Man kann beim Aufbau der Theorie der Abelschen Gruppen anstatt der Operation $a+b$ die inverse Operation $a-b$ als Grundoperation betrachten[1]). Satz 2 stellt uns für diesen Fall zwei Systeme von Postulaten zur Verfügung, die zur Begründung dieser Theorie hinreichen: das eine System besteht aus 1.1, 1.2, und 1.3, das zweite aber aus 1.1 und 1.4; die Formel 1.5 kann dabei als Definition von $+$ angesehen werden.

In den metodologischen Untersuchungen über die Theorie der Abelschen Gruppen erscheint es oft als zweckmäßig, weder die Operation $a+b$ noch $a-b$ als den Grundbegriff zu betrachten, sondern einen sozusagen neutralen Begriff einzuführen, und zwar eine ternäre Relation $S(a,b,c)$, die zwischen drei Elementen a,b,c der Gruppe G dann und nur dann besteht, wenn $a=b+c$ oder (was auf dasselbe hinauskommt) $a-b=c$ ist[2]). Die beiden obigen Postulatensysteme [1,1 1.2, 1.3] und [1.1, 1.4] können dieser Fassung gemäß umgeformt werden; insbesondere nehmen dann die Postulate 1.1 und 1.4 folgende Form an:

I. *Zu zwei beliebigen Elementen* $a, b \in G$ *gibt es ein Element* $c \in G$, *für das* $S(a,b,c)$ *gilt.*

II. *Sind* a,b,c,d,e,f *und* g *Elemente von* G *und gilt* $S(a,b,d)$, $S(c,d,e)$, $S(b,e,f)$ *und* $S(a,f,g)$, *so ist* $c=g$.

Unter den Postulatensystemen, die zur Grundlegung der Theorie der Abelschen Gruppen hinreichen und S als den Grundbegriff enthalten, gibt es vermutlich kein einfacheres System als [I, II].

---

[1]) Vgl. H. Boggs and G. Y. Rainich, Bull. Am. Math. Soc. **43** (1937), S. 81 ff., wo es sich aber nicht um Abelsche, sondern um beliebige Gruppen handelt; dort ist auch weitere Litteratur angegeben.

[2]) Vgl. z.B. M. Bôcher, Bull. Am. Math. Soc. **11** (1905), S. 126 ff.; S. Leśniewski, Fund. Math. **13** (1929), S. 319 ff. und Fund. Math. **14** (1929), S. 242 ff.

Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.

Von

Józef Pepis (Lwów).

Einleitung. Die vorliegende Abhandlung ist der Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems[1]) gewidmet und kann als eine Fortsetzung meiner im folgenden als P_1 zitierten*) Arbeit *Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems*, Acta Sc. Math. Szeged **8** (1936), Heft 1, S. 7-41, gelten.

Die nahe Beziehung des Entscheidungsproblems zu schwierigen zahlentheoretischen Problemen sowie gewisse Ergebnisse von K. Gödel [*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Math. und Phys., **38** (1931), S. 173-198] gaben Grund zur Vermutung, daß die vollständige Lösung dieses Problems unmöglich sei. Eine satzförmige Aussprache hat diese Vermutung erst unlängst in den Arbeiten von Alonzo Church [*An unsolvable problem of elementary number theory*, Amer. Journ. of Math., **58** (1936), S. 345-363, *A Note on the Entscheidungsproblem* and *Correction to a Note on the Entscheidungsproblem*, The Journal of Symbolic Logic, **1** (1936), S. 40-41 und S. 101-102] gefunden, der sie unter der Annahme bewiesen hat, daß

---

*) An jeder Stelle, wo ich einen Satz aus P_1 zitiere, bemerke ich es ausdrücklich durch das Stichwort „aus P_1“. Wird also ein Satz ohne dieses Stichwort angeführt, so ist es ein Satz aus der vorliegenden Arbeit.

[1]) Ich meine hier unmittelbar nur das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionenkalküls, wie es zuerst im Buche D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin 1928, insb. S. 72-73, formuliert worden ist. Dieses Problem wurde aber inzwischen als bereits gleichwertig mit den Entscheidungsproblemen weit umfangreicherer Systeme erkannt. Dabei ist unter dem *Entscheidungsproblem* eines formalen Systems im allgemeinen das Problem der Auffindung eines Verfahrens zu verstehen, das bei einem vorgelegten, nach den Konstruktionsregeln des Systems gebildeten Ausdruck durch endlich viele Operationen zu entscheiden erlaubt ob der Ausdruck nach den Schlußregeln des betreffenden Systems ableitbar sei.

die „effektive Berechenbarkeit“ (effective calculability) mit der „allgemeinen Rekursivität“ (dem auf J. Herbrand und K. Gödel zurückgehenden Begriff, welcher erst durch die Arbeiten von A. Church und S. C. Kleene allgemein bekannt worden ist) zusammenfällt. Wegen dieser Annahme scheint der Beweis von Church nicht streng überzeugend zu sein, da ja die Beziehung zwischen den Begriffen „effektiv berechenbare zahlentheoretische Funktion“ und „entscheidbarer zahlentheoretischer Satz“ eine wechselseitige ist, d.h. daß der Umfang des zweiten Begriffs nicht nur von dem des ersten abhängig ist, sondern auch umgekehrt. Ohne diese Annahme wäre aber aus dem Beweis von Church nur eine schwächere Behauptung zu entnehmen, welche auf die Nichtexistenz eines Entscheidungskriteriums von gewissen Eigenschaften hinausläuft. Zugunsten des Beweises von Church läßt sich nur soviel sagen, daß, falls das Entscheidungsproblem wirklich nicht vollständig lösbar wäre, diese Tatsache sich überhaupt nicht exakt beweisen ließe, da ja jegliche noch so weit gefaßte konstruktive Umgrenzung der unpräzisen Bezeichnung „einwandfreies, in endlich vielen Schritten zum Ziel führendes Entscheidungsverfahren“ (ohne solche Umgrenzung ist überhaupt kein strenger Beweis denkbar) immerhin als Beeinträchtigung der Allgemeinheit angesehen werden darf, ungefähr in demselben Sinne, in welchem z.B. jede konstruktive Umgrenzung des vagen Begriffs „einwandfreie Zuordnung“ als Einschränkung des Funktionsbegriffs zu sein scheint [2]).

Einige in P_1 bewiesene Sätze, insbesondere aber die dort eingeführten Begriffe des *β-Ausdrucks* und *γ-Ausdrucks*, werden hier benutzt. Die Definitionen dieser Begriffe werden hier (in II, S. 289) wiedergegeben, aber die in P_1 bewiesenen Sätze, die hier benutzt werden, werden als bekannt vorausgesetzt ohne aufs neue bewiesen zu werden.

Im folgenden meine ich unter dem *Entscheidungsproblem* immer das Erfüllbarkeitsproblem, also jedenfalls das mengentheoretische Entscheidungsproblem. Den finiten Anforderungen des beweistheoretischen Prädikatenkalküls bzw. Entscheidungsproblems [3]) wird aber in dieser Abhandlung schon dadurch teilweise Rechnung getragen, daß den Schlußprinzipien, welche auf rein formale Übergänge von Formeln zu Formeln nach den formalen Schlußregeln des üblichen (eventuell des durch das =-Zeichen erweiterten) Prädikatenkalküls zurückführbar sind, vor den anderen, mehr inhaltlichen Schlußprinzipien Vorzug gegeben wird.

[2]) Auf die Frage der vollständigen Lösbarkeit des Entscheidungsproblems werde ich in einer anderen Arbeit zurückkommen, in welcher ich auch auf die Gleichwertigkeit des allgemeinen Entscheidungsproblems mit der effektiven Berechenbarkeit einer (durch einen als richtig erkannten kombinatorischen Satz bestimmten) zahlentheoretischen Funktion hinweisen werde. Über jene Ergebnisse habe ich noch im Jahre 1934 in der Polnischen Mathematischen Gesellschaft, Abteilung Lwów, berichtet, habe sie aber inzwischen noch weiter verschärft. Was nun aber die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit anbetrifft, so sind sie von der genannten Frage überhaupt unabhängig, da ja Reduktionssätze wie auch Teillösungen des Entscheidungsproblems in jedem Falle von Interesse sind.

[3]) Bezüglich dieser Unterscheidung vgl. das Werk von D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik I*, Berlin 1934.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Teile, die den Teilen I und II aus P_1 entsprechen. Im ersten Teile werden die im Teile I von P_1 enthaltenen allgemeinen Sätze vertieft und ergänzt, während der zweite Teil den Verschärfungen der im Teil II von P_1 enthaltenen Sätze, wie auch der Aufstellung neuer Reduktionssätze, gewidmet ist. Die beiden Teile stehen zueinander in gleicher Beziehung, wie die entsprechenden Teile von P_1: die in I enthaltenen allgemeinen Sätze finden in II, bei der Ableitung der Reduktionssätze des Entscheidungsproblems, Anwendung.

Was die in II enthaltenen Reduktionssätze des Entscheidungsproblems anbetrifft, so sei vorlaüfig bemerkt, daß außer den Verschärfungen der Reduktionssätze aus P_1 und den neuen Reduktionssätzen, über welche ich schon zur Zeit der Abfassung des Zusatzes aus P_1 verfügte [4]), hier völlig neue Reduktionssätze aufgestellt und bewiesen werden, welche in einer engen Beziehung zu der inzwischen erschienenen Arbeit von W. Ackermann, *Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik*, Math. Ann. **112** (1936), Heft 3, S. 419-432, stehen.

Als Reduktionssätze des Erfüllbarkeitsproblems pflegt man gewöhnlich nur Sätze der Form

> „Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auf Zählausdrücke der Eigenschaft E beschränken“,

zu bezeichnen. Jedem solchen Satz wird aber immer ein Satz der Form

> „Zu jedem Zählausdruck läßt sich ein in bezug auf die Erfüllbarkeit gleichwertiger Zählausdruck von der Eigenschaft E angeben“

zu Grunde gelegt, welcher (Satz) einen positiv konstruktiven Sinn hat, unabhängig davon, ob das allgemeine Entscheidungsproblem lösbar ist oder nicht.

Von den neuen Reduktionssätzen seien folgende vorweg erwähnt:

[4]) und die ich teilweise schon in meiner umfangreicheren, demnächst im Archiwum Towarzystwa Naukowego we Lwowie zu erscheinenden polnischen Arbeit, *O zagadnieniu rozstrzygalności w zakresie węższego rachunku funkcyjnego*, berücksichtigte.

Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auf je folgende Zählausdrücke beschränken:

1. *Zählausdrücke in der pränexen Normalform, die eine einzige dreistellige Funktionsvariable enthalten und ein Skolemsches Präfix mit nur vier Allzeichen besitzen:*

$$(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(Ey_1)(Ey_2)\dots(Ey_n);$$

2. *Zählausdrücke in der pränexen Normalform mit Präfix der Gestalt*

$$(x)(y)(Ez)(x_1)(x_2)\dots(x_n)$$

(Kalmársche Normalform mit keinen voranstehenden Seinszeichen), welche nur zwei Funktionsvariablen, und zwar eine dreistellige und eine einstellige enthalten;

3. *Binäre Zählausdrücke in der pränexen Normalform mit Präfix der Gestalt*

$$(x)(y)(Ez)(x_1)(x_2)\dots(x_n)$$

(Kalmársche Normalform mit keinen voranstehenden Seinszeichen), welche nur zwei zweistellige und eine einstellige Funktionsvariable enthalten [5]*);*

4. *Zählausdrücke in der pränexen Normalform mit Präfix der Gestalt*

$$(x_1)(x_2)\dots(x_n)(Ey)$$

(Skolemsche Normalform mit nur einem Seinszeichen), welche nur eine dreistellige und eine einstellige Funktionsvariable enthalten;

5. *Binäre Zählausdrücke in der pränexen Normalform mit Präfix der Gestalt*

$$(x_1)(x_2)\dots(x_n)(Ey)$$

(Skolemsche Normalform mit nur einem Seinszeichen), welche nur zwei zweistellige und eine einstellige Funktionsvariable enthalten;

6. *Zählausdrücke in der Ackermannschen Normalform*

$$(Ex)(y)(Ez)(u_1)(u_2)\dots(u_n),$$

welche nur folgende Funktionsvariable enthalten: eine einstellige, eine zweistellige und eine dreistellige;

[5]) Vgl. L. Kalmár, *Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem*, Acta Sc. Math. Szeged **5** (1932), S. 222-236; vgl. auch Satz 31 aus $\boldsymbol{P}_1$.

7. *Binäre Zählausdrücke in der Ackermannschen Normalform*

$$(Ex)(y)(Ez)(u_1)(u_2)\dots(u_n),$$

welche nur eine einstellige und drei zweistellige Funktionsvariablen enthalten [6]*);*

8. *Zählausdrücke der Form*

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\,\&\,(x_1)(x_2)\dots(x_n)\,\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

wo Φ eine Funktionsvariable ist und der Ausdruck $\mathfrak{A}$ außer Φ nur noch eine, und zwar eine einstellige Funktionsvariable enthält.

9. *Zählausdrücke der Form*

$$(y)(z)(Ex)(R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z))\,\&\,(x_1)(x_2)\dots(x_n)\,\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

wo R_1 und R_2 Funktionsvariablen sind und der Ausdruck $\mathfrak{A}$ außer R_1 und R_2 nur noch eine und zwar eine einstellige Funktionsvariable enthält.

Die Reduktionssätze, welche besagen, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf Zählausdrücke, die nur ein Seinszeichen im Präfix besitzen, beschränken darf, erziele ich durch einen dem Ackermannschen in gewissen Punkten ähnlichen Gedankengang. Der Unterschied besteht hauptsächlich darin, daß Ackermann mit Rekursionen und Einsetzungen operiert, während ich in den Hauptbetrachtungen, die in die Formalisierung des entsprechenden Zählausdrucks eingehen, nur mit der Operation der Einsetzung auszukommen suche. Die Tatsache, daß ich in den Hilfsbetrachtungen Rekursionen zulasse, steht damit natürlich nicht im Widerspruch, da diese Hilfsbetrachtungen ja in die Formalisierung nicht eingehen. Übrigens verlaufen die dabei benutzten Rekursionen nur nach einem Parameter i, welchen ich auch rein äußerlich von den wirklichen Variablen $x_1, x_2, \dots$ absondere.

Was nun die Verschärfungen bezüglich Anzahl und Stellenzahl der Funktionsvariablen anbetrifft, so erziele ich sie teilweise schon durch Heranziehung der Methoden aus $\boldsymbol{P}_1$, teilweise aber durch Heranziehung einer wesentlich neuen Methode, welche ich als Methode der *doppelten* oder *zusammengeflickten Einsetzung* bezeichnen möchte (s. unten, S. 303).

[6]) In 6. bzw. 7. darf man sich übrigens schon auf Zählausdrücke in der schärferen Ackermannschen Form

$$(y)(Ez)F(y,z)\,\&\,(Ex)(u_1)(u_2)\dots(u_n)\,\mathfrak{A}(x,u_1,u_2,\dots,u_n)$$

beschränken, wobei F keine neue sondern eine schon in 6. bzw. 7. aufgezählte Funktionsvariable ist.

I. Darstellungen von Funktionen (hauptsächlich in unendlichen Individuenbereichen). Ich beginne mit einer genaueren Analysierung der Darstellbarkeit einer dreistelligen logischen Funktion $\Phi(x,y,z)$ von der Form $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$. Wie ich bereits im Satze 4 aus $\boldsymbol{P}_1$ bewiesen habe, läßt sich eine Funktion $\Phi(x,y,z)$ dann und nur dann in der Form $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ darstellen, wenn

$$(x)(y)(z)(u)(v)[\Phi(x,y,u)\,\&\,\Phi(x,v,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)]$$

besteht. Ich habe dort auch gezeigt, daß, falls diese letzte Bedingung erfüllt ist, ist die Äquivalenz $\Phi(x,y,z)\equiv R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ sicher durch $R_1(x,y)\equiv(Eu)\,\Phi(x,y,u)$ und $R_2(x,z)\equiv(Ev)\,\Phi(x,v,z)$ erfüllt. Nunmehr will ich alle Lösungen der Äquivalenz

$$\Phi(x,y,z)\equiv R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$$

auf R_1 und R_2 angeben.

Satz 1. *Ist $\Phi(x,y,z)$ eine in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion, für welche die Bedingung*

$$(1)\qquad (x)(y)(z)(u)(v)[\Phi(x,y,u)\,\&\,\Phi(x,v,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)]$$

erfüllt ist, und werden die Funktionen $R_1(x,y)$ und $R_2(x,z)$ in $\mathfrak{J}$ durch die Äquivalenzen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} R_1(x,y)&\equiv(Eu)\Phi(x,y,u)\vee[(u)(v)\overline{\Phi}(x,v,u)\,\&\,f(x)\,\&\,H(x,y)],\\ R_2(x,z)&\equiv(Ev)\,\Phi(x,v,z)\vee[(u)(v)\,\overline{\Phi}(x,v,u)\,\&\,\bar{f}(x)\,\&\,K(x,z)]\end{aligned}$$

definiert, so besteht die Äquivalenz

$$(3)\qquad \Phi(x,y,z)\equiv R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z),$$

unabhängig davon, welche Funktionen als $f(x)$, $H(x,y)$ und $K(x,y)$ gewählt werden. Auf diese Weise werden bereits alle Lösungen der letzten Äquivalenz erhalten.

Beweis. Seien $f(x)$, $H(x,y)$ und $K(x,y)$ beliebige (aber festgewählte) logische Funktionen über $\mathfrak{J}$. Wir bezeichnen zwecks Abkürzung:

$$\begin{aligned} (Eu)\Phi(x,y,u) &\quad\text{mit}\quad \mathfrak{A}(x,y),\\ [(u)(v)\overline{\Phi}(x,v,u)\,\&\,f(x)\,\&\,H(x,y)] &\quad\text{mit}\quad \mathfrak{B}(x,y),\\ (Ev)\Phi(x,v,z) &\quad\text{mit}\quad \mathfrak{C}(x,z),\\ [(u)(v)\overline{\Phi}(x,v,u)\,\&\,\bar{f}(x)\,\&\,K(x,z)] &\quad\text{mit}\quad \mathfrak{D}(x,z).\end{aligned}$$

Wir wollen zunächst folgende Hilfsbehauptung beweisen:

Werden die Funktionen $R_1(x,y)$, $R_2(x,z)$ durch (2), also durch die Äquivalenzen:

$$(4_1)\qquad R_1(x,y)\equiv\mathfrak{A}(x,y)\vee\mathfrak{B}(x,y),$$

$$(4_2)\qquad R_2(x,z)\equiv\mathfrak{C}(x,z)\vee\mathfrak{D}(x,z)$$

definiert, so besteht

$$(5)\qquad (x)(y)(z)[\Phi(x,y,z)\sim R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)].$$

Aus der offenbar richtigen Formel

$$(x)(y)(z)[\Phi(x,y,z)\rightarrow(Eu)\Phi(x,y,u)]$$

folgt die Richtigkeit von $(x)(y)(z)[\Phi(x,y,z)\rightarrow(Eu)\Phi(x,y,u)\vee\mathfrak{B}(x,y)]$, also wegen (4_1) von

$$(6)\qquad (x)(y)(z)[\Phi(x,y,z)\rightarrow R_1(x,y)].$$

Aus der offenbar richtigen Formel

$$(x)(y)(z)[\Phi(x,y,z)\rightarrow(Ev)\Phi(x,v,z)]$$

folgt die Richtigkeit von $(x)(y)(z)[\Phi(x,y,z)\rightarrow(Ev)\Phi(x,v,z)\vee\mathfrak{D}(x,z)]$, also wegen (4_2) von

$$(x)(y)(z)[\Phi(x,y,z)\rightarrow R_2(x,z)],$$

was zusammen mit (6) die Richtigkeit von

$$(7)\qquad (x)(y)(z)[\Phi(x,y,z)\rightarrow R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)]$$

ergibt. Aus der laut Voraussetzung richtigen Formel

$$(x)(y)(z)(u)(v)[\Phi(x,y,u)\,\&\,\Phi(x,v,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)]$$

folgt $(x)(y)(z)[(Eu)\Phi(x,y,u)\,\&\,(Ev)\Phi(x,v,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)]$, also

$$(8)\qquad (x)(y)(z)[\mathfrak{A}(x,y)\,\&\,\mathfrak{C}(x,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)].$$

Nun sind aber auch folgende drei Formeln richtig:

$$(9)\qquad (x)(y)(z)[\mathfrak{A}(x,y)\,\&\,\mathfrak{D}(x,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)],$$

$$(10)\qquad (x)(y)(z)[\mathfrak{B}(x,y)\,\&\,\mathfrak{C}(x,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)],$$

$$(11)\qquad (x)(y)(z)[\mathfrak{B}(x,y)\,\&\,\mathfrak{D}(x,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)],$$

und zwar wegen der Falschheit ihrer Vorderglieder:

$\mathfrak{A}(x,y)\,\&\,\mathfrak{D}(x,z)$ ist falsch, weil aus dem Konjunktionsgliede $(u)(v)\bar{\Phi}(x,v,u)$ von $\mathfrak{D}(x,z)$ leicht $(u)\bar{\Phi}(x,y,u)$, also $\bar{\mathfrak{A}}(x,y)$ folgt;

$\mathfrak{B}(x,y)\,\&\,\mathfrak{C}(x,z)$ ist falsch, weil aus dem Konjunktionsgliede $(u)(v)\bar{\Phi}(x,v,u)$ von $\mathfrak{B}(x,y)$ leicht $(v)\bar{\Phi}(x,v,z)$, also $\bar{\mathfrak{C}}(x,z)$ folgt;

$\mathfrak{B}(x,y)\,\&\,\mathfrak{D}(x,z)$ ist falsch, weil während $f(x)$ in $\mathfrak{B}(x,y)$ als Konjunktionsglied vorkommt, $\bar{f}(x)$ ein Konjunktionsglied von $\mathfrak{D}(x,z)$ ist.

