

О РАСЧЕТЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ЧАСТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СОПЕЛ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ МЕТОДОМ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

М. П. ЛЕВИН

Вычислительный центр АН СССР, Москва, СССР

Рассмотрена задача расчета стационарных течений газа в сверхзвуковых частях пространственных сопел с продольными ребрами. Для ее решения предложен вариант схемы численного метода пространственных характеристик [1]. Форму поверхности сопел в цилиндрической системе координат зададим уравнением $r = r(x, \varphi)$. Предполагается, что продольные ребра лежат в плоскостях симметрии потока. На линиях пересечения поверхности сопел с плоскостями симметрии производные $\partial r / \partial \varphi$ могут иметь разрыв. При построении формы характеристических поверхностей учитывается возможность возникновения конических точек и ребер [2]. Приведены результаты расчетов, полученные с использованием модифицированной схемы.

1

В случае стационарных равновесных безвихревых течений невязкого нетеплопроводного газа векторное поле скоростей $\bar{V}(\bar{r})$, где \bar{r} — радиус-вектор, удовлетворяет уравнениям

$$(1) \quad \operatorname{div}(\varrho \bar{V}) = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{V} = 0.$$

В рассматриваемом случае плотность газа ϱ , скорость звука a и давление p зависят только от модуля вектора скорости и удовлетворяют соотношениям

$$d\varrho = -\varrho a^{-2}(\bar{V} \cdot d\bar{V}), \quad dp = -\varrho(\bar{V} \cdot d\bar{V}), \quad a^2 = \{[(k+1)/(k-1) - \bar{V}^2](k-1)/2\},$$

где k — показатель адиабаты ($k = \text{const}$),

При сверхзвуковых скоростях уравнения (1) имеют гиперболический тип. На волновых характеристических поверхностях с единичным вектором нормали \bar{n} выполняется соотношение

$$(2) \quad \bar{V} \cdot \bar{n} = a.$$

На этих поверхностях существуют две линейно-независимые комбинации уравнений (1), не содержащие выводящих производных. Эти комбинации, называемые условиями совместности, в соответствии с [1] можно представить в следующем виде:

$$(3) \quad \bar{A}_i \cdot [(du/dx)\bar{e}_x + (dv/dx)\bar{e}_r + (dw/dx)\bar{e}_\varphi] = \{\bar{B}_i \cdot [(du/d\varphi)\bar{e}_x + (dv/d\varphi - w)\bar{e}_r + (dw/d\varphi + v)\bar{e}_\varphi] + \bar{A}_i \cdot (w\bar{e}_r - v\bar{e}_\varphi)L_\varphi r^{-1}\} L_x^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь u, v, w — проекции вектора \bar{V} на единичные базисные векторы $\bar{e}_x, \bar{e}_r, \bar{e}_\varphi$ цилиндрической системы координат x, r, φ ; L_x и L_φ — компоненты единичного бихарактеристического вектора $\bar{L} = (\bar{M} - \bar{n})/(M^2 - 1)^{1/2}$, где вектор Маха $\bar{M} = \bar{V}/a$. \bar{A}_i и \bar{B}_i — вектора, определяемые следующим образом:

$$\bar{A}_1 = \bar{F}(\bar{t}), \quad \bar{A}_2 = \bar{t}, \quad \bar{B}_1 = \bar{F}(\bar{L}), \quad \bar{B}_2 = \bar{L},$$

где

$$\bar{F}(\bar{t}) = \bar{t} \times \bar{n} - \bar{M}(\bar{M} \bar{t} \bar{n}) + \bar{n}(\bar{M} \bar{n} \bar{t}), \quad \bar{t} = (dx/d\varphi)\bar{e}_x + (dr/d\varphi)\bar{e}_r + r\bar{e}_\varphi.$$

Символом $(\bar{M} \bar{t} \bar{n})$ обозначено смешанное произведение векторов.

