STUDIA MATHEMATICA 123 (3) (1997)

Espaces BMO, inégalités de Paley et multiplicateurs idempotents

par

HUBERT LELIÈVRE (Paris)

Abstract. Generalizing the classical BMO spaces defined on the unit circle $\mathbb{T}$ with vector or scalar values, we define the spaces $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ and $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T}, B)$, where $\psi_q(x) = e^{x^q} - 1$ for $x \geq 0$ and $q \in [1, \infty[$, and where B is a Banach space. Note that $\mathrm{BMO}_{\psi_1}(\mathbb{T}) = \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ and $\mathrm{BMO}_{\psi_1}(\mathbb{T}, B) = \mathrm{BMO}(\mathbb{T}, B)$ by the John–Nirenberg theorem.

Firstly, we study a generalization of the classical Paley inequality and improve the Blasco–Pełczyński theorem in the vector case. Secondly, we compute the idempotent multipliers of $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$. Pisier conjectured that the supports of idempotent multipliers of $L^{\psi_q}(\mathbb{T})$ form a Boolean algebra generated by the periodic parts and the finite parts for $2 < q < \infty$. We confirm this conjecture with $L^{\psi_q}(\mathbb{T})$ replaced by $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$.

I. Introduction. Notons $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs. Généralisons d'abord brièvement les espaces de Hardy atomiques et BMO classiques définis sur le cercle unité $\mathbb{T}$ à valeurs scalaires ou vectorielles. Rappelons leur définition dans le cas scalaire.

Soit $\mathcal{I}$ la famille des arcs de $\mathbb{T}$, et m_I la mesure de Lebesgue normalisée sur $I \in \mathcal{I}$. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $I \in \mathcal{I}$, on pose $f_I = \int_I f\, dm_I$. Alors $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ se définit comme suit :

$$f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ et } \|f\|_* = \sup_{I\in\mathcal{I}} \|f - f_I\|_{L^1(I,m_I)} < \infty.$$

On pose $\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})} = |f_{\mathbb{T}}| + \|f\|_*$. Alors $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ muni de cette norme est un espace de Banach.

Si on remplace la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ par la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ avec $1 < p < \infty$, voire par $\|\cdot\|_{L^{\psi_1}}$, norme d'Orlicz associée à la fonction d'Young ψ_1 (où pour tout $x \geq 0$ et pour tout $q \in [1, \infty[$, $\psi_q(x) = e^{x^q} - 1$), alors par le théorème de John–Nirenberg on obtient le même espace.

Rappelons que l'espace de Hardy classique $H^1(\mathbb{T})$ peut être défini comme sous-espace de $L^1(\mathbb{T})$ de la façon suivante :

$$H^1(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \forall n < 0,\ \widehat{f}(n) = 0\},$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 42A45, 42A55, 43A46, 46B20, 46E30.

où $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de f. Maintenant, il est devenu classique que les fonctions dans $H^1(\mathbb{T})$ admettent des "décompositions atomiques". On dit qu'une fonction $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ est un *atome* si et seulement si ou bien $a \equiv 1$ ou bien a possède les propriétés suivantes :

Il existe $I \in \mathcal{I}$ contenant le support de a tel que $\widehat{a}(0) = 0$ et $\|a\|_{L^\infty} \le 1/|I|$ où $|I|$ est la mesure de Lebesgue de I. Par définition,

$$f \in H^1_{\rm at}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \exists (a_i)_{i=1}^\infty \text{ atomes, } (\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \ell^1,\ f = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i a_i.$$

On norme $H^1_{\rm at}(\mathbb{T})$ en posant

$$\|f\|_{1,\rm at} = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^\infty |\lambda_i| : f = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i a_i,\ (a_i)_{i=1}^\infty \text{ atomes, } (\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \ell^1\Big\}.$$

Alors $H^1(\mathbb{T}) \subset H^1_{\rm at}(\mathbb{T})$ et la norme de $H^1(\mathbb{T})$ est équivalente à celle induite par $H^1_{\rm at}(\mathbb{T})$, qui est un espace de Banach.

Remarquons qu'on peut remplacer la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ par la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ avec $1 < p < \infty$ en remplaçant la troisième condition par $\|a\|_p \le |I|^{1/p-1}$. On obtient alors le même espace.

Le célèbre théorème de dualité de Fefferman nous dit que $H^1_{\rm at}(\mathbb{T})^* = {\rm BMO}(\mathbb{T})$ avec des normes équivalentes.

On considère aussi les analogues de ces espaces pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Si B est un espace de Banach, les espaces résultants sont notés respectivement ${\rm BMO}(\mathbb{T}, B)$ et $H^1_{\rm at}(\mathbb{T}, B)$. Alors ${\rm BMO}(\mathbb{T}, B^*)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $H^1_{\rm at}(\mathbb{T}, B)^*$.

Nous généralisons les définitions ci-dessus en remplaçant les normes L^p par des normes d'Orlicz. Soit Φ une fonction d'Young. L'*espace* BMO *généralisé* associé à Φ est défini de la façon suivante :

$$f \in {\rm BMO}_\Phi(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ et } \|f\|_{*,\Phi} = \sup_{I\in\mathcal{I}} \|f - f_I\|_{L^\Phi(I,m_I)} < \infty.$$

On pose $\|f\|_{{\rm BMO}_\Phi(\mathbb{T})} = |f_{\mathbb{T}}| + \|f\|_{*,\Phi}$. Alors ${\rm BMO}_\Phi(\mathbb{T})$ est un espace de Banach.

Soit $\mathcal{M}^\Phi(\mathbb{T})$ la fermeture dans $L^\Phi(\mathbb{T})$ des fonctions simples. Un $(1,\Phi)$-*atome* a est un élément de $\mathcal{M}^\Phi(\mathbb{T})$ tel que ou bien $a \equiv 1$, ou bien il existe $I \in \mathcal{I}$ contenant le support de a tel que

$$\widehat{a}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \|a\|_{L^\Phi(I,m_I)} \le 1/|I|.$$

L'*espace de Hardy atomique généralisé* associé à Φ est défini par

$$f \in H^1_\Phi(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \exists (a_i)_{i=1}^\infty \ (1,\Phi)\text{-atomes, } (\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \ell^1,\ f = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i a_i.$$

On norme $H^1_\Phi(\mathbb{T})$ en posant

$$\|f\|_{1,\Phi} = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^\infty |\lambda_i| : f = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i a_i,\ (a_i)_{i=1}^\infty \text{ atomes, } (\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \ell^1\Big\}.$$

Alors $H^1_\Phi(\mathbb{T})$ est un espace de Banach.

Si B est un espace de Banach, on définit similairement ${\rm BMO}_\Phi(\mathbb{T}, B)$ et $H^1_\Phi(\mathbb{T}, B)$, espaces de fonctions à valeurs vectorielles.

On montre encore par la même méthode que celle dans le cas classique que $H^1_\Phi(\mathbb{T})^* = {\rm BMO}_\Psi(\mathbb{T})$, où Ψ est la fonction complémentaire de Φ, avec des normes équivalentes.

Rappelons que, pour $1 \le q < \infty$, ψ_q est équivalente à la fonction complémentaire de φ_q au sens d'Orlicz (où $\varphi_q(x) = x[\log(x+1)+1]^{1/q}$); on en déduit en particulier que $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})^* = {\rm BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$.

Si B est un espace de Banach, ${\rm BMO}_\Psi(\mathbb{T}, B^*)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $H^1_\Phi(\mathbb{T}, B)^*$ (pour plus de détails voir thèse [L]).

Nous généralisons l'inégalité classique de Paley. Si $\varrho > 1$ et si $(n_k)_{k=1}^\infty$ est une suite ϱ-lacunaire à la Hadamard, alors il existe une constante $C_\varrho > 0$ telle que pour toute fonction $f \in H^1(\mathbb{T})$,

$$\Big(\sum_{k=1}^\infty |\widehat{f}(n_k)|^2\Big)^{1/2} \le C_\varrho \|f\|_1.$$

Cette inégalité reste encore vraie pour des fonctions dans $H^1_{\rm at}(\mathbb{T})$. Il existe une constante $C_\varrho > 0$ telle que pour toute fonction $f \in H^1_{\rm at}(\mathbb{T})$,

$$\Big(\sum_{k=1}^\infty |\widehat{f}(n_k)|^2\Big)^{1/2} \le C_\varrho \|f\|_{1,\rm at}.$$

Par dualité, il existe $C_\varrho > 0$ telle que pour toute suite $(a_k)_{k=1}^\infty$ dans ℓ^2,

$$\Big\| \sum_{k=1}^\infty a_k e^{in_k\theta} \Big\|_{{\rm BMO}(\mathbb{T})} \le C_\varrho \|(a_k)\|_{\ell^2}.$$

Remarquant que l'inégalité inverse est triviale (car la norme de ${\rm BMO}(\mathbb{T})$ domine la norme de $L^2(\mathbb{T})$), on en déduit qu'une suite lacunaire est équivalente dans ${\rm BMO}(\mathbb{T})$ à la base canonique de ℓ^2 (en abrégé engendre ℓ^2 dans ${\rm BMO}(\mathbb{T})$).

On renforce ces résultats classiques en considérant les fonctions ψ_q et φ_q, pour $1 \le q < \infty$. On a ${\rm BMO}(\mathbb{T}) = {\rm BMO}_{\psi_1}(\mathbb{T})$ et $H^1_{\rm at}(\mathbb{T}) = H^1_{\varphi_1}(\mathbb{T})$ avec des normes équivalentes (théorème de John–Nirenberg). On a aussi les inclusions ${\rm BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T}) \subset {\rm BMO}_{\psi_p}(\mathbb{T})$ et $H^1_{\varphi_p}(\mathbb{T}) \subset H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ pour $1 \le p < q < \infty$.

