslant B(x)$ *и*

$$D=o\Bigg(\frac{(\ln^Bx)\ln_2^\alpha x}{\ln((\ln^Bx)\ln_2^\alpha x)}\Bigg),$$

справедливо соотношение

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\operatorname{mod}D)}}g(n)n^{ia}=\frac{\varphi(D)^{\tau-1}(\ln^{\tau-1}x)x^{1+ia}}{D^\tau(1+ia)\Gamma(\tau)}\prod_{p\nmid D}e^{g(p)/p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^\tau$$
$$\times\big(1+O((1-\operatorname{sgn}B)/\ln_2^{\alpha-1}x)\big)$$
$$+O\Bigg(x(\ln^{A-1}x)\Bigg(\frac{\varphi(D)\ln((\ln^Bx)\ln_2^\alpha x)}{(\ln^Bx)\ln_2^\alpha x}\Bigg)^{b/(B+b)}\Bigg),$$

где $b=A+1-\max(0,\operatorname{Re}\tau)$, *константы зависят от* c_1, c_4, c_5 *и константы из условия* 2).

Доказательство. В силу леммы 4 имеем

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\operatorname{mod}D)}}g(n)$$
$$=\frac{x\ln^{\tau-1}x}{\Gamma(\tau)\varphi(D)}\Big(\frac{\varphi(D)}{D}\Big)^\tau\prod_{p\nmid D}e^{g(p)/p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^\tau\big(1+O((\ln^{-B}y)\ln_2^{1-\alpha-\operatorname{sgn}B}y)\big)$$
$$+O\Bigg(x(\ln^{A-1}x)\Bigg(\frac{t^{-(A+1-\operatorname{Re}\tau)}}{\varphi(D)}+t^{-(A+1)}+\varphi(D)((\ln^{-B}y)\ln_2^{-\alpha}y)\ln t\Bigg)\Bigg).\tag{2.8}$$

Из условия 1) следует существование A такого, что

$$\sum_{p\leqslant x}|g(p)|/p<A\ln_2 x+O(1),$$

а из 2) следует сходимость $\prod\limits_p e^{g(p)/p}(1-1/p)^\tau$. Поэтому

$$(2.9)\qquad \left(\frac{\varphi(D)}{D}\right)^\tau\prod_{p\nmid D}e^{g(p)/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^\tau=c\prod_{p|D}e^{-g(p)/p}$$
$$\ll\exp\sum_{p|D}|g(p)|/p\ll\ln^A D.$$

В (2.8) выберем

$$t=\left((\ln^B x)\ln_2^\alpha x/\varphi(D)\ln((\ln^B x)\ln_2^\alpha x)\right)^{1/(B+b)},$$

что удовлетворяет ограничению на y в лемме 4. Тогда находим

$$(2.10)\qquad x(\ln^{A-1}x)\left(\frac{t^{-(A+1-\operatorname{Re}\tau)}}{\varphi(D)}+t^{-(A+1)}+\varphi(D)(\ln^{-B}y)(\ln_2^{-\alpha}y)\ln t\right)$$
$$\ll x(\ln^{A-1}x)\left(\varphi(D)\ln((\ln^B x)\ln_2^\alpha x)/(\ln^B x)\ln_2^\alpha x\right)^{b/(B+b)}.$$

В силу (2.9) при $B>0$ остаточный член, получающийся умножением главного члена на $O((\ln^{-B}y)\ln_2^{1-\alpha-\operatorname{sgn}B}y)$, по порядку роста меньше (2.10), а для $B=0$ — $(\ln^{-B}y)\ln_2^{-\alpha}y\ll\ln_2^{1-\alpha}x$. Таким образом, при $a=0$ теорема доказана. Отсюда с помощью суммирования Абеля переходим к общему случаю.

Следствие. *Если в теореме* 2 $|g(n)|\leqslant 1$, *то*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\operatorname{mod}D)}}g(n)n^{ia}=\frac{x^{1+ia}\ln^{\tau-1}x}{\varphi(D)(1+ia)\Gamma(\tau)}\left(\frac{\varphi(D)}{D}\right)^\tau\prod_{p\nmid D}e^{g(p)/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^\tau$$
$$+O\left(x\left(\left(\frac{\varphi(D)\ln((\ln^B x)\ln_2^\alpha x)}{(\ln^B x)\ln_2^\alpha x}\right)^{1/(B+b)}+(1-\operatorname{sgn}B)\frac{\ln_2 D}{\varphi(D)\ln_2^{\alpha-1}x}\right)\right).$$

Доказательство становится очевидным, если учесть, что в этом случае $A=1$ и $\exp\sum\limits_{p|D}|g(p)|/p\leqslant c\ln_2 D$.

§ 3. Переход к оценке среднего значения „произвольной" мультипликативной функции. Асимптотические формулы для среднего значения экспоненциально-мультипликативных функций, полученные в предыдущем параграфе, переносим на суммы значений смежных мультипликативных функций. Аналогичная задача несколько иным методом рассматривалась М. Оразовым и А. С. Файнлейбом [18].