В условиях совместности (3) полные производные по x вычисляются вдоль бихарактеристик, а полные производные по φ вдоль линий пересечения характеристических поверхностей различных семейств.

На волновых характеристических поверхностях вдоль бихарактеристик имеют место следующие соотношения

$$(4) \quad dr/dx = L_r/L_x, \quad d\varphi/dx = L_\varphi/(rL_x),$$

$$(5) \quad t_x(dn_x/dx) + t_r(dn_r/dx) + t_\varphi(dn_\varphi/dx) = C,$$

где

$$C = \{-(\bar{L} \cdot \bar{e}_\varphi)(n_r t_\varphi - n_\varphi t_r)r^{-1} - a^{-1}(M^2 - 1)^{-1/2}[n_x(du/d\varphi) + n_r(dv/d\varphi - w) + n_\varphi(dw/d\varphi + v) + (k - 1)(M_x du/d\varphi + M_r dv/d\varphi + M_\varphi dw/d\varphi)/2]\} L_x^{-1}.$$

Уравнения (4) и (5) являются уравнениями характеристической полосы [2], записанными в цилиндрической системе координат.

На поверхности сопла, как на поверхности тока, выполняется условие непротекания

$$(6) \quad \bar{V} \cdot \bar{n}^{(0)} = 0,$$

где $\bar{n}^{(0)}$ — единичный вектор нормали к поверхности сопла. Линии тока на такой поверхности являются характеристиками и уравнения характеристической полосы в цилиндрической системе координат для поверхности тока имеют следующий вид:

$$(7) \quad dr/dx = u/v, \quad d\varphi/dx = w/(ru),$$

$$(8) \quad t_x^{(0)}(dn_x^{(0)}/dx) + t_r^{(0)}(dn_r^{(0)}/dx) + t_\varphi^{(0)}(dn_\varphi^{(0)}/dx) = D,$$

где

$$D = w(n_\varphi^{(0)} t_r^{(0)} - n_r^{(0)} t_\varphi^{(0)})(ur)^{-1} - [n_x^{(0)}(du/d\varphi) + n_r^{(0)}(dv/d\varphi - w) + n_\varphi^{(0)}(dw/d\varphi + v)]u^{-1},$$

$$\vec{t}^{(0)} = (dx/d\varphi)\vec{e}_x + (dr/d\varphi)\vec{e}_r + r\vec{e}_\varphi.$$

В формулах (4-8) x является независимой переменной, а полные производные по φ означают операцию дифференцирования либо вдоль линий пересечения характеристических поверхностей противоположных семейств (в формулах (5-6)), либо вдоль линий пересечения поверхности сопла с волновыми характеристическими поверхностями (в формулах (7-8)).

2

Рассмотрим алгоритм расчета координат узлов характеристической сетки и газодинамических функций в них. В качестве узлов характеристической сетки будем выбирать точки, получающиеся в результате пересечения волновых характеристических поверхностей противоположных семейств и меридиональных плоскостей $\varphi = \text{const}$. На рис. 1 изображено пересечение меридиональной плоскости $\varphi = \text{const}$ с характеристическими

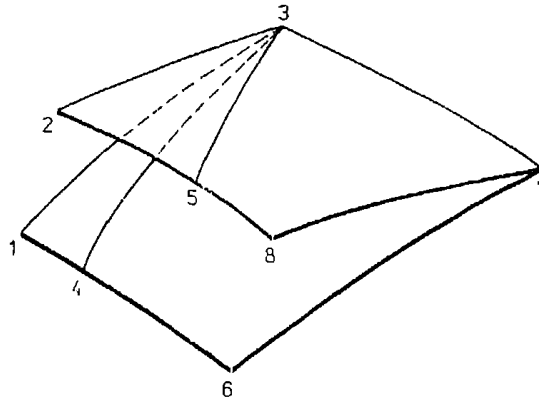


Рис. 1

поверхностями первого (1376) и второго (2378) семейств, проходящих через линию (37), удовлетворяющую условию сверхзвуковой кромки. Узлы 1, 2, 3 лежат в плоскости $\varphi = \text{const}$. Линии (35) и (34) являются бихарактеристиками, приходящими в точку 3. Форма линий (258), (146) и газодинамические функции в узлах 1, 2, 6, 8 считаются известными. Определим координаты точки 3 и газодинамические функции в ней.