Notre renforcement de l'inégalité de Paley ci-dessus est le suivant :

Il existe une constante $C_\varrho > 0$ telle que pour tout $f \in H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T})$,

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(n_k)|^2\Big)^{1/2} \le C_\varrho \|f\|_{1,\varphi_2}.$$

Par dualité, on voit qu'une suite lacunaire engendre ℓ^2 dans $\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T})$. Il faut signaler que l'indice 2 est optimal, c'est-à-dire, qu'on ne peut pas remplacer $H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T})$ ou $\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T})$ par $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ ou $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ avec $q > 2$ (pour ces derniers espaces, on a des résultats analogues en remplaçant ℓ^2 par des espaces convenables).

Blasco et Pełczyński ont étudié la version vectorielle de l'inégalité de Paley ci-dessus en relation avec la géométrie des espaces de Banach. Si B un espace de Banach, alors il est démontré qu'il existe une constante C telle que pour tout $f \in H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{T}, B)$,

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|\widehat{f}(n_k)\|^2\Big)^{1/2} \le C\|f\|_{H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{T},B)},$$

si et seulement si B^* est de type 2.

On améliore ce résultat, c'est-à-dire que si B^* est de type 2, on montre que l'inégalité ci-dessus reste vraie avec $H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T}, B)$ au lieu de $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{T}, B)$ (qui est $H^1_{\varphi_1}(\mathbb{T}, B)$).

Notre approche de ces résultats est fondée sur le schéma suivant, lequel apparaît un peu surprenant dans le sens qu'aucune condition n'est supposée sur l'espace de Banach pris en considération.

Soient B un espace de Banach, Ψ une fonction d'Young, et $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite ϱ-lacunaire. Alors, pour toute suite finie (x_k) dans B,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{in_k\theta}\Big\|_{\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B)} \approx \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{in_k\theta}\Big\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)}$$

où les constantes d'équivalence ne dépendent que de ϱ et de Ψ.

Désignons par P_Λ la projection de Paley associée à $\Lambda = (n_k)_{k=1}^{\infty}$ telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$P_\Lambda(f)(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(n_k) e^{in_k\theta};$$

alors on démontre à partir du théorème ci-dessus que si B est un espace de Banach de type $p > 1$, alors $P_\Lambda \otimes \mathrm{Id}_B$ se prolonge en une projection continue dans $\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T}, B)$ (la réciproque est aussi vraie). Par dualité, on en déduit

que si B est de type > 1, alors pour tout $f \in H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T}, B)$, on a

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(n_k) e^{in_k\theta}\Big\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)} \le C\|f\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)};$$

ceci implique l'amélioration du théorème de Blasco–Pełczyński citée plus haut. Remarquons que Pisier a obtenu l'inégalité ci-dessus avec $H^1_{\varphi_1}(\mathbb{T}, B)$ au lieu de $H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T}, B)$.

La dernière partie est consacrée aux multiplicateurs idempotents de $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$. Pisier a conjecturé que les supports des multiplicateurs idempotents de $L^{\psi_q}(\mathbb{T})$ forment une algèbre de Boole engendrée par les parties périodiques et les parties finies pour $2 < q < \infty$. Si on remplace $L^{\psi_q}(\mathbb{T})$ par $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ alors on démontre que la conjecture est vraie.

II. Inegalités de Paley, sous-espaces engendrés par des suites lacunaires. Dans tout ce paragraphe, C_ϱ (resp. $C_{\Psi,\varrho}$, C_Ψ) désignera par défaut une constante ne dépendant que de ϱ (resp. de Ψ et ϱ, de Ψ), où $\varrho > 1$ et Ψ est une fonction d'Young.

Soit $\varrho > 1$. On appelle *suite ϱ-lacunaire* une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels positifs ou nuls telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_{k+1} \ge \varrho\lambda_k$.

Si Λ désigne une telle suite, et si ses termes sont des entiers naturels on pose pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$P_\Lambda(f) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \widehat{f}(\lambda)\gamma_\lambda$$

où pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$, $\gamma_\lambda(\zeta) = \zeta^\lambda$; c'est le caractère correspondant à λ. Comme on l'a rappelé en introduction, on a pour toute suite $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\gamma_{n_k}\Big\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})} \approx \|a\|_{\ell^2}.$$

On va considérer ces résultats dans le cadre de nos espaces généralisés et aussi pour des fonctions à valeurs vectorielles.

Le résultat suivant apparaît surprenant dans le sens qu'aucune condition n'est imposée à l'espace de Banach en question.

THÉORÈME 1. *Soient $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite ϱ-lacunaire avec $\varrho > 1$, et Ψ une fonction d'Young. Pour tout espace de Banach B et tout $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{N} x_k\gamma_{n_k}\Big\|_{\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B)} \approx \Big\|\sum_{k=1}^{N} x_k\gamma_{n_k}\Big\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)},$$

les constantes d'équivalence des normes ne dépendant que de ϱ et de Ψ.

On désigne par $G = \{-1,1\}^{\mathbb{N}^*}$ le groupe de Cantor muni de la mesure de Haar normalisée μ. Soit ε_n la $n^{\text{ème}}$ application coordonnée de G. Nous avons besoin du lemme suivant qui provient de l'article [Pe].

LEMME 2. *Soient $d > 0$, (λ_k) une suite ϱ-lacunaire de nombres réels positifs ou nuls telle que $\inf_{k\geq 0}(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \geq d$ avec $d > 0$. Alors pour tout intervalle $[a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$ il existe une constante $C = C(b-a, \varrho, d)$ telle que pour toute fonction d'Young Ψ et toute suite (x_k) d'éléments d'un espace arbitraire B,*

$$\frac{1}{C}\Big\|\sum \varepsilon_k x_k\Big\|_{L^\Psi(G,B)} \leq \Big\|\sum e^{i\lambda_k t}x_k\Big\|_{L^\Psi([a,b],dt/(b-a),B)} \leq C\Big\|\sum \varepsilon_k x_k\Big\|_{L^\Psi(G,B)}.$$

Remarque. Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite ϱ-lacunaire dans $\mathbb{R}$ avec $\varrho > 1$. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Posons pour tout $t \in [a,b]$, $g_k(t) = e^{i\lambda_k t}$. D'après les inégalités de Khintchine–Kahane (cf. [Pi1]) et le lemme 2, on en déduit pour tout $1 \leq p < \infty$ qu'il existe une constante C_p ne dépendant que de $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et de $b-a$ telle que pour tous $x_1,\dots,x_N \in B$,

$$C_p^{-1}\Big\|\sum_{k=1}^N x_k g_k\Big\|_{L^{\Psi_2}([a,b],dt/(b-a),B)} \leq \Big\|\sum_{k=1}^N x_k g_k\Big\|_{L^p([a,b],dt/(b-a),B)} \leq C_p\Big\|\sum_{k=1}^N x_k g_k\Big\|_{L^{\Psi_2}([a,b],dt/(b-a),B)}.$$

Preuve du théorème 1. On a toujours

$$\Big\|\sum_{k=1}^N x_k\gamma_{n_k}\Big\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)} \leq C_\Psi\Big\|\sum_{k=1}^N x_k\gamma_{n_k}\Big\|_{\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B)}$$

où $C_\Psi > 0$ ne dépend que de Ψ.

Soit I un arc de $\mathbb{T}$ de représentation curviligne $[-\pi\delta+\theta_0, \pi\delta+\theta_0]$ avec $0 < \delta \leq 1$. Soit $f \in L^\Psi(\mathbb{T};B)$ avec $f = \sum_{k=1}^N x_k\gamma_{n_k}$.

Comme l'ont remarqué Pełczyński et Blasco dans [BP], on découpe la somme définissant f en deux morceaux. Soit k_0 le plus petit entier tel que $\delta n_{k_0} \leq 1 < \delta n_{k_0+1}$. On pose

$$g = \sum_{k=1}^{k_0} x_k\gamma_{n_k} \quad \text{et} \quad h = \sum_{k=k_0+1}^{N} x_k\gamma_{n_k}.$$

On a, pour tout $\zeta \in I$,

$$(g-g_I)(\zeta) = \sum_{k=1}^{k_0} x_k\zeta^{n_k} - \frac{1}{|I|}\int_I x_k\xi^{n_k}\,dm(\xi) = \sum_{k=1}^{k_0} x_k\frac{1}{|I|}\int_I x_k[\zeta^{n_k} - \xi^{n_k}]\,dm(\xi).$$

On en déduit, pour tout $\theta \in [-\pi\delta+\theta_0, \pi\delta+\theta_0]$, que

$$\begin{aligned}\|(g-g_I)(e^{i\theta})\| &\leq \sum_{k=1}^{k_0}\|x_k\|\cdot\frac{1}{\delta}\int_{-\pi\delta+\theta_0}^{\pi\delta+\theta_0}|e^{in_k\theta} - e^{in_k\varphi}|\,\frac{d\varphi}{2\pi}\\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0}\|x_k\|\cdot\frac{1}{2\pi\delta}\int_{-\pi\delta+\theta_0}^{\pi\delta+\theta_0} n_k|\theta-\varphi|\,d\varphi\\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0}\|x_k\|\cdot 2\pi\delta n_k \leq C_\Psi\|f\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)}\sum_{k=1}^{k_0}\delta n_k.\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{n_k}{n_{k_0}} = \frac{n_k}{n_{k+1}}\cdot\frac{n_{k+1}}{n_{k+2}}\cdots\frac{n_{k_0-1}}{n_{k_0}} \leq \left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k_0-k}.$$

Donc, pour tout $\zeta \in I$,

$$\|(g-g_I)(\zeta)\| \leq C_\Psi\|f\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)}\delta\sum_{k=1}^{k_0}\varrho^{k_0-k}n_{k_0} \leq C_\Psi\frac{\varrho}{\varrho-1}\|f\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)}.$$

Donc,

$$\|g-g_I\|_{L^\Psi(I,m_I,B)} \leq C_\Psi\frac{\varrho}{\varrho-1}\|f\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)}.$$