Теорема 3. *Пусть* $D\in\mathbf{N}$, $\tau\in\mathbf{C}$, $|\tau|\leqslant c_4$, $a\in\mathbf{R}$, $|a|\leqslant c_5$, $f(n)$ — *мультипликативная функция*, $g(p)$ — *комплексная последовательность*,

$|g(p)|\leqslant A$, *такие, что для каждого* l, $(l,D)=1$, *равномерно по* $D\leqslant B(x)=O(\ln^{B_1}x)$

$$(3.1)\qquad \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(\operatorname{mod}D)}}g(p)\ln p=\frac{\tau}{\varphi(D)}x+O\left(\frac{x}{(\ln^B x)\ln_2^\alpha x}\right),$$

где $B_1>0$, $B\geqslant 0$, *при* $B=0$ $\alpha>1$,

$$(3.2)\qquad \sum_p\sum_{r=2}^\infty|f(p^r)|/p^r\leqslant c_6,$$

$$(3.3)\qquad \sum_{p\leqslant x}\frac{|f(p)-g(p)p^{ia}|}{p}\ln p+\sum_{p^r\leqslant x}\sum_{r\geqslant 2}\frac{|f(p^r)|}{p^r}\ln p^r=o(\ln x).$$

Тогда для любых l, $(l,D)=1$, *равномерно по* $D\leqslant B(x)$,

$$D=o\left((\ln^B x)\ln_2^\alpha x/\ln((\ln^B x)\ln_2^\alpha x)\right),$$

справедливо асимптотическое равенство

$$(3.4)\qquad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\operatorname{mod}D)}}f(n)=\left(\frac{\varphi(D)}{D}\right)^\tau\frac{x^{1+ia}\ln^{\tau-1}x}{(1+ia)\varphi(D)\Gamma(\tau)}$$
$$\times\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\left(1+\sum_{r\leqslant s}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^\tau$$
$$+O\left((1-\operatorname{sgn}B)\frac{xD^A}{(\varphi(D))^{A+1}}\frac{\ln^{\operatorname{Re}\tau-1}x}{\ln_2^{\alpha-1}x}e^{\delta_x}\right)$$
$$+O\left(x(\ln^{A-1}x)\left(\frac{\varphi(D)\ln((\ln^B x)\ln_2^\alpha x)}{(\ln^B x)\ln_2^\alpha x}\right)^{b/(B+b)}e^{\delta_x}\right)$$
$$+O\left(x\left(\frac{D^A}{(\varphi(D))^{A+1}}\ln^{\operatorname{Re}\tau-1}x+\sup_{n\leqslant\sqrt{x}}|g(n)|\right)\mu_x e^{\delta_x}\right),$$

где

$$\mu_x=\frac{1}{\ln x}\left[1+\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\frac{|f(p)-g(p)p^{ia}|}{p}\ln p+\sum_{\substack{p^r\leqslant x,r\geqslant 2\\ p\nmid D}}\frac{|f(p^r)|\ln p^r}{p^r}\right],$$

$$\delta_x=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\frac{|f(p)-g(p)p^{ia}|}{p},\qquad g(n)=\prod_{p^\alpha\|n}g(p^\alpha)/\alpha!,$$

$$b=A+1-\max(0,\operatorname{Re}\tau);\qquad s=\frac{\ln x}{\ln p},$$

$p^\alpha\|n$ *означает, что* $p^\alpha|n$ *и* $p^{\alpha+1}\nmid n$; *константы зависят от* A, c_4, c_5, c_6 *и константы из условия* (3.1).

Доказательство. Из последовательности $g(p)$ образуем экспоненциально-мултипликативную функцию $g(n)$ и равенством $f(n)=\sum_{d|n} h(n/d)g(d)d^{ia}$ введем мультипликативную функцию h. Согласно (3.1) функция $g(n)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, в силу которой имеем

$$\tag{3.5} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\bmod D)}} f(n)$$

$$= \sum_{\substack{n\leqslant \sqrt{x}\\ (n,D)=1}} h(n) \sum_{\substack{m\leqslant x/n\\ nm\equiv l(\bmod D)}} m^{ia} g(m) + \sum_{\substack{\sqrt{x}<n\leqslant x\\ (n,D)=1}} h(n) \sum_{\substack{m\leqslant x/n\\ nm\equiv l(\bmod D)}} m^{ia} g(m)$$

$$= \frac{(\varphi(D))^{\tau-1}x^{1+ia}}{D^{\tau}\varphi(D)(1+ia)\Gamma(\tau)} \prod_{p\nmid D} e^{g(p)/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau} \sum_{\substack{n\leqslant\sqrt{x}\\ (n,D)=1}} \frac{h(n)}{n^{1+ia}}\left(\ln^{\tau-1}\frac{x}{n}\right)$$

$$\times\left(1+O\left((1-\operatorname{sgn} B)\ln_2^{1-\alpha}\frac{x}{n}\right)\right)$$

$$+O\left(x\sum_{\substack{n\leqslant\sqrt{x}\\ (n,D)=1}}\frac{|h(n)|}{n}\left(\ln^{A-1}\frac{x}{n}\right)R\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$

$$+O\left(x\sup_{\substack{n\leqslant\sqrt{x}\\ (n,D)=1}}|g(n)|\sum_{\substack{\sqrt{x}<n\leqslant x\\ (n,D)=1}}\frac{|h(n)|}{n}\right),$$

где

$$R(x)=\left(\frac{\varphi(D)\ln((\ln^B x)\ln_2^{\alpha}x)}{(\ln^B x)\ln_2^{\alpha}x}\right)^{b/(B+b)}.$$

Сначала оценим главный член. Имеем

$$\tag{3.6} \sum_{\substack{n\leqslant\sqrt{x}\\ (n,D)=1}}\frac{h(n)}{n^{1+ia}}\ln^{\tau-1}\frac{x}{n}$$

$$=\ln^{\tau-1}x\sum_{\substack{(n,D)=1\\ p^r\|n\Rightarrow p^r\leqslant x}}\frac{h(n)}{n^{1+ia}}-\ln^{\tau-1}x\sum_{\substack{n>\sqrt{x},(n,D)=1\\ p^r\|n\Rightarrow p^r\leqslant x}}\frac{h(n)}{n^{1+ia}}$$

$$+O\left(\ln^{\operatorname{Re}\tau-2}x\sum_{\substack{n\leqslant\sqrt{x}\\ (n,D)=1}}\frac{|h(n)|}{n}\ln n\right)$$

$$=P_h(x,D,a)\ln^{\tau-1}x+O((\ln^{\operatorname{Re}\tau-2}x)S_{|h|}(x,D)P_{|h|}(x,D,0)),$$