Аппроксимируя соотношения (4) вдоль линий (43) и (53) со вторым порядком, получим

$$(9) \quad (r_3 - r_1)/(x_3 - x_1) = -(\bar{Q}_1 \bar{L}^* \bar{e}_x)/(\bar{Q}_1 \bar{L}^* \bar{e}_r),$$

$$(10) \quad \varphi_4 = \varphi_1 - (\bar{L}^* \cdot \bar{e}_\varphi)(x_3 - x_1)/(\bar{Q}_1 \bar{L}^* \bar{e}_r),$$

$$(11) \quad (r_3 - r_2)/(x_3 - x_2) = -(\bar{Q}_2 \bar{L}^{**} \bar{e}_x)/(\bar{Q}_2 \bar{L}^{**} \bar{e}_r),$$

$$(12) \quad \varphi_5 = \varphi_1 - (\bar{L}^{**} \cdot \bar{e}_\varphi)(x_3 - x_2)/(\bar{Q}_2 \bar{L}^{**} \bar{e}_r).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1 &= [(x_4 - x_1)/(\varphi_4 - \varphi_1)]\bar{e}_x + [(r_4 - r_1)/(\varphi_4 - \varphi_1)]\bar{e}_r + r^*\bar{e}_\varphi, \\ \bar{Q}_2 &= [(x_5 - x_2)/(\varphi_5 - \varphi_2)]\bar{e}_x + [(r_5 - r_2)/(\varphi_5 - \varphi_2)]\bar{e}_r + r^{**}\bar{e}_\varphi, \\ \bar{L}^* &= (\bar{L}_3 + \bar{L}_4)/2, \quad \bar{L}^{**} = (\bar{L}_3 + \bar{L}_5)/2, \\ r^* &= (r_3 + r_4)/2, \quad r^{**} = (r_3 + r_5)/2.\end{aligned}$$

В предельном случае при $\varphi_1 = \varphi_4$ вектор \bar{Q}_1 определяется так:

$$\bar{Q}_1 = (dx/d\varphi)\bar{e}_x + (dr/d\varphi)\bar{e}_r + r^*\bar{e}_\varphi,$$

где полные производные от соответствующих функций по φ вычисляются вдоль линии (146). Вектор \bar{Q}_2 в предельном случае определяется аналогично.

Аппроксимируя вдоль бихарактеристики (43) условия совместности (3) и соотношение (5), получим

$$(13) \quad (\bar{A}_i \cdot \bar{e}_x)^*(u_3 - u_4) + (\bar{A}_i \cdot \bar{e}_r)^*(v_3 - v_4) + (\bar{A}_i \cdot \bar{e}_\varphi)^*(w_3 - w_4) = H_i^*(x_3 - x_4),$$

где

$$\begin{aligned}H_i &= \{\bar{B}_i \cdot [(du/d\varphi)\bar{e}_x + (dv/d\varphi - w)\bar{e}_r + (dw/d\varphi + v)\bar{e}_\varphi] + \\ &\quad + \bar{A}_i \cdot (w\bar{e}_r - v\bar{e}_\varphi)L_\varphi r^{-1}\}L_x^{-1}, \quad i = 1, 2;\end{aligned}$$

$$(14) \quad t_x^*(n_{x3} - n_{x4}) + t_r^*(n_{r3} - n_{r4}) + t_\varphi^*(n_{\varphi3} - n_{\varphi4}) = C^*(x_3 - x_4).$$

Здесь использовано следующее обозначение $(\cdot)^* = [(\cdot)_3 + (\cdot)_4]/2$. Аналогичные соотношения имеют место и вдоль бихарактеристики (53).

