Contents of Volume 104, Number 1

STUDIA MATHEMATICA

Managing Editors: **Z. Ciesielski, A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Detailed information for authors is given on the inside back cover. Manuscripts and correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

Correspondence concerning subscription, exchange and back numbers should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Publications Department

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-293997

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by
drukarnia
herman & herman
02-240 WARSZAWA, ul. Jakobinów 23

PRINTED IN POLAND

ISBN 83-85116-72-9 ISSN 0039-3223

STUDIA MATHEMATICA 104 (1) (1993)

Ensembles de non synthèse pour certains poids dissymétriques sur la droite

par

M. ZARRABI (Talence)

Abstract. Let w be a weight and let $L^1(\mathbb{R},w)$ be the algebra of all measurable functions f on $\mathbb{R}$ such that fw is integrable. It is known that if S is a closed countable subset of $\mathbb{R}$ then S satisfies the spectral synthesis in $L^1(\mathbb{R},w)$ for all weights w such that

$$\begin{cases} w(t)=1 \quad \text{for } t\ge 0,\\ \limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\operatorname{Log} w(-t)}{t^{1/2}}=0. \end{cases}$$

We prove here that this result fails for a large class of uncountable closed subsets of $\mathbb{R}$ with Lebesgue measure zero.

1. Introduction. Soit $L^1(\mathbb{R},w)$ l'algèbre de Beurling sur $\mathbb{R}$ définie par le poids w. On suppose que w vérifie les conditions

$$(1)\qquad \begin{cases} w(t)=1 \quad \text{pour } t\ge 0,\\ \limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\operatorname{Log} w(-t)}{t^{1/2}}=0. \end{cases}$$

Soit S une partie fermée de $\mathbb{R}$. Si S est dénombrable alors S est de synthèse spectrale dans $L^1(\mathbb{R},w)$ pour tous les poids w vérifiant (1) [7]. Nous montrons (Théorème 4.4) que ce dernier résultat ne s'étend pas en général aux ensembles S fermés de mesure nulle. Plus précisément, si $f\in L^1(\mathbb{R}^+)$, $f\not\equiv 0$, et telle que $\mathcal{L}(f)\equiv 0$ sur iS où $S\subseteq\mathbb{R}$ est un fermé non dénombrable, alors f n'est pas de synthèse spectrale pour S dans $L^1(\mathbb{R},w)$ pour un certain poids w satisfaisant (1).

Notons que dans ce travail, nous avons adapté à la droite réelle les méthodes utilisées sur le cercle unité dans [8] pour obtenir des résultats analogues.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 43A20; Secondary 43A45, 46J20.

Key words and phrases: synthèse spectrale, algèbres à poids, ensembles de mesure nulle.

2. Séries entières et transformée de Borel. Soit f une fonction entière et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ son développement en série de Taylor. On dit que f est de *type exponentiel* si $|f(z)| \leq Ae^{B|z|}$ pour certaines constantes positives A et B; f est alors dite de *type exponentiel* τ, où

$$\tau = \limsup_{|z|\to\infty} \frac{\operatorname{Log}^+ |f(z)|}{|z|}.$$

Il est montré dans [1, Théorème 5.3.1, p. 73] que f est une fonction entière de type exponentiel si, et seulement si, la série

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n / z^{n+1}$$

est convergente en un point z. La fonction F, notée $B(f)$, est appelée la *transformée de Borel* de f. On a la réciproque suivante :

PROPOSITION 2.1. *Soient M une constante positive et F une fonction analytique pour $|z| > M$ avec $|F(z)| \to 0$ quand $|z| \to \infty$. Alors F est la transformée de Borel d'une unique fonction entière de type exponentiel inférieur ou égal à M, qu'on note $f = B^{-1}(F)$.*

Preuve. Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n / z^{n+1}$, pour $|z| > M$, le développement de F en série de Laurent. Posons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n / n! z^n$. Comme on a $\limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} \leq M$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante K_ε telle que $|b_n| \leq K_\varepsilon (M+\varepsilon)^n$.

On a donc $|f(z)| \leq K_\varepsilon e^{(M+\varepsilon)|z|}$, ce qui entraîne que f est entière de type exponentiel inférieur ou égal à M.