где

$$P_{\alpha}(x,D,a)=\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\left(1+\sum_{1\leqslant r\leqslant s}\frac{\alpha(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right),\qquad S_{\alpha}(x,D)=\sum_{\substack{p^r\leqslant x\\ p\nmid D}}\frac{\alpha(p^r)}{p^r}\ln p^r.$$

Покажем, что

$$\tag{3.7} \left(\prod_{p\nmid D}e^{g(p)/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)P_h(x,D,a)=\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\left(1+\sum_{1\leqslant r\leqslant s}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}$$

$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)+O((\ln x)^{-B}(\ln_2 x)^{1-\alpha-\operatorname{sgn}B})\right).$$

Действительно, для $p\leqslant x$

$$e^{g(p)/p}\left(1+\sum_{1\leqslant r\leqslant s}\frac{h(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)$$

$$=e^{g(p)/p}\left(1+\sum_{1\leqslant r\leqslant s}p^{-r(1+ia)}\sum_{k+l=r}f(p^k)\frac{(-g(p))^l}{l!}p^{ial}\right)$$

$$=\sum_{0\leqslant r\leqslant s}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}+\sum_{r>s}\frac{g^r(p)}{r!\,p^r}=\sum_{0\leqslant r\leqslant s}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

и из (3.2), (3.3) следует, что при $p>p_0$

$$\Big|\sum_{0\leqslant r\leqslant s}f(p^r)p^{-r(1+ia)}\Big|\geqslant\tfrac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\prod_{\substack{p_0<p\leqslant x\\ p\nmid D}}e^{g(p)/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}\sum_{0\leqslant r\leqslant s}\frac{h(p^r)}{p^{r(1+ia)}}$$

$$=\prod_{\substack{p_0<p\leqslant x\\ p\nmid D}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sum_{0\leqslant r\leqslant s}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}.$$

А для $p\leqslant p_0$

$$\sum_{0\leqslant r\leqslant s}f(p^r)p^{-r(1+ia)}=O(1),$$

поэтому

$$\prod_{\substack{p\leqslant p_0\\ p\nmid D}}e^{g(p)/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}\sum_{0\leqslant r\leqslant s}\frac{h(p^r)}{p^{r(1+ia)}}=\prod_{\substack{p\leqslant p_0\\ p\nmid D}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}\sum_{0\leqslant r\leqslant s}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Из (2.7) и последних двух соотношений следует (3.7).

Таким образом, учитывая

$$\prod_{p\nmid D}e^{g(p)/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}=O\left(\left(\frac{D}{\varphi(D)}\right)^{A+\operatorname{Re}\tau}\right),$$

находим, что главный член (3.5) равен

$$(3.8)\quad \left(\frac{\varphi(D)}{D}\right)^{\tau}\frac{x^{1+ia}\ln^{\tau-1}x}{\varphi(D)(1+ia)\Gamma(\tau)}\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\left(1+\sum_{1\leqslant r\leqslant s}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{(\ln_2 x)^{1-\alpha-\operatorname{sgn}B}}{\ln^B x}\right)\right)$$
$$+O\left(\frac{x\ln^{\operatorname{Re}\tau-2}x}{\varphi(D)}\left(\frac{D}{\varphi(D)}\right)^{A}S_{|h|}(x,D)P_{|h|}(x,D,0)\right).$$

Далее, первый остаточный член в (3.5) равен

$$(3.9)\quad O\left((1-\operatorname{sgn}B)\frac{x\ln^{\operatorname{Re}\tau-1}x}{\varphi(D)\ln_2^{\alpha-1}x}\left(\frac{D}{\varphi(D)}\right)^{A}P_{|h|}(x,D,0)\right),$$

а второй –

$$(3.10)\quad O\left(x(\ln x)^{A-1}\left(\frac{\varphi(D)\ln((\ln^B x)\ln_2^{\alpha}x)}{(\ln x)^B\ln_2^{\alpha}x}\right)^{b/(B+b)}P_{|h|}(x,D,0)\right).$$

Наконец, для третьего остаточного члена имеем выражение

$$(3.11)\quad O\left(\frac{x}{\ln x}\sup_{n\leqslant\sqrt{x},(n,D)=1}|g(n)|\sum_{\sqrt{x}<n\leqslant x}|h(n)|\frac{\ln n}{n}\right)$$
$$=O\left(\frac{x}{\ln x}S_{|h|}(x,D)P_{|h|}(x,D,0)\sup_{n\leqslant\sqrt{x},(n,D)=1}|g(n)|\right).$$

Оценим $S_{|h|}(x, D)$:

$$S_{|h|}(x,D)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\frac{|h(p)|}{p}\ln p+\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\sum_{2\leqslant r\leqslant s}\frac{|h(p^r)|}{p^r}\ln p^r.$$

Вторая сумма в правой части этого равенства не превосходит величины

$$\sum_{\substack{p^{r+r'}\leqslant x\\ p\nmid D,r+r'\geqslant 2}}\frac{|f(p^r)||g(p)|^{r'}}{r'!\,p^{r+r'}}\ln p^{r+r'}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3+\sum\nolimits_4,$$

где в $\sum_1$ включены слагаемые с условиями $r\geqslant 2$ и $r'\geqslant 2$, в $\sum_2$ – с $r=0$ или $r=1$ и $r'\geqslant 2$, в $\sum_3$ – с $r\geqslant 2$ и $r'=0$ или $r'=1$ и, наконец, в $\sum_4$ – с условиями $r=1$ и $r'=1$. Так как

$$\sum_{\substack{p^r\leqslant x\\ p\nmid D,r\geqslant 2}}\frac{|g(p)|^r}{r!\,p^r}\ln p^r=O(1),$$

то

$$\sum\nolimits_1=O\left(\prod_{\substack{p^r\leqslant x\\ p\nmid D,r\geqslant 2}}\frac{|f(p^r)|}{p^r}\ln p^r\right).$$

Из того, что $|g(p)|\leqslant A$ и (3.3), следует, что $f(p)=o(p)$. Отсюда вытекает ограниченность суммы $\sum_2$. Далее, очевидно, что $\sum_3$ имеет оценку такую же, как и $\sum_1$, а для $\sum_4$ получаем оценку $O\big(\sum_{p\leqslant x,p\nmid D}|f(p)|p^{-2}\ln p\big)$. Но из (3.3) следует $\sum_{p\leqslant x}|f(p)|p^{-1}\ln p=O(\ln x)$. Отсюда, используя преобразование Абеля, показывается ограниченность $\sum_4$.

