References

[B] V. G. Boltyanskii, *An example of a two-dimensional compactum whose topological square is three-dimensional*, Amer. Math. Soc. Transl. 48 (1951), 3–6; [Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 67 (1949), 597–599].

[K1] Y. Kodama, *On a problem of Alexandroff concerning the dimension of product spaces*, I, J. Math. Soc. Japan, 10 (1958), 380–404.

[K2] — *Cohomological dimension theory*, Appendix to the book of K. Nagami, *Dimension theory*, N. Y. 1970.

[Kr] J. Krasinkiewicz, *Imbeddings into* R^n *and dimension of products*, Fund. Math., to appear.

[K–L] J. Krasinkiewicz and K. Lorentz, *Disjoint membranes in cubes*, Bull. Polish Acad. Sci, Math., to appear.

[M–R] D. Mc Cullough and L. R. Rubin, *Some m-dimensional compacta admitting a dense set of imbeddings into* R^{2m}, Fund. Math. 133 (1989), 235–243.

[S] S. Spież, *Imbeddings in* R^{2m} *of m-dimensional compacta with* $\dim(X\times X)<2m$, Fund. Math., 135 (1990).

[Wh] J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy*, I, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 213–245.

[Wi] R. F. Williams, *A useful functor and three famous examples in topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 319–329.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
WARSAW UNIVERSITY AFFILIATED BRANCH IN BIAŁYSTOK
ul. Akademicka 2, 15-267 Białystok 1, Poland
(Current address as below)

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warsaw, Poland

Received 30 March 1988;
in revised form 24 November 1988

Sur le prolongement des fonctions continues dans les complexes simpliciaux infinis

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. Let X be a simplicial complex which does not contain a strictly increasing infinite sequence of simplexes. It is known that, if its geometric realization $|X|$ is provided with the metric topology, it becomes an absolute neighborhood extensor for collectionwise normal spaces. This is definitely false if $|X|$ is provided with the weak topology. We study here this phenomenon in detail, and show that its only origin is the non-preservation of extension properties under formation of infinite wedges of cones.

1. Introduction et notations. Soit Q une classe d'espaces topologiques. Nous dirons qu'un espace Y a la *propriété d'extension* (locale) par rapport à Q si, pour tout espace X appartenant à Q et tout fermé A de X, toute fonction continue de A dans Y peut se prolonger à X (resp. à un voisinage de A dans X). Lorsque Q se réduit à un espace X, nous parlerons de propriété d'extension (locale) par rapport à X. Nous dirons que Y est un *rétracte absolu* de voisinage pour la classe Q (ou RAV(Q)) si Y appartient à Q et si, pour tout espace X appartenant à Q, tout fermé de X homéomorphe à Y est un rétracte de voisinage de X.

Si K est un complexe simplicial, nous noterons $|K|$ sa réalisation géométrique munie de la topologie faible, et $|K|_m$ cette même réalisation géométrique munie de la topologie métrique. Par un simplexe infini, nous entendrons un complexe simplicial infini dont tout ensemble fini de sommets détermine un simplexe.

Il est connu que, si K est un complexe simplicial, $|K|_m$ a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces collectivement normaux si, et seulement si, K ne contient aucun simplexe infini. Ceci découle des trois résultats suivants:

(a) $|K|_m$ est un RAV(métrique) (voir [11], p. 106).

(b) un RAV(métrique) a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces collectivement normaux si, et seulement si, c'est un G_δ absolu [7],

(c) $|K|_m$ est un G_δ absolu si, et seulement si, K ne contient aucun simplexe infini ([11], p. 107).

Avec la topologie faible, la situation change complètement. Un exemple de van Douwen et Pol ([6], exemple 2; voir la note finale) montre l'existence d'un complexe K de dimension un, d'un espace régulier dénombrable Π, d'un fermé A

de Π et d'une fonction $f\colon A \to |K|$ n'ayant aucun prolongement local (K est le cône sur un espace discret dénombrable, A est homéomorphe à un fermé de $|K|$, et f est un plongement de A dans $|K|$). Le problème se pose donc de savoir quand un espace collectivement normal X a la propriété que, pour tout complexe K ne contenant aucun simplexe infini (ou, en particulier, pour tout complexe K localement de dimension finie), $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X. Nour voulons ici attirer l'attention sur l'importance du rôle joué par les cônes sur les ensembles discrets dans ce problème. Elle est illustrée par les deux résultats suivants:

THÉORÈME 1. *Pour un espace collectivement normal X, les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(i) *Pour tout complexe K localement de dimension finie, $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X.*

(ii) *Pour tout espace discret M, le cône sur M a la propriété d'extension par rapport à X.*

THÉORÈME 3. *Si, en outre, X est un k-espace, la condition* (ii) *équivaut à la suivante*

(i') *Pour tout complexe K ne contenant aucun simplexe infini, $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X.*

Lorsque X n'est pas un k-espace, la condition (i') équivaut à la suivante, plus restrictive que (ii) mais assez semblable:

(ii') Pour toute famille $\{K_\alpha/\alpha \in A\}$ de complexes deux à deux disjoints dont aucun ne contient un simplexe infini, si, pour tout α dans A, le cône sur $|K_\alpha|$ a la propriété d'extension par rapport à X, et si $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$, alors le cône sur $|K|$ a aussi cette propriété.

Comme illustration de ces résultats, nous montrerons que les K_1-espaces de van Douwen ([4] et [5]) vérifient la condition (i).

Nous aurons besoin des résultats suivants de théorie des rétractes:

(A) Soit Q une classe d'espaces collectivement normaux. Tout espace paracompact dont chaque point a un voisinage ayant la propriété d'extension locale par rapport à Q a aussi cette propriété ([9], th. 19.3).

(B) Soit Q une classe d'espaces normaux. Si un espace contractile a la propriété d'extension locale par rapport à Q, il a la propriété d'extension par rapport à Q ([11], p. 43).

(C) Le produit de deux espaces ayant la propriété d'extension locale par rapport à une classe Q a aussi cette propriété.

(D) Tout rétracte de voisinage d'un espace ayant la propriété d'extension locale par rapport à Q a aussi cette propriété.

Pour le dernier résultat, rappelons qu'un espace topologique X est dit stratifiable [1] s'il est séparé et si l'on peut faire correspondre à tout ouvert U de X une suite $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts de X de façon que (a) $\overline{U}_n \subset U$ quel que soit n, (b) $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, (c) $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$ quel que soit n.

(E) Pour tout complexe simplicial K, $|K|$ est un RAV (stratifiable) (voir [3]).

L'idée principale de nos démonstrations est de plonger le complexe que nous étudions, ou certains de ses sous-polyèdres, comme fermé dans un produit de deux complexes "plus simples" pour lesquels la propriété d'extension locale est déjà connue, puis d'appliquer (C), (D) et (E).

Pour des complexes de dimension finie, "plus simple" veut dire de dimension inférieure. Quant aux complexes ne contenant aucun simplexe infini, nous leur associons à la section 3 un ordinal, le type conique, et "plus simple" veut alors dire "de type conique inférieur"; cet invariant ordinal nous permet donc de faire un récurrence transfinie.

Par un simplexe d'un complexe K, nous entendrons soit un simplexe abstrait, soit le simplexe fermé correspondant de la réalisation géométrique de K. Le bord d'un simplexe σ sera noté $\dot{\sigma}$, que nous considérions σ comme un simplexe abstrait ou comme un simplexe géométrique. Le simplexe de sommets $v_0, \ldots, v_k$ sera noté $\langle v_0, \ldots, v_k\rangle$. Si σ et τ sont deux simplexes de K, la notation $\sigma < \tau$ signifiera que σ est une face de τ. Le barycentre d'un simplexe σ sera noté tantôt $\hat{\sigma}$, tantôt β_σ. Si σ est un simplexe de K, nous noterons $\mathrm{St}(\sigma, K)$ le sous-complexe de K formé des simplexes ayant σ pour face et de toutes les faces de tels simplexes; nous noterons $\mathrm{Lk}(\sigma, K)$ le sous-complexe de $\mathrm{St}(\sigma, K)$ formé des simplexes disjoints de σ. Nous identifierons chaque sommet de K à un point de $|K|$; pour chaque tel sommet v, son étoile ouverte sera le sous-ensemble $\mathrm{St}^\circ(v, K) = |\mathrm{St}(v, K)| \setminus |\mathrm{Lk}(v, K)|$ de $|K|$, qui est un voisinage ouvert de v.

Par une subdivision d'un complexe K, nous entendons un complexe K' tel que (a) les sommets de K' soient des points de $|K|$, (b) pour tout simplexe σ' de K', il existe un simplexe σ de K contenant tous les sommets de σ', et (c) l'application linéaire de $|K'|$ sur $|K|$ envoyant chaque sommet de K' sur lui-même soit un homéomorphisme (nous identifierons toujours $|K|$ et $|K'|$ par cet homéomorphisme). Avec cette définition d'une subdivision, il est connu que deux subdivisions d'un même complexe ont une subdivision commune. Par un sous-polyèdre P de $|K|$, nous entendrons un ensemble de la forme $P = |L|$, où L est un sous-complexe d'une subdivision de K. Il est connu que la réunion ou l'intersection d'un nombre fini de sous-polyèdres de $|K|$ en est encore un sous-polyèdre. Si K' est la subdivision barycentrique de K et $\langle\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_k\rangle$ un simplexe de K', nous supposerons toujours $\sigma_0, \ldots, \sigma_k$ ordonnés de façon que $\sigma_0 < \ldots < \sigma_k$.

Le cône sur un complexe K sera noté tantôt $C(K)$, tantôt wK lorsque nous voudrons mettre en évidence son sommet w; la suspension de K sera notée $\Sigma(K)$. Le cône sur un espace topologique X sera noté $C(X)$; c'est le quotient $X\times[0, 1]/X\times\{1\}$, et le point de $C(X)$ correspondant au point (x, t) de $X\times[0, 1]$ sera noté $[x, t]$. Le joint de deux espaces topologiques X et Y sera noté $X * Y$; c'est le quotient du produit $X\times Y\times[0, 1]$ obtenu en identifiant chaque ensemble $\{x\}\times Y\times\{0\}$ ou $X\times\{y\}\times\{1\}$ à un point; le point de $X * Y$ correspondant au point (x, y, t) de $X\times Y\times[0, 1]$ sera noté $[x, y, t]$.

2. Complexes localement de dimension finie. Le but de cette section est d démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Pour un espace collectivement normal X, les deux énoncés suivants sont équivalents*

(i) *Pour tout complexe K localement de dimension finie, $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X.*

(ii) *Pour tout espace discret M, le cône sur M a la propriété d'extension par rapport à X.*

Commençons par un lemme, pour l'énoncé duquel quelques notations sont nécessaires. Soit K un complexe simplicial. Un simplexe σ de K sera dit maximal s'il n'est face propre d'aucun simplexe de K. Soit S_m l'ensemble des simplexes maximaux de K. L'ensemble des simplexes de K qui ne sont pas maximaux forme un sous-complexe de K, que nous noterons K_c. Soit K^* la subdivision barycentrique de K modulo K_c (i.e. les simplexes de K^* sont ceux de K_c et, pour σ dans S_m, les simplexes de la forme $\tau\beta_\sigma$, où τ est une face propre de σ). Pour x dans $|K|$, notons x_σ la coordonnée barycentrique de x sur β_σ dans K^*. Posons

$$V_c = \{x \in |K|/x_\sigma \leqslant 1/2 \text{ pour tout } \sigma \text{ dans } S_m\}.$$

V_c est un voisinage fermé de $|K_c|$ dans $|K|$. Soit B_m l'ensemble des β_σ, $\sigma \in S_m$, et soit J_m le cône de sommet w sur l'ensemble discret B_m. Pour y dans $|J_m|$, nous noterons y_σ sa coordonnée barycentrique sur le sommet β_σ. Les $(y_\sigma)_{\sigma\in B_m}$ vérifient

(1) $0 \leqslant y_\sigma \leqslant 1$ pour tout σ dans B_m,

(2) un au plus des y_σ est non nul.