Aus (8), (9), (10) und (11) folgt die Formel

$$(x)(y)(z)[(\mathfrak{A}(x,y)\,\&\,\mathfrak{C}(x,z))\vee(\mathfrak{A}(x,y)\,\&\,\mathfrak{D}(x,z))\vee \vee(\mathfrak{B}(x,y)\,\&\,\mathfrak{C}(x,z))\vee(\mathfrak{B}(x,y)\,\&\,\mathfrak{D}(x,z))\rightarrow\Phi(x,y,z)],$$

welche mit $(x)(y)(z)[\mathfrak{A}(x,y)\vee\mathfrak{B}(x,y)\;\&\;\mathfrak{C}(x,z)\vee\mathfrak{D}(x,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)]$, also wegen (4_1) und (4_2) mit

$$(x)(y)(z)[R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)] \tag{12}$$

äquivalent ist. Die Formeln (7) und (12) ergeben zusammen (5), womit die Hilfsbehauptung bewiesen ist.

Nehmen wir nun insbesondere als $H(x,y), K(x,z)$ identisch falsche Funktionen und als $f(x)$ eine beliebige Funktion, so ergibt (2) die uns bereits bekannte Lösung der Äquivalenz (3):

$$R_1(x,y)\equiv(Eu)\,\Phi(x,y,u),\qquad R_2(x,z)\equiv(Ev)\,\Phi(x,v,z). \tag{13}$$

Jetzt zeigen wir, daß durch (2) bereits alle Lösungen der Äquivalenz (3) geliefert werden. Sei $R_1(x,y)$, $R_2(x,z)$ eine beliebige Lösung dieser Äquivalenz. Es gelte also

$$\Phi(x,y,z)\equiv R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z). \tag{14}$$

Wir zeigen, daß die Äquivalenzen (2) für $f(x)\equiv(Eu)R_1(x,u)$, $H(x,y)\equiv R_1(x,y)$ und $K(x,z)\equiv R_2(x,z)$ bestehen. Wegen (14) genügt es dazu offenbar zu zeigen, daß die Äquivalenzen:

$$R_1(x,y)\equiv[R_1(x,y)\,\&\,(Eu)R_2(x,u)]\vee \vee[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(Eu)R_1(x,u)\,\&\,R_1(x,y)], \tag{15}$$

$$R_2(x,z)\equiv[(Ev)R_1(x,v)\,\&\,R_2(x,z)]\vee \vee[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(u)\bar{R}_1(x,u)\,\&\,R_2(x,z)] \tag{16}$$

bestehen. Die Implikationen $[R_1(x,y)\,\&\,(Eu)R_2(x,u)]\rightarrow R_1(x,y)$ und $[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(Eu)R_1(x,u)\,\&\,R_1(x,y)]\rightarrow R_1(x,y)$ sind offenbar stets richtig und daher auch die Implikation

$$[R_1(x,y)\,\&\,(Eu)R_2(x,u)]\vee \vee[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(Eu)R_1(x,u)\,\&\,R_1(x,y)]\rightarrow R_1(x,y). \tag{17}$$

Sind jetzt x,y beliebige (aber festgewählte) Elemente aus dem Individuenbereich $\mathfrak{J}$, so unterscheiden wir zwei Fälle:

1⁰ $(Eu)R_2(x,u)$ ist richtig. In diesem Falle besteht die Implikation $R_1(x,y)\rightarrow[R_1(x,y)\,\&\,(Eu)R_2(x,u)]$, also erst recht die Implikation

$$R_1(x,y)\rightarrow[R_1(x,y)\,\&\,(Eu)R_2(x,u)]\vee \vee[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(Eu)R_1(x,u)\,\&\,R_1(x,y)]. \tag{18}$$

2⁰ $(Eu)R_2(x,u)$ ist falsch. In diesem Falle ist $(u)\bar{R}_2(x,u)$ richtig und daher, wie man leicht einsieht, auch die Implikation $R_1(x,y)\rightarrow[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(Eu)R_1(x,u)\,\&\,R_1(x,y)]$. Aus der Richtigkeit dieser Implikation folgt erst recht die der Implikation (18). Die Implikation (18) ist also in beiden Fällen richtig; zusammen mit der Implikation (17) ergibt sie die Äquivalenz (15).

Anderseits sind offenbar die Implikationen:

$$[(Ev)R_1(x,v)\,\&\,R_2(x,z)]\rightarrow R_2(x,z),$$
$$[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(u)\bar{R}_1(x,u)\,\&\,R_2(x,z)]\rightarrow R_2(x,z)$$

stets richtig und daher auch die Implikation

$$[(Ev)R_1(x,v)\,\&\,R_2(x,z)]\vee \vee[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(u)\bar{R}_1(x,u)\,\&\,R_2(x,z)]\rightarrow R_2(x,z). \tag{19}$$

Sind jetzt x,z beliebige (aber festgewählte) Elemente aus dem Individuenbereich $\mathfrak{J}$, so unterscheiden wir wiederum zwei Fälle:

1⁰ $(Ev)R_1(x,v)$ ist richtig. In diesem Falle besteht die Implikation $R_2(x,z)\rightarrow[(Ev)R_1(x,v)\,\&\,R_2(x,z)]$, also erst recht die Implikation

$$R_2(x,z)\rightarrow[(Ev)R_1(x,v)\,\&\,R_2(x,z)]\vee \vee[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(u)\bar{R}_1(x,u)\,\&\,R_2(x,z)]. \tag{20}$$

2⁰ $(Ev)R_1(x,v)$ ist falsch. In diesem Falle sind $(v)\bar{R}_1(x,v)$, $(u)\bar{R}_1(x,u)$ richtig und damit auch die Implikation

$$R_2(x,z)\rightarrow[(v)\bar{R}_1(x,v)\vee(u)\bar{R}_2(x,u)\,\&\,(u)\bar{R}_1(x,u)\,\&\,R_2(x,z)],$$

also erst recht die Implikation (20). Die Implikation (20) ist also in den beiden Fällen richtig; mit der Implikation (19) zusammen ergibt sie die Äquivalenz (16).

Damit ist gezeigt, daß alle Lösungen der Äquivalenz (3) sich in der Form (2) darstellen lassen [7]). Der Satz 1 ist also vollständig bewiesen.

---

[7]) Man könnte, wie leicht zu zeigen, im obigen Beweise statt $(Eu)R_1(x,u)$ auch $(v)\bar{R}_2(x,v)$ als $f(x)$ nehmen. Diese Tatsache folgt übrigens schon aus Symmetriegründen.

Ist $\Phi(x,y,z)$ eine in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion, für welche außer der Bedingung (1) noch die Bedingung

$$(x)(Eu)(Ev)\Phi(x,v,u) \tag{21}$$

erfüllt ist, so ergeben die Äquivalenzen (2) die einzige Lösung (13) für die Äquivalenz (3), da ja wegen $(x)(Eu)(Ev)\Phi(x,v,u)$ die Funktion $(u)(v)\overline{\Phi}(x,v,u)$ und somit die mit $\mathfrak{B}(x,y)$ und $\mathfrak{D}(x,z)$ bezeichneten Funktionen dann identisch falsch sind. Ist dagegen $\Phi(x,y,z)$ eine Funktion für welche die Bedingung (1) erfüllt ist, nicht aber die Bedingung (21), so besitzt die Äquivalenz (3) mehr als eine Lösung, da z.B. die sich aus (2) durch Setzung für $f(x)$, $H(x,y)$ und $K(x,y)$ etwa identisch wahrer Funktionen, ergebende Lösung:

$$R_1^*(x,y)\equiv(Eu)\Phi(x,y,u)\vee(u)(v)\overline{\Phi}(x,v,u),\qquad R_2^*(x,z)\equiv(Ev)\Phi(x,v,z) \tag{22}$$

von der Lösung (13) verschieden ist. Daß tatsächlich $R_1^*(x,y)\not\equiv R_1(x,y)$ ist, sieht man folgendermaßen ein:

Wegen der vorausgesetzten Falschheit von $(x)(Eu)(Ev)\Phi(x,v,u)$ gibt es im Individuenbereich $\mathfrak{J}$ ein Element a, für welches $(u)(v)\overline{\Phi}(a,v,u)$, also auch $R_1^*(a,y)$ für jedes y richtig ist, während $R_1(a,y)$ für jedes y falsch ist, da ja aus $(u)(v)\overline{\Phi}(a,v,u)$ sofort $(u)\overline{\Phi}(a,y,u)$ also $\overline{(Eu)\Phi(a,y,u)}$ folgt. Wir bewiesen damit folgenden

Satz 2. *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer dreistelligen logischen Funktion $\Phi(x,y,z)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ auf eindeutige Weise in der Form $(R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z))$ ist die Richtigkeit in $\mathfrak{J}$ der beiden Formeln:*

$$(x)(y)(z)(u)(v)[\Phi(x,y,u)\,\&\,\Phi(x,v,z)\rightarrow\Phi(x,y,z)],\qquad (x)(Ey)(Ez)\Phi(x,y,z).$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so lauten die eindeutig bestimmten Funktionen $R_1(x,y)$ und $R_2(x,z)$:

$$R_1(x,y)\equiv(Eu)\Phi(x,y,u),\qquad R_2(x,z)\equiv(Ev)\Phi(x,v,z) \tag{23}$$ [8].