D'autre part,

$$\|h-h_I\|_{L^\Psi(I,m_I,B)} \leq \|h\|_{L^\Psi(I,m_I,B)} + \|h_I\|_{L^\Psi(I,m_I,B)} \leq 2\|h\|_{L^\Psi(I,m_I,B)}.$$

Nous avons

$$\|h\|_{L^\Psi(I,m_I,B)} = \Big\|\sum_{k=k_0+1}^N x_k e^{in_k\theta_0}\gamma_{n_k\delta\theta}\Big\|_{L^\Psi([-\pi,\pi],d\theta/(2\pi),B)}.$$

On pose pour tout $k > k_0$, $\lambda_k = \delta n_k$. On a pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \varrho > 1 \quad \text{et} \quad \inf_{k>k_0}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) \geq \varrho - 1 = d.$$

Donc, par le lemme 2 utilisé deux fois et le principe de contraction,

$$\|h\|_{L^\Psi(I,m_I,B)} \approx \Big\| \sum_{k=k_0+1}^{N} x_k e^{in_k\theta_0}\varepsilon_k \Big\|_{L^\Psi(G,B)} \approx \Big\| \sum_{k=k_0+1}^{N} x_k\varepsilon_k \Big\|_{L^\Psi(G,B)}$$
$$\approx \Big\| \sum_{k=k_0+1}^{N} x_k\gamma_{n_k} \Big\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)} = \|h\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)}.$$

D'autre part, par le principe de contraction et le lemme 2, on a

$$\|h\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)} \le C_{\Psi,\varrho}\Big\| \sum_{k=k_0+1}^{N} x_k\varepsilon_k \Big\|_{L^\Psi(G,B)} \le C_{\Psi,\varrho}\Big\| \sum_{k=1}^{N} x_k\varepsilon_k \Big\|_{L^\Psi(G,B)}$$
$$\le C_{\Psi,\varrho}\|f\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)}.$$

Donc, en combinant toutes les inégalités obtenues, on a

$$\|f - f_I\|_{L^\Psi(I,m_I,B)} \le C_{\Psi,\varrho}\|f\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)},$$

d'où

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B)} \le C_{\Psi,\varrho}\|f\|_{L^\Psi(\mathbb{T},B)}. \ \blacksquare$$

COROLLAIRE 3. *Soient $2 \le q < \infty$ et $\{n_k\}$ une suite ϱ-lacunaire avec $\varrho > 1$. Alors il existe une constante C qui ne dépend que de q et de ϱ telle que :*

1) *Si $q = 2$ alors pour tout $(\alpha_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$,*

$$C^{-1}\|(\alpha_k)_k\|_{\ell^2(\mathbb{N}^*)} \le \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\gamma_{n_k} \Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T})} \le C\|(\alpha_k)_k\|_{\ell^2(\mathbb{N}^*)};$$

2) *Si $q > 2$ alors pour tout $(\alpha_k)_{k=1}^\infty \in \ell_{p,\infty}(\mathbb{N}^*)$,*

$$C^{-1}\|(\alpha_k)_k\|_{\ell_{p,\infty}(\mathbb{N}^*)} \le \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\gamma_{n_k} \Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})} \le C\|(\alpha_k)_k\|_{\ell_{p,\infty}(\mathbb{N}^*)}$$

où p vérifie $1/p + 1/q = 1$.

Preuve. 1) D'après le théorème 1 et le lemme 2, les normes BMO_{ψ_2} et L^2 sont équivalentes. La relation de Parseval permet de conclure.

2) Si $q \in]2,\infty[$ alors on écrit

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k\gamma_{n_k} \Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})} \approx \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k\gamma_{n_k} \Big\|_{L^{\psi_q}(\mathbb{T})} \approx \|(a_k)_k\|_{\ell_{p,\infty}(\mathbb{N}^*)}$$

d'après [Pi2] et le théorème 1. ∎

On a donc construit une famille de sous-espaces vectoriels fermés de $\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T})$ (resp. $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$) isomorphes à ℓ^2 (resp. $\ell_{p,\infty}(\mathbb{N}^*)$).

On va appliquer le théorème 1 qui améliore l'inégalité de Paley dans le cas vectoriel obtenue dans [BP]. On aura besoin de quelques notions de la géométrie des espaces de Banach. Nos références sont [Pi1–4].

Soit B un espace de Banach. On dit que B est de *type* p avec $p \in [1,2]$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que, pour toute suite finie $x_1,\dots,x_n$ de points de B, on a

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i \Big\|_{L^2(G,B)} \le C\Big[\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\Big]^{1/p};$$

on note $T_p(B)$ la plus petite constante C vérifiant l'inégalité ci-dessus.

On dit que B est de *cotype* q avec $q \in [2,\infty]$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour toute suite finie $x_1,\dots,x_n$ de points de B, on a

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\Big]^{1/q} \le C\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i \Big\|_{L^2(G,B)};$$

on note $C_q(B)$ la plus petite constante C vérifiant l'inégalité ci-dessus.

Soit $R_1 : L^2(G) \to L^2(G)$ la projection orthogonale définie pour tout $f \in L^2(G)$ par

$$R_1(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \widehat{f}(\varepsilon_n)\varepsilon_n.$$

On dit que B est *K-convexe* si et seulement si $R_1 \otimes \mathrm{Id}_B$ défini sur $L^2(G)\otimes B$ s'étend continûment à $L^2(G,B)$. On note $K(B)$ sa norme.

Les propriétés principales qui nous intéressent sont les suivantes :

(i) B et B^{**} ont mêmes type et cotype.

(ii) B est de type $p > 1 \Rightarrow B^*$ est de cotype q avec $1/p + 1/q = 1$.

(iii) Si B est K-convexe alors : B^* est de cotype $q \Rightarrow B$ est de type p avec $1/p + 1/q = 1$.

(iv) B est K-convexe $\Rightarrow B^*$ est K-convexe $\Leftrightarrow B$ a un type $p > 1$.

COROLLAIRE 4. *Soit B un espace de Banach. Si B est de type p, alors pour tout $\varrho > 0$, il existe $C_\varrho > 1$ telle que pour toute suite ϱ-lacunaire $(n_k)_{k\ge1}$ et tout $a \in \ell^p(\mathbb{N}^*,B)$,*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k\gamma_{n_k} \Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)} \le C_\varrho\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|^p\Big)^{1/p}.$$

Preuve. Soit $a \in \ell^p(\mathbb{N}^*,B)$. D'après le théorème 1,

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k\gamma_{n_k} \Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)} \le C_\varrho\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k\gamma_{n_k} \Big\|_{L^{\psi_2}(\mathbb{T},B)} \le C_\varrho\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k\gamma_{n_k} \Big\|_{2}.$$

Alors par le lemme 2, la remarque qui suit et l'hypothèse,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\gamma_{n_k}\Big\|_2 \le C_\varrho\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\|a_k\|^p\Big)^{1/p}. \ \blacksquare$$

Remarque. Il est évident que la réciproque est vraie car $\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)$ s'injecte continûment dans $L^2(\mathbb{T},B)$.

THÉORÈME 5. *Soit B un espace de Banach. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est K-convexe.*

(ii) *Pour tout $\varrho>1$, il existe une constante $C_\varrho>0$ telle que pour toute suite ϱ-lacunaire $\Lambda=(n_k)_{k\ge1}$, $P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B$ est bornée de $H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)$ dans lui-même et on a pour tout $f\in H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)$,*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(n_k)\gamma_{n_k}\Big\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)} \le C_\varrho\|f\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}.$$

(iii) *Pour tout $\varrho>1$, il existe une constante $C'_\varrho>0$ telle que pour toute suite ϱ-lacunaire $\Lambda=(n_k)_{k\ge1}$, $P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B$ est bornée de $\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)$ dans lui-même et on a pour tout $f\in\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)$,*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(n_k)\gamma_{n_k}\Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)} \le C'_\varrho\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)}.$$

Dans ce cas, les normes $\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B\|_{H^1_{\varphi_2}\to H^1_{\varphi_2}}$, $\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}\to\mathrm{BMO}_{\psi_2}}$ et $K(B)=\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^2\to L^2}$ sont équivalentes à un facteur dépendant de ϱ près.

Pour la démonstration, on aura besoin du lemme suivant qui est bien connu oralement.

LEMME 6. *Soit $\Lambda=\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ un ensemble ϱ-lacunaire. Alors B est K-convexe $\Leftrightarrow$ il existe $p\in\,]1,\infty[$ tel que (de manière équivalente, pour tout $p\in\,]1,\infty[$) $P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B$ se prolonge continûment en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{T},B)$ dans $L^p(\mathbb{T},B)$.*

Preuve. *Nécessité.* Soient $f\in(L^p(\mathbb{T})\cap L^2(\mathbb{T}))\otimes B$ et $g\in(L^q(G)\cap L^2(G))\otimes B^*$ avec $1/p+1/q=1$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ étant le crochet de dualité entre $L^2(G,B)$ et $L^2(G,B^*)$ on a

$$\Big\langle\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(n_k)\varepsilon_k,g\Big\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle\widehat{f}(n_k)\varepsilon_k,g\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle\widehat{f}(n_k),\widehat{g}(\varepsilon_k)\rangle.$$

Posons

$$g'=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{g}(\varepsilon_k)\gamma_{-n_k}\in L^2(\mathbb{T})\otimes B^*.$$

Alors

$$\Big\langle\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(n_k)\varepsilon_k,g\Big\rangle=\int_{\mathbb{T}}\langle f(\zeta),g'(\zeta)\rangle\,dm(\zeta).$$

D'après le lemme 2, et la K-convexité de B^*, on a

$$\|g'\|_q=\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{g}(\varepsilon_k)\gamma_{-n_k}\Big\|_q\le C_\varrho\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{g}(\varepsilon_k)\varepsilon_k\Big\|_q$$
$$\le C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_{B^*}\|_{L^q\to L^q}\|g\|_q.$$

Donc, par le lemme 2,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(n_k)\gamma_{n_k}\Big\|_{L^p(\mathbb{T},B)}\le C_\varrho\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(n_k)\varepsilon_k\Big\|_{L^p(G,B)}$$
$$=C_\varrho\sup\Big\{\Big|\Big\langle\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(n_k)\varepsilon_k,g\Big\rangle\Big|:g\in(L^2(G)\cap L^q(G))\otimes B^*,\ \|g\|_q\le1\Big\}$$
$$=C_\varrho\sup\Big\{\Big|\int_{\mathbb{T}}\langle f,g'\rangle\,dm\Big|:g\in(L^2(G)\cap L^q(G))\otimes B^*,\ \|g\|_q\le1\Big\}$$
$$\le C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_{B^*}\|_{L^q\to L^q}\sup\Big\{\Big|\int_{\mathbb{T}}\langle f,h\rangle\,dm\Big|:h\in L^q(G,B^*),\ \|h\|_q\le1\Big\}$$
$$=C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^p\to L^p}\|f\|_p.$$

Donc $P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B$ est continue pour la norme L^p sur $L^p(\mathbb{T},B)$. Cela démontre que la condition est nécessaire.