Inversement, étant donnée une famille de nombres $(y_\sigma)_{\sigma\in B_m}$ vérifiant (1) et (2) il existe un point y et un seul de $|J_m|$ dont ces nombres sont les coordonnées bary centriques sur les sommets β_σ de J_m.

LEMME 1. *V_c est homéomorphe à un sous-ensemble fermé du produit $|K_c| \times |J_m|$.*

Démonstration. Soit f la rétraction naturelle de V_c sur $|K_c|$: $f\,||K_c| = \mathrm{id}$ et, pour tout simplexe maximal σ, $f|\sigma\cap V_c$ est la restriction de la projection radiale de $\sigma\setminus\{\beta_\sigma\}$ sur $\dot\sigma$. Soit g l'application simpliciale de K^* sur J_m envoyant K_c sur w et β_σ sur lui-même pour tout simplexe maximal σ de K. Définissons h: $V_c \to |K_c| \times |J_m|$ par

$$h(x) = (f(x), g(x)).$$

Cette fonction est continue. Soient x, y deux points de V_c tels que $h(x) = h(y)$. Si x appartient à $|K_c|$, alors $g(x) = w = g(y)$, donc y appartient aussi à $|K_c|$ et alors $x = f(x) = f(y) = y$. Si x n'appartient pas à $|K_c|$, soit σ_0 l'unique simplexe maximal de K le contenant. Posant $g(x) = (x_\sigma)_{\sigma\in B_m}$ et $g(y) = (y_\sigma)_{\sigma\in B_m}$, nous avons $0 \neq x_{\sigma_0} = y_{\sigma_0}$, donc y appartient à σ_0; les points x et y de σ_0 ont la même projection radiale sur $\dot\sigma_0$ (puisque $f(x) = f(y)$) et la même coordonnée barycentrique sur β_{σ_0}, donc sont égaux. Ceci montre que h est injective.

Pour montrer que $h(V_c)$ est fermé, nous allons montrer que son complémentaire est ouvert. Soit $(u, v) \in |K_c| \times |J_m| \setminus h(V_c)$. Alors $v \neq w$ car $|K_c| \times \{w\} = h(|K_c|)$, donc, si $v = (v_\sigma)_{\sigma\in B_m}$, il existe un unique σ_0 tel que $v_{\sigma_0} \neq 0$. Si $v_{\sigma_0} > 1/2$, l'ensemble des points (u', v') de $|K_c| \times |J_m|$ tels que $v'_{\sigma_0} > 1/2$ (où $v' = (v'_\sigma)$) est un ouvert contenant (u, v) et disjoint de $h(V_c)$.

Supposons donc $v'_{\sigma_0} \leqslant 1/2$; alors u n'appartient pas à $\dot\sigma_0$ car sinon, si x est le point de σ_0 dont la projection radiale sur $\dot\sigma_0$ est u et la coordonnée barycentrique sur β_{σ_0} est v_{σ_0}, nous aurions $h(x) = (u, v)$.

Nous pouvons donc trouver un voisinage ouvert U de u dans $|K_c|$ disjoint de $\dot\sigma_0$. L'ensemble des points (u', v') tels que $u \in U$ et $v'_{\sigma_0} > 0$ est alors un voisinage de (u, v) disjoint de $h(V_c)$. Ceci montre que $|K_c| \times |J_m| \setminus h(V_c)$ est ouvert.

Montrons que h^{-1} est continue. Soit σ_0 un simplexe maximal de K. Si (u, v) est un point de $h(V_c\cap\sigma_0)$ avec $v = (v_\sigma)$, $h^{-1}(u, v)$ est le point de σ_0 dont la projection radiale sur $\dot\sigma_0$ est u et la coordonnée barycentrique sur β_{σ_0} vaut v_{σ_0}, soit

$$(*) \qquad h^{-1}(u, v) = (1-v_{\sigma_0})u + v_{\sigma_0}\beta_{\sigma_0}.$$

Cette formule entraîne immédiatement la continuité de $h^{-1}|h(V_c\cap\sigma_0)$, donc la continuité de h^{-1} en tout point de $h(V_c\cap\sigma_0\setminus|K_c|)$ puisque cet ensemble est ouvert dans $h(V_c)$ (C'est l'ensemble des points (u, v) de $h(V_c)$, $v = (v_\sigma)$, tels que $v_{\sigma_0} > 0$). Par suite, h^{-1} est continue en tout point de $h(V_c\setminus|K_c|)$.

Soit x un point de $|K_c|$, et soit W un voisinage ouvert de x dans V_c. Soit U un voisinage ouvert de x dans $|K_c|$ dont la fermeture est contenue dans W. Pour tout simplexe maximal σ de K, définissons un nombre $\varepsilon_\sigma > 0$ comme suit. Si $\dot\sigma\cap\bar U = \emptyset$, prenons $\varepsilon_\sigma = 1/2$. Si $\dot\sigma\cap\bar U \neq \emptyset$, alors $\dot\sigma\cap\bar U$ est compact, donc, puisque W est ouvert dans V_c, nous pouvons trouver un $\varepsilon_\sigma > 0$ tel que tout point de σ de la forme $(1-\varepsilon)u + \varepsilon\beta_\sigma$ où $u \in \bar U$ et $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_\sigma$ appartienne à W. Soit V l'ensemble des points $v = (v_\sigma)$ de $|J_m|$ vérifiant $0 \leqslant v_\sigma < \varepsilon_\sigma$ pour tout σ dans S_m; cet ensemble est un voisinage ouvert de w dans $|J_m|$. Alors, $U \times V$ est un voisinage de $h(x)$ dans $|K_c| \times |J_m|$ et il est facile de vérifier, à l'aide de la formule $(*)$, que $h^{-1}(U \times V) \subset W$, d'où la continuité de h^{-1} aux points de $h(|K_c|)$. Ceci achève de prouver le lemme.

Démonstration du théorème 1. Le cône sur un espace discret étant un complexe contractile de dimension un, il est clair que (i) entraîne (ii). Inversement, supposons (ii). Pour prouver que (i) est vraie, il suffit, d'après un théorème de Hanner cité dans l'introduction, de la vérifier lorsque le complexe K est de dimension finie, ce que nous ferons par récurrence sur la dimension de K. Si $\dim K \leqslant 1$, alors, pour tout sommet v de K, $|\mathrm{St}(v, K)|$ est soit un point, soit le cône sur l'espace discret $|\mathrm{Lk}(v, K)|$, donc a la propriété d'extension par rapport à X, et le résultat découle du théorème de Hanner puisque les intérieurs des ensembles $|\mathrm{St}(v, K)|$ recouvrent $|K|$.

Supposons donc $\dim K = n \geqslant 2$ et le résultat vrai pour tout complexe de dimension inférieure à n. Conservant les notations du lemme 1, remarquons que les intérieurs des ensembles V_c et σ, $\sigma \in S_m$, recouvrent $|K|$, donc, d'après le théorème de Hanner, il suffit de vérifier la propriété d'extension locale pour ces ensembles. Elle est connue pour les simplexes, donc il ne reste plus qu'à considérer V_c.

Le complexe K_c est de dimension $n-1$, donc, par hypothèse, $|K_c|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X, ainsi que $|J_m|$ qui est un cône sur un espace discret; le produit $|K_c| \times |J_m|$ a donc cette propriété, et tout rétracte de voisinage de ce produit la possède aussi. Il est facile de voir que V_c est triangulable, donc est un RAV (stratifiable) d'après [3]. Le produit de deux espaces stratifiables étant stratifiable [1], le lemme 1 montre que V_c est homéomorphe à un rétracte de voisinage de $|K_c| \times |J_m|$, donc a la propriété souhaitée.

3. **Type conique d'un complexe.** Pour tout ordinal α, nous noterons $\alpha+1$ le successeur immédiat de α et, pour n entier > 0, nous définirons par récurrence $\alpha+n$ par $\alpha+n = (\alpha+(n-1))+1$. Si α a un prédécesseur immédiat β, nous noterons aussi $\beta = \alpha-1$. Nous noterons ω_0 le premier ordinal infini.

Nous allons associer à certains complexes K un ordinal $\lambda(K)$, appelé le type conique de K. Commençons par définir, par récurrence transfinie, la relation $\lambda(K) \leqslant \alpha$, où K est un complexe et α un ordinal (ou le nombre -1).

DÉFINITION. (a) $\lambda(K) \leqslant -1$ si, et seulement si, K est vide.

(b) Pour $\alpha \geqslant 0$, $\lambda(K) \leqslant \alpha$ si, et seulement si, pour tout sommet v de K, il existe un $\beta < \alpha$ tel que $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) \leqslant \beta$.

Nous dirons que le type conique $\lambda(K)$ de K est *défini* s'il existe un ordinal β tel que $\lambda(K) \leqslant \beta$; c'est alors le plus petit de ces ordinaux β.

Nous écrirons $\lambda(K) \nleqslant \beta$ si la relation $\lambda(K) \leqslant \beta$ est fausse (la relation $\lambda(K) \nleqslant \beta$ a donc un sens même si $\lambda(K)$ n'est pas défini). Par contre, la relation $\beta < \lambda(K)$ signifiera que $\lambda(K)$ est défini et strictement supérieur à β.

Il est facile de voir que, pour n entier $\geqslant 0$, $\lambda(K) \leqslant n$ si, et seulement si, la dimension de K est $\leqslant n$, et que $\lambda(K) \leqslant \omega_0$ si, et seulement si, K est localement de dimension finie. Il est clair également que $\lambda(K)$ est invariant par isomorphisme de complexes.

LEMME 2. *Si L est un sous-complexe d'un complexe K et si $\lambda(K)$ est défini, alors $\lambda(L)$ est défini et $\lambda(L) \leqslant \lambda(K)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer, par récurrence sur α, que si L est un sous-complexe d'un complexe K vérifiant $\lambda(K) \leqslant \alpha$, alors $\lambda(L) \leqslant \alpha$. C'est clair si $\alpha \leqslant 0$. Soit $\alpha > 0$. Si v est un sommet de L, $\mathrm{Lk}(v, L)$ est un sous-complexe de $\mathrm{Lk}(v, K)$. Puisque $\lambda(K) \leqslant \alpha$, il existe $\beta < \alpha$ tel que $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) \leqslant \beta$. Par récurrence, $\lambda(\mathrm{Lk}(v, L)) \leqslant \lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) \leqslant \beta < \alpha$, ce qui montre que $\lambda(L) \leqslant \alpha$.

LEMME 3. *$\lambda(K)$ est défini si, et seulement si, K ne contient aucun simplexe infini.*

Démonstration. Supposons d'abord que K contienne un simplexe infini L. S'il existe un α tel que $\lambda(K) \leqslant \alpha$, alors $\lambda(L) \leqslant \alpha$ d'après le lemme 2. Evidemment, $\lambda(L) \nleqslant 0$. Soit $\beta \leqslant \alpha$ tel que $\lambda(L) \nleqslant \gamma$ pour $\gamma < \beta$. Si v est un sommet de L, alors $\mathrm{Lk}(v, L)$ est isomorphe à L, donc $\lambda(\mathrm{Lk}(v, L)) \nleqslant \gamma$ pour tout $\gamma < \beta$. Par suite, $\lambda(L) \nleqslant \beta$. Par récurrence, nous obtenons la contradiction que $\lambda(L) \nleqslant \alpha$.

Réciproquement, supposons $\lambda(K)$ non défini. Il existe alors un sommet v_1 de K tel que $\lambda(\mathrm{Lk}(v_1, K))$ ne soit pas défini car sinon, si α est un ordinal strictement plus grand que tous les $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K))$, v sommet de K, nous aurions $\lambda(K) \leqslant \alpha$ par définition. Soit $K_1 = \mathrm{Lk}(v_1, K)$. Puisque $\lambda(K_1)$ n'est pas défini, K_1 a un sommet v_2 tel que $\lambda(\mathrm{Lk}(v_2, K_1))$ ne soit pas défini. Soit $K_2 = \mathrm{Lk}(v_2, K_1)$. Poursuivant ainsi, nous construisons par récurrence deux suites $\{K_n\}$ et $\{v_n\}$, $n \geqslant 1$, où, pour tout n, v_{n+1} est un sommet de K_n tel que $K_{n+1} = \mathrm{Lk}(v_{n+1}, K_n)$. Alors, pour tout n, $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ est un simplexe de K, donc K contient le simplexe infini de sommets $v_1, \ldots, v_n, \ldots$

Remarque. En modifiant légèrement la deuxième partie de la démonstration, il est possible de montrer que si α est un ordinal dont le cardinal est strictement supérieur à celui de l'ensemble des sommets de K, alors $\lambda(K) < \alpha$ si K ne contient aucun simplexe infini.