Таким образом, получим

$$(3.12)\quad S_{|h|}(x,D)=O(\mu_x\ln x)$$

и аналогично

$$(3.13)\quad P_{|h|}(x,D,0)=O(e^{\delta_x}).$$

Далее заметим, что

$$\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\left(1+\sum_{1\leqslant r\leqslant s}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}=O\left(e^{\delta_x}\left(\frac{D}{\varphi(D)}\right)^{A+\operatorname{Re}\tau}\right).$$

Поэтому выражение, которое получается умножением главного члена на $O((\ln x)^{-B}\ln_2^{1-\alpha-\operatorname{sgn}B}x)$ после подстановки (3.12) и (3.13), не превосходит (3.9) или (3.10), а остаточный член, соответствующий произведению главного члена на $O(1/\ln x)$, есть

$$O\left(\frac{D^A x\ln^{\operatorname{Re}\tau-1}x}{(\varphi(D))^{A+1}}\mu_x e^{\delta_x}\right).$$

Учитывая эти замечания, из (3.5), (3.8)–(3.13) получим (3.4). Теорема 3 доказана.

Теорема 3′. *Если, в условиях теоремы* 3, (3.3) *заменить на*

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{|f(p)-g(p)p^{ia}|}{p}\ln p+\sum_{p\leqslant x}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{|f(p^r)|}{p^r}\ln p^r=o(\ln x),$$

то вместо (3.4) *справедливо соотношение*

$$(3.14)\quad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\operatorname{mod}D)}}f(n)=\frac{(\varphi(D))^{\tau-1}x^{1+ia}\ln^{\tau-1}x}{D^{\tau}(1+ia)\Gamma(\tau)}\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}+O(R_1),$$

где

$$R_1=x\left(\frac{D^A}{(\varphi(D))^{A+1}}(\ln x)^{\operatorname{Re}\tau-1}\left(\frac{1-\operatorname{sgn}B}{\ln_2^{\alpha-1}x}+\mu_x'\right)+\sup_{n\leqslant\sqrt{x}}|g(n)|\mu_x'\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\varphi(D)\ln((\ln x)^B\ln_2^{\alpha}x)}{(\ln x)^B\ln_2^{\alpha}x}\right)^{b/(B+b)}e^{\delta_x}\right),$$

$$\mu'_x = \frac{1}{\ln x}\left[1 + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}} \frac{|f(p)-g(p)p^{ia}|}{p}\ln p + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid D}}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{|f(p^r)|}{p^r}\ln p^r\right].$$

Доказательство теоремы 3′ аналогично доказательству теоремы 3. В этом случае доказательство аналога соотношения (3.7) сильно упрощается.

Следствие 1. *Пусть* $a\in \mathbf{R}$, $|a|\leqslant c_5$, $f(n)$ — *комплексная мультипликативная функция*, $|f(n)|\leqslant 1$, $g(p)$ — *комплексная последовательность* ($|g(p)|\leqslant 1$) *такая, что для каждого* l, $(l, D)=1$, *равномерно по* $D\leqslant B(x) = O(\ln^{B_1} x)$ $(B_1>0)$ *справедливы соотношения* (3.1) *и*

$$\sum_{p\leqslant x}|f(p)-g(p)p^{ia}|p^{-1}\ln p = o(\ln x).$$

Тогда в соотношении (3.14) *можно взять*

$$\mu'_x = \frac{1}{\ln x}\Bigl(1+\sum_{p\leqslant x,\, p\nmid D}|f(p)-g(p)p^{ia}|p^{-1}\ln p\Bigr),$$

$$R_1 = x\left(\frac{D(1-\operatorname{sgn}B)\ln^{\operatorname{Re}\tau-1}x}{(\varphi(D))^2\ln_2^{\alpha-1}x} + \left(\frac{\varphi(D)\ln((\ln x)^B\ln_2^{\alpha}x)}{(\ln x)^B\ln_2^{\alpha}x}\right)^{1/(B+1)} + \mu'_x\right)e^{\delta_x}.$$

Следствие 2. *Пусть* $a\in\mathbf{R}$, $|a|\leqslant c_5$, $f(n)$ — *мультипликативная функция*, $|f(n)|\leqslant 1$. *Далее, пусть существуют фиксированное* $k\in \mathbf{N}$ *и* $\lambda_j\in C$ ($j\leqslant k$, $(j,k)=1$) *такие, что*

$$\frac{1}{\ln x}\sum_{j\leqslant k,(j,k)=1}\ \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(\mathrm{mod}\,k)}}\frac{|f(p)-\lambda_j p^{ia}|}{p}\ln p \to 0$$

при $x\to\infty$. *Тогда для любых* D *и* l, $(D,k)=1$, $(l,D)=1$, *равномерно по* $D\leqslant \ln^{B_1}x$ *имеет место* (3.14) *с*

$$\tau = \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{j\leqslant k,(j,k)=1}\lambda_j,$$

$$R_1 = xe^{\delta_x}\max(\ln^{\varepsilon-1}x,\ \mu'_x)\qquad (\varepsilon>0),$$