La suffisance se démontre d'une façon analogue en observant que si $P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B$ est borné sur $L^p(\mathbb{T},B)$ alors $P_{-\Lambda}\otimes\mathrm{Id}_{B^*}$ est borné sur $L^q(\mathbb{T},B^*)$ puisque $P_{-\Lambda}\otimes\mathrm{Id}_{B^*}$ est le transposé de $P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B$.

Pour conclure, remarquons d'après la démonstration ci-dessus qu'il existe $C>0$ ne dépendant que de ϱ telle que pour tout $p\in\,]1,\infty[$,

$$C^{-1}\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^p\to L^p}\le\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^p\to L^p}\le C\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^p\to L^p}. \ \blacksquare$$

LEMME 7. *Soit Φ une fonction d'Young de fonction complémentaire Ψ. Alors pour tout $f\in H^1_\Phi(\mathbb{T},B)$,*

$$\|f\|_{H^1_\Phi(\mathbb{T},B)}\approx\sup_{\substack{g\in\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)\\ \|g\|_{\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)}\le1}}|\langle g,f\rangle|,$$

les constantes d'équivalence ne dépendant que de Φ.

Preuve. Il est clair que pour tout $f\in H^1_\Phi(\mathbb{T},B)$,

$$\sup_{\substack{g\in\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)\\ \|g\|_{\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)}\le1}}|\langle g,f\rangle|\le C\|f\|_{H^1_\Phi(\mathbb{T},B)}.$$

L'étude du dual topologique de $H^1_\Phi(\mathbb{T},B)$ nécessite l'introduction de l'espace suivant (voir [L] pour plus de détails) :

Soient Ψ une fonction d'Young, m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$, B un espace de Banach.

Soient I un arc de $\mathbb{T}$, $\mathcal{B}_I$ la tribu des boréliens de I, m_I la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathcal{B}_I$ et G une mesure vectorielle sur $(\mathbb{T},\mathcal{B}_\mathbb{T},m)$ à valeurs dans B^* s'annulant sur les ensembles de mesure nulle. On pose

$$G_I^* = \frac{1}{m(I)}[G_I - G(I)m_I]$$

où G_I est la restriction de G à $\mathcal{B}_I$. On pose pour tout I arc de $\mathbb{T}$,

$$N_\Psi^{(I)}(G_I^*) = \inf\left\{k>0 : \sup\left\{\sum_{i=1}^n \Psi\left(\frac{\|G_I^*(E_i)\|}{km_I(E_i)}\right)m_I(E_i) :\right.\right.$$

$$\left.\left.\{E_i\}_{i=1}^n \text{ disjoints, } m_I(E_i)>0,\ E_i\in\mathcal{B}_I \text{ pour } i=1,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}\le 1\right\}.$$

On pose

$$\|G\|_{*,\Psi,B} = \sup_{I\in\mathcal{I}}\{N_\Psi^{(I)}(G_I^*)\},$$

$$G\in\mathcal{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B) \Leftrightarrow \|G\|_{*,\Psi,B}<\infty,$$

$$\|G\|_{\mathcal{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B)} = \|G(\mathbb{T})\| + \|G\|_{*,\Psi,B}.$$

Muni de cette norme, $\mathcal{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B)$ est un espace de Banach de mesures vectorielles.

D'après le théorème de dualité, $H^1_\Phi(\mathbb{T},B)^* = \mathcal{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)$. Donc, il existe $G\in\mathcal{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)$ de norme 1 telle que

$$\|f\|_{H^1_\Phi(\mathbb{T},B)} \approx |\langle G,f\rangle|.$$

Alors par un argument standard, on peut lui associer une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)$ telle que pour tout ensemble borélien E,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(t)\,dt = G(E).$$

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\|g_n\|_{\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)} \le 6\|G\|_{\mathcal{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)}.$$

Alors,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\mathbb{T} g_n(t)f(t)\,dt = \langle G,f\rangle.$$

D'où immédiatement,

$$\|f\|_{H^1_\Phi(\mathbb{T},B)} \le C_\Phi \sup_{\substack{g\in\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)\\ \|g\|_{\mathrm{BMO}_\Psi(\mathbb{T},B^*)}\le 1}} |\langle g,f\rangle|. \ \blacksquare$$

Preuve du théorème 5. Montrons que (i)⇒(iii). Soient B un espace de Banach K-convexe, Λ une suite ϱ-lacunaire dans $\mathbb{N}^*$ et $f\in\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)$. On a

$$\begin{aligned}\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B(f)\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)} &\le C_\varrho\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B(f)\|_{L^{\psi_2}(\mathbb{T},B)} \quad \text{(théorème 1)}\\ &\le C_\varrho\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B(f)\|_2\\ &\le C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^2\to L^2}\|f\|_2 \quad \text{(lemme 6)}\\ &\le C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^2\to L^2}\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B)},\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}\to\mathrm{BMO}_{\psi_2}} \le C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^2\to L^2}.$$

D'où (iii).

Montrons que (i)⇒(ii). Si (i) est vrai alors (iii) est vrai avec $-\Lambda$ et B^* et on a

$$\begin{aligned}\|P_{-\Lambda}\otimes\mathrm{Id}_{B^*}\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}\to\mathrm{BMO}_{\psi_2}} &\le C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_{B^*}\|_{L^2\to L^2}\\ &= C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^2\to L^2}.\end{aligned}$$

Soit $f\in H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)$. Par le lemme 7 (d'où provient C dans ce qui suit), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&\|(P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B)(f)\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}\\ &\le C\sup\{|\langle P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B(f),g\rangle| : g\in\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B^*),\ \|g\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B^*)}\le 1\}\\ &= C\sup\{|\langle f,P_{-\Lambda}\otimes\mathrm{Id}_{B^*}(g)\rangle| : g\in\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B^*),\ \|g\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B^*)}\le 1\}\\ &\le C\|P_{-\Lambda}\otimes\mathrm{Id}_{B^*}\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}\to\mathrm{BMO}_{\psi_2}}\|f\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}\\ &\le C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^2\to L^2}\|f\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B\|_{H^1_{\varphi_2}\to H^1_{\varphi_2}} \le C_\varrho\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^2\to L^2}.$$

D'où (ii).

Montrons que (ii)⇒(i). Supposons (ii). Alors, par les inégalités de Khintchine-Kahane (et le lemme 2), il existe $C_\varrho>0$ telle que pour tout $f\in L^2(\mathbb{T})\otimes B$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^\infty \widehat{f}(n_k)\gamma_{n_k}\Big\|_2 \le C_\varrho\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B\|_{H^1_{\varphi_2}\to H^1_{\varphi_2}}\|f\|_2.$$

Donc $P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B$ est borné de $L^2(\mathbb{T},B)$ dans lui-même. Alors B est K-convexe et on a

$$\|R_1\otimes\mathrm{Id}_B\|_{L^2\to L^2} \le C_\varrho\|P_\Lambda\otimes\mathrm{Id}_B\|_{H^1_{\varphi_2}\to H^1_{\varphi_2}}.$$

Montrons que (iii)⇒(i). Soit Y un sous-espace de dimension finie de B. Alors (iii) reste vraie pour Y à la place de B avec la même constante

$$C_\varrho = \|P_\Lambda \otimes \mathrm{Id}_B\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}\to\mathrm{BMO}_{\psi_2}}.$$

Par un argument de dualité comme ci-dessus, on montre que (ii) est vraie pour Y^* et $-\Lambda$ avec la constante C_ϱ indépendante de Y. Donc, Y^* est K-convexe de constante indépendante de Y^*, donc Y aussi. On en déduit que B est K-convexe et qu'il existe $C'_\varrho > 0$ tel que

$$\|R_1 \otimes \mathrm{Id}_B\|_{L^2\to L^2} \le C'_\varrho \|P_\Lambda \otimes \mathrm{Id}_B\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}\to\mathrm{BMO}_{\psi_2}}.$$

D'où (i).