LEMME 4. *Soit K un complexe pour lequel $\lambda(K)$ est défini. Alors*

$$\lambda(C(K)) = \lambda(\Sigma(K)) = \lambda(K)+1 .$$

Démonstration. Le résultat est évident quand $\lambda(K) = 0$. Supposons le vrai quand $\lambda(K) < \alpha$ et soit K un complexe de type conique α. Si v est un sommet de K,

$$\mathrm{Lk}(v, C(K)) = C(\mathrm{Lk}(v, K)) ;$$

puisque $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) < \alpha$,

$$\lambda(\mathrm{Lk}(v, C(K))) = \lambda(\mathrm{Lk}(v, K))+1 \leqslant \alpha ,$$

D'autre part, $\mathrm{Lk}(w, C(K)) = K$, donc $\lambda(\mathrm{Lk}(w, C(K))) = \alpha$. Il résulte de tout cela que $\lambda(C(K)) \nleqslant \alpha$, mais que $\lambda(C(K)) \leqslant \alpha+1$, donc $\lambda(C(K)) = \alpha+1$. La démonstration pour $\Sigma(K)$ est analogue.

LEMME 5. *Soit K un complexe pour lequel $\lambda(K)$ est défini. Supposons K réunion d'un nombre fini de sous-complexes $K_1, \ldots, K_n$. Alors $\lambda(K) = \mathrm{Max}(\lambda(K_1), \ldots, \lambda(K_n))$.*

Démonstration. Le résultat est évident si $\lambda(K) = 0$. Supposons donc $\lambda(K) > 0$ et que le résultat est vrai pour tout complexe de type conique inférieur à $\lambda(K)$. D'après le lemme 2, $\lambda(K) \geqslant \mathrm{Max}(\lambda(K_1), \ldots, \lambda(K_n))$. Etant donné $\alpha < \lambda(K)$, il existe un sommet v de K tel que $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) \geqslant \alpha$. Soient $K_1, \ldots, K_p$, $p \leqslant n$, ceux des sous-complexes K_i qui contiennent v. Alors $\mathrm{Lk}(v, K)$ est réunion des complexes $\mathrm{Lk}(v, K_1), \ldots, \mathrm{Lk}(v, K_p)$; par récurrence, il existe donc un $i \leqslant p$ tel que $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K_i)) = \lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) \geqslant \alpha$, d'où $\lambda(K_i) > \alpha$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha < \lambda(K)$, nous avons $\mathrm{Max}(\lambda(K_1), \ldots, \lambda(K_n)) \geqslant \lambda(K)$, d'où l'égalité.

LEMME 6. *Soit K un complexe pour lequel $\lambda(K)$ est défini. Si K' est une subdivision de K, alors $\lambda(K') = \lambda(K)$.*

Démonstration. Le résultat est évident si $\lambda(K) = 0$. Supposons le vrai quand $\lambda(K) < \alpha$ et soit K un complexe de type conique α.

(a) Soit v un sommet de K. La projection pseudo-radiale de sommet v détermine un isomorphisme de $\mathrm{Lk}(v, K')$ sur une subdivision de $\mathrm{Lk}(v, K)$. Puisque $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) < \alpha$, nous avons donc $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K')) = \lambda(\mathrm{Lk}(v, K))$. De plus, pour tout $\beta < \alpha$, il existe, puisque $\lambda(K) \nleqslant \beta$, un sommet v de K tel que $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) \geqslant \beta$. Alors, $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K')) = \lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) \geqslant \beta$, ce qui montre que $\lambda(K') \nleqslant \beta$ pour tout $\beta < \alpha$, donc $\alpha \leqslant \lambda(K')$.

(b) Considérons maintenant une subdivision stellaire K' de K, i.e. pour un certain simplexe σ de K et un point w de l'intérieur de σ, $K = \sigma \cdot \mathrm{Lk}(\sigma, K)+P$ et

$K' = w\cdot\dot\sigma\cdot\mathrm{Lk}(\sigma, K)+P$. Alors $\mathrm{Lk}(w, K') = \dot\sigma\cdot\mathrm{Lk}(\sigma, K)$ et il résulte des lemmes 4 et 5 que

$$\lambda(\mathrm{Lk}(w, K')) = \lambda(\mathrm{Lk}(\sigma, K))+\dim\dot\sigma+1 = \lambda(\mathrm{Lk}(\sigma, K))+\dim\sigma .$$

En outre, d'après les lemmes 2 et 4, nous avons

$$\alpha = \lambda(K) \geqslant \lambda(\mathrm{St}(\sigma, K)) = \lambda(\sigma\cdot\mathrm{Lk}(\sigma, K)) = \lambda(\mathrm{Lk}(\sigma, K))+\dim\sigma+1 .$$

d'où il résulte dans ce cas que $\lambda(\mathrm{Lk}(w, K'))<\alpha$.

(c) Soit K' une subdivision quelconque de K, et soit w un sommet de K'. Soit K'' la subdivision stellaire de K obtenue en étoilant K en w. Soit K''' une subdivision commune à K' et K''. Puisque w est un sommet de K' et K'', nous avons d'après (a),

$$\lambda(\mathrm{Lk}(w, K')) = \lambda(\mathrm{Lk}(w, K''')) = \lambda(\mathrm{Lk}(w, K'')) .$$

D'autre part, d'après (b), nous avons aussi $\lambda(\mathrm{Lk}(w, K'))<\alpha$. Ceci montre que, pour tout sommet w de K', $\lambda(\mathrm{Lk}(w, K'))<\alpha$, donc que $\lambda(K')\leqslant\alpha$. D'après (a), nous avons bien $\lambda(K') = \alpha = \lambda(K)$.

En fait, $\lambda(K)$ est un invariant topologique, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 7. *Soient K et K' des complexes simpliciaux tels que $|K|$ et $|K'|$ soient homéomorphes. Si $\lambda(K)$ est défini, il en est de même de $\lambda(K')$ et $\lambda(K) = \lambda(K')$.*

Démonstration. Comme nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite, nous nous limiterons à donner le plan de sa démonstration, laissant au lecteur le soin de vérifier les affirmations (A) à (D) ci-dessous.

(A) Pour un complexe simplicial K, les deux conditions suivantes sont équivalentes

(i) K ne contient aucun simplexe infini.

(ii) Tout sous-ensemble fermé de $|K|$ est un espace de Baire.

Par suite, d'après le lemme 2, si $|K|$ et $|K'|$ sont homéomorphes, et si $\lambda(K)$ est défini, il en est de même de $\lambda(K')$.

Soit maintenant K un complexe pour lequel $\lambda(K)$ est défini. Si x est un point de $|K|$, soit K_x une subdivision de K telle que x soit un sommet de K_x. Posons $\lambda_x(K) = \lambda(\mathrm{St}(x, K_x))$. La démonstration du lemme 6 montre que $\lambda_x(K)$ ne dépend pas du choix de K_x.

Etant donné un ordinal α, nous poserons $U_\alpha(K) = \{x\in|K|/\lambda_x(K)<\alpha\}$ et $P_\alpha(K) = |K|\setminus U_\alpha(K)$. Nous noterons $V_\alpha(K)$ l'ensemble des points x de $|K|$ pour lesquels il existe un voisinage ouvert Q de x dans $|K|$ et un complexe L tels que $\lambda(L)<\alpha$ et que Q soit homéomorphe à $|L|$. La définition de $V_\alpha(K)$ est donc topologique, tandis que celles de $U_\alpha(K)$ et $P_\alpha(K)$ semblent dépendre de la triangulation K de $|K|$.

(B) $P_\alpha(K)$ est la réalisation géométrique d'un sous-complexe de K.

(C) Soient α un ordinal *limite*, et n un entier $\geqslant 0$. Si $\lambda(K) = \alpha+n$, alors

(a) $P_\alpha(K)$ est de dimension $n-1$;

(b) Si $\beta<\alpha$, $P_\beta(K)$ est de dimension infinie.

Considérons l'affirmation suivante

(I_α) Pour tout complexe K tel que $\lambda(K) = \alpha$, tout complexe K' tel que $|K'|$ soit homéomorphe à $|K|$ vérifie $\lambda(K') = \lambda(K)$.

Nous prouverons le lemme en vérifiant (I_α) par récurrence transfinie. Notons d'abord que

(D) Soit α un ordinal. Si (I_β) est vraie pour tout $\beta<\alpha$, alors, pour tout complexe K tel que $\lambda(K)$ soit défini, $U_\alpha(K) = V_\alpha(K)$.

Si n est un entier, (I_n) est vraie d'après l'invariance topologique de la dimension. Il suffit donc de montrer que, si α est un ordinal limite, et si (I_β) est vraie pour tout $\beta<\alpha$, alors ($I_{\alpha+n}$) est vraie pour tout entier $n\geqslant 0$. Soit donc K avec $\lambda(K) = \alpha+n$, et soit K' tel que $|K|$ et $|K'|$ soient homéomorphes. Soit $\lambda(K') = \alpha'+n'$, où α' est un ordinal limite et n' un entier $\geqslant 0$. Alors $\alpha'\geqslant\alpha$, car sinon $\alpha'+n'<\alpha$ et ($I_{\alpha'+n'}$) est en défaut. Si h est un homéomorphisme de $|K|$ sur $|K'|$, il résulte de (D) et de l'invariance topologique de $V_\alpha(K)$ que

$$h(U_\alpha(K)) = h(V_\alpha(K)) = V_\alpha(K') = U_\alpha(K') ,$$

donc h induit un homéomorphisme de $P_\alpha(K)$ sur $P_\alpha(K')$. D'après (C) (b), $\alpha\not<\alpha'$, donc $\alpha = \alpha'$. D'après (C) (a), nous avons aussi $n = n'$, d'où ($I_{\alpha+n}$).

Il serait intéressant de relier $\lambda(K)$ à des invariants topologiques plus classiques de $|K|$. Le problème suivant se pose immédiatement.

Problème 1. Le type conique de K est-il égal à la petite dimension inductive ordinale de K (étudiée par exemple dans [12])?

Pour tout complexe K, nous noterons K^t le sous-complexe de la subdivision barycentrique K' de K formé des simplexes $\langle\hat\sigma_0, \hat\sigma_1, \ldots, \hat\sigma_k\rangle$ tels que $\dim\sigma_0>0$.

Lemme 8. *Soit K un complexe pour lequel $\lambda(K)$ est défini et $\geqslant 1$. Alors*

$$\lambda(K^t) = \begin{cases}\lambda(K)-1 & \text{si } \lambda(K) \text{ n'est pas un ordinal limite},\\ \lambda(K) & \text{si } \lambda(K) \text{ est un ordinal limite}.\end{cases}$$

Démonstration. Si $\lambda(K) = 1$, K est de dimension un et K^t de dimension zéro, donc $\lambda(K^t) = 0$. Supposons donc $\lambda(K)>1$ et le résultat vrai pour tout complexe de type conique inférieur à $\lambda(K)$.

Soit K' la subdivision barycentrique de K. Pour tout sommet v de K, $\mathrm{Lk}(v, K')$ est un sous-complexe de K^t, donc, d'après le lemme 2 et la démonstration du lemme 6,

$$\lambda(K^t)\geqslant\lambda(\mathrm{Lk}(v, K')) = \lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) \quad \text{pour tout sommet } v \text{ de } K .$$

Si $\alpha<\lambda(K)$, il existe un sommet v de K tel que $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K))\geqslant\alpha$, d'où

$$(*) \qquad \lambda(K^t)\geqslant\alpha \quad \text{pour tout } \alpha<\lambda(K) .$$

Puisque $\lambda(K^t)\leqslant\lambda(K') = \lambda(K)$, la relation $(*)$ entraîne que $\lambda(K^t) = \lambda(K)$ si λ est un ordinal limite.