Координаты точки 3 и газодинамические функции в ней определяются в процессе итераций. Задаются начальные значения величин φ_4 и φ_5 , например, равными φ_1 . Затем по известным φ_4 и φ_5 с помощью интерполяции определяются координаты точек 4 и 5, а также газодинамические функции в этих точках. Далее из соотношений (9) и (11) определяются величины x_3 и r_3 . После этого из конечно-разностной аппроксимации условий совместности (13), записанных вдоль линии (43), и аналогичных условий, имеющих место вдоль (53), вычисляются газодинамические функции u_3 , v_3 , w_3 . Отметим, что для их вычисления достаточно только трех конечно-разностных аналогов условий совместности [1]. Затем из соотношения (14), условия направлений (2) и условия нормировки ($|\bar{n}| = 1$) в точке 3 определяется единичный вектор $\bar{n}_3^{(1)}$, направленный по нормали к волновой характеристической поверхности первого семейства. Аналогично определяется единичный вектор $\bar{n}_3^{(2)}$, направленный по нормали к волновой характеристической поверхности второго семейства. Векторное произведение векторов $\bar{n}_3^{(1)}$ и $\bar{n}_3^{(2)}$ определяет вектор, касательный к линии пересечения характеристических поверхностей различных семейств в точке 3. С другой стороны вектор $\bar{t} = (dx/d\varphi)\bar{e}_x + (dr/d\varphi)\bar{e}_r + r\bar{e}_\varphi$ также является касательным к этой линии.

Тогда величины $dx/d\varphi$ и $dr/d\varphi$ в точке 3 можно определить по следующим формулам:

$$(15) \quad (dx/d\varphi)_3 = r_3 (\bar{n}_3^{(1)} \bar{n}_3^{(2)} \bar{e}_x) / (\bar{n}_3^{(1)} \bar{n}_3^{(2)} \bar{e}_\varphi),$$

$$(16) \quad (dr/d\varphi)_3 = r_3 (\bar{n}_3^{(1)} \bar{n}_3^{(2)} \bar{e}_r) / (\bar{n}_3^{(1)} \bar{n}_3^{(2)} \bar{e}_\varphi),$$

и тем самым определить вектор \bar{t} в точке 3. Что же касается производных $du/d\varphi$, $dv/d\varphi$ и $dw/d\varphi$, то они, как и в работе [1], определялись дифференцированием интерполирующих кубических сплайнов. Однако поскольку в плоскостях симметрии эти производные могли иметь разрывы, то в качестве дополнительных краевых условий для сплайнов использовались условия третьего рода [4], а не условия периодичности, как в [1]. Заметим, что краевые условия третьего рода для кубических сплайнов соответствуют требованию непрерывности третьей производной сплайна только в двух узлах, ближайших к граничным.

Наконец, по формулам (10) и (12) определялись подправленные значения величин φ_4 и φ_5 и осуществлялся переход к следующей итерации. Опыт расчетов показал, что в рассматриваемой итерационной процедуре достаточно двух пересчетов, как и в обычном методе характеристик.

В случае, если точка 3 лежит на стенке сопла, и область (2378) является элементом стенки сопла, в алгоритм расчета точки 3 следует внести следующие изменения. Во-первых, при определении координат точки 3 вместо (11) следует использовать уравнение $r = r(x, \varphi)$, определяющее стенку сопла. Во-вторых, при расчете газодинамических функций вместо конечно-разностной аппроксимации условия совместности, записанного вдоль (53), необходимо использовать условие непротекания (6). В третьих, при определении единичного вектора $\bar{n}^{(0)}$, направленного по нормали к стенке сопла, следует воспользоваться конечно-разностной аппроксимацией соотношения (8), аналогичной соотношению (14). В четвертых, при определении компонент касательного вектора $\bar{t}^{(0)}$ можно воспользоваться формулами (15) и (16), заменив в них $\bar{n}^{(2)}$ на $\bar{n}^{(0)}$. В пятых, подправленный угол φ_5 , определяющий положение точки 5, следует вычислять по формуле

$$(17) \quad \varphi_5 = \varphi_1 - (\bar{V}^{**} \cdot \bar{e}_\varphi)(x_3 - x_2) / (\bar{Q}_2 \bar{V}^{**} \cdot \bar{e}_r),$$

где $\bar{V}^{**} = (\bar{V}_3 + \bar{V}_5)/2$. Формула (17) аналогична формуле (12) и следует из второго соотношения (7).