Les équivalences des normes des applications sont immédiates. ∎

COROLLAIRE 8. *Soit B un espace de Banach. Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) *B est K-convexe et de cotype q.*

(ii) *Pour tout $\varrho > 1$, il existe une constante $C_\varrho > 0$ telle que pour toute suite ϱ-lacunaire $(n_k)_{k\ge1}$ et pour tout $f \in H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T}, B)$,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\widehat{f}(n_k)\|^q \le C_\varrho^q \|f\|^q_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}.$$

Preuve. Supposons (i). Soit $f \in L^2(\mathbb{T}) \otimes B$. Comme B^* est de type p avec $1/p + 1/q = 1$, on a d'après le lemme 2 et le fait que $H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T}, B) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T}, B)$,

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|\widehat{f}(n_k)\|^q\Big)^{1/q} \le C_\varrho C_q(B) \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(n_k)\gamma_{n_k}\Big\|_2 \le C_\varrho C_q(B) \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(n_k)\gamma_{n_k}\Big\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}.$$

Par densité de $L^2(\mathbb{T}) \otimes B$ dans $H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T}, B)$, on obtient l'inégalité demandée puisqu'on a, a fortiori, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, et $f \in L^2(\mathbb{T}) \otimes B$, d'après le théorème 5(ii),

$$\Big(\sum_{k=1}^{M} \|\widehat{f}(n_k)\|^q\Big)^{1/q} \le C_\varrho C_q(B) \|f\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}.$$

Réciproquement, supposons (ii) et soient $a_1, \dots, a_N \in B^*$. Alors par dualité, on a (C désignant dans chaque inégalité une constante et $1/p + 1/q = 1$)

$$\Big\|\sum_{k=1}^{N} a_k\gamma_{n_k}\Big\|_2 \le \Big\|\sum_{k=1}^{N} a_k\gamma_{n_k}\Big\|_{L^{\psi_2}(\mathbb{T},B^*)} \le C\Big\|\sum_{k=1}^{N} a_k\gamma_{n_k}\Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T},B^*)}$$

$$\le C \sup_{f\in H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B),\, \|f\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}\le 1} \Big|\Big\langle \sum_{k=1}^{N} a_k\gamma_{n_k}, f\Big\rangle\Big|$$

$$= C \sup_{f\in H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B),\, \|f\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}\le 1} \Big|\sum_{k=1}^{N} \langle a_k, \widehat{f}(n_k)\rangle\Big|$$

$$\le C \sup_{f\in H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B),\, \|f\|_{H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T},B)}\le 1} \Big(\sum_{k=1}^{N} \|a_k\|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{N} \|\widehat{f}(n_k)\|^q\Big)^{1/q}$$

$$\le CC_\varrho \Big(\sum_{k=1}^{N} \|a_k\|^p\Big)^{1/p}.$$

Par le lemme 2, on peut définir le type à l'aide de la suite $(\gamma_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$. On en déduit donc que B^* est de type p; par suite, B est K-convexe et de cotype q. D'où (i). ∎

III. Multiplicateurs de Fourier sur $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$. La stabilité par convolution et décalage (shift) sur $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ et $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{T})$ est bien connue. Elle s'étend sans difficulté à nos espaces généralisés [L].

PROPOSITION 1. *Soient Φ une fonction d'Young, B un espace de Banach, et $\mu \in M(\mathbb{T})$. Pour tout $f \in H^1_\Phi(\mathbb{T}, B)$,*

$$f * \mu \in H^1_\Phi(\mathbb{T}, B) \quad \text{et} \quad \|f * \mu\|_{H^1_\Phi(\mathbb{T},B)} \le \|\mu\| \cdot \|f\|_{H^1_\Phi(\mathbb{T},B)}.$$

Pour tout $f \in \mathrm{BMO}_\Phi(\mathbb{T}, B)$,

$$\mu * f \in \mathrm{BMO}_\Phi(\mathbb{T}, B) \quad \text{et} \quad \|\mu * f\|_{\mathrm{BMO}_\Phi(\mathbb{T},B)} \le 2\|\mu\| \cdot \|f\|_{\mathrm{BMO}_\Phi(\mathbb{T},B)}.$$

DÉFINITION 1. Les *décalages* (shifts) *à droite* Σ_+ et *à gauche* Σ_- sont les opérations définies par, pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $z \in \mathbb{T}$,

$$\Sigma_+(f)(z) = zf(z) \quad \text{et} \quad \Sigma_-(f)(z) = z^{-1}f(z).$$

L'étude de la stabilité par décalage repose sur le lemme suivant issu de [Pe] :

LEMME 2. *Soient Φ une fonction d'Young, et a un $(1, \Phi)$-atome non constant à support inclus dans I. Alors, Ψ étant la fonction complémentaire de Φ, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\|\widehat{a}(j)\| \le 2\pi|j| \cdot |I| \cdot \|1\|_{L^\Psi(\mathbb{T})}.$$

PROPOSITION 3. *Soient Φ une fonction d'Young, et B un espace de Banach. Alors $H^1_\Phi(\mathbb{T}, B)$ et $\mathrm{BMO}_\Phi(\mathbb{T}, B)$ sont stable par décalage (shift).*

Définissons maintenant un multiplicateur de Fourier :

DÉFINITION 2. Soit F un espace de Banach de fonctions intégrables sur $\mathbb{T}$. Un *multiplicateur* sur F est une application M de F dans F telle qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vérifiant, pour tout $f \in F$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $g = Mf \Rightarrow \widehat{g}(n) = \phi(n)\widehat{f}(n)$.

Un multiplicateur est *idempotent* lorsque $M \circ M = M$. Cela se traduit par $\phi(n) = 0$ ou 1 pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Le *support* du multiplicateur est $\Lambda = \operatorname{supp}\phi = \{n \in \mathbb{Z} : \phi(n) = 1\}$.

ϕ satisfaisant à $f \in F \Rightarrow \phi\widehat{f} \in \mathcal{F}F$ où $\mathcal{F}F = \{\widehat{g} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : g \in F\}$ est dite *multiplicateur de Fourier* de type (F, F). On écrit symboliquement $\phi \in (F, F)$.

Remarque. Tout multiplicateur idempotent ϕ de support Λ détermine une projection orthogonale P_Λ de $L^2(\mathbb{T})$ sur le sous-espace fermé $L^2_\Lambda(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \forall n \notin \Lambda,\ \widehat{f}(n) = 0\}$ de la forme

$$\text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{T}), \qquad P_\Lambda(f) = \sum_{n\in\Lambda} \widehat{f}(n)\gamma_n,$$

avec pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$, $\gamma_n(\zeta) = \zeta^n$.

Dans ce qui suit, F désigne $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ ou $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ avec $q \in [1, \infty[$. Nous allons caractériser tous les multiplicateurs idempotents de F.

La transformation de Fourier donne le résultat suivant :

PROPOSITION 4. *Toute mesure $\mu \in \mathrm{M}(\mathbb{T})$ détermine un multiplicateur sur F de la façon suivante :*

$$\textit{Pour tout } f \in F, \qquad M(f) = \mu * f.$$

Ici la fonction multiplicatrice ϕ est telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\phi(n) = \widehat{\mu}(n)$.

COROLLAIRE 5. *L'algèbre engendrée par les parties périodiques et les parties finies sur $\mathbb{Z}$ détermine des multiplicateurs idempotents sur F.*

Preuve. Helson a montré dans [H] que cette algèbre n'est autre que celle des transformées de Fourier–Stieltjes de mesures idempotentes sur $\mathbb{T}$. Ces mesures sont de la forme

$$\mu = f\,dm + \nu \quad \text{où} \quad f = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)\gamma_n$$

et où ν est une mesure de transformée de Fourier périodique, idempotente. ∎

Rappelons aussi que pour un groupe abélien compact quelconque, la caractérisation des supports des mesures idempotentes de L^1 est due à Paul Cohen [GM].

Si Λ est une partie périodique sur $\mathbb{Z}$ de période $T > 0$, alors la mesure μ de support de transformée de Fourier–Stieltjes Λ est de la forme

$$\mu = \sum_{k=0}^{T-1} a_k \delta_{\omega^k}$$

où $\omega = e^{2i\pi/T}$ et $a_0, \ldots, a_k$ sont déterminés par le système de Vandermonde :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \ldots + a_{T-1} & = \chi_\Lambda(0), \\ a_0 + a_1\omega^{-1} + \ldots + a_{T-1}\omega^{-(T-1)} & = \chi_\Lambda(1), \\ a_0 + a_1\omega^{-2} + \ldots + a_{T-1}(\omega^{-(T-1)})^2 & = \chi_\Lambda(2), \\ & \vdots \\ a_0 + a_1\omega^{-(T-1)} + \ldots + a_{T-1}(\omega^{-(T-1)})^{T-1} & = \chi_\Lambda(T-1). \end{cases}$$

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\mu}(n) = \sum_{k=0}^{T-1} a_k \omega^{-nk}.$$

Comme ω est une racine $T^{\text{ème}}$ de l'unité, on a bien $\widehat{\mu}$ T-périodique et on reconnaît $\chi_\Lambda(n)$ pour $n = 1, \ldots, T-1$, d'où l'égalité pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc Λ détermine une mesure idempotente.

Remarquons aussi que l'ensemble des supports des multiplicateurs idempotents est une algèbre contenant les parties finies et périodiques.

Nous aurons besoin des résultats préliminaires suivants :

PROPOSITION 6. *Soient $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et $q \in [1, \infty[$. Alors*

1) *$P_\Lambda : \mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T}) \to \mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ est continue $\Leftrightarrow$ $P_{-\Lambda} : H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T}) \to H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ est continue.*

2) *$P_\Lambda : F \to F$ est continue $\Leftrightarrow$ $P_{-\Lambda} : F \to F$ est continue.*

3) *Si P_Λ est continue si $N \in \mathbb{N}$ alors $\Sigma_+^{-N} \circ P_\Lambda \circ \Sigma_+^N$ est continue. On a*

$$\Sigma_+^{-N} \circ P_\Lambda \circ \Sigma_+^N = P_{\Lambda - N}.$$

Remarque. La preuve repose sur les deux assertions suivantes :

Pour 1), si $P_\Lambda : F \to F$ alors le transposé ${}^tP_\Lambda : F^* \to F^*$ est égal (modulo les identifications) à $P_{-\Lambda}$.

Pour 2), pour tout $f \in F$, $P_{-\Lambda}(f) = \overline{P_\Lambda(\bar{f})}$.

Par conséquent, si Λ définit un multiplicateur continu sur F comme précédemment, il en est de même de $\pm\Lambda \pm N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Etudier les multiplicateurs idempotents sur $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ équivaut donc à étudier les multiplicateurs idempotents sur $H_{\varphi_q}(\mathbb{T})$. Nous avons besoin de définir les ensembles de Sidon :

DÉFINITION 3. Λ est un *ensemble de Sidon* si et seulement s'il existe une constante K telle que pour chaque fonction continue f dont le support du spectre de la transformée de Fourier est dans Λ,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \le K\|f\|_\infty.$$

La plus petite constante K notée $S(\Lambda)$ est appelée la *constante de sidonicité*.