Supposons maintenant que $\lambda(K) = \beta+1$, et soit $\hat\sigma$ un sommet de K'. Tout simplexe de $\mathrm{Lk}(\hat\sigma, K')$ est de la forme $\tau = \langle\hat\sigma_0, \dots, \hat\sigma_l, \hat\sigma_{l+1}, \dots, \hat\sigma_k\rangle$ où

$$\sigma_0 < \dots < \sigma_l \underset{\neq}{<} \sigma \underset{\neq}{<} \sigma_{l+1} < \dots < \sigma_k\,,$$

et $\dim\sigma_0 > 0$. Soit v un sommet de σ_0 (ou de σ si $l = -1$); alors $\hat\sigma$ est un sommet de $\mathrm{Lk}(v, K')$ et τ est contenu dans $\mathrm{Lk}(v, K')$, donc aussi dans $\mathrm{Lk}(\hat\sigma, \mathrm{Lk}(v, K'))$. Inversement, ce dernier complexe est contenu dans $\mathrm{Lk}(\hat\sigma, K')$. Par suite, si les sommets de σ sont $v_0, \dots, v_n$, nous avons donc

$$\mathrm{Lk}(\hat\sigma, K') = \bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{Lk}(\hat\sigma, \mathrm{Lk}(v_i, K'))\,.$$

D'après le lemme 5, $\lambda(\mathrm{Lk}(\hat\sigma, K') = \operatorname{Max}_{0\leqslant i\leqslant n} \lambda\big(\mathrm{Lk}(\hat\sigma, \mathrm{Lk}(v_i, K'))\big)$. Par définition de $\lambda(K)$, $\lambda\big(\mathrm{Lk}(v_i, K')\big) \leqslant \beta$ et $\lambda\big(\mathrm{Lk}(\hat\sigma, \mathrm{Lk}(v_i, K'))\big) < \beta$ pour $i = 0, \dots, n$. Par suite, $\lambda(\mathrm{Lk}(\hat\sigma, K')) < \beta$ pour tout sommet $\hat\sigma$ de K', ce qui montre que $\lambda(K') \leqslant \beta$. D'après (*), nous avons donc $\lambda(K') = \beta$.

4. Application du type conique à l'étude du prolongement des fonctions. La simple existence du type conique fournit une méthode de démonstration selon le schéma suivant:

Soit $\mathscr{P}$ une propriété que peuvent ou non posséder les complexes. Supposons que $\mathscr{P}$ satisfasse les deux conditions suivantes:

(1) Si K est un complexe tel que, pour tout sommet v de K, $\mathrm{St}(v, K)$ ait la propriété $\mathscr{P}$, alors K a la propriété $\mathscr{P}$.

(2) Si le complexe K a la propriété $\mathscr{P}$, le cône $C(K)$ aussi.

Alors, si tous les complexes de dimension zéro ont la propriété $\mathscr{P}$, il en est de même de tous les complexes qui ne contiennent aucun simplexe infini.

Fixons un espace collectivement normal X et considérons la propriété $\mathscr{P}$ suivante

($\mathscr{P}$) $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X.

D'après un théorème de Hanner, cette propriété vérifie la condition (1). De plus, tous les complexes de dimension zéro la possèdent, donc, pour que les complexes ne contenant aucun simplexe infini la possèdent tous, il faut et il suffit qu'elle soit préservée par formation du cône sur un tel complexe. Le théorème suivant va préciser cette condition: il suffit qu'elle soit préservée par formation du cône sur K lorsque K est réunion disjointe de complexes $\{K_\alpha/\alpha \in A\}$ et que le cône sur chaque K_α la possède déjà.

THÉORÈME 2. *Pour un espace collectivement normal X, les deux affirmations suivantes sont équivalentes*:

(i) *Pour tout complexe K ne contenant aucun simplexe infini, $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X.*

(ii) *Pour toute famille $\{K_\alpha/\alpha \in A\}$ de complexes deux à deux disjoints dont aucun ne contient un simplexe infini, si, pour tout α dans A, $C(|K_\alpha|)$ a la propriété d'extension par rapport à X, et si $K = \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha$, alors $C(|K|)$ a aussi cette propriété.*

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de trois lemmes.

LEMME 9. *Soient X un espace normal et K un complexe simplicial. Si le cône $C(|K|)$ a la propriété d'extension locale par rapport à X, il en est de même du joint $|K| * |L|$ pour tout complexe fini L.*

Démonstration. Puisque le complexe fini $C(|L|)$ a la propriété d'extension par rapport à tout espace normal, il suffit, par un argument utilisé à la fin de la démonstration du théorème 1, de prouver que $|K| * |L|$ est homéomorphe à un sous-ensemble fermé du produit $C(|K|)\times C(|L|)$.

Définissons des fonctions f et g de $|K| * |L|$ dans $C(|K|)$ et $C(|L|)$ resp. en posant, pour un point $z = [x, y, t]$ de $|K| * |L|$, $f(z) = [x, t]$, $g(z) = [y, 1-t]$. La fonction $h\colon |K| * |L| \to C(|K|)\times C(|L|)$ définie par $h(z) = (f(z), g(z))$ est continue. Soient $z = [x, y, t]$ et $z' = [x', y', t']$ deux points de $|K| * |L|$ tels que $h(z) = h(z')$. Alors $[x, t] = [x', t']$ entraîne $t = t'$ et $x = x'$ si $t \neq 1$. De même, $[y, 1-t] = [y', 1-t']$ entraîne $y = y'$ si $t \neq 0$. Ceci montre que $z = z'$.

Soit $p = ([x, t], [y, s])$ un point de $C(|K|)\times C(|L|)$. Si ce point est dans l'image de h, $s = 1-t$ et, réciproquement, si $s = 1-t$, $p = h([x, y, t])$. Il en résulte immédiatement que $h(|K| * |L|)$ est fermé.

Puisque L est un complexe fini, le produit $C(|K|)\times C(|L|)$ est un k-espace [13], donc son fermé $h(|K| * |L|)$ aussi. Pour montrer la continuité de h^{-1}, il suffit donc de montrer que, pour tout compact C de $h(|K| * |L|)$, $h^{-1}|C$ est continue et, pour cela, il suffit de prouver que, pour chaque tel compact C, il existe un compact D de $|K| * |L|$ tel que $h(D)$ contienne C (puisque $h|D$ est un homéomorphisme de D sur $h(D)$). Notons que C est contenu dans un compact de la forme $C(|K_1|)\times C(|L|)$, où K_1 est un sous-complexe fini de K. Alors le joint $|K_1| * |L|$ est un compact de $|K| * |L|$ et il est immédiat, d'après la définition de h, que

$$h(|K_1| * |L|) = h(|K| * |L|)\cap\big(C(|K_1|)\times C(|L|)\big)$$

contient C, d'où le résultat cherché.

Pour le deuxième lemme, considérons un complexe K, un sous-complexe M de K et un sous-ensemble $P = \{p_i/i \in I\}$ de l'ensemble des sommets de K. Pour tout i dans I, posons $S_i = \mathrm{St}(p_i, K)$ et $L_i = \mathrm{Lk}(p_i, K)$. Nous supposons que ces données vérifient

(1) $$|M|\cap|S_i| = |L_i| \quad \text{pour tout } i \text{ dans } I,$$

(2) $$|S_i|\cap|S_{i'}| = |L_i|\cap|L_{i'}| \quad \text{pour } i,\ i' \text{ dans } I \text{ et } i \neq i',$$

(3) $$|K| = |M|\cup\big(\bigcup_{i\in I}|S_i|\big)\,.$$

Pour x dans $|K|$ et i dans I, notons x_i la coordonnée barycentrique de x sur p_i. Posons

$$V = \{x \in |K|/x_i \leqslant 1/2 \text{ pour tout } i \text{ dans } I\}\,.$$

V est un voisinage fermé de $|M|$ dans $|K|$.

Prenons enfin, pour tout i, une copie $\hat{L}_i$ de L_i de façon que les $\hat{L}_i$, $i \in I$, soient deux à deux disjoints, et soit $\hat{L}$ la réunion (disjointe) des $\hat{L}_i$, $i \in I$.

L'énoncé du lemme suivant utilise les notations que nous venons d'introduire.

LEMME 10. *V est homéomorphe à un sous-ensemble fermé du produit $|M| \times C(|\hat{L}|)$.*

Démonstration. Soit w le sommet du cône $C(|\hat{L}|)$. Pour i dans I, soit r_i la projection radiale de $|S_i| \setminus \{p_i\}$ sur $|L_i|$. Nous noterons par la même lettre les points de $|L_i|$ et de $|\hat{L}_i|$ qui se correspondent ($i \in I$). Définissons f: $V \to |M|$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in |M|, \\ r_i(x) & \text{si } x \in V \cap |S_i|,\ i \in I. \end{cases}$$

Définissons g: $V \to C(|\hat{L}|)$ comme suit

$$g(x) = \begin{cases} w & \text{si } x \in |M|, \\ [r_i(x), 1-x_i] \in C(|L_i|) \subset C(|\hat{L}|) & \text{si } x \in V \cap |S_i|,\ i \in I. \end{cases}$$

Définissons enfin la fonction continue h: $V \to |M| \times C(|\hat{L}|)$ par

$$h(x) = (f(x), g(x)).$$

Nous laissons au lecteur la vérification du fait que h est une bijection de V sur un fermé de $|M| \times C(|\hat{L}|)$, qui est très semblable à la partie correspondante de la démonstration du lemme 1. (Pour voir que $h(V)$ est fermé, noter qu'un point (u, v) de $|M| \times C(|\hat{L}|)$ avec $w \neq v = [t, y] \in C(|\hat{L}_i|)$ appartient à $h(V)$ si, et seulement si, $t \geqslant 1/2$ et $r_i(y) = u$.)

Montrons que h^{-1} est continue. Si (u, v) est un point de

$$|M| \times C(|\hat{L}|) \cap h(V \cap |S_i|),$$

alors $v = [y, t]$ appartient à $C(|\hat{L}_i|)$ et $h^{-1}(u, v)$ est le point de $|S_i|$ dont la projection radiale sur $|L_i|$ est u et la coordonnée barycentrique sur p_i est $1-t$, soit

$$(*) \qquad h^{-1}(u, v) = tu + (1-t)p_i.$$

D'après cette formule, il est clair que $h^{-1}|h(V \cap |S_i|)$ est continue, donc h^{-1} est continue en tout point de $h(V \cap (|S_i| \setminus |L_i|))$ car cet ensemble est ouvert dans $h(V)$ (c'est l'ensemble des points (u, v) de $h(V)$ tels que v appartienne à l'ouvert $C(|\hat{L}_i|) \setminus \{w\}$ de $C(|\hat{L}|)$). D'après (3), h^{-1} est continue en tout point de $h(V \setminus |M|)$. Soit maintenant x un point de $|M|$, et soit W un voisinage ouvert de x dans $|K|$. Soit U un voisinage fermé de x dans $|M|$ contenu dans W.

Nous allons construire, pour i dans I, des fonctions réelles continues ε_i sur $|L_i|$ de façon que

(4) $\qquad 0 < \varepsilon_i(y) < 1 \quad$ pour tout y dans $|L_i|$,

(5) Pour tout y dans $U \cap |L_i|$, l'ensemble des points de $|S_i|$ de la forme $ty + (1-t)p_i$ avec $\varepsilon_i(y) < t \leqslant 1$ soit contenu dans W.