Если точка 3 лежит в плоскости симметрии потока, в алгоритм также необходимо внести изменения. Пусть в рассматриваемой ситуации $\varphi_6 > \varphi_1$. Тогда, если в процессе итераций оказалось, что $\varphi_4 < \varphi_1$, то, как показано в [2], в точке 1 мы имеем коническую точку. Поэтому при расчете точки 3 вдоль линии 13 следует использовать обычные формулы

осесимметричного метода характеристик [5]. Также следует поступить и в случае $\varphi_5 < \varphi_1 = \varphi_2$. Если же $\varphi_4 \geq \varphi_1$ или $\varphi_5 \geq \varphi_1$, то не требуется никаких изменений в алгоритме.

3

Поскольку для разностной аппроксимации рассматриваемой системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) в настоящее время не существует аналитических способов оценки погрешности, то приходится использовать другие способы оценки точности получающихся разностных решений. Одним из таких способов является сравнение результатов расчетов тестовых задач, полученных на вложенных сетках.

В настоящей работе в качестве первой тестовой задачи рассмотрена задача расчета пространственного течения разрежения, образованного изломом образующей сверхзвуковой части сопла в критическом сечении $x = 0$. Предполагалось, что в потоке существует одна плоскость симметрии.

Тангенс угла наклона образующей сверхзвуковой части сопла задавался по формуле

$$z(\varphi) = 0.8 + 0.7(6f - 15f^2 + 8f^3),$$

где $f = \varphi/\pi$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$ и $f = (2\pi - \varphi)/\pi$ при $\pi < \varphi < 2\pi$. Отметим, что такая функция $z(\varphi)$ является негладкой при $\varphi = 0$ и немонотонной на отрезке $[0, \pi]$. Пример расчета с гладкой функцией $z(\varphi)$ рассмотрен в [6].

Начальные данные задавались на осесимметричной характеристической поверхности № 14 из [7] для $k = 1.4$. Эта поверхность была ограничена контурами ($x = 0, r = 1, 0 < \varphi \leq 2\pi$) и ($x = 1.4703, r = 0.4169, 0 < \varphi \leq 2\pi$). Расчеты проводились на сетках $J_x * J_\varphi * J_r$, где J_x — число узлов характеристической сетки в продольном направлении, J_φ — число меридиональных плоскостей на отрезке $[0, \pi]$, J_r — количество характеристических поверхностей в пространственном веере разрежения.

Таблица 1

$J_x * J_\varphi * J_r$	x	r	u	v	w
23*5*25	2.2600	1.0300	1.8517	0.7235	-0.0365
45*9*50	2.1458	0.9377	1.8506	0.6660	-0.0165
89*17*100	2.1300	0.9263	1.8477	0.6604	-0.0002

В таблице 1 приведены значения координат узлов характеристической сетки и компонент вектора скорости в точке пересечения меридиональной плоскости $\varphi = \pi/2$ с характеристическими поверхностями, ограничивающими пространственный веер разрежения. Результаты расчетов

получены на трех вложенных сетках. Как видно из приведенных результатов расчетов, полученных при измельчении шагов сетки в два и четыре раза, для исследуемой схемы на рассматриваемом течении реализуется второй порядок точности.