[8]) Ist insbesondere $\Phi(x,y,z)$ eine Funktion, die eineindeutig (das Folgende gilt übrigens auch bei bloßer Eindeutigkeit der Abbildung) die Elemente x eines Individuenbereichs $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y,z]$ von solchen abbildet, so sind die Bedingungen des Satzes 2 offenbar erfüllt und läßt sich deswegen $\Phi(x,y,z)$ eindeutig in der Form $(R_1(x,y)\&R_2(x,z))$, nämlich mit $R_1(x,y)\equiv(Eu)\Phi(x,y,u)$ und $R_2(x,z)\equiv(Ev)\Phi(x,v,z)$ darstellen.

Ferner gilt der

Satz 3. *Sind R_1, R_2 derartige Funktionen, daß durch die Funktion $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ eine eineindeutige Abbildung der Elemente x eines Individuenbereiches $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y,z]$ von solchen geleistet wird, so gilt in $\mathfrak{J}$*

$$(x)(y)(z)[(R_1(x,y)\,\&\,R_1(x,z)\rightarrow y=z)\,\&\,(R_2(x,y)\,\&\,R_2(x,z)\rightarrow y=z)]. \tag{24}$$

Beweis. Wegen der Voraussetzung über R_1 und R_2 gilt für die durch die Äquivalenz

$$\Phi(x,y,z)\equiv(R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)) \tag{25}$$

definierte Funktion Φ die Formel

$$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[\Phi(x,y,z)\,\&\,\Phi(x,\overset{*}{y},\overset{*}{z})\rightarrow y=\overset{*}{y}\,\&\,z=\overset{*}{z}]$$

und daher auch die Formeln:

$$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[\Phi(x,y,z)\,\&\,\Phi(x,\overset{*}{y},\overset{*}{z})\rightarrow y=\overset{*}{y}],$$
$$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[\Phi(x,y,z)\,\&\,\Phi(x,\overset{*}{y},\overset{*}{z})\rightarrow z=\overset{*}{z}],$$

aus welchen man durch Umbezeichnung der Variablen und mehrmalige Anwendung der Schlußregel $(x)[f(x)\rightarrow p]\rightarrow[(Ex)f(x)\rightarrow p]$ die zwei Formeln:

$$\begin{aligned}&(x)(y)(z)[(Eu)\Phi(x,y,u)\,\&\,(E\overset{*}{u})\Phi(x,z,\overset{*}{u})\rightarrow y=z],\\ &(x)(y)(z)[(Ev)\Phi(x,v,y)\,\&\,(E\overset{*}{v})\Phi(x,\overset{*}{v},z)\rightarrow y=z]\end{aligned} \tag{26}$$

herleiten kann.

Wegen (25) und der Fußnote [8]) bestehen die Äquivalenzen (23), welche, in (26) berücksichtigt, die zwei Formeln:

$$(x)(y)(z)[R_1(x,y)\,\&\,R_1(x,z)\rightarrow y=z],$$
$$(x)(y)(z)[R_2(x,y)\,\&\,R_2(x,z)\rightarrow y=z]$$

ergeben, aus denen schon leicht die verlangte Formel (24) zu gewinnen ist [9]).

[9]) Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß der Satz 3 schon richtig ist, wenn $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ bloß eindeutig (nicht eineindeutig) die Elemente x auf die Paare $[y,z]$ abbildet. Von dieser Verschärfung machen wir aber bei Anwendung auf das Entscheidungsproblem keinen Gebrauch.

Satz 4. *Ist $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion, für welche folgende zwei Bedingungen:*

$$\text{a)}\quad (x)(x_\varrho)_1^n (y_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \to \sum_{i=1}^{n} (y_i = x_i)],$$

$$\text{b)}\quad (x_\varrho)_1^n (Ex) R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

erfüllt sind, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte n-stellige logische Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, mit geeigneter Funktion $f(x)$, und zwar mit

$$(27)\qquad f(x) \equiv (Ey_\varrho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, F(y_1, y_2, \ldots, y_n)],$$

sowie mit

$$(28)\qquad f(x) \equiv (y_\varrho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \to F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

und sogar im allgemeinen mit anderen Funktionen $f(x)$ [10]*, gleichzeitig die zwei Äquivalenzen:*

$$(29)\qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x)],$$

$$(30)\qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)]$$ [11].

B e w e i s. Wird die Funktion $f(x)$ durch die Festsetzung (27) definiert, so besteht — wie ich schon in Satz 6 aus $\boldsymbol{P}_1$ bewiesen habe — die Äquivalenz (29).

Jetzt zeige ich, daß für dieselbe Funktion $f(x)$ auch die Äquivalenz (30) besteht. Wegen der offenbar richtigen Formel

$$R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (Ey_\varrho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

besteht stets die Implikation $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)$, also auch $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)]$ und daher auch

$$(31)\qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)].$$

Es gilt ferner stets die Formel

$$(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)] \to (x)\{R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x)]\},$$

[10]) Es kann deren unter Umständen sogar unendlich viele sein.

[11]) Satz 4 ist eine Verschärfung der Sätze 6 und 7 aus $\boldsymbol{P}_1$. Während Satz 6 aus $\boldsymbol{P}_1$ aussagt, daß unter den Bedingungen a) und b) jede Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in der Form $(Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& f(x)]$, und Satz 7 aus $\boldsymbol{P}_1$, daß unter denselben Bedingungen jede solche Funktion in der Form $(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)]$ darstellbar ist, besagt obiger Satz 4, daß unter denselben Bedingungen a) und b) jede Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sich sogar gleichzeitig in den beiden Formen darstellen läßt, und zwar mit d e r s e l b e n F u n k t i o n $f(x)$ i n b e i d e n F o r m e n.

welche wegen der Schlußregel $(x)\{F(x) \to G(x)\} \to \{(Ex)F(x) \to (Ex)G(x)\}$ leicht

$$(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)] \to$$
$$\to \{(Ex)R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x)]\}$$

und daraus durch Vertauschung der Vorderglieder

$$(Ex)R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to$$
$$\to \{(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)] \to (Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x)]\}$$

ergibt. Da aber $(Ex)R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wegen b) richtig ist, so gilt stets die Implikation

$$(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)] \to (Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x)],$$

welche, zusammen mit der aus der Äquivalenz (29) folgenden Implikation $(Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x)] \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, durch einen Kettenschluß die Implikation

$$(32)\qquad (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)] \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

liefert. Die beiden Implikationen (31), (32) ergeben zusammen die verlangte Äquivalenz (30).

Die Äquivalenzen (29) und (30) gelten also gleichzeitig mit der Funktion (27).

Wird jetzt in den drei letzten Äquivalenzen statt $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Funktion $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gesetzt und die Funktion $f(x)$ mit $\bar{f}(x)$ bezeichnet, so erhalten wir die Äquivalenzen:

$$\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, \bar{f}(x)],$$
$$\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \bar{f}(x)]$$

mit der Funktion $\bar{f}(x) \equiv (Ey_\varrho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, \overline{F}(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ und daraus (durch den Übergang von $A \equiv B$ zu $\overline{A} \equiv \overline{B}$) die zwei Äquivalenzen:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)],$$
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x)]$$

mit der Funktion $f(x) \equiv (y_\varrho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \to F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$.

Damit haben wir aber gezeigt, daß die Äquivalenzen (29) und (30) auch mit der Funktion (28) bestehen, welche im allgemeinen von der Funktion (27) verschieden ist.

Jetzt wollen wir überhaupt alle Funktionen $f(x)$ ermitteln, für welche jede einzelne der Äquivalenzen (29), (30) besteht, sowie auch diejenigen Funktionen $f(x)$, für welche gleichzeitig die beiden bestehen [12].

Wir beginnen mit der Äquivalenz (29). Ist $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion, für welche die Bedingungen a) und b) erfüllt sind, ferner $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebige logische Funktion über $\mathfrak{J}$, und werden die logischen Funktionen $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ durch die Äquivalenzen:

$$g_1(x) \equiv (Ex_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, \overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

$$g_2(x) \equiv (Ex_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

$$g_3(x) \equiv (x_\varrho)_1^n \overline{R}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

definiert, so sind je zwei von den Mengen $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$, welche der Reihe nach durch die Funktionen $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ charakterisiert werden, zueinander fremd und es gilt außerdem — wie man leicht einsieht — die Beziehung $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3$.

Sei jetzt $f(x)$ eine beliebige Funktion, welche die Äquivalenz (29) erfüllt. Wir zeigen zunächst, daß die Funktion $f(x)$ auf $\mathfrak{J}_1$ (falls diese Menge nicht leer ist) identisch falsch sein muß. Dazu genügt es offenbar zu zeigen, daß die Annahme $(Ex)(f(x) \,\&\, g_1(x))$ zu einem Widerspruch führt. $(Ex)(f(x) \,\&\, g_1(x))$ bedeutet aber

$$(Ex)(f(x) \,\&\, (Ex_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, \overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)]),$$

was sich leicht in $(Ex_\varrho)_1^n((Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x)] \,\&\, \overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ umformen läßt, woraus wegen (29) sofort

$$(Ex_\varrho)_1^n (F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, \overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

also ein Widerspruch folgt.

Jetzt wollen wir das Verhalten der Funktion $f(x)$ auf der Menge $\mathfrak{J}_2$ studieren. Wir betrachten zu diesem Zwecke die durch die Äquivalenz

$$G(x, y) \equiv (Ex_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \tag{33}$$

[12]) Von dieser genaueren Analyse der Äquivalenzen (29) und (30) machen wir später bei den Reduktionssätzen des Entscheidungsproblems keinen Gebrauch. Der sich im Augenblick nur für das Entscheidungsproblem interessierende Leser kann also diese Analyse ruhig übergehen.

definierte Relation $G(x, y)$. Diese Relation ist auf $\mathfrak{J}_2$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. $G(x, x)$ ist richtig, da aus $g_2(x)$ sofort

$$(Ex_\varrho)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

also auch

$$(Ex_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

folgt [13]); die Symmetrie folgt unmittelbar aus der kommutativen Eigenschaft der Konjunktion; seien nun weiter $G(x, y)$ und $G(y, z)$ richtig, es existieren dann solche $x_1, x_2, \ldots, x_n$, für welche $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ richtig sind, und es existieren solche $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n$, für welche $R(y, \overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n)$, $R(z, \overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ bestehen. Aus $R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $R(y, \overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ folgt wegen der Bedingung a) sofort $\sum_{i=1}^{n}(\overset{*}{x}_i = x_i)$, welches, in $R(z, \overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ eingesetzt, $R(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ergibt. Aus $R(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ folgt aber

$$(Ex_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

also $G(x, z)$. Damit ist auch die Transitivität bewiesen [14]).