On sait qu'une réunion finie de suites lacunaires à la Hadamard est un ensemble de Sidon.

THÉORÈME 7. *Soit Λ une réunion finie de suites lacunaires. Si $1 \le q \le 2$ alors P_Λ est bornée de $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ dans lui-même. Si $2 < q < \infty$ alors P_Λ n'est pas bornée de $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ dans lui-même.*

Preuve. On peut supposer sans perte de généralité que les suites lacunaires constituant Λ sont deux à deux disjointes.

• $1 \le q \le 2$. Dans ce cas, il suffit de le montrer pour chaque suite lacunaire. Nous savons que $\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{T})$ et d'après le paragraphe III qu'il existe $C(\Lambda) > 0$ telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\|P_\Lambda(f)\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_2}(\mathbb{T})} \le C(\Lambda)\|f\|_2.$$

Donc, il existe $C'(\Lambda)$ telle que pour tout $f \in \mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$,

$$\|P_\Lambda(f)\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})} \le C'(\Lambda)\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})}.$$

• $2 < q < \infty$. Λ est la réunion de N suites lacunaires Λ_i deux à deux disjointes. Λ étant dénombrable est en bijection avec $\mathbb{N}^*$, on définit $\ell_{p,\infty}(\Lambda)$ comme au paragraphe II à l'aide d'une telle bijection pour renuméroter la suite $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. On a

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\gamma_\lambda\Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})} &\le \sum_{k=1}^N \Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda_k} a_\lambda\gamma_\lambda\Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})}\\ &\le \Big[\sum_{k=1}^N C(\Lambda_k)\Big]\|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell_{p,\infty}(\Lambda)}\\ &\le C(\Lambda)\|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell_{p,\infty}(\Lambda)}.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après [Pi2],

$$\|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell_{p,\infty}(\Lambda)} \le C'(\Lambda)\|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_{L^{\psi_q}(\mathbb{T})} \le C''(\Lambda)\Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\gamma_\lambda\Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})}.$$

Les constantes $C(\Lambda)$, $C'(\Lambda)$, $C''(\Lambda)$ ne dépendent que de Λ. Donc pour tout $a \in \ell_{p,\infty}(\Lambda)$,

$$\|a\|_{\ell_{p,\infty}(\Lambda)} \approx \Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\gamma_\lambda\Big\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})}.$$

Nous avons aussi, puisque Λ est un ensemble de Sidon,

$$L^2_\Lambda(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^{\varphi_q}_\Lambda(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^1_{\varphi_q,\Lambda}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^1_\Lambda(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^2_\Lambda(\mathbb{T}).$$

Maintenant, supposons que P_Λ soit continue sur $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$. Alors, d'après la proposition 9, $P_{-\Lambda}$ est continue de $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ dans lui-même.

Soit $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une suite dont un nombre fini de termes ne sont pas nuls. Considérons

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\gamma_\lambda.$$

Alors, d'après la discussion ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell_{p,\infty}(\Lambda)} &\approx \|f\|_{\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})}\\ &\approx \sup\{|\langle P_\Lambda f, g\rangle| : g \in H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T}),\ \|g\|_{H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})} \le 1\}\\ &= \sup\{|\langle f, P_{-\Lambda} g\rangle| : g \in H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T}),\ \|g\|_{H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})} \le 1\}\\ &\le \sup\{|\langle f, \overline{h}\rangle| : h \in L^2_\Lambda(\mathbb{T}),\ \|h\|_{H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})} \le 1\}\|P_{-\Lambda}\|\\ &\approx \sup\Big\{\Big|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\overline{\widehat{h}(\lambda)}\Big| : h \in L^2_\Lambda(\mathbb{T}),\ \Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\widehat{h}(\lambda)\gamma_\lambda\Big\|_{H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})} \le 1\Big\}\\ &\approx \sup\Big\{\Big|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda b_\lambda\Big| : (b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \ell^2(\Lambda),\ \|(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell^2(\Lambda)} \le 1\Big\}\\ &= \|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell^2(\Lambda)}.\end{aligned}$$

Finalement, il existe une constante $c_q > 0$ telle que pour toute suite $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dont un nombre fini de termes est non nul,

$$\|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell_{p,\infty}(\Lambda)} \le c_q\|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell^2(\Lambda)}.$$

Cela est faux puisque $p < 2$. Ceci montre que P_Λ n'est pas borné sur $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$. ∎

Gilles Pisier a émis la conjecture selon laquelle le support d'un multiplicateur idempotent de $L^{\psi_q}(\mathbb{T})$ dans lui-même est dans l'algèbre de Boole engendrée par les parties finies ou périodiques si $q > 2$ car on démontre que les suites lacunaires n'interviennent pas dans ce cas. On démontre que la conjecture est vraie si l'on remplace $L^{\psi_q}(\mathbb{T})$ par $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$.

Rappelons d'abord l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{T})$ classique :

$$H^1(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \forall n < 0,\ \widehat{f}(n) = 0\}.$$

Il est bien connu que $H^1(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{T})$. Dans la démonstration du théorème 9, on va se servir de la caractérisation des multiplicateurs idempotents due à Ivo Klemes :

P_Λ est continue sur $H^1(\mathbb{T})$ si et seulement si Λ appartient à l'algèbre de Boole engendrée par les suites arithmétiques et lacunaires; précisément (voir annexes), Λ est de la forme $\Lambda = \Pi \triangle L$ où Π est une suite arithmétique, L une réunion finie de suites lacunaires dans $\mathbb{N}$, et $\triangle$ la différence symétrique sur les ensembles.

Rappelons aussi que la transformée de Riesz est la projection orthogonale sur $L^2(\mathbb{T})$ définie par

$$\mathcal{R} : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}), \qquad f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\gamma_n.$$

Il est bien connu que $\mathcal{R}$ est continu sur $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < \infty$, sur $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{T})$ et sur $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})$.

Remarquons que $\mathrm{BMO}(\mathbb{T}) = \mathrm{BMO}_{\psi_1}(\mathbb{T})$. Le théorème 9 montre qu'au delà de l'indice 1, $\mathcal{R}$ n'est plus borné sur $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ pour $q > 1$.

THÉORÈME 8. *Soient $q \in [1, \infty[$ et P_Λ un multiplicateur idempotent continu sur $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ ou $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$.*

1) *Si $q = 1$, alors $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ où $\Lambda_+ = \Pi_+ \triangle L_+$, $\Lambda_- = \Pi_- \triangle L_-$; Π_+ (resp. Π_-) est une partie périodique dans $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}^*_-$, ensemble des entiers strictement négatifs), L_+ (resp. L_-) est une réunion finie de suites lacunaires dans $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}^*_-$).*

2) *Si $1 < q \leq 2$, alors $\Lambda = \Pi \triangle L$ où Π est une partie périodique et L une réunion finie de suites lacunaires sur les entiers soit positifs soit négatifs.*

3) *Si $2 < q < \infty$, alors $\Lambda = \Pi \triangle L$ où Π est une partie périodique et L une partie finie.*

Autrement dit, dans les deux derniers cas, le support Λ de tout multiplicateur P_Λ de $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ ou $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ dans lui même est un élément de l'algèbre de Boole engendrée par les parties périodiques et lacunaires à droite et à gauche de l'origine si $1 < q \leq 2$, et par les parties périodiques et finies si $2 < q < \infty$.

Preuve. Démontrons 1). Remarquons que c'est essentiellement le théorème de Klemes. Notons

$$\overline{H}^1_0(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \forall n \geq 0,\ \widehat{f}(n) = 0\}.$$

Si $\Lambda_+ = \Lambda \cap \mathbb{N}$ et $\Lambda_- = \Lambda \cap \mathbb{Z}^*_-$, alors P_{Λ_+} est borné sur $H^1(\mathbb{T})$ et P_{Λ_-} est borné sur $\overline{H}^1_0(\mathbb{T})$. Alors Λ est de la forme indiquée dans l'énoncé grâce à la caractérisation due à Ivo Klemes. Il reste à voir qu'un tel ensemble convient.

On écrit pour tout $f \in H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{T})$,

$$P_\Lambda(f) = P_\Lambda(\mathcal{R}(f) + (f - \mathcal{R}(f))) = P_{\Lambda_+}(\mathcal{R}(f)) + P_{\Lambda_-}(f - \mathcal{R}(f)).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\|P_\Lambda(f)\|_{1,\mathrm{at}} &\leq C[\|P_\Lambda(\mathcal{R}(f)\|_1 + \|P_{\Lambda_-}(f - \mathcal{R}(f))\|_1 \\ &\leq C[\|\mathcal{R}(f)\|_1 + \|f - \mathcal{R}(f)\|_1] \\ &\leq C[\|\mathcal{R}(f)\|_{1,\mathrm{at}} + \|f - \mathcal{R}(f)\|_{1,\mathrm{at}}] \\ &\leq C\|f\|_{1,\mathrm{at}},\end{aligned}$$

C désignant dans chaque cas une constante. Donc Λ convient.

Prouvons 2) et 3). Soit P_Λ un multiplicateur continu de $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ dans lui-même avec $1 < q < \infty$. Comme $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ et $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T})$, P_Λ est continu de $H^1(\mathbb{T})$ dans $L^1(\mathbb{T})$. Mais alors en examinant les coefficients de Fourier, on remarque que l'image de cet opérateur est encore contenue dans $H^1(\mathbb{T})$. On s'est donc ramené à un multiplicateur idempotent sur $H^1(\mathbb{T})$. D'après un résultat de Ivo Klemes [Kl], on sait alors décrire $\Lambda_+ = \Lambda \cap \mathbb{N}$. On a

$$\Lambda_+ = \Pi_+ \triangle L_+$$

où Π_+ est une partie périodique (à droite) de $\mathbb{N}$ et, L_+ une réunion (disjointe) de suites finies ou lacunaires. En remplaçant dans le raisonnement Λ par $-\Lambda - 1$ on aboutit à

$$\Lambda_- = \Lambda \cap \mathbb{Z}^*_- = \Pi_- \triangle L_-$$

où Π_- est une partie périodique (à gauche) et L_- une réunion finie de suites finies ou lacunaires sur $\mathbb{Z}^*_-$.