Le résultat suivant permet de voir $B(f)$ comme la transformée de Carleman de la restriction de f à la droite réelle [1, p. 73].

PROPOSITION 2.2. *Soit f entière de type exponentiel τ. On a*

$$B(f)(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt}\, dt \qquad (\operatorname{Re} z > \tau),$$

$$B(f)(z) = -\int_{-\infty}^{0} f(t) e^{-zt}\, dt \qquad (\operatorname{Re} z < -\tau).$$

Nous allons maintenant donner une certaine réciproque de ce résultat, en exprimant la restriction à la droite réelle de f en fonction de sa transformée de Borel.

THÉORÈME 2.3. *Soient $a > 0$ et F une fonction analytique sur $\mathbb{C}\setminus[-ia, ia]$, avec $|F(z)| \to 0$ quand $|z| \to \infty$. Soit $f = B^{-1}(F)$. Alors pour tout $\sigma, t > 0$ on a*

$$f(t) = b_0 e^{-t} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(\sigma + iy) - \frac{b_0}{1 + \sigma + iy} \right) e^{(\sigma+iy)t}\, dy,$$

où $F(z) = \sum_{n\geq 0} b_n / z^{n+1}$ est le développement en série de Laurent de F.

Preuve. Soit $h(\theta) = \limsup_{r\to\infty} (\operatorname{Log} |f(re^{i\theta})|)/r$. L'hypothèse faite sur F montre que le diagramme indicateur conjugué D [1, p. 73] de f est inclus dans l'intervalle $[-ia, ia]$. La fonction support [1, p. 72] de D, qui est $h(-\theta)$ [1, Théorème 5.3.7], est donc majorée par $a|\sin\theta|$, fonction support de $[-ia, ia]$ [1, p. 70]. On en déduit que

$$\limsup_{\substack{|t|\to\infty \\ t\in\mathbb{R}}} \frac{\operatorname{Log} |f(t)|}{|t|} = 0.$$

Si on pose $f_0 = f_{|[0,\infty[}$ on voit que la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f_0)$ de f_0 est définie en z par une intégrale absolument convergente pour $\operatorname{Re} z > 0$, de même que $\mathcal{L}(f_0 - b_0 e^{-t})$.

On a

$$\mathcal{L}(f_0 - b_0 e^{-t})(\sigma + iy) = \int_0^{\infty} (f_0(t) - b_0 e^{-t}) e^{-\sigma t} e^{-iyt}\, dt.$$

Posons

$$g_\sigma(t) = (f_0(t) - b_0 e^{-t}) e^{-\sigma t}.$$

On a d'une part

$$\mathcal{L}(f_0 - b_0 e^{-t})(\sigma + iy) = \mathcal{F}(g_\sigma)(y),$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier, et d'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_0 - b_0 e^{-t})(\sigma + iy) &= F(\sigma + iy) - \frac{b_0}{1 + \sigma + iy} \\
&= \frac{b_0}{(\sigma + iy)(1 + \sigma + iy)} + \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{(\sigma + iy)^{n+1}} \\
&= \frac{b_0}{(\sigma + iy)(1 + \sigma + iy)} + \frac{1}{(\sigma + iy)^2} \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{(\sigma + iy)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $\varrho > a$ il existe une constante $c > 0$ (dépendante de ϱ) telle que

$$|\mathcal{F}(g_\sigma)(y)| \leq \frac{c}{|\sigma + iy|^2}$$

pour $|\sigma + iy| \geq \varrho$ et donc $\mathcal{F}(g_\sigma) \in L^1(\mathbb{R})$. On a par la formule d'inversion de Fourier

$$g_\sigma(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(g_\sigma)(y)e^{iyt}\,dy\,,$$

soit

$$f(t)=b_0e^{-t}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(\sigma+iy)-\frac{b_0}{1+\sigma+iy}\right)e^{(\sigma+iy)t}\,dt\,,$$

ce qui achève la preuve.