Die Relation $G(x, y)$ erzeugt also eine Klasseneinteilung der Elemente aus $\mathfrak{J}_2$ (falls natürlich $\mathfrak{J}_2$ nicht leer ist), und zwar derart, daß zwei Elemente x, y aus $\mathfrak{J}_2$ dann und nur dann zur selben Klasse gehören, wenn $G(x, y)$ besteht.

Über das Verhalten der Funktion $f(x)$ auf $\mathfrak{J}_2$ läßt sich nun folgendes sagen: In jeder Klasse der durch die Relation $G(x, y)$ bewirkten Klasseneinteilung von $\mathfrak{J}_2$ gibt es ein Element x, für welches $f(x)$ besteht. Mit anderen Worten: Es gibt für die Menge von Klassen, welche zueinander fremd sind und durch die Relation $G(x, y)$ erzeugt werden, eine „Auswahlmenge“ $\mathfrak{K}$, auf welcher $f(x)$ identisch wahr ist.

Um dies nachzuweisen, nehmen wir eine von diesen Klassen in Betracht, die etwa durch ein Element y von ihr bestimmt sei. Da y zu $\mathfrak{J}_2$ gehört, so gilt $g_2(y)$, also $(Ex_\varrho)_1^n [R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, was zusammen mit (29) die Formel

$$(Ex_\varrho)_1^n [R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, (Ex)(R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x))]$$

[13]) Da $(Ex_\varrho)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auch aus $g_1(x)$ folgt, so gilt $G(x, x)$ auch für jedes x aus $\mathfrak{J}_1$.

[14]) Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß die Relation $G(x, y)$ überhaupt im ganzen Individuenbereich $\mathfrak{J}$ symmetrisch und transitiv ist. Wegen Fußnote [13]) ist sie also nicht nur in $\mathfrak{J}_2$, sondern auch in $\mathfrak{J}_1$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. Von der letzten Tatsache wird bei der Diskussion der Äquivalenz (30) Gebrauch gemacht.

ergibt, welche sich in

$$(Ex)\,(f(x)\,\&\,(Ex_0)_1^n[R(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)]),$$

also in $(Ex)(f(x)\,\&\,G(y,x))$ umformen läßt. Damit ist die Existenz eines Elementes x, für welches $f(x)$ in der beliebigen in Betracht genommenen Klasse gilt, bewiesen.

Was nun noch das Verhalten der Funktion $f(x)$ auf der Menge $\mathfrak{J}_3$ betrifft, so läßt sich darüber nichts folgern.

Umgekehrt: Wird eine logische Funktion $f(x)$ definiert, indem man sie auf $\mathfrak{J}_1$ falsch, auf $\mathfrak{K}$ wahr (wo $\mathfrak{K}$ eine beliebige Auswahlmenge aus der Menge von Klassen bezeichnet, in welche die Relation $G(x,y)$ den Bereich $\mathfrak{J}_2$ zerlegt) und auf $\mathfrak{J}_2-\mathfrak{K}$, wie auch auf $\mathfrak{J}_3$, ganz beliebig nimmt, so erfüllt jede so definierte Funktion $f(x)$ die Äquivalenz (29).

Sei nämlich $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ein beliebiges n-Tupel von Elementen aus $\mathfrak{J}$, für welches $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ gilt. Wir finden zunächst gemäß b) ein Element y derart, daß $R(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ besteht. Aus $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $R(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ folgt $(Ex_0)_1^n[R(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,F(x_1,x_2,\ldots,x_n)]$, also $g_2(y)$, und daher gehört y zu $\mathfrak{J}_2$. Wird das gemeinsame Element der Auswahlmenge $\mathfrak{K}$ und derjenigen Klasse, zu welcher y (in der durch die Relation G geleisteten Klasseneinteilung) gehört, mit x bezeichnet, so gilt einerseits $G(x,y)$, da ja x und y zur selben Klasse gehören, und anderseits $f(x)$, da ja die Funktion f auf $\mathfrak{K}$ identisch wahr ist. Aus $G(x,y)$ folgt nun die Existenz eines n-Tupels $\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n$, für welches $R(x,\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n)$ und $R(y,\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n)$ gelten. Aus $R(y,\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n)$ und $R(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ folgt aber wegen a) $\sum\limits_{i=1}^{n}(\overset{*}{x}_i=x_i)$, was in $R(x,\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n)$ berücksichtigt $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ergibt. $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $f(x)$ ergeben schließlich

$$(Ex)[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,f(x)].$$

Damit haben wir

$$(34)\qquad (x_0)_1^n(F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\rightarrow(Ex)[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,f(x)])$$

bewiesen. Sei weiter $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ein beliebiges n-Tupel von Elementen aus $\mathfrak{J}$, für welches $(Ex)[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,f(x)]$ gilt. Es gibt also ein Element x, so daß $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $f(x)$ bestehen. Aus $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ folgt $(Ex_0)_1^n R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, also $\bar{g}_3(x)$, und daher gehört x nicht zu $\mathfrak{J}_3$. Wegen $f(x)$ kann x auch nicht zu $\mathfrak{J}_1$ gehören, da ja die Funktion f auf $\mathfrak{J}_1$ identisch falsch ist. Es muß also x

zu $\mathfrak{J}_2$ gehören und daher $g_2(x)$ gelten. Es gibt deshalb ein n-Tupel $\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$, für welches $R(x,\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n)$ und $F(\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n)$ bestehen. Aus $R(x,\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n)$ und $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ folgt gemäß a) $\sum\limits_{i=1}^{n}(\overset{*}{x}_i=x_i)$, was, in $F(\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\ldots,\overset{*}{x}_n)$ eingetragen, $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ liefert. Damit haben wir aber

$$(35)\qquad (x_0)_1^n((Ex)[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,f(x)]\rightarrow F(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

bewiesen. Aus (34) und (35) folgt, daß die Funktion f die Äquivalenz (29) erfüllt.

Wir gehen jetzt zur Äquivalenz (30) über. Eine besondere Analyse dieser Äquivalenz kann dadurch erspart werden, daß wir die Äquivalenz (30) durch Übergang zur gleichwertigen Äquivalenz $\bar{F}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv(Ex)[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,\bar{f}(x)]$ auf eine Äquivalenz der Form (29) bringen wollen. Bei diesem Übergang geht die Funktion $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ in $\bar{F}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und die Funktion $f(x)$ in $\bar{f}(x)$ über. Wie aus der Definition der Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ ersichtlich, vertauschen die Mengen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ beim Übergang von $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ zu $\bar{F}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, und daher auch bei unserem Übergang, ihre Rollen. Da weiter der Übergang von $f(x)$ zu $\bar{f}(x)$ als bloße Vertauschung der Wahrheitswerte „wahr“, „falsch“ unter Beibehaltung der Funktion $f(x)$ angesehen werden kann, so gehen die für die Äquivalenz (29) erreichten Ergebnisse in folgende Ergebnisse für die Äquivalenz (30) über:

Ist $f(x)$ eine beliebige, die Äquivalenz (30) erfüllende Funktion, so muß $f(x)$ auf $\mathfrak{J}_2$ identisch wahr sein.

In jeder Klasse der durch die Relation $G(x,y)$ bewirkten Klasseneinteilung der Menge $\mathfrak{J}_1$ [15]) muß es ein Element x geben, für welches $f(x)$ falsch ist, d. h. es gibt für die Menge der Klassen dieser Klasseneinteilung eine Auswahlmenge $\mathfrak{L}$, auf welcher $f(x)$ identisch falsch ist. Über das Verhalten der Funktion f auf $\mathfrak{J}_3$ läßt sich nichts folgern.

Umgekehrt: Wird eine logische Funktion f definiert, indem man sie auf $\mathfrak{J}_2$ wahr, auf $\mathfrak{L}$ (wo $\mathfrak{L}$ eine beliebige Auswahlmenge aus der Menge von Klassen, in welche die Relation $G(x,y)$ den Bereich $\mathfrak{J}_1$ zerlegt) falsch und auf $\mathfrak{J}_1-\mathfrak{L}$, wie auch auf $\mathfrak{J}_3$, ganz beliebig annimmt, so erfüllt jede so definierte Funktion f die Äquivalenz (30).

---

[15]) Vgl. darüber die Fußnote [14]).

Jetzt können wir zur gleichzeitigen Betrachtung der beiden Äquivalenzen (29) und (30) übergehen. Ist $f(x)$ irgend eine Funktion, welche gleichzeitig (29) und (30) erfüllt (natürlich, bei festen $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ und $R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$, wobei die letzte Funktion den Bedingungen a) und b) genügt), so muß die Funktion $f(x)$, nach dem für (29) Bewiesenen, auf $\mathfrak{J}_1$ identisch falsch und, nach dem für (30) Bewiesenen, auf $\mathfrak{J}_2$ identisch wahr sein. Insbesondere ist also die Funktion auf $\mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2$ eindeutig bestimmt. Was nun das Verhalten der Funktion $f(x)$ auf $\mathfrak{J}_3$ anbelangt, so läßt sich darüber, wie bereits aus dem bei Betrachtung der einzelnen Äquivalenzen (29) und (30) Gesagten folgt, nichts sagen.

Wird umgekehrt eine Funktion $f(x)$ in $\mathfrak{J}$ definiert, indem man sie auf $\mathfrak{J}_1$ falsch, auf $\mathfrak{J}_2$ richtig und auf $\mathfrak{J}_3$ beliebig setzt, so erfüllt sie gleichzeitig die Äquivalenzen (29) und (30). Um einzusehen, daß die Funktion $f(x)$ die Äquivalenz (29) erfüllt, genügt es zu beachten, daß wegen der Richtigkeit dieser Funktion auf $\mathfrak{J}_2$, sie nicht nur auf einer, sondern auf jeder Auswahlmenge $\mathfrak{K}$ aus der Menge von Klassen der durch die Relation $G(x,y)$ bewirkten Klasseneinteilung von $\mathfrak{J}_2$ richtig ist (da jede Auswahlmenge $\mathfrak{K}$ ja eine Teilmenge von $\mathfrak{J}_2$ ist). Ähnlich, aus der Falschheit der Funktion $f(x)$ auf $\mathfrak{J}_1$ folgt, daß sie überhaupt auf jeder Auswahlmenge $\mathfrak{L}$, die zu der durch die Relation $G(x,y)$ bewirkten Klasseneinteilung von $\mathfrak{J}_1$ gehört, falsch ist (da ja jede Auswahlmenge $\mathfrak{L}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{J}_1$ ist) und deshalb erfüllt diese Funktion auch die Äquivalenz (30). Da je zwei von den Funktionen f, welche gleichzeitig die beiden Äquivalenzen (29), (30) erfüllen, auf $\mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2$ übereinstimmen müssen und auf $\mathfrak{J}_3$ ganz beliebig sein können, so ist die Menge aller verschiedenen solchen Funktionen mit der Menge überhaupt aller auf $\mathfrak{J}_3$ definierten logischen Funktionen gleichmächtig. Ihre Mächtigkeit drückt sich also immer [16]) durch eine Kardinalzahl der Form $2^{\mathfrak{n}}$ (wo $\mathfrak{n}$ die Mächtigkeit des Bereichs $\mathfrak{J}_3$ ist) aus. Am Anfang unserer Analyse haben wir zwei (der Form nach verschiedene) Funktionen auf f gefunden, welche die Äquivalenzen (29) und (30) gleichzeitig erfüllen, nämlich die Funktionen:

$$(36)\qquad (Ex_\varrho)_1^n[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\,\&\,F(x_1,x_2,\dots,x_n)],$$

$$(37)\qquad (x_\varrho)_1^n[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\rightarrow F(x_1,x_2,\dots,x_n)].$$

[16]) d. h. wie auch die Funktionen $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ und $R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$ bestimmt werden (natürlich unter der Einschränkung, daß die letzte Funktion den Bedingungen a) und b) genügt).