On note t_+ la période de Π_+, t_- celle de Π_-; t_+ et t_- sont des entiers strictement positifs.

L'étape suivante, c'est de démontrer qu'en fait une seule partie périodique Π intervient dans Λ, i.e. $\Pi \cap \mathbb{N} = \Pi_+$, $\Pi \cap \mathbb{Z}^*_- = \Pi_-$ et que les suites lacunaires infinies n'interviennent pas si $q > 2$. Le raisonnement consiste d'abord à se ramener au cas $1 < q \leq 2$ où l'on sait déjà que les suites lacunaires conviennent, à retirer celles-ci, et à voir qu'en les retirant, on obtient une partie périodique. Si $1 < q \leq 2$ alors le résultat est démontré. Sinon on "remonte" :

Sachant qu'une partie périodique donne un multiplicateur borné, retirer cette partie à Λ pour $q > 2$ et obtenir un ensemble Λ' formé de suites lacunaires. On montre enfin que ces suites lacunaires sont finies. Cela achèvera la preuve.

Si $q > 2$ alors $H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$; dans tous les cas $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T})$. Si $q > 2$ alors P_Λ est un multiplicateur continu de $H^1_{\varphi_2}(\mathbb{T})$ dans $L^1(\mathbb{T})$, sinon $1 < q \leq 2$ alors P_Λ est un multiplicateur continu de $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ dans $L^1(\mathbb{T})$.

On se ramène donc au second cas comme annoncé. Montrons d'abord que $t_+ = t_-$.

Ayant cette situation, puisque $1 < q \leq 2$, nous savons que lorsque Λ' est lacunaire, $P_{\Lambda'} : H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T}) \to H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ est un multiplicateur idempotent borné. Comme

$$P_{\Pi_+ \cup \Pi_-} = P_\Lambda - P_{L_+ \setminus \Pi_+} - P_{L_- \setminus \Pi_-} + P_{\Pi_+ \cap L_+} + P_{\Pi_- \cap L_-},$$

si $\widetilde{\Lambda} = \Pi_- \cup \Pi_+$ alors $P_{\widetilde{\Lambda}} : H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ est un multiplicateur idempotent borné $(1 < q \leq 2)$. Il nous reste à montrer d'abord que Π_- et Π_+ ont la même période et ensuite que ce sont les deux morceaux d'une même partie périodique. On suppose $t_+ \neq t_-$. On va se ramener à un multiplicateur dont "la partie gauche" de son ensemble associé est nulle.

Annulation de la partie gauche. Nous avons $\chi_{\Pi_-}(n - t_-) = \chi_{\Pi_-}(n)$ pour tout $n < 0$. Donc, pour tout $n < -t_-$,

$$\chi_{\widetilde{\Lambda}}(n + t_-) = \chi_{\widetilde{\Lambda}}((n + t_-) - t_-) = \chi_{\widetilde{\Lambda}}(n).$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\phi_0(n) = \chi_{\widetilde{\Lambda}}(n) - \chi_{\widetilde{\Lambda}}(n + t_-)$. Pour tout $n < -t_-$, $\phi_0(n) = 0$; pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\phi_0(n + t_+) &= \chi_{\widetilde{\Lambda}}(n + t_+) - \chi_{\widetilde{\Lambda}}(n + t_+ + t_-) \\ &= \chi_{\widetilde{\Lambda}}(n) - \chi_{\widetilde{\Lambda}}(n + t_-) = \phi_0(n).\end{aligned}$$

Soit $M_0 = P_{\widetilde{\Lambda}} - P_{\widetilde{\Lambda} - t_-}$. Alors, M_0 est un multiplicateur associé à la fonction ϕ_0. Nous savons que $P_{\widetilde{\Lambda}}$ est borné. Nous savons aussi d'après la proposition 10 que $P_{\widetilde{\Lambda} - t_-}$ est continu. Donc, M_0 est continu.

Annulons le "morceau" $\phi_0(-t_-), \ldots, \phi_0(-1)$; notons $\widetilde{\Lambda}'$ l'ensemble associé dans $\mathbb{Z}$. Le multiplicateur $P_{\widetilde{\Lambda}'}$ est continu car $\widetilde{\Lambda}'$ est une partie finie. Soit ϕ la fonction multiplicatrice associée à $M = P_{\widetilde{\Lambda}} - P_{\widetilde{\Lambda}'}$.

Pour tout $j < 0$, $\phi(j) = 0$; pour tout $j \geq 0$, $\phi(j + t_+) = \phi(j)$.

Si $t_+ \neq t_-$ alors $\phi \not\equiv 0$; d'où dans chaque intervalle $[jt_+, (j+1)t_+[\cap \mathbb{Z}$, $1 \leq j < n$, il y a un élément non nul pour ϕ. Pour en déduire une contradiction, nous allons nous servir de l'inégalité de Hardy. Il existe $C > 0$ telle que pour tout $f \in H^1(\mathbb{T})$,

$$\sum_{k>0} \frac{|\widehat{f}(k)|}{|k|} \leq C\|f\|_1.$$

Soit V_{nt_+} le noyau de la Vallée-Poussin d'ordre nt_+. Alors il existe $C' > 0$ telle que pour tout $q \in]1, 2]$,

$$\|V_{nt_+}\|_{L^{\varphi_q}(\mathbb{T})} \leq C'[\log(nt_+)]^{1/q}.$$

Pour tout j tel que $|j| \leq nt_+$, on a $\widehat{V}_{nt_+}(j) = 1$. Nous avons pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $|\phi(j)| \in \{0, 1\}$. D'après l'inégalité de Hardy, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(j+1)t_+} &\leq C\|MV_{nt_+}\|_1 \leq C''\|M\| \cdot \|V_{nt_+}\|_{H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})} \\ &\leq C'''\|M\| \cdot \|V_{nt_+}\|_{L^{\varphi_q}(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

où C'' et C''' sont des constantes. Donc il existe une constante $c > 0$ telle que

$$t_+ \mathrm{Log}(n+1) \leq c(\mathrm{Log}(nt_+))^{1/q},$$

ce qui est impossible quand n tend vers ∞ (car $q > 1$). On aboutit à une absurdité. Donc, $t_+ = t_-$.

Nous avons encore à montrer que Π_+ et Π_- sont les deux morceaux d'une *même* partie périodique. On note désormais $t = t_+ = t_-$. Pour ce faire, on construit Λ'' t-périodique coïncidant avec Π_- sur $\mathbb{Z}^*_-$; $\chi_{\Lambda''}$ est la somme d'au plus t transformées de Fourier–Stieltjes. Donc $P_{\Lambda''}$ est un multiplicateur borné de $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$ dans $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T})$. On retire Λ'' à $\widetilde{\Lambda}$. On obtient un multiplicateur noté $P_{\widetilde{\Lambda}} - P_{\Lambda''}$ dont la fonction multiplicatrice ϕ' vérifie :

Pour tout $n < 0$, $\phi'(n) = 0$; pour tout $n \geq 0$, $\phi'(n + t) = \phi'(n)$ puisque Π_+ et Λ'' sont t-périodiques.

Si $\Pi_+ \neq \Lambda'' \cap \mathbb{N}$ alors on refait le raisonnement précédent puisqu'alors $\phi'(n) \not\equiv 0$ pour un $n \in [0, t[\cap \mathbb{N}$. On aboutit, en prenant V_{nt} avec $n \geq 1$, à une absurdité.

Donc $\Pi_+ = \Lambda'' \cap \mathbb{N}$, $\Pi_- = \Lambda'' \cap \mathbb{Z}^*_-$, et par suite $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_- = \Pi_+ \triangle L_+ \cup \Pi_- \triangle L_-$.

Soit $L = L_+ \cup L_-$. On a $L \cap \mathbb{N} = L_+$ et $L \cap \mathbb{Z}^*_- = L_-$. Donc en posant $\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_- = \Lambda''$, on a $\Pi \triangle L = \Pi_+ \triangle L_+ \cup \Pi_- \triangle L_-$ avec $\Pi_+ \triangle L_+ \subset \mathbb{N}$ et $\Pi_- \triangle L_- \subset \mathbb{Z}^*_-$.

Donc, $\Lambda = \Pi \triangle L$ avec Π périodique et L réunion finie de suites lacunaires à gauche et à droite.

Le cas où $1 < q \leq 2$ est donc complètement traité car Π et L définissent bien des multiplicateurs idempotents bornés (on a vu que les supports des multiplicateurs forment une algèbre de Boole).

Pour le cas $2 < q < \infty$, on retire à Λ la partie périodique Π; $\Lambda = \Pi \triangle L$. En examinant les différents cas possibles, on obtient $\chi_L = (\chi_\Lambda - \chi_\Pi)^2$. Alors, L correspond au multiplicateur idempotent $P_L = (P_\Lambda - P_\Pi)^2$. Si L contient des parties lacunaires (infinies) alors d'après le théorème 10, P_L n'est pas borné. Donc L est une partie finie. Donc, $\Lambda = \Pi \triangle L$ avec Π périodique et L finie.