COROLLAIRE 2.4. *Les notations et hypothèses étant celles du théorème 2.3, si pour certaines constantes $m,k\ge 0$ et $\delta>0$ on a*

$$|F(x+iy)|\le ke^{m/x}\qquad(|y|\le a+\delta,\ 0<x\le\delta)\,,$$

alors

$$|f(t)|=O(e^{2(mt)^{1/2}})\qquad(t\to\infty)\,.$$

Preuve. Soit σ, $0<\sigma\le\delta$ et $t>0$. On a

$$\begin{aligned}|f(t)|&\le|b_0|+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\sigma+iy)-\frac{b_0}{1+\sigma+iy}\right|e^{\sigma t}\,dy\\&\le|b_0|+\frac{1}{2\pi}\int_{|y|\ge a+\delta}\left|F(\sigma+iy)-\frac{b_0}{1+\sigma+iy}\right|e^{\sigma t}\,dy\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|F(\sigma+iy)|e^{\sigma t}\,dy\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}\frac{|b_0|}{((1+\sigma)^2+y^2)^{1/2}}e^{\sigma t}\,dy\,.\end{aligned}$$

On a vu dans la preuve du théorème 2.3 que

$$\left|F(\sigma+iy)-\frac{b_0}{1+\sigma+iy}\right|\le\frac{c}{|\sigma+iy|^2}\qquad\text{pour }|y|\ge a+\delta\,,$$

où c est une constante ne dépendant que de δ. On a donc

$$\begin{aligned}|f(t)|&\le|b_0|+\frac{1}{2\pi}e^{\sigma t}\int_{|y|\ge a+\delta}\frac{c}{\sigma^2+y^2}\,dy\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}ke^{m/\sigma+\sigma t}\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|b_0|e^{\sigma t}\,dy\,.\end{aligned}$$

En prenant $\sigma=(m/t)^{1/2}$ avec t assez grand pour que $(m/t)^{1/2}\le\delta$, on

obtient

$$\begin{aligned}|f(t)|&\le|b_0|+\frac{c}{\pi(a+\delta)}e^{(mt)^{1/2}}+\frac{a+\delta}{\pi}ke^{2(mt)^{1/2}}+\frac{a+\delta}{\pi}|b_0|e^{(mt)^{1/2}}\\&\le\left(|b_0|+\frac{c}{\pi(a+\delta)}+\frac{a+\delta}{\pi}(k+|b_0|)\right)e^{2(mt)^{1/2}}\,.\end{aligned}$$

Donc on a bien $|f(t)|=O(e^{2(mt)^{1/2}})$ $(t\to\infty)$.

3. Algèbres de Beurling. Soit w une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$w(t)\ge 1\quad\text{et}\quad w(t+s)\le w(t)w(s)\qquad(t,s\in\mathbb{R})\,.$$

On dit que w est un *poids*. On pose

$$L^1(\mathbb{R},w)=\left\{f\in L^1(\mathbb{R}):\|f\|_w=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|w(t)\,dt<\infty\right\}.$$

Le produit de convolution de deux éléments de $L^1(\mathbb{R})$, f et g, est défini par

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\,dt\qquad(x\in\mathbb{R})\,.$$

Il est facile de vérifier que $L^1(\mathbb{R},w)$ muni de la norme $\|\cdot\|_w$ et de la convolution comme produit est une algèbre de Banach commutative non unitaire. On a les propriétés bien connues suivantes :

(i) Le dual de $L^1(\mathbb{R},w)$ s'identifie à $L^\infty(\mathbb{R},w^{-1})$, ensemble des fonctions G, mesurables et vérifiant $|G(-t)|\le cw(t)$ p.p., où c est une constante positive. La dualité est définie par

$$\langle G,f\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)G(-t)\,dt\,.$$

(ii) L'ensemble des caractères de $L^1(\mathbb{R},w)$ s'identifie à l'ensemble $\{-\alpha\le\operatorname{Re}z\le-\beta\}$, où

$$\alpha=\lim_{t\to\infty}\frac{\operatorname{Log}w(t)}{t}\quad\text{et}\quad\beta=\lim_{t\to-\infty}\frac{\operatorname{Log}w(t)}{t}\,.$$

(iii) L'algèbre $L^1(\mathbb{R},w)$ est régulière au sens de [6, VIII, 5.1, 5.11] si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Log}w(t)}{1+t^2}\,dt<\infty\quad[6,\text{ p. }118,\text{ Ex. }7]\,.\tag{2}$$

Sous la condition (1) on a $\alpha=\beta=0$ et donc l'ensemble des caractères de $L^1(\mathbb{R},w)$ s'identifie à $\mathbb{R}$ via l'application $x\to\chi_x$ où χ_x est le caractère qui associe à f le nombre complexe $\widehat{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}\,dt$. On reconnaît que $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f. La condition (1) assure aussi la condition (2) et donc que l'algèbre $L^1(\mathbb{R}, w)$ est régulière.