Es ist nicht schwer zu erkennen, welchen Platz die Funktionen (36) und (37) unter allen solchen Funktionen einnehmen. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß die beiden Funktionen auf $\mathfrak{J}_3$ konstant sind: (36) ist auf $\mathfrak{J}_3$ identisch falsch und (37) ist auf $\mathfrak{J}_3$ identisch richtig. Dann und nur dann, wenn $\mathfrak{J}_3$ leer ist, d. h. wenn außer den Bedingungen a) und b) noch $(x)(Ex_\varrho)_1^n R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$ erfüllt ist, besteht die Äquivalenz $(36)\equiv(37)$:

$$(Ex_\varrho)_1^n[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\,\&\,F(x_1,x_2,\dots,x_n)]\equiv$$
$$\equiv(x_\varrho)_1^n[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\rightarrow F(x_1,x_2,\dots,x_n)].$$

Diese Funktion (welche den beiden Seiten der letzten Äquivalenz gemeinsam ist) ist dann auch überhaupt die einzige Funktion, welche, als f genommen, beide Äquivalenzen (29) und (30) gleichzeitig erfüllt, da ja dann $\mathfrak{n}=0$, also $2^{\mathfrak{n}}=1$ ist [17]).

Was die Grenzfälle der obigen allgemeinen Betrachtungen betrifft, wo $\mathfrak{J}_1$ oder $\mathfrak{J}_2$ leer ist, so sei kurz bemerkt, daß $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ nie gleichzeitig leer sein können, da wegen b) $(Ex_\varrho)_1^n(Ex)R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$ und deshalb auch $(Ex)(g_1(x)\vee g_2(x))$ richtig ist. $\mathfrak{J}_1$ bzw. $\mathfrak{J}_2$ ist dann und nur dann leer, wenn $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ identisch wahr bzw. identisch falsch ist (dies ist aus den Äquivalenzen für $g_1(x)$ und $g_2(x)$, S. 270, leicht zu ersehen).

Über die Äquivalenzen (29) und (30) und ihre Lösungen läßt sich noch Mehreres sagen. Wir sehen aber hier davon ab und wollen nur noch auf Folgendes hinweisen.

Wie oben gezeigt, ist die Mächtigkeit der Menge aller verschiedenen, die Äquivalenzen (29) und (30) in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ gleichzeitig erfüllenden Funktionen f (wo $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ eine beliebige Funktion über $\mathfrak{J}$ und $R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$ irgend eine den Bedingungen a) und b) genügende Funktion ist) immer von der Form $2^{\mathfrak{n}}$. Die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ bezeichnet dabei die Mächtigkeit der Teilmenge $\mathfrak{J}_3$

[17]) Jede einzelne der Äquivalenzen (29) und (30) kann aber noch jetzt mehrere Lösungen f haben. In der Tat, während eine gleichzeitige Lösung f der beiden Äquivalenzen (29) und (30) auf $\mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2$ (also jetzt auf $\mathfrak{J}$) eindeutig bestimmt ist, gibt es für f, welches nur (29) bzw. nur (30) erfüllen soll, noch jetzt auf $\mathfrak{J}_2$ bzw. $\mathfrak{J}_1$ eine große Wahlfreiheit, nämlich in der Bestimmung der Auswahlmenge $\mathfrak{K}$ und der Funktion f auf $\mathfrak{J}_2-\mathfrak{K}$, bzw. in der Bestimmung der Auswahlmenge $\mathfrak{L}$ und der Funktion f auf $\mathfrak{J}_1-\mathfrak{L}$. Es lassen sich sogar Beispiele konstruieren, die zeigen, daß während die Äquivalenzen (29) und (30) nur eine gemeinsame Lösung f haben, jede einzelne dieser Äquivalenzen noch die höchste (überhaupt mögliche) Anzahl von Lösungen, d. h. $2^{\mathfrak{m}}$, wo $\mathfrak{m}$ die Kardinalzahl des Individuenbereichs $\mathfrak{J}$ ist, erreichen kann. Eine veränderte Lage tritt ein, wenn die Bedingung $(x)(y)(x_\varrho)_1^n[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\&R(y,x_1,x_2,\dots,x_n)\rightarrow x=y]$ hinzukommt. Die Relation $G(x,y)$ wird dann zur logischen Identität und daher werden $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ eindeutig bestimmt, wobei dann $\mathfrak{K}=\mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{L}=\mathfrak{J}_1$ ist.

von $\mathfrak{J}$ und es ist daher immer $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, wo $\mathfrak{m}$ die Mächtigkeit des Individuenbereichs $\mathfrak{J}$ bezeichnet (also eine transfinite Kardinalzahl ist, da die Bedingungen a) und b) nur in einem unendlichen Individuenbereich erfüllt sein können[18]). Es lassen sich nun, umgekehrt, für jede vorgegebene (endliche oder transfinite) Kardinalzahl $\mathfrak{n}$, für jede transfinite Kardinalzahl $\mathfrak{m}$, für welche $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ ist, und für jede natürliche Zahl n, ein Individuenbereich $\mathfrak{J}$ von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ und eine die Bedingungen a) und b) erfüllende Funktion $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ angeben, so daß für jede Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ über $\mathfrak{J}$ die Menge aller verschiedenen Funktionen f, welche die entsprechenden Äquivalenzen (29) und (30) gleichzeitig erfüllen, von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{n}}$ (mit der eben vorgeschriebenen Kardinalzahl $\mathfrak{n}$) ist.

In der Tat, sei $\mathfrak{J}$ eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{m}$ ist[19]), so läßt sich $\mathfrak{J}$ als Summe zweier zueinander fremden Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ darstellen, wobei die Mächtigkeit von $\mathfrak{M}$ gleich $\mathfrak{m}$ und die von $\mathfrak{N}$ gleich $\mathfrak{n}$ ist. Die Menge $\mathfrak{M}$ läßt sich eineindeutig auf die Menge aller n-Tupel von Elementen aus $\mathfrak{J}$ abbilden, da beide Mengen von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ sind[20]). Demnach existiert eine logische Funktion $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, welche die Elemente x aus $\mathfrak{M}$ auf die n-Tupel $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ eineindeutig abbildet. Es ist nicht schwer einzusehen, daß die Bedingungen a) und b) in $\mathfrak{J}$ durch diese Funktion erfüllt sind, daß also die logische Funktion $(x_\varrho)_1^n \overline{R}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die wir S. 270 mit $g_3(x)$ bezeichneten, die Menge $\mathfrak{N}$ charakterisiert, und daher $\mathfrak{J}_3 = \mathfrak{N}$ ist, woraus die Behauptung schon ohne Weiteres folgt.

In diesem Beispiel hat jede einzelne der Äquivalenzen (29) und (30), außer $2^{\mathfrak{n}}$ gemeinsamen Lösungen, keine anderen Lösungen auf f. Dies folgt daraus, daß die durch die Äquivalenz (33) definierte Relation $G(x,y)$ — wie man leicht einsieht — die logische Identität darstellt und daher die Auswahlmengen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ eindeutig bestimmt sind, wobei $\mathfrak{K} = \mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}_1$ ist. Es lassen sich aber auch kompliziertere Beispiele konstruieren. Ein Beispiel, in welchem die Menge gemeinsamer Lösungen der beiden Äquivalenzen (29) und (30) von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{n}}$ ist, während jede einzelne Äquivalenz außer diesen gemeinsamen Lösungen noch $2^{\mathfrak{m}}$ andere Lösungen hat, wobei $\mathfrak{n}$ eine ganz beliebige Kardinalzahl und $\mathfrak{m}$ eine beliebige transfinite Kardinalzahl mit $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ ist, befindet sich in meiner in der Fußnote[4]) zitierten polnischen Arbeit.

Satz 5. *Ist $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente x eines Individuenbereiches $\mathfrak{J}$ auf die n-Tupel $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ von solchen abbildet, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte n-stellige logische Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Äquivalenzen* (29) *und* (30) *mit geeigneter Funktion $f(x)$ (und zwar mit der Funktion* (27)).

[18]) wenn wir natürlich von dem trivialen Fall eines einzahligen Individuenbereiches absehen.

[19]) Nach einem bekannten mengentheoretischen Satz gilt für jede Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ und für jede transfinite Kardinalzahl $\mathfrak{m}$, für welche $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ besteht, die Beziehung $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{m}$.

[20]) denn einerseits die Menge aller n-Tupel von Elementen aus $\mathfrak{J}$ von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}^n$ ist und andererseits nach einem mengentheoretischen dem Auswahlaxiom gleichwertigen Satz (vgl. darüber die Fußnote[15]) aus $\boldsymbol{P}_1$) die Beziehung $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$ besteht.

Satz 5 ergibt sich unmittelbar aus Satz 4, da ja die Funktion $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Bedingungen a) und b) offenbar erfüllt. Die beiden Äquivalenzen (29) und (30) bestehen selbstverständlich auch mit (28), nur ist aber unter der gegenwärtigen schärferen Voraussetzung die Funktion (28) — wie es aus der angegebenen Analyse der Äquivalenzen (29) und (30), und übrigens schon aus den Ausführungen auf S. 16 in $\boldsymbol{P}_1$ folgt — mit der Funktion (27) identisch.