где

$$\mu'_x = \frac{1}{\ln x}\left(1+\sum_{\substack{j\leqslant k\\ (j,k)=1}}\ \sum_{\substack{p\leqslant x,\, p\nmid D\\ p\equiv j(\mathrm{mod}\,k)}}\frac{|f(p)-\lambda_j p^{ia}|}{p}\ln p\right),$$

$$\delta_x = \sum_{\substack{j\leqslant k\\ (j,k)=1}}\ \sum_{\substack{p\leqslant x,\, p\nmid D\\ p\equiv j(\mathrm{mod}\,k)}}\frac{|f(p)-\lambda_j p^{ia}|}{p}.$$

§ 4. Доказательство теоремы 1. Согласно неравенству Эссеена [4] при $k=0,\ 1$

(4.1) $$(-1)^k\bigl(\Phi^N_{l,D}((-1)^k e^x)-\Phi^N_{l,D}((-1)^k 0)\bigr)-\tfrac12\bigl(w^{0N}_{l,D}(0)-(-1)^k w^{1N}_{l,D}(0)\bigr)G(x)$$
$$\ll \int_{-\eta y}^{\eta y}\bigl|w^{0N}_{l,D}(t)-w^{0N}_{l,D}(0)e^{-t^2/2}+(-1)^k\bigl(w^{1N}_{l,D}(t)-w^{1N}_{l,D}(0)e^{-t^2/2}\bigr)\bigr|\frac{dt}{|t|}+\frac1y = I+\frac1y,$$

где

$$w^{kN}_{l,D}(t) = \frac{|N^{-a}(\ln N)^{-\lambda'(1)}|^{it/y}}{\left[\dfrac{N-l}{D}\right]+1}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,D)}}|f(n)|^{it/y}\operatorname{sgn}^k f(n).$$

Как видно из этого неравенства, для доказательства теоремы 1 нужно оценить разности $w^{kN}_{l,D}(t)-w^{kN}_{l,D}(0)e^{-t^2/2}$ и найти асимптотические формулы для $w^{kN}_{l,D}(0)$ $(k=0,\ 1)$. Это сделано в следующей лемме, являющейся аналогом лемм Й. П. Кубилюса и З. Юшкиса (см. [12], леммы 3, 4).

Лемма 5. *Для* $f\in K_0(g,a)$ *при* $k=0,1$ *и для* $f\in K_1(g,a)$ *при* $k=0$ *справедливы равенства*

(4.2) $$w^{kN}_{l,D}(t) = w^{kN}_{l,D}(0)e^{-t^2/2}\left[1+O\left(|t|\frac{1+t^2+\ln(D/\varphi(D))}{y}\right)\right.$$
$$\left.+O^*\left(|t|\frac{\delta(z)}{y}+t^2\frac{A_1^2(z)}{y^2}+\varrho_r(z)+(1-\operatorname{sgn}B)\ln_2^{1-\alpha}z+(\ln z)^{-B}\ln_2^{-\alpha}z\right)\right]$$
$$+O\bigl(R(N,D)+h_r(N)\bigr)$$

при $|t|\leqslant A\sqrt{\ln y}$ $(A>0)$ *и*

(4.3) $$w^{kN}_{l,D}(t) = O\left(\left(\frac{D}{\varphi(D)}\right)^2 e^{-\beta t^2/\theta}+R(N,D)+h_r(N)\right)$$

при $|t|\leqslant \eta y$. *При этом*

(4.4) $$w^{kN}_{l,D}(0) = \omega_{kD}+O(\varrho_r(N))+O\bigl(R(N,D)+h_r(N)\bigr).$$

Для $f\in K_1(g,a)$ *при* $|t|\leqslant\eta y$ *справедлива оценка*

(4.5) $$w^{1N}_{l,D}(t) = O\bigl(R(N,D)+h_1(N)\bigr).$$

Для $f\in K_r(g,a)$ $(r=0,1)$ *при* $k=0,1$

(4.6) $$w^{kN}_{l,D}(t) = w^{kN}_{l,D}(0)+O\left(\frac{|t|}{y}\varepsilon(N,D)\right)$$

для всех t.

Доказательство. Подсчитаем сумму

$$S^{kN}_{l,D}(t)=\frac{1}{\left[\dfrac{N-l}{D}+1\right]}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,D)}}|f(n)|^{it}\operatorname{sgn}^k f(n).$$

Для $f\in K_r(g,a)$ $(r=0,1)$

$$\frac{1}{\ln N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\nmid D}}\left||f(p)|^{it}\operatorname{sgn}^k f(p)-(-1)^{rk}e^{itg(p)}p^{ita}\right|\frac{\ln p}{p}\leqslant 2\eta h_r(N)\to 0$$

при $N\to\infty$ равномерно по t, $|t|\leqslant\eta$. Отсюда и из (1.1) следует, что к функциям $|f(n)|^{it}\operatorname{sgn}^k f(n)$ $(k=0,1)$ применимо следствие 1 теоремы 3, в силу которого, учитывая сходимость первых двух рядов (1.2), имеем

$$S^{kN}_{l,D}(t)=\frac{N^{ita}}{(1+iat)\Gamma\big((-1)^{kr}\lambda(e^{it})\big)}\left(\frac{\varphi(D)}{D}\ln N\right)^{(-1)^{kr}\lambda(e^{it})-1}\prod_{\substack{p\leqslant N\\ p\nmid D}}\chi_{kp}(t)+O\big(R(N,D)+h_r(N)\big)\tag{4.7}$$

равномерно по t при $|t|\leqslant\eta$, где

$$\chi_{kp}(t)=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{(-1)^{kr}\lambda(e^{it})}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|f(p^\nu)p^{-a\nu}|^{it}}{p^\nu}\operatorname{sgn}^k f(p^\nu).$$