4. Synthèse spectrale. Soit w un poids vérifiant la condition (2). Soit S une partie fermée de $\mathbb{R}$. On dit que $f \in L^1(\mathbb{R}, w)$ est *de synthèse spectrale pour* S *dans* $L^1(\mathbb{R}, w)$ s'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1(\mathbb{R}, w)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{f_n}$ s'annule sur un voisinage de S et $\|f_n - f\|_w \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On dit que S est *de synthèse spectrale dans* $L^1(\mathbb{R}, w)$ si toute fonction s'annulant sur S est de synthèse spectrale pour S dans $L^1(\mathbb{R}, w)$.

Si I est un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}, w)$ on pose

$$h(I) = \{x \in \mathbb{R} : \widehat{f}(x) = 0 \ (f \in I)\}.$$

Notons

$$I_S^w = \{f \in L^1(\mathbb{R}, w) : \widehat{f}_{|S} = 0\},$$

et soit J_S^w l'ensemble des fonctions qui sont de synthèse spectrale pour S dans $L^1(\mathbb{R}, w)$. I_S^w et J_S^w sont deux idéaux fermés de $L^1(\mathbb{R}, w)$. Puisque l'algèbre $L^1(\mathbb{R}, w)$ est régulière on a $h(I_S^w) = h(J_S^w) = S$ et $J_S^w \subseteq I \subseteq I_S^w$ pour tout idéal fermé I tel que $h(I) = S$ [6, p. 224].

On voit donc que S est de synthèse spectrale si et seulement s'il existe un unique idéal I tel que $h(I) = S$.

La condition (1) joue un rôle important pour la synthèse spectrale. D'une part, si

$$\begin{cases} w(t) = 1 \quad \text{pour } t \ge 0, \\ \limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\operatorname{Log} w(-t)}{t^{1/2}} > 0, \end{cases}$$

alors les points ne sont pas de synthèse spectrale dans $L^1(\mathbb{R}, w)$ [5, Théorème 8.1]. Il en est de même si

$$\liminf_{|t|\to\infty} \frac{w(t)}{|t|} > 0.$$

En effet, si $x \in \mathbb{R}$ les deux idéaux $I_{\{x\}}^w$ et

$$I = \{f \in L^1(\mathbb{R}, w) : \widehat{f}(x) = \widehat{f}'(x) = 0\}$$

sont fermés, distincts et vérifient $h(I_{\{x\}}^w) = h(I) = \{x\}$.

D'autre part, les ensembles fermés dénombrables, et en particulier les points, sont de synthèse spectrale dans $L^1(\mathbb{R}, w)$ pour tous les poids w vérifiant la condition (1) [7, Théorème 3.6]. Nous allons montrer que ce dernier résultat ne s'étend pas aux ensembles fermés de mesure nulle. Nous aurons besoin de trois lemmes.

Notons par P^+ le demi-plan droit $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ et par $H^\infty(P^+)$ l'ensemble des fonctions holomorphes et bornées sur P^+.

Le résultat suivant donne un critère d'annulation pour les fonctions holomorphes sur P^+.

LEMME 4.1. *Soit J une fonction intérieure non constante sur P^+. Si $f \in J^n H^\infty(P^+)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f \equiv 0$.*

Preuve. Ce résultat a été obtenu dans [8, Proposition 2.2] pour les fonctions holomorphes dans le disque unité. On se ramène à ce cas en utilisant la transformation conforme $z \to \frac{1+z}{1-z}$.