Таблица 2

$J_x * J_\varphi * J_p$	x	r	u	v	w
89*17*100	2.1332	0.9282	1.8479	0.6623	0.0012

В таблице 2 для сравнения приведены аналогичные результаты расчетов, полученные на наиболее подробной сетке с использованием простейшей модификации схемы [1]. Эта модификация состоит в реализации краевых условий третьего рода для интерполирующих сплайнов, использующихся при вычислении поперечных производных $dx/d\varphi$, $dr/d\varphi$, $du/d\varphi$, $dv/d\varphi$ и $dw/d\varphi$. Без этой модификации нельзя использовать схемы [1] для расчета рассматриваемых течений. Далее такую схему будем называть st, а схему, описанную ранее, Lt.

Опыт расчетов показывает, что в рассматриваемом течении окружная составляющая вектора скорости w должна в точности равняться нулю. Отличие этой составляющей от нуля позволяет оценить качество исследуемых схем. Из приведенных результатов расчетов видно, что погрешность определения компонент вектора скорости при использовании Lt схемы заметно меньше, нежели при использовании st схемы.

Другим способом оценки точности получающихся разностных решений является сравнение результатов расчетов с известными точными решениями. Первое уравнение системы (1) позволяет ввести в рассмотрение две функции тока ψ и χ такие, что

$$\varrho \bar{V} = \nabla \psi \times \nabla \chi.$$

В соответствии с [1] для определения функций тока в узлах характеристической сетки можно использовать следующие соотношения:

$$d\eta_i/dx = -wr^{-1}(d\eta_i/d\varphi)(u - wr^{-1}dx/d\varphi)^{-1}, \quad i = 1, 2; \quad \eta_1 = \psi, \quad \eta_2 = \chi,$$

справедливые вдоль проекции линии тока на меридиональную плоскость, определяемую соотношением

$$dr/dx = (v - wr^{-1}dr/d\varphi)(u - wr^{-1}dx/d\varphi)^{-1}.$$

Здесь полная производная по x берется вдоль рассматриваемой проекции линии тока. Начальные значения функций тока задавались так, что на начальной осесимметричной поверхности $\psi = 0.5$ на оси симметрии и $\psi = 1$ на стенке сопла, а $\chi \equiv \varphi$. Тогда максимальное отклонение функции тока ψ , вычисленной на стенке сопла, от единицы также позволяет оценить точность расчетов.

Таблица 3

Тип схемы.		Lt		st	
φ	$J_x * J_\varphi$	M	ψ	M	ψ
0	19*5	3.7969	1.0000	3.7898	1.0135
	39*9	3.8200	1.0000	3.8155	1.0025
$\pi/24$	19*5	3.8145	1.0001	3.8127	0.9960
	39*9	3.8060	1.0000	3.8060	1.0023
$\pi/12$	19*5	3.7277	1.0005	3.7359	1.0090
	39*9	3.7448	1.0001	3.7476	1.0038
$3\pi/24$	19*5	3.5533	1.0010	3.5688	1.0005
	39*9	3.5680	1.0003	3.5750	1.0050
$\pi/6$	19*5	3.2558	1.0020	3.2479	1.0075
	39*9	3.2522	1.0005	3.2391	0.9922