Satz 6. *Ist $\Phi(x,y,z)$ eine in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion, für welche*

a*) $$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[\Phi(x,y,z) \,\&\, \Phi(x,\overset{*}{y},\overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y} \,\&\, z = \overset{*}{z}]$$

besteht, so besteht für jede natürliche Zahl $n>1$ die Formel[21])

$$(v_1)(\overset{*}{v}_1)(x_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(\overset{*}{v}_n)[v_1 = \overset{*}{v}_1 \,\&\, (Ev_\varrho)_2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&$$
$$\&\, (E\overset{*}{v}_\varrho)_2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i) \rightarrow (\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \overset{*}{x}_i \,\&\, v_n = \overset{*}{v}_n)].$$

Beweis. Die letzte Formel ist wegen der Schlußregel

$$[(Ex)f(x) \rightarrow p] \sim (x)[f(x) \rightarrow p],$$

wie man leicht einsieht, mit der Formel

$$(38) \qquad \begin{gathered}(v_\varrho)_1^n(\overset{*}{v}_\varrho)_1^n(x_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\varrho)_1^{n-1}[v_1 = \overset{*}{v}_1 \,\&\, \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\& \\ \&\, \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i) \rightarrow (\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \overset{*}{x}_i \,\&\, v_n = \overset{*}{v}_n)]\end{gathered}$$

äquivalent. Da weiter wegen der richtigen Äquivalenz

$$(x)F(x,x) \sim (x)(\overset{*}{x})[x = \overset{*}{x} \rightarrow F(x,\overset{*}{x})]$$

die Bedingung a*) mit der Bedingung

$$(39) \qquad (x)(\overset{*}{x})(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[x = \overset{*}{x} \,\&\, \Phi(x,y,z) \,\&\, \Phi(\overset{*}{x},\overset{*}{y},\overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y} \,\&\, z = \overset{*}{z}]$$

äquivalent ist, so genügt es zum Beweis des Satzes 6 zu zeigen, daß unter der Bedingung (39) die Formel (38) für jede natürliche Zahl $n>1$ besteht. Dies beweisen wir durch Induktion nach n.

Für $n=2$ stellt (38) die Formel

$$(v_1)(v_2)(\overset{*}{v}_1)(\overset{*}{v}_2)(x_1)(\overset{*}{x}_1)[v_1 = \overset{*}{v}_1 \,\&\, \Phi(v_1, v_2, x_1) \,\&\, \Phi(\overset{*}{v}_1, \overset{*}{v}_2, \overset{*}{x}_1) \rightarrow x_1 = \overset{*}{x}_1 \,\&\, v_2 = \overset{*}{v}_2]$$

[21]) Im Falle $n=2$ sollen natürlich $(Ev_\varrho)_2^1$ und $(E\overset{*}{v}_\varrho)_2^1$ gestrichen werden.

dar, welche leicht aus (39) zu gewinnen ist (nämlich durch Umbenennung der Variablen, Vertauschung der Reihenfolge der voranstehenden Allzeichen und der Konjunktionsglieder im Hintergliede). Damit ist die Behauptung für $n=2$ bewiesen. Nehmen wir nun an, sie sei für eine Zahl n richtig; es gelte also

$$(v_\varrho)_1^n(\overset{*}{v}_\varrho)_1^n(x_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\varrho)_1^{n-1}[v_1=\overset{*}{v}_1\&\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\& \\ \&\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i)\to(\sum_{i=1}^{n-1}x_i=\overset{*}{x}_i\&v_n=\overset{*}{v}_n)].$$

Gemäß der Regel $(A\to B)\to(A\&C\to B\&C)$ folgt leicht aus dieser Formel

$$(v_\varrho)_1^{n+1}(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n+1}(x_\varrho)_1^n(\overset{*}{x}_\varrho)_1^n[v_1=\overset{*}{v}_1\&\sum_{i=1}^n\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\&\sum_{i=1}^n\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i)\to \\ \to(\sum_{i=1}^{n-1}x_i=\overset{*}{x}_i\&v_n=\overset{*}{v}_n\&\Phi(v_n,v_{n+1},x_n)\&\Phi(\overset{*}{v}_n,\overset{*}{v}_{n+1},\overset{*}{x}_n))]. \tag{40}$$

Aus der sich aus (39) leicht ergebenden Formel

$$(v_n)(\overset{*}{v}_n)(v_{n+1})(x_n)(\overset{*}{v}_{n+1})(\overset{*}{x}_n)[v_n=\overset{*}{v}_n\&\Phi(v_n,v_{n+1},x_n)\&\Phi(\overset{*}{v}_n,\overset{*}{v}_{n+1},\overset{*}{x}_n)\to \\ \to x_n=\overset{*}{x}_n\&v_{n+1}=\overset{*}{v}_{n+1}],$$

und der Formel (40) ergibt sich sofort die Formel

$$(v_\varrho)_1^{n+1}(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n+1}(x_\varrho)_1^n(\overset{*}{x}_\varrho)_1^n[v_1=\overset{*}{v}_1\&\sum_{i=1}^n\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\&\sum_{i=1}^n\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i)\to \\ \to(\sum_{i=1}^{n-1}x_i=\overset{*}{x}_i\&x_n=\overset{*}{x}_n\&v_{n+1}=\overset{*}{v}_{n+1})],$$

welche sich schließlich in

$$(v_\varrho)_1^{n+1}(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n+1}(x_\varrho)_1^n(\overset{*}{x}_\varrho)_1^n[v_1=\overset{*}{v}_1\&\sum_{i=1}^n\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\&\sum_{i=1}^n\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i)\to \\ \to(\sum_{i=1}^{n}x_i=\overset{*}{x}_i\&v_{n+1}=\overset{*}{v}_{n+1})]$$

zusammenziehen läßt. Damit ist unser Induktionsbeweis vollendet [22].

[22]) Von der Behauptung des eben bewiesenen Satzes 6 wurde schon in $\boldsymbol{P}_1$ Gebrauch gemacht (vgl. $\boldsymbol{P}_1$, S. 10; die Allgemeingültigkeit der Implikation $(8)\to(4)$). Der Beweis der Behauptung wurde aber dort nicht gegeben.

Satz 7. *Ist $\Phi(x,y,z)$ eine in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion, für welche die Bedingungen a*) und*

b*) $$(y)(z)(Ex)\Phi(x,y,z)$$

erfüllt sind, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion $(n>1)\,F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ [23]) *mit geeigneter Funktion $f(v_1)$, und zwar mit*

$$f(v_1)\equiv(Ey_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\varrho)_2^n[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},y_i)\&F(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},v_n)], \tag{41}$$

wie auch mit

$$f(v_1)\equiv(y_\varrho)_1^{n-1}(v_\varrho)_2^n[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},y_i)\to F(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},v_n)] \tag{42}$$

und sogar im allgemeinen mit anderen Funktionen $f(v_1)$, gleichzeitig die zwei Äquivalenzen:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\&f(v_1)], \tag{43}$$

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\to f(v_1)]. \tag{44}$$

Satz 7 erhält man aus Satz 4, indem man auf $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ die durch die Äquivalenz $R(v_1,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)$ definierte Funktion nimmt und beachtet, daß einerseits die Bedingung a) wegen Satz 6 und der vorausgesetzten Bedingung a*) zu einer richtigen Formel wird, während anderseits die Bedingung b), welche jetzt [24]) in $(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\varrho)_1^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)$ übergeht, wegen der Bedingung b*) und der allgemeingültigen Formel

$$(y)(z)(Ex)\Phi(x,y,z)\to(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\varrho)_1^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i),$$

die in Satz 3 aus $\boldsymbol{P}_1$ bewiesen wurde, besteht.

Über die Äquivalenzen (43), (44) und ihre verschiedenen Lösungen auf $f(v_1)$ läßt sich noch einiges Interessantes sagen. Ein näheres Eingehen auf diese Tatsachen wollen wir uns aber hier versagen, da diese einerseits leicht aus den entsprechenden Tatsachen über die Äquivalenzen (29), (30) — welche wir näher behandelt haben — zu gewinnen sind und da andererseits sie im Folgenden, bei Anwendung auf das Entscheidungsproblem, nicht gebraucht werden.

[23]) Die letzte (n-te) Variable bezeichnen wir hier und im folgenden durch v_n statt x_n, um $\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\&\Phi(v_{n-1},x_n,x_{n-1})$ in $\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)$ zusammenziehen zu können.

[24]) natürlich nach entsprechender Umbezeichnung der Variablen.

Ist insbesondere $\Phi(x,y,z)$ eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y,z]$ von solchen abbildet, so sind die Bedingungen a*) und b*) offensichtlich erfüllt und daher ergibt sich aus Satz 7 der folgende

Satz 8. *Ist $\Phi(x,y,z)$ eine in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion, welche eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y,z]$ von solchen abbildet, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion $(n>1)\,F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ gleichzeitig die zwei Äquivalenzen* (43) *und* (44) *mit geeigneter Funktion $f(v_1)$ (und zwar mit der Funktion* (41)).

Diese Äquivalenzen bestehen natürlich auch mit der Funktion (42), nur ist aber unter der gegenwärtigen schärferen Voraussetzung über Φ diese Funktion mit der Funktion (41) identisch (vgl. die Anmerkung zu Satz 5, S. 277).

Wird in Satz 7 für $\Phi(x,y,z)$ die Funktion $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ gesetzt, so erhält man aus Satz 7 den folgenden

Satz 9. *Sind $R_1(x,y), R_2(x,y)$ zwei in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktionen, für welche die Bedingungen:*

$$(45)\qquad (x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)\,\&\,R_1(x,\overset{*}{y})\,\&\,R_2(x,\overset{*}{z})\to y=\overset{*}{y}\,\&\,z=\overset{*}{z}],$$

$$(46)\qquad (y)(z)(Ex)(R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z))$$

erfüllt sind, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion $(n>1)\,F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ mit geeigneter Funktion $f(v_1)$ (und zwar mit

$$(47)\qquad f(v_1)\equiv(Ey_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\varrho)_2^n\Big[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,y_i))\,\&\,\&\,F(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},v_n)\Big],$$

wie auch mit

$$(48)\qquad f(v_1)\equiv(y_\varrho)_1^{n-1}(v_\varrho)_2^n\Big[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,y_i))\to F(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},v_n)\Big]$$

und sogar im allgemeinen mit anderen Funktionen $f(v_1)$) gleichzeitig die zwei Äquivalenzen:

$$(49)\qquad F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,x_i))\,\&\,f(v_1)\Big],$$

$$(50)\qquad F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,x_i))\to f(v_1)\Big].$$

Da die Bedingung (45) des Satzes 9 leicht aus der Bedingung

$$(51)\qquad (x)(y)(z)[(R_1(x,y)\,\&\,R_1(x,z)\to y=z)\,\&\,(R_2(x,y)\,\&\,R_2(x,z)\to y=z)]$$

zu gewinnen ist, so haben wir auch folgenden

Satz 10. *Sind $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ zwei in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktionen, für welche die Bedingungen* (51) *und* (46) *erfüllt sind, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion $(n>1)\,F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ mit geeigneter Funktion $f(v_1)$, und zwar mit* (47) *sowie mit* (48) *und sogar im allgemeinen mit anderen Funktionen auf $f(v_1)$, gleichzeitig die zwei Äquivalenzen* (49) *und* (50).