LEMME 4.2. *Soit μ une mesure singulière à support compact. Soit*

$$J(z) = \exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{tz+i}{t+iz}\,d\mu(t)\Big) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\mu).$$

Alors, il existe une constante positive c telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|J(z)| = O\Big(\exp\Big(\frac{c\|\nu\| + \varepsilon}{|\operatorname{Re} z|}\Big)\Big) \qquad (\operatorname{Re} z \to 0^-),$$

où ν est la partie discrète de μ.

Preuve. On reconnaît que J est la fonction intérieure sur P^+ associée à μ. Soit $z = x + iy$. On a

$$|J(z)| = \exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t^2+1)x}{(t-y)^2 + x^2}\,d\mu(t)\Big).$$

Pour $x < 0$ on a

$$\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t^2+1)x}{(t-y)^2+x^2}\,d\nu(t)\Big) \le \exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+1}{x}\,d\nu(t)\Big) \le \exp\Big(c\frac{\|\nu\|}{|x|}\Big),$$

où $c = \sup\{t^2 + 1 : t \in \operatorname{supp}\mu\}$.

Soit λ la partie continue de μ. Comme λ est continue et à support compact, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $\lambda(l) < \varepsilon$ pour tout intervalle l de longueur inférieur à $2\delta_\varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t^2+1)x}{(t-y)^2+x^2}\,d\lambda(t)\Big) &= \exp\Big(-\int_{|t-y|\le\delta_\varepsilon} \frac{(t^2+1)x}{(t-y)^2+x^2}\,d\lambda(t) - \int_{|t-y|>\delta_\varepsilon} \frac{(t^2+1)x}{(t-y)^2+x^2}\,d\lambda(t)\Big) \\ &\le \exp\Big(\frac{c\varepsilon}{|x|} + \frac{c\|\lambda\||x|}{\delta_\varepsilon^2}\Big).\end{aligned}$$

Ces majorations sont indépendantes de y. Donc

$$\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t^2+1)x}{(t-y)^2+x^2}\,d\lambda(t)\Big)=O\Big(\exp\frac{c\varepsilon}{|x|}\Big)\qquad(x\to 0^-)\,.$$

Ceci achève la preuve.

LEMME 4.3. *Soit $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue, bornée sur $]-\infty,0]$ et telle que $(\mathrm{Log}^+|G(t)|)/t^{1/2}\to 0$ quand $t\to\infty$. Alors il existe un poids w sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition* (1) *tel que $\sup_{t\in\mathbb{R}}|G(-t)|/w(t)<\infty$.*

Preuve. Posons pour $t<0$,

$$\gamma_t=\sup_{s\ge -t}\frac{\mathrm{Log}^+|G(s)|}{s^{1/2}}\quad\text{et}\quad v_t=e^{\gamma_t(-t)^{1/2}}\,.$$

On a pour $t,s<0$

$$v_{t+s}=e^{\gamma_{t+s}(-t-s)^{1/2}}\le e^{\gamma_{t+s}(-t)^{1/2}}e^{\gamma_{t+s}(-s)^{1/2}}\le v_tv_s\,.$$

Posons $w(t)=1$ pour $t\ge 0$ et $w(t)=\sup_{t\le s<0}v_s$ pour $t<0$.

On voit facilement que w est le poids désiré.

Notons que si w est un poids vérifiant la condition (1) alors $L^1(\mathbb{R}^+)\subset L^1(\mathbb{R},w)$ puisque $w(t)=1$ pour $t\ge 0$.

THÉORÈME 4.4. *Soit S un fermé de $\mathbb{R}$ non dénombrable et de mesure nulle. Alors il existe un poids w vérifiant la condition* (1) *tel que si $f\in L^1(\mathbb{R}^+)$ est de synthèse spectrale pour S dans $L^1(\mathbb{R},w)$ alors $f\equiv 0$ p.p.*

Preuve. Quitte à prendre un sous-ensemble fermé non dénombrable et de mesure nulle de S on peut supposer que S est borné. Soit μ une mesure positive et continue à support dans S (une telle mesure existe puisque S est non dénombrable). Soit J la fonction intérieure associée à μ. On a

$$J(z)=\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{tz+i}{t+iz}\,d\mu(t)\Big)$$

et J est analytique sur $\mathbb{C}\backslash(iS)$.