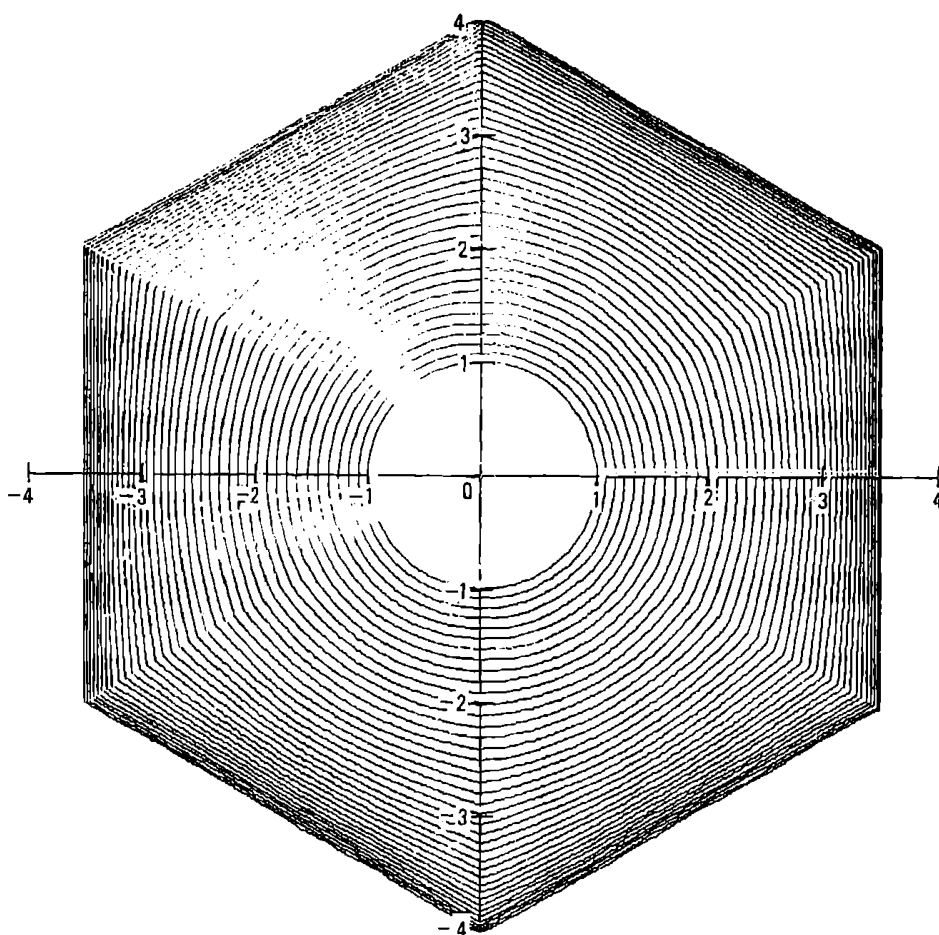


Рис. 2

В качестве второй тестовой задачи рассмотрена задача расчета сверхзвуковой части пространственного сопла следующей формы. Критическое сечение сопла $x = 0$ имело форму круга единичного радиуса, а выходное сечение $x = d$ имело форму правильного шестиугольника с радиусом вписанной окружности r_B . Поверхность сопла в каждой меридиональной плоскости $\varphi = \varphi_i$ задавалась полиномом четвертой степени по x . Коэффициенты полинома определялись из условий $r(0, \varphi_i) = 1$, $r(d, \varphi_i) = r_d(\varphi_i)$, $dr/dx|_{x=0} = r'_0$, $dr/dx|_{x=d} = r'_d$, $d^2r/dx^2|_{x=0} = r''_0$. Здесь $r_d(\varphi) = r_B/\cos\varphi$ — уравнение выходного контура сопла при $0 \leq \varphi \leq \pi/6$.

Конкретные значения параметров, определяющих форму сопла, были следующими $d = 9.0$, $r_B = 3.5$, $r'_d = 0.35$, $r'_d = 0.1$, $r''_0 = 0.05$. Расчеты проводились между соседними плоскостями симметрии. Соответствующая часть начальной осесимметричной характеристической поверхности № 19 из [7] разбивалась J_φ меридиональными плоскостями $\varphi = \text{const}$ и J_x плоскостями $x = \text{const}$.

В таблице 3 приведены значения числа Маха M и функции тока ψ в точках выходного контура сопла, полученные на двух вложенных сетках с помощью двух вариантов схем метода пространственных ха-