Pour cela, remarquons que, puisque $|S_i|$ est topologiquement le cône de base $|L_i|$, nous pouvons trouver, pour tout $z \in U \cap |L_i|$, un voisinage ouvert $U(z)$ de z dans $|L_i|$ et un nombre $0 < \varepsilon_z < 1$ tels que tous les points de la forme $ty + (1-t)p_i$ où $y \in U(z)$ et $\varepsilon_z < t \leqslant 1$ appartiennent à $W \cap |S_i|$. Si $z \in |L_i| \setminus U$, posons $U(z) = |L_i| \setminus U$ (c'est un ouvert de $|L_i|$) et $\varepsilon_z = \frac{1}{2}$. Puisque $|L_i|$ est paracompact, nous pouvons trouver une partition de l'unité localement finie $\{\varphi_z / z \in |L_i|\}$ subordonnée au recouvrement ouvert $\{U(z)/z \in |L_i|\}$. Il est alors facile de voir que la fonction ε_i définie sur $|L_i|$ par

$$\varepsilon_i(y) = \sum_{z \in |L_i|} \varphi_z(y) \cdot \varepsilon_z$$

vérifie (4) et (5).

Soit P_i l'ensemble des points $[y, t]$ de $C(|\hat{L}_i|)$ vérifiant $\varepsilon_i(y) < t \leqslant 1$; P_i est un voisinage ouvert de w dans $C(|\hat{L}_i|)$, donc $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ est un voisinage ouvert de w dans $C(|\hat{L}|)$. Alors, $U \times P$ est un voisinage de $(x, w) = h(x)$ dans $|M| \times C(|\hat{L}|)$ et, en utilisant la définition de h et la formule $(*)$, il est facile de voir que $h^{-1}(U \times P) \subset W$, d'où la continuité de h^{-1} en $h(x)$.

Le troisième lemme est une variante d'un théorème connu d'addition pour les rétractes absolus.

LEMME 11. *Soient X un espace normal et K un complexe simplicial qui est réunion de deux sous-complexes K_1 et K_2. Si les cônes $|wK_1|$ et $|wK_2|$ ont la propriété d'extension par rapport à X, il en est de même de $|wK|$.*

Démonstration. Soit $K_0 = K_1 \cap K_2$. Puisque le sous-cône $|wK_0|$ de $|wK_1|$ en est un rétracte, il a la propriété d'extension par rapport à X. Soient A un fermé de X et f: $A \to |K|$ une fonction continue. Soit φ une fonction continue de $|wK|$ dans $[-1, 1]$ vérifiant

$$\varphi^{-1}(0) = |wK_0|,$$
$$\varphi(x) \geqslant 0 \quad \text{si} \quad x \in |wK_1|,$$
$$\varphi(x) \leqslant 0 \quad \text{si} \quad x \in |wK_2|.$$

Soit g: $X \to [-1, 1]$ un prolongement continu de $\varphi \circ f$. Posons $X_0 = g^{-1}(0)$, $X_1 = g^{-1}([0, 1])$ et $X_2 = g^{-1}([-1, 0])$. Alors $X_i \cap A = f^{-1}(|wK_i|)$, $i = 0, 1, 2$, et $X = X_1 \cup X_2$. Puisque $|wK_0|$ a la propriété d'extension par rapport à X, nous pouvons trouver une fonction continue h_0: $X_0 \to |wK_0|$ prolongeant $f|X_0 \cap A$. Puisque $|wK_1|$ et $|wK_2|$ ont la propriété d'extension par rapport à X, nous pouvons trouver des fonctions continues h_i: $X_i \to |wK_i|$, $i = 1, 2$, telles que

$$h_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_i \cap A, \\ h_0(x) & \text{si } x \in X_0. \end{cases}$$

Alors, la fonction h: $X \to |wK|$ définie par $h|X_i = h_i$ pour $i = 1, 2$ est un prolongement continu de f à X.

Démonstration du théorème 2. Pour prouver la seule implication non triviale, nous montrerons par récurrence sur $\lambda(K)$ que, si X vérifie (ii), $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X pour tout complexe K ne contenant aucun simplexe infini. Prenant pour $\{K_\alpha/\alpha \in A\}$ des complexes réduits à des points, nous voyons que la condition (ii) du théorème 1 est satisfaite, donc le résultat est vrai si $\lambda(K) \leqslant \omega_0$. Soit donc K un complexe pour lequel $\lambda(K) > \omega_0$, et supposons le résultat vrai pour tout complexe de type conique inférieur à $\lambda(K)$. D'après un théorème de Hanner, il suffit de montrer que, pour tout sommet v de K, $|\mathrm{St}(v, K)|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X. Si $\lambda(\mathrm{St}(v, K)) < \lambda(K)$, ceci est vrai par hypothèse. Puisque $\lambda(\mathrm{St}(v, K)) = \lambda(\mathrm{Lk}(v, K))+1$ et que $\lambda(\mathrm{Lk}(v, K)) < \lambda(K)$, ceci est toujours le cas lorsque $\lambda(K)$ est un ordinal limite. Il nous suffit donc d'étudier le cas où $\lambda(K)$ a un prédécesseur immédiat, soit $\lambda(K) = \alpha+1$, et où K est le cône wL sur un complexe L de type conique α. Nous distinguerons deux cas.

Cas I. α a un prédécesseur immédiat, soit $\alpha = \beta+1$. Soit L' la subdivision barycentrique de L, et soit $K' = wL'$; c'est une subdivision de K. Soit L^t le sous-complexe de L' formé des simplexes $\{\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_k\}$ tels que $\dim \sigma_0 > 0$, et soit $M = wL^t$. Soient $\{p_i/i \in I\}$ les sommets de L et, pour i dans I, posons $S_i = \mathrm{St}(p_i, K')$ et $L_i = \mathrm{Lk}(p_i, K')$. Alors, K', M et les S_i vérifient les conditions (1), (2) et (3) précédant le lemme 10. Définissons V, $\hat{L}_i$ et $\hat{L}$ comme dans ce lemme. Alors, les intérieurs des ensembles V et $|S_i|$, $i \in I$, recouvrent $|K'| = |K|$, donc, toujours d'après le théorème de Hanner, il suffit de montrer que chacun d'eux a la propriété d'extension locale par rapport à X.

Pour i dans I, $|\mathrm{St}(p_i, L')|$, qui est le cône sur $|\mathrm{Lk}(p_i, L')|$ a, d'après l'hypothèse de récurrence, la propriété d'extension locale par rapport à X (car $\lambda(\mathrm{St}(p_i, L')) \leqslant \lambda(L') = \lambda(L) = \alpha$). Puisque $|S_i|$ est le joint de $|\mathrm{Lk}(p_i, L')|$ et du 1-simplexe $\langle p_i, w\rangle$, le lemme 9 montre que $|S_i|$ a aussi cette propriété.

Puisque V est triangulable, pour montrer qu'il a la propriété d'extension locale par rapport à X, il suffit, grâce au lemme 10, et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, de vérifier que $|M|$ et $C(|\hat{L}|)$ ont cette propriété. D'après le lemme 8, $\lambda(L^t) = \beta$, donc $\lambda(M) = \beta+1 = \alpha$, et $|M|$ a cette propriété par récurrence. Puisque $\hat{L}$ est la réunion disjointe des $\hat{L}_i$, $i \in I$, et que $C(|\hat{L}_i|)$, qui est homéomorphe à $|S_i|$, a la propriété d'extension par rapport à X (Rappelons (B) de l'introduction), il résulte de la condition (ii) que $C(|\hat{L}|)$ a cette propriété.

Cas II. α est un ordinal limite. Alors, pour tout sommet v de L, $\lambda(\mathrm{St}(v, L)) < \lambda(L) = \alpha$, donc $|w\mathrm{St}(v, L)|$ a la propriété d'extension par rapport à X. Par suite pour tout sous-polyèdre P de $|K|$ contenu dans $|\mathrm{St}(v, L)|$, le cône wP, qui est un rétracte de $|w\mathrm{St}(v, L)|$, a aussi cette propriété. La paracompacité de $|L|$ permet de trouver un recouvrement ouvert localement fini et σ-discret $\mathscr{V}$ de $|L|$ tel que la fermeture de chaque élément de $\mathscr{V}$ soit contenue dans une étoile ouverte de $|L|$ (voir, par exemple, [8], chapitre 5). Soit $\mathscr{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{V}_n$ où chaque $\mathscr{V}_n = \{V_\gamma/\gamma \in \Gamma_n\}$ est discrète. Nous supposerons les Γ_n deux à deux disjoints, et nous notons Γ leur réunion. Pour tout γ dans Γ, soit v_γ un sommet de L tel que $\mathrm{St}^\circ(v_\gamma, L)$ contienne $\overline{V}_\gamma$. Puisque $\mathscr{V}_n$ est discrète, nous pouvons trouver, pour tout $n \geqslant 1$, une famille $\mathscr{U}_n = \{U_\gamma/\gamma \in \Gamma_n\}$ d'ouverts deux à deux disjoints de $|L|$ tels que

$$\overline{V}_\gamma \subset U_\gamma \subset \mathrm{St}^\circ(v_\gamma, L)\,. \tag{6}$$

Il est connu que, si F est un fermé d'un complexe simplicial $|L|$, et U un ouvert de $|L|$ contenant F, il existe un sous-polyèdre P de $|L|$ dont l'intérieur contient F et qui est contenu dans U. Nous pouvons donc trouver, pour tout γ dans Γ, une suite de sous-polyèdres $P_\gamma(m)$, $m = 1, 2, \ldots$, de $|L|$ de façon que

$$\overline{V}_\gamma \subset \mathrm{Int}\, P_\gamma(1)\,, \tag{7}$$

$$P_\gamma(m) \subset \mathrm{Int}\, P_\gamma(m+1) \subset P_\gamma(m+1) \subset U_\gamma \quad \text{pour tout } m \geqslant 1\,. \tag{8}$$

Posons, pour n et m entiers,

$$P(n, m) = \bigcup \{P_\gamma(m)/\gamma \in \Gamma_n\}$$

$$P(n) = \bigcup_{p=1}^{n} P(p, n)\,.$$

Alors, les $P(n, m)$ et les $P(n)$ sont des sous-polyèdres de $|L|$ (du moins si les $P_\gamma(m)$ sont bien choisis; il est en fait possible de construire les $\{P_\gamma(m)/\gamma \in \Gamma_n\}$ de façon que, pour n et m fixés, tous soient des sous-complexes d'une même subdivision L' de L; prendre L' assez fine pour que tout simplexe de L' rencontrant $P_\gamma(m-1)$, ou $\overline{V}_\gamma$ si $m = 1$, soit contenu dans U_γ). D'après (8), nous avons

$$P(n) \subset \mathrm{Int}\, P(n+1) \quad \text{pour tout } n\,, \tag{9}$$

et, d'après (7), puisque $\mathscr{V}$ recouvre $|L|$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P(n) = |L|\,. \tag{10}$$

Posons $Q_\gamma(m) = wP_\gamma(m)$, $Q(n, m) = wP(n, m)$ et $Q(n) = wP(n)$. D'après (6) et (7), $P_\gamma(m)$ est un sous-polyèdre de $|\mathrm{St}(v_\gamma, L)|$, donc $Q_\gamma(m)$ a la propriété d'extension par rapport à X. Puisque les $P_\gamma(m)$, $\gamma \in \Gamma_n$, sont deux à deux disjoints d'après (8) et le choix des U_γ, la condition (ii) appliquée à cette famille montre que $Q(n, m)$ a la propriété d'extension par rapport à X quels que soient n et m. Un nombre fini d'applications du lemme 11 montre alors que $Q(n)$ a aussi cette propriété pour tout $n \geqslant 1$. Posons $R_1 = P(1)$ et $R_n = \overline{P(n) \setminus P(n-1)}$ pous $n \geqslant 2$. Soient $R^+ = \bigcup_{p=1}^{\infty} R_{2p}$ et $R^- = \bigcup_{p=0}^{\infty} R_{2p+1}$; il est facile de voir que R^+ et R^- sont des sous-polyèdres de $|L|$ dont la réunion est $|L|$. Puisque R_{2p} est un sous-polyèdre de $P(2p)$, wR_{2p} est un rétracte de $wP(2p)$, donc a la propriété d'extension par rapport à X. Les R_{2p} étant deux à deux disjoints, la condition (ii) entraîne que wR^+ a aussi cette propriété.