Soit $V(z)=J(z)-J(\infty)$ où $J(\infty)$ est la limite de $J(z)$ à l'infini. La fonction V vérifie les hypothèses de la proposition 2.1 et donc $B^{-1}(V)$ existe. Posons $G(z)=B^{-1}(V)(-z)$, $z\in\mathbb{C}$.

Il vient du lemme 4.2 et du corollaire 2.4 que G satisfait les deux conditions suivantes :

(i) G est bornée sur $]-\infty,0]$.
(ii) $\lim_{t\to\infty}(\mathrm{Log}^+|G(t)|)/t^{1/2}=0$.

D'après le lemme 4.3 il existe un poids w^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (1) et tel que la restriction à la droite réelle de G est dans $L^\infty(\mathbb{R},(w^1)^{-1})$.

Soit $g\in L^1(\mathbb{R},w^1)$. On rappelle que

$$\langle\overline{G},g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{G}(-t)g(t)\,dt\,.$$

Posons $G_\varepsilon(t)=e^{-\varepsilon|t|}G(t)$ ($\varepsilon>0$). La fonction $G_\varepsilon\in L^\infty(\mathbb{R},(w^1)^{-1})\cap L^1(\mathbb{R})$ et

$$\langle\overline{G}_\varepsilon,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon|t|}\overline{G}(-t)g(t)\,dt\,.$$

On voit donc que $\overline{G}_\varepsilon$ converge faiblement vers $\overline{G}$ quand $\varepsilon\to 0$. On a

$$\langle\overline{G}_\varepsilon,g\rangle=(g*\overline{G}_\varepsilon)(0)\quad\text{et}\quad\widehat{g*\overline{G}_\varepsilon}=\widehat{g}\widehat{\overline{G}}_\varepsilon\,.$$

Or

$$\widehat{\overline{G}}_\varepsilon(y)=\overline{V}(\varepsilon+iy)-\overline{V}(-\varepsilon+iy)$$

est intégrable et par conséquent $\widehat{g}\widehat{\overline{G}}_\varepsilon$ est aussi intégrable. Puisque $g*\overline{G}_\varepsilon$ est une fonction continue car $\overline{G}_\varepsilon\in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g\in L^1(\mathbb{R})$, la formule d'inversion de Fourier entraîne que

$$g*\overline{G}_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(y)\widehat{\overline{G}}_\varepsilon(y)e^{ixy}\,dy$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$. Pour $x=0$, on a

$$\begin{aligned}\langle\overline{G}_\varepsilon,g\rangle&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(y)\widehat{\overline{G}}_\varepsilon(y)\,dy\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(y)[\overline{V}(\varepsilon+iy)-\overline{V}(-\varepsilon+iy)]\,dy\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\langle\overline{G},g\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(y)[\overline{V}(\varepsilon+iy)-\overline{V}(-\varepsilon+iy)]\,dy\,.$$

Si $\widehat{g}$ est nulle sur un voisinage de S alors on vérifie facilement que la famille de fonctions $y\to\widehat{g}(y)[\overline{V}(\varepsilon+iy)-\overline{V}(-\varepsilon+iy)]$ $(0<\varepsilon\le 1)$ est dominée par une fonction intégrable et que

$$\widehat{g}(y)[\overline{V}(\varepsilon+iy)-\overline{V}(-\varepsilon+iy)]\to 0\qquad\text{quand }\varepsilon\to 0\ (y\in\mathbb{R})\,.$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée on a $\langle\overline{G},g\rangle=0$ et par conséquent la fonctionnelle $\overline{G}$ est orthogonale à l'idéal des fonctions qui sont de synthèse spectrale pour S dans $L^1(\mathbb{R},w^1)$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. On a

$$\langle \overline{G}_\varepsilon, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_\varepsilon(-t) f(t)\,dt = \langle \overline{H}_\varepsilon, f\rangle\,,$$

où $H_\varepsilon = G_{\varepsilon|]-\infty,0]}$.

Pour $z \in P^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ et $t \geq 0$, posons $u_z(t) = e^{zt}$.