Далее, следуя Й. П. Кубилюсу и З. Юшкису ([12], стр. 266), для $k=0,1$, если $f\in K_0(g,a)$, и для $k=0$, если $f\in K_1(g,a)$, находим, что при $p>p_0$

$$\chi_{kp}(t)=\chi_{kp}(0)\left[1+\left(1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right)\frac{\sigma_{kp}(t)}{p}+O\left(|t|\left(\frac{b_p}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\right)+O\left(|t|\sum_{\substack{\nu=2\\ f(p^\nu)\neq 0}}^{\infty}\frac{|\ln|f(p^\nu)p^{-a\nu}||}{p^\nu}\right)\right],$$

где

$$\sigma_{kp}(t)=(e^{itg(p)}-1)\operatorname{sgn}^k f(p)-\big(\lambda(e^{it})-1\big).$$

Так как в общем случае

$$\sigma_{kp}(t)=it\big(g(p)\operatorname{sgn}^k f(p)-\lambda'(1)\big)+O\big(t^2(g^2(p)+1)\big)$$

и при $g(p)=\mathrm{const}$ имеем: $\sigma_{kp}(t)=0$, если $\operatorname{sgn}^k f(p)>0$, и $\sigma_{kp}(t)=O(|t|)$, если $\operatorname{sgn}^k f(p)\leqslant 0$, и кроме того $\chi_{kp}(t)=\chi_{kp}(0)+O(|t|)$ при $p\leqslant p_0$, то ввиду (1.2) из ограниченности произведения $\Big|\prod\limits_{p_0<p\leqslant N,\,p\nmid D}\chi_{kp}(0)\Big|$ следует

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{p\leqslant N\\ p\nmid D}}\chi_{kp}(t)&=\prod_{\substack{p\leqslant p_0\\ p\nmid D}}\big(\chi_{kp}(0)+O(|t|)\big)\\
&\times\prod_{\substack{p_0<p\leqslant N\\ p\nmid D}}\chi_{kp}(0)\exp\left\{\sum_{\substack{p_0<p\leqslant z\\ p\nmid D}}\ln\left[1+\left(1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right)\sigma_{kp}(t)\right.\right.\\
&\left.+O\left(|t|\left(\frac{b_p}{p}+\frac{1}{p^2}+\sum_{\substack{\nu=2\\ f(p^\nu)\neq 0}}^{\infty}\frac{|\ln|f(p^\nu)p^{-a\nu}||}{p^\nu}\right)\right)\right]\\
&+O\left(\left|\sum_{z<p\leqslant N}\frac{e^{itg(p)}-\lambda(e^{it})}{p}\right|\right)+O\left(\sum_{\substack{z<p\leqslant N\\ \operatorname{sgn}^k f(p)\leqslant 0}}\frac{1}{p}\right)\\
&\left.+O\left(|t|\sum_{\substack{z<p\leqslant N\\ p\nmid D}}\left(\frac{b_p}{p}+\frac{1}{p^2}+\sum_{\substack{\nu=2\\ f(p^\nu)\neq 0}}^{\infty}\frac{|\ln|f(p^\nu)p^{-a\nu}||}{p^\nu}\right)\right)\right\}\\
&=\Big(\prod_{\substack{p\leqslant N\\ p\nmid D}}\chi_{kp}(0)+O(|t|)\Big)\exp\left[O^*\left(|t|\left(\left|\sum_{\substack{p\leqslant z\\ p\nmid D}}\frac{g(p)-\lambda'(1)}{p}\right|\right.\right.\right.\\
&\left.\left.+\sum_{\substack{p\leqslant z\\ p\nmid D}}\frac{|g(p)|}{p^2}+\sum_{\substack{p\leqslant z\\ \operatorname{sgn}^k f(p)\leqslant 0}}\frac{|g(p)|}{p}\right)+t^2\sum_{\substack{p\leqslant z\\ p\nmid D}}\frac{g^2(p)+1}{p}\right)\\
&\left.+O\left(|t|\sum_{\substack{p\leqslant z,\,p\nmid D\\ \operatorname{sgn}^{1-r}f(p)\leqslant 0}}\frac{1}{p}\right)+O^*\left(\left|\sum_{z<p\leqslant N}\frac{e^{itg(p)}-\lambda(e^{it})}{p}\right|+\sum_{\substack{z<p\leqslant N\\ \operatorname{sgn}^k f(p)\leqslant 0}}\frac{1}{p}\right)\right].\end{aligned}$$

Таким образом, предполагая z таким, что $t\delta(z)=O(1)$ и $tA_1(z)=O(1)$ при $|t|\leqslant A\sqrt{\ln y}/y$, имеем

$$\prod_{\substack{p\leqslant N\\ p\nmid D}}\chi_{kp}(t)=\prod_{\substack{p\leqslant N\\ p\nmid D}}\chi_{kp}(0)+O(|t|)+O^*\big(|t|\delta(z)+t^2A_1^2(z)+\varrho_r(z)+B(\ln z)^{-B}\ln_2^{-\alpha}z+(1-\operatorname{sgn}B)\ln_2^{1-\alpha}z\big).\tag{4.8}$$

Подставляя t/y вместо t в (4.7), (4.8), из свойств Γ-функции и трижды дифференцируемости $\lambda(e^{it})$ выводим, что при $|t|\leqslant A\sqrt{\ln y}$

$$\begin{aligned}w^{kN}_{l,D}(t)=\prod_{\substack{p\leqslant N\\ p\nmid D}}\chi_{kp}(0)e^{-t^2/2}&\left[1+O\left(|t|\frac{1+t^2+\ln(D/\varphi(D))}{y}\right)\right.\\
&\left.+O^*\left(\frac{|t|\delta(z)}{y}+\frac{t^2A_1^2(z)}{y^2}+\varrho_r(z)+\frac{B}{(\ln z)^B\ln_2^{\alpha}z}+\frac{1-\operatorname{sgn}B}{\ln_2^{\alpha-1}z}\right)\right]\\
&+O\big(R(N,D)+h_r(N)\big).\end{aligned}$$

Отсюда и из

$$w_{l,D}^{kN}(0) = \prod_{\substack{p\le N\\ p\nmid D}} \chi_{kp}(0) + O\big(R(N, D)+h_r(N)\big) \tag{4.9}$$

(что следует из (4.7)) получаем (4.2).