Par un raisonnement analogue, il en est de même de wR^-. Le lemme 11 montre alors que $K = wR^+ \cup wR^-$ la possède aussi.

Lorsque X est un k-espace, la condition (ii) du théorème 2 peut être affaiblie en la condition (ii) du théorème 1.

THÉORÈME 3. *Pour un k-espace collectivement normal X, les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(i) *Pour tout complexe K ne contenant aucun simplexe infini, $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X.*

(ii) *Pour tout espace discret M, le cône sur M a la propriété d'extension par rapport à X.*

Démonstration. Il faut montrer que, lorsque X est un k-espace, la condition (ii) du théorème 2 résulte de la condition plus faible utilisée ici. Soient donc K et $\{K_\alpha/\alpha \in A\}$ comme dans l'énoncé du théorème 2, et soit wK le cône sur K. Soit $M = \{v_\alpha/\alpha \in A\}$ un ensemble discret en correspondance biunivoque avec A, et soit $L = wM$ le cône sur M. Pour y dans $|L|$, soit y_α la coordonnée barycentrique de y sur v_α. Pour α dans A, soit J_α l'ensemble des y appartenant à $|L|$ tels que $y_\alpha > 0$; J_α est un ouvert de $|L|$, $J_\alpha \cap J_{\alpha'} = \emptyset$ si $\alpha \neq \alpha'$ et $|L| = \{w\} \cup (\bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha)$.

Soit $p\colon wK \to L$ l'application simpliciale envoyant w sur lui-même et tout sommet de K_α sur v_α, $\alpha \in A$. Alors $p^{-1}(w) = \{w\}$ et $p(|wK_\alpha|) = \{w\} \cup J_\alpha$, $\alpha \in A$.

Soit B un sous-ensemble fermé de X, et soit $f\colon B \to |wK|$ continue. D'après (ii), la fonction $p \circ f\colon B \to |L|$ a un prolongement continu $g\colon X \to |L|$. Posons $S = g^{-1}(w)$ et $G_\alpha = g^{-1}(J_\alpha)$ pour α dans A. Alors, S est fermé dans X, et les G_α sont des ouverts deux à deux disjoints de X. En outre, $X = S \cup (\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha)$ et $f(G_\alpha \cap A) \subset |wK_\alpha|$.

Notant que $B \cap S = f^{-1}(w)$, nous pouvons définir une fonction continue $h_0\colon B \cup S \to |wK|$ par

$$h_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B\,, \\ w & \text{si } x \in S\,. \end{cases}$$

Puisque $|wK_\alpha|$ a la propriété d'extension par rapport à X, nous pouvons trouver une fonction continue $h_\alpha\colon X \to |wK_\alpha|$ telle que $h_\alpha(x) = h_0(x)$ pour x dans $f^{-1}(|wK_\alpha|) \cup S$. Définissons la fonction $k\colon X \to |wK|$ par

$$k(x) = \begin{cases} h_0(x) & \text{si } x \in B \cup S\,, \\ h_\alpha(x) & \text{si } x \in \bar{G}_\alpha,\ \alpha \in A\,. \end{cases}$$

Puisque les G_α sont deux à deux disjoints, que $\bar{G}_\alpha \setminus G_\alpha$ est contenu dans S et que $h_\alpha(x) = h_0(x)$ pour $x \in \bar{G}_\alpha \cap (B \cup S)$, cette définition a un sens. De plus, $k|B = h_0|B = f$, donc il suffit de montrer que k est continue. Pour cela, il faut montrer que, pour tout compact C de X, $k|C$ est continue. Puisque g est continue, $g(C)$ est un compact de $|L|$, donc est contenu dans un sous-complexe fini de $|L|$. Il existe donc un sous-ensemble fini $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$ de A tel que $g(C) \subset \{w\} \cup (\bigcup_{i=1}^{q} J_{\alpha_i})$, donc que $S \cup (\bigcup_{i=1}^{q} \bar{G}_{\alpha_i})$ contienne C. Puisque la restriction de k à chacun des fermés $B \cup S$ et $\bar{G}_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, q$, est continue, $k|S \cup (\bigcup_{i=1}^{q} \bar{G}_{\alpha_i})$ est continue, donc aussi $k|C$.

PROBLÈME 2. Le théorème 3 reste-t-il vrai quand X n'est pas un k-espace?

PROBLÈME 3. Existe-t-il un k-espace collectivement normal ne vérifiant pas les conditions (i) et (ii) du théorèmes 3?

Remarque. Les théorèmes 2 et 3 ont des généralisations évidentes dans lesquelles on remplace la propriété d'extension locale par rapport à X par la propriété d'extension locale par rapport à une classe arbitraire d'espaces collectivement normaux.

5. K_1-espaces. Si X est un espace topologique, nous noterons $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts de X et, pour tout sous-ensemble A de X, nous noterons $\mathcal{T}|A$ l'ensemble des ouverts de A pour la topologie induite.

DÉFINITION. Un espace topologique X est un K_1-*espace* s'il est $\mathcal{T}_1$ et si, pour tout sous-espace A de X, il existe une fonction $k\colon \mathcal{T}|A \to \mathcal{T}$ vérifiant

(a) $$A \cap k(U) = U \text{ pour tout } U \in \mathcal{T}|A\,,$$

(b) $$\text{si } U \cap V = \emptyset, \text{ alors } k(U) \cap k(V) = \emptyset\,.$$

Les K_1-espaces ont été introduits par van Douwen ([4], [5]) pour l'étude de certains types de prolongement des fonctions réelles continues. Il est prouvé dans [4] que tout K_1-espace est héréditairement collectivement normal et que tout espace stratifiable (plus généralement, tout espace monotonement normal voir [10] pour la définition) est un K_1-espace, donc tout CW-complexe est un K_1-espace. Nous allons appliquer nos résultats précédents à ces espaces.

THÉORÈME 4. *Si X est un K_1-espace, alors*

(a) *Pour tout complexe localement de dimension finie K, $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X.*

(b) *Si X est aussi un k-espace, $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à X pour tout complexe simplicial K ne contenant aucun simplexe infini.*

Démonstration. D'après les théorèmes 1 et 3, il suffit de prouver que le cône sur un espace discret I a la propriété d'extension par rapport à X. Nous regardons ce cône K comme le complexe de dimension un de sommets w et v_i, $i \in I$. Pour y dans $|K|$, soit y_i la coordonnée barycentrique de y sur v_i; ces nombres vérifient

(1) $$0 \leqslant y_i \leqslant 1 \quad \text{pour } i \text{ dans } I\,,$$

(2) $$\text{un au plus des } y_i \text{ est} \neq 0\,.$$

Inversement, toute famille de nombres $(y_i)_{i \in I}$ vérifiant (1) et (2) détermine un point de $|K|$ dont les y_i sont les coordonnées barycentriques sur les sommets v_i; nous identifions donc les points de K à ces familles de nombres. Pour i dans I, soit J_i l'ensemble des $y = (y_j)_{j \in I}$ tels que $y_i > 0$; les J_i sont des ouverts deux à deux disjoints de $|K|$ et $|K| = w\cup(\bigcup_{i\in I} J_i)$. Etant donnés un i dans I et un nombre $0<\varepsilon<1$, soit $V_i(\varepsilon)$ l'ensemble des $y=(y_j)_{j\in I}$ de $|K|$ tels que $\varepsilon<y_i$; c'est un voisinage de v_i dans $|K|$ contenu dans J_i. Etant donnée une famille de nombres $0<\varepsilon_i\leqslant 1$ indexée par I, notons $W(\{\varepsilon_i\})$ l'ensemble des points $y=(y_i)_{i\in I}$ de $|K|$ tels que $y_i<\varepsilon_i$ pour tout i; $W(\{\varepsilon_i\})$ est un voisinage ouvert de w dans $|K|$, et les ensembles de ce type forment une base de voisinage de w dans $|K|$. En outre, la fermeture de $W(\{\varepsilon_i\})$ est l'ensemble des $(y_i)_{i\in I}$ tels que $y_i\leqslant\varepsilon_i$ pour tout i.

Soient A un fermé de X et $f\colon A\to|K|$ continue. Soit $\pi\colon |K|\to|K|_m$ l'identité.

Puisque $|K|_m$ a la propriété d'extension par rapport aux espaces collectivement normaux, $\pi\circ f$ a un prolongement continu $g\colon X\to|K|_m$. Posons $B=g^{-1}(w)$ et $G_i=g^{-1}(J_i)$, $i\in I$. Les ensembles B et G_i, $i\in I$, sont deux à deux disjoints, B est fermé, les G_i sont ouverts et $X=B\cup(\bigcup_{i\in I} G_i)$. Nous supposerons dans la suite que B est contenu dans A car, si ce n'est pas déjà le cas, il suffit de prolonger f à $A\cup B$ en posant $f(x)=w$ pour x dans B.

Pour i dans I, soit $\alpha_i(x)$ la coordonnée barycentrique de $g(x)$ sur v_i. Puisque les coordonnées barycentriques sont continues pour la topologie métrique, α_i est, pour tout i, une fonction continue de X dans $[0,1]$ vérifiant $G_i=\alpha_i^{-1}(]0,1])$.

Soit $k\colon \mathcal{T}|A\to\mathcal{T}$ comme dans la définition d'un K_1-espace. Comme il est observé dans [4] (prop. 1.2.4), nous pouvons supposer k monotone (i.e. $U\subset V$ entraîne $k(U)\subset k(V)$). Soit D l'ensemble des rationnels dyadiques de l'intervalle $[0,1]$ et, pour tout entier $m\geqslant 1$, soit D_m l'ensemble des éléments de D de la forme $p/2^q$ où p est entier et $1\leqslant q\leqslant m$; alors $D_1=\{1/2\}$ et $D=\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$. Fixons un i arbitrairement dans I. Nous allons définir, pour tout d dans D, des ouverts $O_i(d)$ de X de façon que

(3) $$O_i(d)\cap A=f^{-1}(V_i(d)),$$

(4) $$O_i(d)\subset k\big(f^{-1}(V_i(d))\big),$$

(5) $$\overline{O_i(d)}\subset G_i\cap\big[k\big(f^{-1}(V_i(d))\big)\cup f^{-1}(\overline{V_i(d)})\big],$$

(6) $$\overline{O_i(d')}\subset O_i(d)\quad \text{si } d<d'.$$

Nous construirons les $O_i(d)$ pour d dans D_m par récurrence sur m. Par commodité, posons $D_0=\emptyset$, $O_i(0)=G_i$ et $O_i(1)=\emptyset$. Supposons $O_i(d')$ construit pour tout d' dans D_m, $m\geqslant 0$, et soit $d=(2p+1)/2^{m+1}$ un élément de
$$D_{m+1}\setminus D_m\quad(0\leqslant p\leqslant 2^m-1).$$
Soient
$$E=\overline{O_i(p+1/2^m)}\cup f^{-1}(V_i(d)),$$
$$F=[X\setminus O_i(p/2^m)]\cup\big[X\setminus\big(k\big(f^{-1}(V_i(d))\big)\cup A\big)\big]\cup\big[A\setminus f^{-1}(\overline{V_i(d)})\big].$$

En utilisant les relations (3) à (6) et le fait que k est monotone, nous pouvons vérifier que $\overline{E}\cap F=\emptyset=E\cap\overline{F}$. Puisque X est héréditairement normal, nous pouvons

trouver des ouverts $P_i(d)$ et $Q_i(d)$ tels que $E\subset P_i(d)$, $F\subset Q_i(d)$ et $P_i(d)\cap Q_i(d)=\emptyset$. Posons $O_i(d)=P_i(d)\cap k\big(f^{-1}(V_i(d))\big)$. Alors (4) est automatiquement vérifiée. Puisque $\overline{P_i(d)}\cap F\subset\overline{P_i(d)}\cap Q_i(d)=\emptyset$, nous avons $\overline{O_i(d)}\subset\overline{P_i(d)}\subset X\setminus F\subset O_i(p/2^m)\cap\cap\big[k\big(f^{-1}(V_i(d))\big)\cup f^{-1}(\overline{V_i(d)})\big]\subset G_i\cap\big[k\big(f^{-1}(V_i(d))\big)\cup f^{-1}(\overline{V_i(d)})\big]$, d'où (5). Puisque $P_i(d)$ contient $f^{-1}(V_i(d))$, (3) résulte du fait que $k\big(f^{-1}(V_i(d))\big)\cap A=f^{-1}(V_i(d))$. Pour vérifier (6), remarquons que $O_i(p/2^m)\supset\overline{O_i(d)}\supset O_i(d)\supset O_i(p+1/2^m)$ (l'inclusion $O_i(p/2^m)\supset\overline{O_i(d)}$ résulte de $\overline{O_i(d)}\subset\overline{P_i(d)}\subset O_i(p/2^m)$, tandis que l'inclusion $O_i(d)\supset\overline{O_i(p+1/2^m)}$ résulte du choix de $P_i(d)$ et du fait que $\overline{O_i(p+1/2^m)}\subset k\big(f^{-1}(V_i(p+1/2^m))\big)\cup f^{-1}(\overline{V_i(p+1/2^m)})\subset k\big(f^{-1}(V_i(d))\big)$. Alors, si d' est un élément de D_{m+1} tel que $d'<d$, $O_i(d')\supset O_i(p/2^m)\supset\overline{O_i(d)}$, tandis que, si $d<d'$, $O_i(d)\supset\overline{O_i(p+1/2^m)}\supset\supset\overline{O_i(d')}$, d'où (6).