Soient $z, z_0 \in P^-$. La fonction $u_z * u_{z_0} * f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et donc de même que plus haut on a

$$\begin{aligned}\langle \overline{G}_\varepsilon, u_z * u_{z_0} * f\rangle &= \frac{1}{2\pi}\langle \overline{\widehat{H}}_\varepsilon, u_z * u_{z_0} * f\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(y)\overline{V}(\varepsilon + iy)}{(z - iy)(z_0 - iy)}\,dy\,.\end{aligned}$$

On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\langle \overline{G}, u_z * u_{z_0} * f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(y)\overline{V}(iy)}{(z - iy)(z_0 - iy)}\,dy\,.$$

Si en plus f est de synthèse spectrale pour S dans $L^1(\mathbb{R}, w^1)$, il en est de même pour $u_z * u_{z_0} * f$ et on a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(y)\overline{V}(iy)}{(z - iy)(z_0 - iy)}\,dy = 0\,.$$

D'après [3, p. 88, Ex. 2], $\widehat{f}(y)\overline{V}(iy)$ est limite non tangentielle h^* d'une fonction $h \in H^\infty(P^+)$. On a $\widehat{f}(y) = \mathcal{L}(f)(iy)$ où $\mathcal{L}(f)$ est la transformée de Laplace de f sur P^+. On obtient $\overline{J}\mathcal{L}(f) = \overline{J}(\infty)\mathcal{L}(f) + h^*$ sur $i\mathbb{R}$.

Puisque J est de module 1 sur $i\mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(f) = J(\overline{J}(\infty)\mathcal{L}(f) + h^*) \qquad \text{p.p. sur } i\mathbb{R}\,,$$

soit

$$\mathcal{L}(f)(z) = J(z)[\overline{J}(\infty)\mathcal{L}(f)(z) + h(z)] \qquad (z \in P^+)\,.$$

Donc $\mathcal{L}(f) \in JH^\infty(P^+)$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mu_n = n\mu$; μ_n est une mesure positive singulière continue à support contenu dans S. La mesure intérieure associée à μ_n est J^n. D'après ce qui précède on peut construire un poids $w^{(n)}$ vérifiant la condition (1) tel que si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ vérifie la $w^{(n)}$-synthèse pour S alors $\mathcal{L}(f) \in J^n H^\infty(P^+)$.

On peut supposer que la suite des poids $w^{(n)}$ est croissante, c'est-à-dire $w_t^{(n)} \leq w_t^{(n+1)}$ $(t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$. Il suffit en effet de remplacer $w_t^{(n)}$ par $\sup_{k\leq n} w_t^{(k)}$.

Pour chaque n il existe un entier $p(n)$ tel que

$$\frac{\operatorname{Log} w_{-t}^{(n+1)}}{t^{1/2}} \leq \frac{1}{n+1} \qquad \text{si } t \geq p(n)$$

et on peut supposer que la suite $(p(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est croissante.

On pose

$$\begin{aligned}v(-t) &= \frac{p(n+1) - t}{p(n+1) - p(n)} w_{-t}^{(n)} + \frac{t - p(n)}{p(n+1) - p(n)} w_{-t}^{(n+1)} \\ &\qquad\qquad \text{pour } t \in [p(n), p(n+1)]\,, \\ v(-t) &= w_{-t}^{(1)} \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq p(1)\,, \\ v(t) &= 1 \qquad \text{pour } t \geq 0\,.\end{aligned}$$

Alors v est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\frac{\operatorname{Log} v(-t)}{t^{1/2}} \leq \frac{\operatorname{Log} w_{-t}^{(n+1)}}{t^{1/2}} \leq \frac{1}{n+1} \qquad \text{pour } p(n) \leq t \leq p(n+1)\,,$$

donc $(\operatorname{Log} v(-t))/t^{1/2} \to 0$ quand $t \to \infty$.

De plus $v(-t) \geq w_t^{(n)}$ pour $t \geq p(n)$. D'après le lemme 4.3 il existe un poids w continu vérifiant la condition (1) et tel que $\sup_{t\in\mathbb{R}} v(t)/w(t) < \infty$. Donc $\sup_{t\in\mathbb{R}} w_t^{(n)}/w(t) < \infty$ pour tout $n \geq 1$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ vérifie la w-synthèse pour S alors f vérifie la $w^{(n)}$-synthèse pour S et par conséquent $\mathcal{L}(f) \in J^n H^\infty(P^+)$ pour tout $n \geq 1$. D'après le lemme 4.1, $\mathcal{L}(f) = 0$ et par conséquent $f = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remerciements. Je tiens à remercier le referee pour ses différentes remarques concernant ce travail.