Далее, воспользовавшись сходимостью второго из рядов (1.2), получаем

$$\prod_{p>N}\chi_{kp}(0) = 1+O\big(\varrho_r(N)\big)+O(1/N)$$

и поэтому из (4.9) вытекает (4.4).

Из (1.1) и сходимости первых двух рядов (1.2) следует

$$\left(\frac{\varphi(D)}{D}\right)^{(-1)^{kr}\lambda(e^{it})}\prod_{\substack{p\le N\\ p\nmid D}}\chi_{kp}(t) = O\left(\frac{D}{\varphi(D)}\right).$$

Пользуясь этой оценкой и учитывая предположение $\operatorname{Re}\lambda(e^{it})\leqslant 1-\beta t^2$, из (4.7) получаем (4.3).

Далее, так как η достаточно мало, то можно считать $\operatorname{Re}\lambda(e^{it})\geqslant \frac{1}{2}$ при $|t|\leqslant\eta$. Поэтому для $f\in K_1(g, a)$ при $|t|\leqslant \eta y$ из (4.7) также находим

$$w_{l,D}^{1N}(t) = O\left(\left(\frac{D}{\varphi(D)}\right)^2\ln^{-3/2}N\right)+O\big(R(N, D)+h_r(N)\big) = O\big(R(N, D)+h_r(N)\big).$$

Остается доказать соотношение (4.6). Имеем

$$\begin{aligned} w^{kN}_{l,D}(t) &= w^{kN}_{l,D}(0)\\ &\quad + O\left(\frac{D|t|}{Ny}\sum_{\substack{n\le N,\, f(n)\ne 0\\ n\equiv l \pmod D}}\left|\ln|f(n)n^{-a}| - \left(a\ln\frac{N}{n}+\lambda'(1)\ln_2 N\right)\right|\right)\\ &= w^{kN}_{l,D}(0)+O(|t|y)+O\left(\frac{|t|D}{Ny}\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv l\pmod D}}\ln\frac{N}{n}\right)\\ &\quad + O\left(\frac{D|t|}{Ny}\sum_{\substack{p^\nu\le N,\, p\nmid D\\ f(p^\nu)\ne 0}}\Big|\ln|f(p^\nu)p^{-a\nu}|\Big|\sum_{\substack{p^\nu n\le N\\ p^\nu n\equiv l\pmod D}}1\right).\end{aligned}$$

Сумма во втором остаточном члене есть $O(N/D)$.

Оценим последний остаточный член. В силу сходимости первого и третьего рядов (1.2) находим

$$\begin{aligned} &\frac{D}{N}\sum_{\substack{p^\nu\le N,\, p\nmid D\\ f(p^\nu)\ne 0}}\Big|\ln|f(p^\nu)p^{-a\nu}|\Big|\sum_{\substack{p^\nu n\le N\\ p^\nu n\equiv l\pmod D}}1\\ &\ll \sum_{\substack{p^\nu\le N/D,\, p\nmid D\\ f(p^\nu)\ne 0}}\frac{\big|\ln|f(p^\nu)p^{-a\nu}|\big|}{p^\nu}+D\sum_{\substack{N/D<p^\nu\le N,\, p\nmid D\\ f(p^\nu)\ne 0}}\frac{\big|\ln|f(p^\nu)p^{-a\nu}|\big|}{p^\nu}\\ &\ll 1+\sum_{\substack{p\le N/D\\ p\nmid D}}\frac{|g(p)|}{p}+D\sum_{N/D<p\le N}\frac{|g(p)|}{p}\\ &\quad +D\left(\sum_{N/D<p\le N}\frac{|b_p|}{p}+\sum_{\substack{N/D<p^\nu\le N\\ \nu\geqslant 2,\, f(p^\nu)\ne 0}}\frac{\big|\ln|f(p^\nu)|\big|}{p^\nu}\right)\stackrel{\text{def}}{=}\varepsilon(N, D).\end{aligned}$$

Из предыдущего соотношения получим (4.6). Лемма 5 доказана.

Путь интегрирования в (4.1) разбиваем на три части:

$$\Gamma_1=\{t\colon\ |t|\leqslant 1/y\varepsilon(N, D)\},\qquad \Gamma_2=\{t\colon\ 1/y\varepsilon(N, D)<|t|\leqslant A\sqrt{\ln y}\},$$

$$\Gamma_3=\{t\colon\ A\sqrt{\ln y}<|t|\leqslant \eta y\}.$$

Применяя формулу (4.6), получаем, что интеграл по Γ_1 есть $O(1/y)$. Для оценки части интеграла по Γ_2 пользуемся соотношениями (4.2) и (4.5). Учитывая, что при $g(p)=\mathrm{const}$ условие (1.1) выполняется со сколь угодно большим B, находим, что интеграл по Γ_2 имеет оценку

$$\begin{aligned} &O\left(\frac{\ln(D/\varphi(D))}{y}\right)+O\big(h_r(N)\ln(y\varepsilon(N, D))\big)+O^*\left(\frac{\delta(z)}{y}+\frac{A_1^2(z)}{y^2}\right)\\ &\quad +O^*\big(R(N, D)\ln(y\varepsilon(N, D))\big)+O^*\Big(\big(\varrho_r(z)+(1-\operatorname{sgn}B)\ln_2^{1-\alpha}z\\ &\qquad\qquad +B(\ln z)^{-B}\ln_2^{-\alpha}z\big)\ln(y\varepsilon(N, D))\Big).\end{aligned}$$