Définissons alors une fonction $\beta_i\colon X\to[0,1]$ comme suit
$$\beta_i(x)=\begin{cases}0 & \text{s'il n'existe pas d'élément } d \text{ de } D \text{ tel que } O_i(d) \text{ contienne } x,\\ \sup\{d\in D/O_i(d)\ni x\} & \text{sinon}.\end{cases}$$

La construction de β_i est une variante de la démonstration du lemme d'Urysohn; la continuité de β_i se prouve par l'argument bien connu de ce lemme. Soit x un point de A et soit d dans D. Si $\beta_i(x)>d$, il existe $d'>d$ tel que $O_i(d')$ contienne x, donc, d'après (3), x appartient à $A\cap O_i(d')=f^{-1}(V_i(d'))$, d'où $\alpha_i(x)>d'>d$. Inversement, si $\alpha_i(x)>d$ et si d' est un élément de D vérifiant $d<d'<\alpha_i(x)$, alors $x\in f^{-1}(V_i(d'))\cap A\subset O_i(d')$, donc $\beta_i(x)\geqslant d'>d$. Pour tout d dans D, les conditions $\alpha_i(x)>d$ et $\beta_i(x)>d$ sont donc équivalentes pour x dans A; il en résulte que

(7) $$\beta_i|A=\alpha_i|A\quad\text{pour tout } i \text{ dans } I.$$

Pour i dans I, définissons une fonction continue $\gamma_i\colon X\to[0,1]$ par
$$\gamma_i(x)=\min(\alpha_i(x),\beta_i(x)).$$

Puisque, pour tout x dans X, l'un au plus des nombres $\alpha_i(x)$ est >0, il en est de même des nombres $\gamma_i(x)$; ces nombres définissent donc un point $h(x)$ de $|K|$. Si x appartient à A, il résulte de (7) que $\gamma_i(x)=\alpha_i(x)$ pour tout i, d'où $h(x)=g(x)=f(x)$, donc h prolonge f. Il ne reste plus qu'à montrer que h est continue en tout point de X. Pour cela, remarquons d'abord que, pour n'importe quel i dans I et tout point x de G_i, $\gamma_j(x)=0$ pour $j\neq i$ puisque α_j est nulle sur G_i; par suite, $h(G_i)$ est contenu dans le 1-simplexe $\langle w,v_i\rangle$ de $|K|$. Puisque la coordonnée barycentrique de h sur v_i, qui est γ_i, est continue sur X, il en résulte que $h|G_i$ est continue, donc, puisque G_i est ouvert dans X, que h est continue en tout point de G_i, $i\in I$. Reste à montrer la continuité de h en un point x de B. En un tel point, $h(x)=f(x)=w$. Si W est un voisinage de w dans $|K|$, nous pouvons trouver, pour tout i dans I, un d_i dans D de façon que la fermeture de $W(\{d_i\})$ soit contenue dans W. Alors, $Q = k\big(f^{-1}(W(\{d_i\}))\big)$ est un voisinage de x dans X. Pour tout i dans I, nous avons

$$f^{-1}(W(\{d_i\}))\cap f^{-1}(V(d_i)) = f^{-1}(W(\{d_i\})\cap V(d_i)) = \emptyset,$$

donc, d'après la définition de k,

$$k\big(f^{-1}(W(\{d_i\}))\big)\cap k\big(f^{-1}(V(d_i))\big) = \emptyset.$$

D'après (4), ceci entraîne que $Q\cap O_i(d_i)$, d'où, d'après la définition de β_i, $\beta_i(x')\leqslant d_i$ pour tout x' dans Q et tout i dans I. Alors $\gamma_i(x')\leqslant\beta_i(x')\leqslant d_i$ quel que soit i, ce qui entraîne que $h(Q)$ est contenu dans la fermeture de $W(\{d_i\})$, donc dans W, d'où la continuité de f en x.

Il serait intéressant de connaître la réponse à la question suivante, qui est un cas particulier du problème 2.

PROBLÈME 4. Si K est un complexe simplicial ne contenant aucun simplexe infini, $|K|$ est-il un RAV (K_1-espace)?

Par contre, nous montrerons à la section suivante que si K contient un simplexe infini, alors $|K|$ n'est pas un RAV (K_1-espace).

6. Un exemple. Nous allons donner ici un exemple de K_1-espace héréditairement paracompact X tel que la réalisation géométrique $|K|$ d'un complexe simplicial ait la propriété d'extension locale par rapport à X si, et seulement si, K ne contient aucun simplexe infini. Cet exemple est basé sur une construction introduite dans [2].

Soit Y un espace topologique, et soit $S(Y)$ l'ensemble des suites d'éléments de Y sans valeur d'adhérence. Posons $L(Y) = Y\cup S(Y)$. Pour tout sous-ensemble A de Y, notons $S_r(A)$ l'ensemble des éléments $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $S(Y)$ pour lesquels il existe un entier p tel que x_n appartienne à A pour $n\geqslant p$; posons $A^* = A\cup S_r(A)$. Alors (voir [2]), nous définissons une topologie sur $L(Y)$ en prenant pour base les ensembles suivants

(a) les ensembles réduits à un point de $S(Y)$,

(b) les ensembles U^* où U est ouvert dans Y.

Si Z est un fermé de Y, l'ensemble $S(Z)$ des suites d'éléments de Z sans valeur d'adhérence dans Z est contenu dans $S(Y)$. Nous pouvons donc identifier $L(Z)$ à un sous-ensemble de $L(Y)$, et il est facile de voir qu'alors la topologie de $L(Z)$ est induite par celle de $L(Y)$; nous considérerons donc dans ce cas $L(Z)$ comme un sous-espace de $L(Y)$. Cette convention introduit une ambiguité dans nos notations. Si U est un ouvert de Y contenu dans Z, l'ensemble U^* n'est pas le même selon que nous considérons U comme sous-ensemble de Y ou de Z (si $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite dans $S(Y)$ telle que $x_0\notin Z$ mais que $x_n\in U$ pour $n\geqslant 1$, alors $x\notin L(Z)$, mais est dans le sous-ensemble U^* de $L(Y)$).

LEMME 12. *Si Y est collectivement normal, $L(Y)$ aussi.*

Démonstration. Puisque Y est séparé, $L(Y)$ aussi (voir [2]). Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille discrète de fermés de $L(Y)$. Posant $A_i = B_i\cap Y$, $i\in I$, nous obtenons une famille discrète de fermés de Y. Il existe donc une famille $(G_i)_{i\in I}$ d'ouverts disjoints de Y telle que G_i contienne A_i pour tout i. Alors, pour tout i dans I, $\bigcup_{j\neq i} B_j$ est un fermé disjoint de G_i, donc nous pouvons trouver, pour tout x dans G_i, un ouvert $U_i(x)$ de Y contenu dans G_i et tel que $U_i(x)^*\cap(\bigcup_{j\neq i} B_j) = \emptyset$. Posons

$$H_i = \big(\bigcup\{U_i(x)^*/x\in G_i\}\big)\cup(B_i\setminus Y).$$

Alors H_i est un ouvert de $L(Y)$ contenant $G_i\cup(B_i\setminus Y)\supset B_i$. Il suffit donc de vérifier que les H_i sont deux à deux disjoints et, pour cela, de montrer que, si $i\neq i'$, alors

(α) $U_i(x)^*\cap(B_{i'}\setminus Y) = \emptyset$ pour tout x dans G_i,

(β) $U_i(x)^*\cap U_{i'}(x')^* = \emptyset$ quels que soient x dans G_i et x' dans $G_{i'}$.

Or, (α) résulte du choix de $U_i(x)$, et (β) résulte de l'égalité

$$U_i(x)^*\cap U_{i'}(x')^* = (U_i(x)\cap U_{i'}(x'))^* = (\emptyset)^* = \emptyset.$$

LEMME 13. *Si Y est un K_1-espace, $L(Y)$ aussi.*

Démonstration. Notons $\mathcal{T}$ la topologie de Y, $\mathcal{T}^*$ celle de $L(Y)$. Soit B un sous-ensemble quelconque de $L(Y)$, et soit $A = B\cap Y$. Soit $k\colon \mathcal{T}|A\to\mathcal{T}$ comme dans la définition d'un K_1-espace. Pour tout ouvert U de B, soit $\mathcal{V}(U)$ la famille des ouverts V de Y tels que $V^*\cap B\subset U$. D'après la définition de la topologie de $L(Y)$, les éléments de $\mathcal{V}(U)$ recouvrent $U\cap A = U\cap Y$. Posons, pour tout U dans $\mathcal{T}^*|B$,

$$k^*(U) = \big(\bigcup\{(V\cap k(A\cap V))^*/V\in\mathcal{V}(U)\}\big)\cup(U\setminus Y).$$

Il est clair que $k^*(U)$ est ouvert dans $L(Y)$. $k^*(U)\cap B$ contient $U\setminus Y$ ainsi que $U\cap Y$, puisque les ensembles $A\cap V$, pour V dans $\mathcal{V}(U)$, recouvrent $U\cap Y$. Pour montrer qu'inversement $k^*(U)\cap B$ est contenu dans U, il suffit de vérifier que, si y est un point de $(V\cap k(A\cap V))^*\cap B$, où $V\in\mathcal{V}(U)$, alors y appartient à U, ce qui est évident car $(V\cap k(A\cap V))^*\cap B\subset V^*\cap B\subset U$.

Soient U_1 et U_2 des ouverts disjoints de B. Pour vérifier que $k^*(U_1)\cap k^*(U_2)=\emptyset$, il suffit de montrer que

(α) $(V\cap k(A\cap V))^*\cap(U_j\setminus Y) = \emptyset$ si $V\in\mathcal{V}(U_i)$, $i,j\in\{1,2\}$, $i\neq j$,

(β) $(V_1\cap k(A\cap V_1))^*\cap(V_2\cap k(A\cap V_2))^* = \emptyset$ si $V_i\in\mathcal{V}(U_i)$, $i = 1, 2$.

(α) résulte des inclusions

$$(V\cap k(A\cap V))^*\cap(U_j\setminus Y)\subset(V^*\cap B)\cap(U_j\setminus Y)\subset U_i\cap U_j = \emptyset,$$

tandis que (β) résulte des inclusions:

$$\begin{aligned}(V_1\cap k(A\cap V_1))^*\cap(V_2\cap k(A\cap V_2))^* &\subset (k(A\cap V_1))^*\cap(k(A\cap V_2))^*\\ &= (k(A\cap V_1)\cap k(A\cap V_2))^* = \emptyset,\end{aligned}$$

d'après le choix de k puisque $A\cap V_1\cap V_2\subset U_1\cap U_2\cap A = \emptyset$.