Bibliographie

[1] R. P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New York 1954.

[2] J. Esterle, E. Strouse et F. Zouakia, *Stabilité asymptotique de certains semi-groupes d'opérateurs*, J. Operator Theory, à paraître.

[3] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, 1981.

[4] I. M. Gelfand, D. A. Raikov and G. E. Šilov, *Commutative Normed Rings*, Chelsea, New York 1964.

[5] V. P. Gurariĭ, *Harmonic analysis in spaces with weights*, Trans. Moscow Math. Soc. 35 (1979), 21–75.

[6] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover, New York 1976.

[7] M. Zarrabi, *Ensembles de synthèse pour certaines algèbres de Beurling*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 35 (1990), 385–396.

[8] M. Zarrabi, *Synthèse spectrale dans certaines algèbres de Beurling sur le cercle unité*, Bull. Soc. Math. France 118 (1990), 241–249.

U.F.R DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ BORDEAUX I
351, COURS DE LA LIBÉRATION
F-33405 TALENCE CEDEX, FRANCE
E-mail: ZARRABI@ECOLE.GRECO-PROG.FR

Received October 16, 1990 (2729)
Revised version April 23, 1992 and October 6, 1992

STUDIA MATHEMATICA 104 (1) (1993)

Unconditional ideals in Banach spaces

by

G. GODEFROY (Paris and Columbia, Mo.), N. J. KALTON (Columbia, Mo.) and P. D. SAPHAR (Haifa)

Abstract. We show that a Banach space with separable dual can be renormed to satisfy hereditarily an "almost" optimal uniform smoothness condition. The optimal condition occurs when the canonical decomposition $X^{***} = X^{\perp} \oplus X^*$ is unconditional. Motivated by this result, we define a subspace X of a Banach space Y to be an h-ideal (resp. a u-ideal) if there is an hermitian projection P (resp. a projection P with $\|I - 2P\| = 1$) on Y^* with kernel $X^{\perp}$. We undertake a general study of h-ideals and u-ideals. For example we show that if a separable Banach space X is an h-ideal in X^{**} then X has the complex form of Pełczyński's property (u) with constant one and the Baire-one functions $Ba(X)$ in X^{**} are complemented by an hermitian projection; the converse holds under a compatibility condition which is shown to be necessary. We relate these ideas to the more familiar notion of an M-ideal, and to Banach lattices.

We further investigate when, for a separable Banach space X, the ideal of compact operators $\mathcal{K}(X)$ is a u-ideal or an h-ideal in $\mathcal{L}(X)$ or $\mathcal{K}(X)^{**}$. For example, we show that $\mathcal{K}(X)$ is an h-ideal in $\mathcal{K}(X)^{**}$ if and only if X has the "unconditional compact approximation property" and X is an M-ideal in X^{**}.

1. Introduction. If X is a subspace of a Banach space Y we will say that X is a *summand* of Y if it is the range of a contractive projection; we will say that X is an *ideal* in Y if $X^{\perp}$ is the kernel of a contractive projection on Y^* (this differs from the terminology in [8]). A simple example is that X is always an ideal in its bidual X^{**}. It can be shown that X is an ideal in Y if it is "locally" a summand; more precisely, X is an ideal in Y if and only if for every finite-dimensional subspace F of Y and for every $\varepsilon > 0$, there exists an operator $S : F \to X$ with $\|S\| < 1 + \varepsilon$ and $Sx = x$ for $x \in X \cap F$. For the case when $Y = X^{**}$ this is known as the Principle of Local Reflexivity (see [48]); see also [43] for similar results in the isomorphic version.

In this paper we will be concerned with special classes of ideals where additional constraints are imposed on the projections. There is an extensive

1991 *Mathematics Subject Classification*: 46B05, 46B20.
Key words and phrases: M-ideal, hermitian operator, unconditional convergence.
Research of the second author supported by NSF grant DMS-8901626.