Оценим интеграл по Γ_3. В силу (4.3) и (4.5), выбрав $A\geqslant\max(2, \sqrt{2\theta/\beta})$, находим, что последняя часть интеграла оценивается величиной

$$\begin{aligned} &O\left(e^{-A^2(\ln y)/2}+\frac{D}{\varphi(D)}e^{-\beta A^2(\ln y)/\theta}\right)+O\big((R(N, D)+h_r(N))\ln y\big)\\ &\qquad = O(1/y)+O(h_r(N)\ln y)+O^*(R(N, D)\ln y).\end{aligned}$$

Таким образом, собирая эти оценки, получаем, что

$$I = O\left(\frac{\ln(D/\varphi(D))}{y} + h_r(N)\ln(y\varepsilon(N, D))\right) + O^*\left(\frac{\delta(z)}{y} + \frac{A_1^2(z)}{y^2}\right)$$
$$+ O^*\left(\left(\varrho_r(z) + (1-\operatorname{sgn} B)\ln_2^{1-\alpha} z + B(\ln z)^{-B}\ln_2^{-\alpha} z\right)\ln(y\varepsilon(N, D))\right)$$
$$+ O^*\left(R(N, D)\ln(y\varepsilon(N, D))\right).$$

Подставляя их в (4.1) и заменяя $\Phi^N_{l,D}((-1)^k 0)$, $w^{0N}_{l,D}(0)$ и $w^{1N}_{l,D}(0)$ согласно (4.4) и (4.5), завершаем доказательство теоремы 1.

В заключение выражаю глубокую благодарность академику АН Литовской ССР Й. П. Кубилюсу за полезные обсуждения.

Литература

[1] P. D. T. A. Elliott, *A class of additive arithmetic functions with asymptotically normal distribution*, Mathematika 20 (1973), 144–154.

[2] P. Erdős and M. Kac, *On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 25 (1939), 206–207.

[3] — — *The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions*, Amer. J. Math. 62 (1940), 738–742.

[4] C.-G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law*, Acta Math. 77 (1945), 1–125.

[5] A. Rényi and P. Turán, *On the theorem of Erdős–Kac*, Acta Arith. 4 (1958), 71–84.

[6] М. Б. Барбан, *Об одной теореме Й. П. Кубилюса*, Изв. АН УзССР сер. физ.-мат. наук 1961, (5), 3–9.

[7] М. Б. Барбан, А. И. Виноградов, *О теоретико-числовом базисе вероятностной теории чисел*, Доклады АН СССР 154 (3) (1964), 495–496.

[8] В. М. Золотарев, *Общая теория перемножения независимых случайных величин*, там же, 142 (1962), 788–791.

[9] З. А. Крижюс, *Среднее значение мультипликативных функций и распределение значений вещественных мультипликативных функций*, Liet. Mat. Rink. 20(2) (1980), 69–78.

[10] Й. П. Кубилюс, *Об одном классе аддитивных арифметических функций, распределенных асимптотически по нормальному закону*, Научн. тр. физ.-техн. ин-та АН ЛитССР, 1956, 2, 5–15.

[11] — *Метод производящих рядов Дирихле в теории распределения аддитивных арифметических функций. I*, Liet. Mat. Rink. 11 (1) (1971), 125–134.

[12] Й. П. Кубилюс, З. Юшкис, *О распределении значений мультипликативных функций*, там же, 11 (2) (1971), 261–273.

[13] А. П. Лауринчикас, *Некоторые замечания о распределении мультипликативных функций*, там же, 17 (4) (1977), 139–148.

[14] Б. В. Левин, А. С. Файнлейб, *Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел*, УМН 22 (3) (135) (1967), 119–199.

[15] — — *Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел*, Изв. АН СССР сер. мат. 34 (1970), 1064–1109.

[16] Г. Ф. Липатова, *Оценка отклонения от нормального закона для функций распределения аддитивных функций*, канд. диссертация, Владимир 1983.

[17] З. А. Манставичюс, *Применение метода производящих рядов Дирихле в теории распределения значений арифметических функций*, Liet. Mat. Rink. 14 (1) (1974), 99–111.

[18] М. Оразов, А. С. Файнлейб, *О средних значениях арифметических функций на прогрессиях*, Изв. АН Турк. ССР сер. физ.-тех. наук 1976, (6), 3–8.

[19] Г. А. Попов, *Распределение значений теоретико-числовых функций на арифметической прогрессии*, канд. диссертация, Владимир 1971.

[20] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, „Мир", Москва 1967.

[21] Г. Г. Стяпанаускас, *О распределении аддитивных арифметических функций на арифметической прогрессии*, Liet. Mat. Rink. 19 (4) (1979), 175–190.

[22] Н. М. Тимофеев, *Оценка остаточного члена в одномерных асимптотических законах*, Доклады АН СССР 200 (2) (1971), 298–301.

[23] С. Т. Туляганов, *Оценка остаточного члена в интегральных асимптотических законах для мультипликативных функций*, Доклады АН УзССР 1971, (4), 5–7.

[24] — *Распределение значений мультипликативных функций*, Изв. АН УзССР сер. физ.-мат. наук 1972, (5), 30–38.

[25] — *Асимптотики средних значений мультипликативных функций*, Мат. заметки 38 (1) (1985), 15–28.

[26] Р. Уждавинис, *Некоторые предельные теоремы для аддитивных арифметических функций*, Liet. Mat. Rink. 1 (1–2) (1961), 355–364.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. В. И. РОМАНОВСКОГО АН УзССР

Поступило 30.1.1987
и в исправленной форме 28.10.1987 (1705)