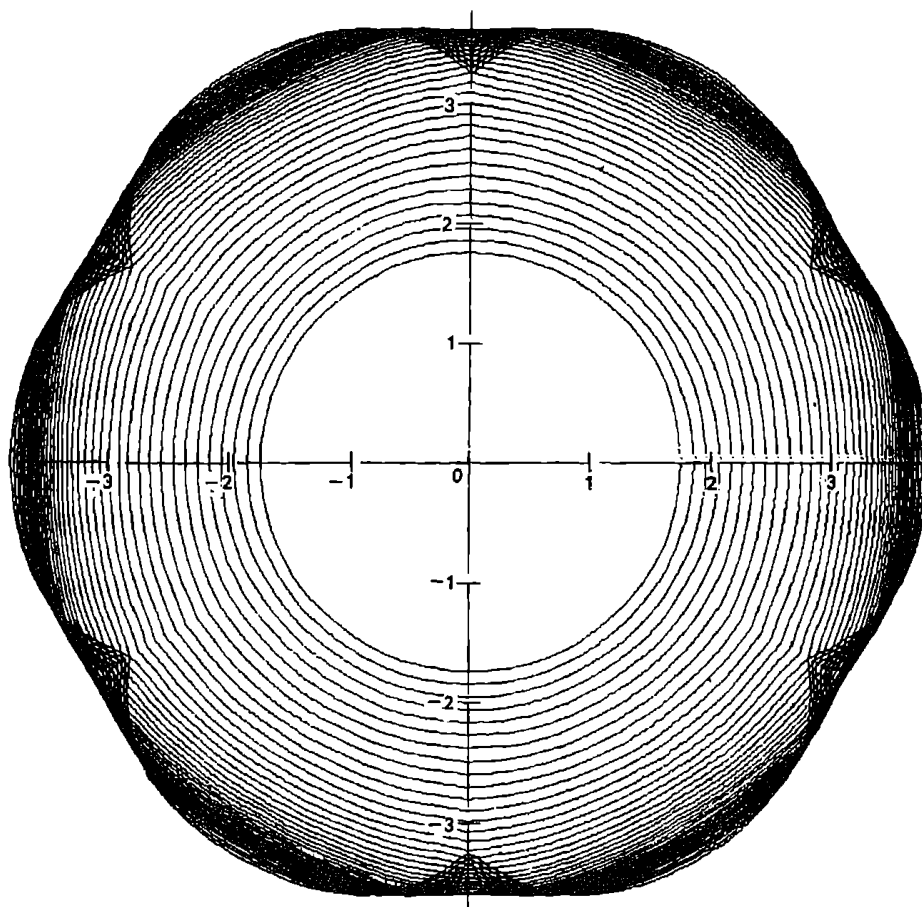


Рис. 3

рактистик. Как видно из приведенных результатов, в рассмотренном примере погрешность в определении функции тока, при измельчении характеристической сетки вдвое уменьшается в четыре раза для Lt схемы и менее чем в два раза для st схемы. На рис. 2 и 3 соответственно изображены формы поперечных сечений рассматриваемого сопла и распределения числа Маха в этих сечениях.

Литература

- [1] В. М. Борисов и И. Е. Михайлов, *Метод характеристик для расчета пространственных сверхзвуковых безвихревых течений*, ЖВМиМФ 18 (5) (1978), 1243–1252.
- [2] —, *К расчету сверхзвуковых пространственных течений в каналах, имеющих излом в поперечном сечении*, Числ. методы механ. сплошной среды., 17 (2) Наука, Новосибирск (1986), 10–14.
- [3] В. М. Борисов, *О структуре решений при оптимизации сверхзвуковых пространственных каналов*, Москва ВЦ АН СССР 1987.
- [4] С. Б. Стечкин и Ю. Н. Субботин, *Сплайны в вычислительной математике*, Наука, Москва 1976.
- [5] У. Г. Пирумов и Г. С. Росляков, *Течения газа в соплах*, МГУ, Москва 1978.
- [6] М. П. Левин, *Схема метода пространственных характеристик с использованием бихарактеристических соотношений*, ВЦ АН СССР, Москва 1985.
- [7] О. Н. Кацкова и Ю. Д. Шмыглевский, *Таблицы параметров осесимметричного сверхзвукового течения свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью*, Издательство АН СССР, Москва 1962.

*Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25 — May 29, 1987*