Ceci achève la preuve du théorème. ∎

THÉORÈME 9. *$\mathcal{R}$ n'est pas borné de $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ dans lui-même pour $1 < q < \infty$.*

Preuve. Notons que $\mathcal{R}$ est un multiplicateur idempotent donné par l'ensemble $\mathbb{N}$: $\mathcal{R} = P_{\mathbb{N}}$. Par conséquent, si $P_{\mathbb{N}}$ est continu sur $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$, alors $P_{\mathbb{N}}$ est continu sur $H^1_{\varphi_q}(\mathbb{T})$. Or, on a vu au cours de la démonstration du théorème 12 qu'il existerait une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \leq C\|P_{\mathbb{N}}\| \cdot \|V_n\|_{L^{\varphi_q}(\mathbb{T})}.$$

D'où l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que

$$(\log(n+1))^{1-1/q} \leq C',$$

ce qui est absurde. Donc $\mathcal{R}$ n'est pas borné. ∎

Rappelons aussi que la transformée de Hilbert est définie par

$$\mathcal{H} : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}), \quad f \mapsto -i \sum_{n \neq 0} \mathrm{sgn}(n) \widehat{f}(n) \gamma_n.$$

Il est facile de voir que pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\mathcal{R}f = \tfrac{1}{2}(\widehat{f}(0) + f + i\mathcal{H}f).$$

Par conséquent, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{H}$ sont en même temps continues ou non continues sur un espace de fonctions intégrables. Donc, $\mathcal{H}$ n'est pas bornée non plus sur $\mathrm{BMO}_{\psi_q}(\mathbb{T})$ pour $1 < q < \infty$.

Annexe : Parties "périodiques" et parties "lacunaires" sur $\mathbb{N}$

Définition 1. *Partie périodique.* C'est une partie A de $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $t \in \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1_A(n+t) = 1_A(n)$. Le plus petit $t \in \mathbb{N}$ vérifiant cela est appelé la *période*.

Partie lacunaire. C'est une partie A de $\mathbb{N}$ telle qu'on puisse la ranger dans une suite lacunaire finie ou non.

Remarquons que toute partie d'une partie lacunaire est lacunaire et que si L et L' sont des réunions finies de parties lacunaires alors $L \triangle L'$ est la réunion finie de parties lacunaires.

Donnons quelques lemmes utiles dans la suite.

Lemme 1. *Si P et Q sont périodiques alors $P \cap Q$, $P \cup Q$, ${}^cP$ et $P \triangle Q$ sont périodiques.*

Lemme 2. *Soit $S = \{P \triangle L : P$ périodique, L réunion finie de suites lacunaires, P et L pouvant être $\emptyset\}$. Alors S est une algèbre de Boole.*

Preuve. • $\emptyset \in S$, car $\emptyset = \emptyset \triangle \emptyset$. $\mathbb{N} \in S$, puisque $\mathbb{N} = \mathbb{N} \triangle \emptyset$ et $\mathbb{N}$ est une partie périodique de période 1.

• Soient $E \in S$ et $F \in S$; $E = P \triangle L$, $F = P' \triangle L'$. On a

$$\begin{aligned} E \cap F &= (P \triangle L) \cap (P' \triangle L') \\ &= (P \cap P') \triangle (P \cap L') \triangle (P' \cap L) \triangle (L \cap L'). \end{aligned}$$

On écrit

$$L = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i, \qquad L' = \bigcup_{j \in J} \Lambda'_j$$

où Λ_i et Λ'_j sont lacunaires. Donc

$$P \cap L' = \bigcup_{j \in J} (P \cap \Lambda'_j), \quad P \cap \Lambda'_j \text{ est lacunaire car } P \cap \Lambda'_j \subset \Lambda'_j,$$

$$P' \cap L = \bigcup_{i \in I} (P' \cap \Lambda_i), \quad P' \cap \Lambda_i \text{ est lacunaire car } P' \cap \Lambda_i \subset \Lambda_i,$$

$$L \cap L' = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (\Lambda_i \cap \Lambda'_j), \quad \Lambda_i \cap \Lambda'_j \text{ est lacunaire car } \Lambda_i \cap \Lambda'_j \subset \Lambda_i.$$

Donc $P \cap L'$, $P' \cap L$ et $L \cap L'$ sont réunions finies de suites lacunaires. Par conséquent, $(P \cap L') \triangle (P' \cap L) \triangle (L \cap L')$ est réunion finie de suites lacunaires. De plus, $P \cap P'$ est périodique. Donc $E \cap F \in S$.

• Soit $E \in S$, $E = P \triangle L$. On a

$${}^cE = {}^c(P \triangle L) = {}^c((P \setminus L) \cup (L \setminus P)) = {}^c(P \setminus L) \cap {}^c(L \setminus P).$$

On a ${}^c(L \setminus P) = \mathbb{N} \triangle (L \setminus P)$, où $L \setminus P$ est une réunion finie de parties lacunaires. Donc ${}^c(L \setminus P) \in S$.

D'autre part, ${}^c(P \setminus L) = {}^c(P \cap {}^cL) = {}^cP \cup L$; ${}^cP$ est périodique; L est la réunion finie de parties lacunaires; ${}^cP \cup L = {}^cP \cup [L \setminus ({}^cP)] = {}^cP \triangle (L \setminus {}^cP)$; $L \setminus {}^cP$ est une réunion finie de parties lacunaires. Donc ${}^cP \triangle (L \setminus {}^cP) \in S$.

Par conséquent, ${}^cE = {}^c(P \setminus L) \cap {}^c(L \setminus P) \in S$. Donc S est une algèbre de Boole. ∎

Lemme 3. *Une partie périodique (non vide) est la réunion finie de suites arithmétiques.*

Preuve. Soient A cette partie et T sa période. Soit $\{U_0^{(0)}, \ldots, U_0^{(p)}\} = \{n \in [0, T-1] : 1_A(n) = 1\}$. Soit $U_n^{(k)} = U_0^{(k)} + nT$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $A = \bigcup_{k=0}^{p} \{U_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Chaque suite $(U_n^{(k)})_{n=0}^{\infty}$ est arithmétique. ∎

Proposition 4. *L'algèbre de Boole engendrée par les suites/parties arithmétiques et lacunaires est l'ensemble des éléments de la forme $P \triangle L$ où P est la réunion finie de suites arithmétiques, et L est la réunion finie de suites lacunaires.*

Preuve. Soit Σ l'algèbre de Boole engendrée. On a $P, L \in \Sigma$, donc $P \triangle L \in \Sigma$. Donc $S \subset \Sigma$. Une suite arithmétique ou lacunaire est élément de S. Donc $\Sigma \subset S$. Finalement, $\Sigma = S$. ∎

Bibliographie

[BP] O. Blasco and A. Pełczyński, *Theorems of Hardy and Paley for vector-valued analytic functions and related classes of Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 335–367.

[CW] R. R. Coifman and G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569–645.

[GM] C. C. Graham and O. C. McGehee, *Essays in Commutative Harmonic Analysis*, Springer, New York, 1979.

[H] H. Helson, *Note on harmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 686–691.

[Kl] I. Klemes, *Idempotent multipliers of $H^1(\mathbf{T})$*, Canad. J. Math. 39 (1987), 1223–1234.

[L] H. Lelièvre, *Espaces BMO et multiplicateurs idempotents*, thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 1995.

[Pe] A. Pełczyński, *Commensurate sequences of characters*, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 525–531.

[Pi1] G. Pisier, *Les inégalités de Khintchine–Kahane d'après C. Borel*, Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach 1977–1978, exposé VII, Ecole Polytechnique, Centre de Mathematiques, 1978.

[Pi2] —, *De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon*, in: Mathematical Analysis and Applications, Part B, Adv. in Math. Suppl. Stud. 7B, Academic Press, 1981, 685–726.

[Pi3] —, *Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 60, Amer. Math. Soc., 1986.

[Pi4] —, *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*, in: Probability and Analysis 1985, Lecture Notes in Math. 1206, Springer, 1996, 167–241.

Equipe d'analyse, URA 754
Université Pierre et Marie Curie–Paris 6
Tour 46-0, Boîte 186
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France

Received February 14, 1996 (3613)
Revised version September 27, 1996

STUDIA MATHEMATICA 123 (3) (1997)

Standard exact projective resolutions relative to a countable class of Fréchet spaces

by

P. DOMAŃSKI (Poznań), J. KRONE (Iserlohn) and D. VOGT (Wuppertal)

Abstract. We will show that for each sequence of quasinormable Fréchet spaces $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ there is a Köthe space $\lambda(A)$ such that

$$\operatorname{Ext}^1(\lambda(A),\lambda(A)) = \operatorname{Ext}^1(\lambda(A),E_n) = 0$$

and there are exact sequences of the form

$$\ldots \to \lambda(A) \to \lambda(A) \to \lambda(A) \to \lambda(A) \to E_n \to 0.$$

If, for a fixed $n \in \mathbb{N}$, E_n is nuclear or a Köthe sequence space, the resolution above may be reduced to a short exact sequence of the form

$$0 \to \lambda(A) \to \lambda(A) \to E_n \to 0.$$

The result has some applications in the theory of the functor Ext^1 in various categories of Fréchet spaces by providing a substitute for non-existing projective resolutions.

Let us recall that $\operatorname{Ext}^1(E,F) = 0$ for Fréchet spaces E, F means that every short exact sequence

$$0 \to F \xrightarrow{j} G \xrightarrow{q} E \to 0$$

of Fréchet spaces splits (i.e., q has a continuous linear right inverse). We will prove the following main result:

MAIN THEOREM. *Let (E_n) and (F_n) be two sequences of quasinormable Fréchet spaces. There exists a Köthe space $\lambda(A)$ such that:*

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 46A04, 46A45, 46M20; Secondary 46A11, 46M10.

Key words and phrases: Fréchet spaces, Köthe sequence spaces, splitting of short exact sequences, nuclear spaces, Schwartz spaces, quasinormable spaces, functor Ext^1, projective spaces, projective resolution.

The research was done while the first named author visited the Bergische Universität Wuppertal, the financial support of which is acknowledged. The paper was finished when the first named author visited Universidad Politécnica de Valencia, Spain, supported by DGICYT, grant no. SAB 95-0092 in the academic year 1995/96.