Nous noterons $\mathscr{E}$ la classe des espaces collectivement normaux X tels que, pour tout complexe simplicial K ne contenant aucun simplexe infini, $|K|$ ait la propriété d'extension locale par rapport à X. Si K est un complexe simplicial, nous noterons $\mathscr{E}(K)$ la classe des espaces collectivement normaux par rapport auxquels $|K|$ a la propriété d'extension locale.

LEMME 14. *Si Y appartient à $\mathscr{E}$, $L(Y)$ aussi.*

Nous aurons besoin de l'observation suivante:

SOUS-LEMME. *Pour un complexe simplicial K ne contenant aucun simplexe infini, les affirmations suivantes sont équivalentes*

(i) *$Y \in \mathscr{E}$ entraîne $L(Y) \in \mathscr{E}(K)$,*

(ii) *$|K|$ est un rétracte de voisinage de $L(|K|)$,*

(iii) *$|K|$ est un rétracte de $L(|K|)$.*

Démonstration. (i) entraîne (ii) car $|K|$ appartient à $\mathscr{E}$.

(ii) entraîne (iii) car, si $r\colon Q \to |K|$ est une rétraction d'un voisinage de $|K|$ dans $L(|K|)$ sur $|K|$, tout prolongement de r à $L(|K|)$ est continu puisque $L(|K|)\setminus|K|$ est un ouvert discret de $L(|K|)$.

Supposons (iii), et soit $r\colon L(|K|) \to |K|$ une rétraction. Pour vérifier (i), il suffit de montrer qu'étant donnés Y dans $\mathscr{E}$, B fermé dans $L(Y)$ et $f\colon B \to |K|$ continue, il existe un voisinage ouvert P de B dans $L(Y)$ et une fonction continue $F\colon P \to L(|K|)$ prolongeant f, en effet, $r \circ F\colon P \to |K|$ est alors un prolongement continu de f. Soit $A = B \cap Y$. Puisque Y appartient à $\mathscr{E}$, il existe un ouvert O de Y contenant A et une fonction $g\colon O \to |K|$ prolongeant $f|A$. Soit $P = O^* \cup (B \setminus Y)$; c'est un ouvert de $L(Y)$ contenant B. Nous allons définir une fonction $F\colon P \to L|K|)$ telle que $F|O = g$ et $F|B = f$. Il ne reste plus pour cela qu'à définir $F(x)$ pour x dans $O^* \setminus (Y \cap B) = S_r(O) \setminus B$. Soit $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ un tel élément. Fixons un a dans O et soit $\tilde{x} = \{\tilde{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ la suite définie par $\tilde{x}_n = x_n$ si x_n appartient à O, $\tilde{x}_n = a$ sinon. Puisque x appartient à $S_r(O)$, $\tilde{x}_n = x_n$ pour tout n sauf un nombre fini, et la suite $\{\tilde{x}\}$ de points de O n'a pas de valeur d'adhérence. Pour définir $F(x)$, distinguons deux cas:

1*er cas*: la suite $\{g(\tilde{x}_n)\}_{n=0}^{\infty}$ a une valeur d'adhérence. Soit $F(x)$ l'une de ces valeurs.

2*ème cas*: la suite $\{g(\tilde{x}_n)\}_{n=0}^{\infty}$ n'a pas de valeur d'adhérence. Soit $F(x)$ l'élément $\{g(\tilde{x}_n)\}$ de $S(|K|)$.

Pour montrer que F est continue, il suffit, puisque $L(Y)\setminus Y$ est un ouvert discret, de vérifier qu'elle est continue en tout point y de $P \cap Y = O$. Tout voisinage de $F(y) = g(y)$ dans $L(|K|)$ contient un ensemble de la forme W^* où W est un ouvert de $|K|$ contenant y. Soit U un voisinage fermé de $F(y) = g(y)$ dans $|K|$ contenu dans W. Puisque g est continue, nous pouvons trouver un voisinage ouvert V de y contenu dans O tel que U contienne $g(V)$. Puisque B est fermé et f continue, nous

pouvons supposer que V vérifie

(1) Si $y \notin B$, alors $V^* \cap B = \emptyset$,

(2) Si $y \in B$, alors $f(V^* \cap B) \subset U$.

Il suffit de montrer que $F(V^*) \subset W^*$. D'après le choix de V, il est clair que $F(V^* \cap (Y \cup B)) = g(V) \cup f(V^* \cap B) \subset U$. Il suffit donc de montrer que, si $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est un point de $V^* \setminus (Y \cup B)$, alors $F(x)$ appartient à U. Si la suite $\{g(\tilde{x}_n)\}$ a une valeur d'adhérence, $F(x)$ est l'une de ces valeurs; puisque, pour n grand, $\tilde{x}_n = x_n$ appartient à V, $g(\tilde{x}_n)$ est dans U pour n grand, donc, U étant fermé, $F(x)$ est contenu dans $U \subset W^*$. Si la suite $\{g(\tilde{x}_n)\}$ n'a pas de valeur d'adhérence, $F(x) = \{g(\tilde{x}_n)\}$ a, d'après le choix de U et V, tous ses termes dans W sauf un nombre fini, donc $F(x)$ apppartient à W^*. Ceci prouve la continuité de F.

Démonstration du lemme 14. Soit $L(\mathscr{E})$ la classe des espaces collectivement normaux de la forme $L(Y)$ avec Y dans $\mathscr{E}$. Il nous faut prouver que, pour tout complexe simplicial K ne contenant aucun simplexe infini, $|K|$ a la propriété d'extension locale par rapport à $L(\mathscr{E})$. Pour cela, d'après la remarque finale de la section 4, il suffit de montrer que si le complexe K est la réunion disjointe des sous-complexes K_α, $\alpha \in A$, et si, pour tout α dans A, $|wK_\alpha|$ a la propriété d'extension locale par rapport à $L(\mathscr{E})$, il en est de même de $|wK|$.

Posons $M_\alpha = wK_\alpha$ et $M = wK$. Pour tout ouvert U de $|M|$ et tout α dans A, nous poserons $U_\alpha = U \cap |M_\alpha|$. Afin de lever l'ambiguïté signalée plus haut, nous ferons une distinction formelle entre U et U_α même lorsque U est contenu dans $|M_\alpha|$; ainsi, U_α^* sera un sous-ensemble de $L(|M_\alpha|)$ et U^* un sous-ensemble de $L(|M|)$. D'après le sous-lemme, il existe, pour tout α, une rétraction r_α de $L(|M_\alpha|)$ sur $|M_\alpha|$, et le lemme sera prouvé en construisant une rétraction de $L(|M|)$ sur $|M|$ telle que $r|L(|M_\alpha|) = r_\alpha$ pour tout α. Il ne reste plus qu'à définir r sur les éléments de $L(|M|)\setminus(\bigcup_\alpha L(|M_\alpha|)) = S(M)\setminus(\bigcup_\alpha L(|M_\alpha|))$. Pour cela, répartissons ces éléments $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en deux types.

Type I. Il existe un α dans A tel que $|M_\alpha|$ contienne tous les x_n sauf un nombre fini. Puisque $\{x_n\}$ n'a pas de valeur d'adhérence, seul un nombre fini de x_n sont égaux à w, donc α est unique. Définissons la suite $\tilde{x} = \{\tilde{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ des points de $|M_\alpha|$ par $\tilde{x}_n = x_n$ si x_n appartient à $|M_\alpha|$, $\tilde{x}_n = w$ sinon. Les suites x et $\tilde{x}$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, donc $\tilde{x}$ est un élément de $S(|M_\alpha|)$. Posons alors $r(x) = r(\tilde{x})$

Type II. Pour tout α dans A, $|M|\setminus|M_\alpha|$ contient une infinité de termes de la suite. Posons alors $r(x) = w$.

Il ne reste plus qu'à montrer la continuité de r et, pour cela, qu'à vérifier cette continuité en tout point p de $|M|$.

1*er cas*. $p \neq w$. Soit β l'unique élément de A tel que $|M_\beta|$ contienne p. Soit U un voisinage de p dans $|M|$. Puisque r_β est continue, nous pouvons trouver un voisinage ouvert V de p dans $|M|$ contenu dans $|M_\beta|\setminus\{w\}$ et tel que $r_\beta(V^*) \subset U_\beta$;

il suffit de vérifier que $r(V^*) \subset U$. Soit x un point de V^*. Si x est dans $\bigcup_\alpha L(|M_\alpha|)$, alors x appartient à $L(|M_\beta|)$ puisque V est contenu dans $|M_\beta|$, donc $r(x) = r_\beta(x) \in U$. Si $x = \{x_n\} \notin \bigcup_\alpha L(|M_\alpha|)$, tous ses termes sauf un nombre fini sont dans $V \subset |M_\beta|$, donc x est du type I et $\tilde{x}$ appartient à V_β^*, d'où $r(x) = r_\beta(\tilde{x}) \in U$.

2ème cas. $p = w$. Soit U un voisinage de w dans $|M|$. La continuité des r_α permet de trouver, pour tout α dans A, un voisinage ouvert V_α de w dans $|M_\alpha|$ tel que $r_\alpha(V^*) \subset U_\alpha$. Alors, $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$ est un voisinage ouvert de w dans $|M|$ et il suffit de montrer que $r(V^*) \subset U$. Soit x un point de V^*. Si, pour un α dans A, x appartient à $L(|M_\alpha|)$, alors x est dans V_α^*, donc $r(x)$ appartient à U. Si x est de type I, la suite $\tilde{x}$, ne différant de x que par un nombre fini de termes, est aussi dans V^*, donc $r(x) = r(\tilde{x}) \in U$ d'après ce qui précède. Si x est de type II, $r(x) = w \in U$, d'où le résultat.

Nous pouvons maintenant donner l'exemple annoncé. Soit D un simplexe infini dénombrable, et soit $X = L(|D|)$. X est un K_1-espace d'après le lemme 13 et est héréditairement paracompact d'après [2]. Tout complexe ne contenant aucun simplexe infini a la propriété d'extension locale par rapport à X d'après le lemme 14. Enfin, si K contient un simplexe infini, $|K|$ contient $|D|$; si $|K|$ avait la propriété d'extension locale par rapport à X, il en serait de même de son rétracte $|D|$, contrairement à [2]. (Sur ce point, remarquons que la démonstration de [2] montre que si Q est une classe d'espaces telle que $Y \in Q$ entraîne $L(Y) \in Q$, alors tout $\mathrm{RAV}(Q)$ est un espace de Baire; il suffit pour le voir de remplacer dans la démonstration de [2], $L \setminus L^n$ par O_n où $\{O_n\}$ est une suite décroissante d'ouverts partout denses d'intersection vide.)

Bibliographie

[1] C. J. R. Borges, *On stratifiable spaces*, Pacific J. Math. 17 (1966), 1–16.
[2] R. Cauty, *Sur le prolongement des fonctions continues à valeurs dans les CW-complexes*, C.R. Acad. Sci. Paris 273 (1971), 1208–1211.
[3] — *Convexité topologique et prolongement des fonctions continues*, Compositio Math. 27 (1973), 233–271.
[4] E. K. van Douwen, *Simultaneous extension of continuous functions*, Thèse, Amsterdam 1975.
[5] — *Simultaneous linear extensions of continuous functions*, Gen. Topology Appl. 5 (1975), 297–319.
[6] E. K. van Douwen and R. Pol, *Countable spaces without extension properties*, Bull. Acad. Polon. Sci. 25 (1977), 987–991.
[7] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Arkiv Mat. 2 (1952), 307–313.
[8] R. Engelking, *Outline of general topology*, North-Holland, 1968.
[9] O. Hanner, *Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces*, Arkiv Mat. 2 (1952), 315–360.
[10] R. W. Heath, D. J. Lutzer and P. L. Zenor, *Monotonically normal spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 178 (1973), 481–493.

[11] S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit 1965.
[12] G. H. Toulmin, *Shuffling ordinals and transfinite dimension*, Proc. London Math. Soc. 4 (1954), 177–195.
[13] J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy*, I, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 213–245.

UNIVERSITÉ DE PARIS VI
MATHÉMATIQUES
4 Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Received 11 May 1988