Satz 11. *Werden durch die Funktion $(R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z))$ die Elemente x eines Individuenbereiches $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y,z]$ von solchen eineindeutig abgebildet, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion $(n>1)\,F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ mit geeigneter Funktion $f(v_1)$ (und zwar mit* (47)) *gleichzeitig die zwei Äquivalenzen* (49) *und* (50).

Satz 11 wird am einfachsten aus Satz 8 erhalten, indem man dort $(R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z))$ für $\Phi(x,y,z)$ einsetzt. Die Äquivalenzen (49), (50) bestehen selbstverständlich auch mit der Funktion (48), nur ist aber jetzt diese Funktion mit der Funktion (47) identisch, da jetzt überhaupt die Funktion $f(v_1)$ aus den Äquivalenzen (49), (50) eindeutig bestimmt ist.

Satz 12. *Sind $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $f(x)$ zwei in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktionen, für welche folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

$$(52)\qquad (x_\varrho)_1^n(Ex)\,R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

$$(53)\qquad (x)(y)(x_\varrho)_1^n[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,R(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,f(x)\to f(y)],$$

so besteht die Äquivalenz

$$(54)\qquad (Ex)[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,f(x)]\equiv(x)[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\to f(x)].$$

Beweis. Wegen (53) gilt stets

$$[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,f(x)]\to[R(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)\to f(y)]$$

und daher auch $[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,f(x)]\to(y)[R(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)\to f(y)]$, woraus sich $(Ex)[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,f(x)]\to(y)[R(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)\to f(y)]$ ergibt. Die Umkehrung dieser Implikation sieht man so ein:

Aus $(x)[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\to f(x)]$ folgt offenbar

$$(x)(R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\to[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\,\&\,f(x)])$$

und daraus wegen der Regel $(x)(F(x)\to G(x))\to((Ex)F(x)\to(Ex)G(x))$

$$(Ex)R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\to(Ex)[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\,\&\,f(x)],$$

woraus, da $(Ex)R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$ wegen (52) richtig ist, sich

$$(Ex)[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\,\&\,f(x)]$$

ergibt.

Satz 13. *Ist $R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$ eine in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktion, für welche die Bedingungen* (52) *und*

(55) $$(x)(y)(x_\varrho)_1^n[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\,\&\,R(y,x_1,x_2,\dots,x_n)\to x=y]$$

erfüllt sind, so besteht die Äquivalenz (54) *für jede logische Funktion $f(x)$.*

Dieser Satz folgt sofort aus Satz 12. Es genügt zu bemerken, daß aus der offenbar richtigen Formel $x=y\to(f(x)\to f(y))$ und (55) die Formel (53) folgt.

Satz 14. *Sind $\Phi(x,y,z)$ und $f(x)$ zwei in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktionen, für welche die Bedingungen* b*) *und*

(56) $$(v_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n-1}(x_\varrho)_1^n[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(v_{n-1},x_n,x_{n-1})\,\&\,\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(\overset{*}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\,\&\,f(v_1)\to f(\overset{*}{v}_1)],$$

erfüllt sind, so besteht die Äquivalenz

(57) $$(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,f(v_1)]\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\to f(v_1)].$$

Satz 14 erhält man aus Satz 12, indem man dort als $R(v_1,x_1,x_2,\dots,x_n)$ die Funktion $(Ev_\varrho)_2^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v\,,v_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(v_{n-1},x_n,x_{n-1})]$ setzt und beachtet, daß die dabei aus (52) entstehende Formel[24]) $(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)]$ wegen b*) und der in Satz 3 aus $\boldsymbol{P}_1$ als allgemeingültig erkannten Formel

$$(y)(z)(Ex)\Phi(x,y,z)\to(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)]$$

richtig ist.

Satz 15. *Erfüllt eine logische Funktion in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ die Bedingung*

(58) $$(x)(\overset{*}{x})(y)(z)[\Phi(x,y,z)\,\&\,\Phi(\overset{*}{x},y,z)\to x=\overset{*}{x}],$$

so erfüllt sie für jedes $n>1$ die Bedingung[25])

(59) $$(v_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n-1}(x_\varrho)_1^n[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(v_{n-1},x_n,x_{n-1})\,\&\,\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(\overset{*}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\to v_1=\overset{*}{v}_1].$$

Beweis. Wir zeigen durch Induktion nach n die Richtigkeit der Formel (59) für jedes $n>1$ unter der Annahme von (58). Für $n=2$ stellt (59) die Formel

$$(v_1)(\overset{*}{v}_1)(x_1)(x_2)[\Phi(v_1,x_2,x_1)\,\&\,\Phi(\overset{*}{v}_1,x_2,x_1)\to v_1=\overset{*}{v}_1]$$

dar, welche aus (58) durch Umbezeichnung der Variablen gewonnen werden kann. Es gelte jetzt (59) für eine Zahl n. Wird in dieser als richtig angenommenen Formel die Variable x_n durch v_n ersetzt, so erhält man, nach Zusammenziehung, die Formel

$$(v_\varrho)_1^n(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n-1}(x_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(\overset{*}{v}_{n-1},v_n,x_{n-1})\to v_1=\overset{*}{v}_1],$$

aus welcher wegen der Schlußregel

$$(v_n)F(v_n,v_n)\sim(v_n)(\overset{*}{v}_n)[v_n=\overset{*}{v}_n\to F(v_n,\overset{*}{v}_n)]$$

die Formel

$$(v_\varrho)_1^n(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n-1}(x_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_n)[v_n=\overset{*}{v}_n\,\&\,\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(\overset{*}{v}_{n-1},\overset{*}{v}_n,x_{n-1})\to v_1=\overset{*}{v}_1]$$

hergeleitet werden kann, die sich in

(60) $$(v_\varrho)_1^n(\overset{*}{v}_\varrho)_1^n(x_\varrho)_1^{n-1}[v_n=\overset{*}{v}_n\,\&\,\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},x_i)\to v_1=\overset{*}{v}_1]$$

zusammenziehen läßt. Aus (58) gewinnt man durch Umbezeichnung der Variablen die Formel

$$(v_n)(\overset{*}{v}_n)(x_{n+1})(x_n)[\Phi(v_n,x_{n+1},x_n)\,\&\,\Phi(\overset{*}{v}_n,x_{n+1},x_n)\to v_n=\overset{*}{v}_n],$$

[25]) Im Falle $n=2$ sollen selbstverständlich die Summenzeichen gestrichen werden.

welche, zusammen mit (60), leicht

$$(v_\varrho)_1^n(\overset{*}{v}_\varrho)_1^n(x_\varrho)_1^{n+1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(v_n,x_{n+1},x_n)\,\&$$
$$\&\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(\overset{*}{v}_n,x_{n+1},x_n)\rightarrow v_1=\overset{*}{v}_1]$$

ergibt. Da nun diese Formel die Formel (59) für die Zahl $n+1$ darstellt, so ist unser Induktionsbeweis vollendet [26]).

Satz 16. *Erfüllt eine logische Funktion $\Phi(x,y,z)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ die Bedingung* (58), *so ist für jede natürliche Zahl $n>1$ und jede logische Funktion $f(x)$ die Formel* (56) *richtig.*

Satz 16 ergibt sich sofort aus Satz 15, da die Formel (56) aus der Formel (59) und der richtigen Formel $v_1=\overset{*}{v}_1\rightarrow(f(v_1)\rightarrow f(\overset{*}{v}_1))$ leicht zu gewinnen ist.

Aus Satz 14 und Satz 16 ergibt sich der folgende

[26]) Beim Induktionsschritt wurde nebenbei die Äquivalenz der Formeln (59) und (60) bewiesen. Die Formel (60) ist aber wegen der allgemeingültigen Formel

$$(x)[f(x)\rightarrow p]\sim[(Ex)f(x)\rightarrow p]$$

mit der Formel

$$(v_1)(\overset{*}{v}_1)(v_n)(\overset{*}{v}_n)(x_\varrho)_1^{n-1}[v_n=\overset{*}{v}_n\;\&\;(Ev_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&$$
$$\&\,(E\overset{*}{v}_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},x_i)\rightarrow v_1=\overset{*}{v}_1]$$

gleichwertig und wegen der offenbar richtigen Äquivalenz

$$(x_\varrho)_1^{n-1}F(x_1,x_2,\dots,x_{n-1};x_1,x_2,\dots,x_{n-1})\sim$$
$$\sim(x_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}x_i=\overset{*}{x}_i\rightarrow F(x_1,x_2,\dots,x_{n-1};\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\dots,\overset{*}{x}_{n-1})]$$

~~weit~~er mit der Formel

$$(v_1)(\overset{*}{v}_1)(v_n)(\overset{*}{v}_n)(x_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i=\overset{*}{x}_i)\,\&\,v_n=\overset{*}{v}_n\,\&$$
$$\&\,(Ev_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,(E\overset{*}{v}_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i)\rightarrow v_1=\overset{*}{v}_1]$$

äquivalent; daher ergibt sich aus Satz 15 die Tatsache, daß die letzte Formel unter der Annahme (58) richtig ist. Von dieser Tatsache habe ich schon in $\boldsymbol{P}_1$ Gebrauch gemacht, ohne sie aber dort zu beweisen (vgl. $\boldsymbol{P}_1$, S. 10, die Allgemeingültigkeit der Implikation (9) → (5)).

Satz 17. *Erfüllt eine logische Funktion $\Phi(x,y,z)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ die zwei Bedingungen* b*) *und* (58), *so besteht für jede logische Funktion $f(x)$ und jede natürliche Zahl $n>1$ die Äquivalenz* (57).

Setzt man in den Sätzen 14, 15, 16 und 17 $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ für $\Phi(x,y,z)$ ein, so erhält man aus ihnen unmittelbar folgende vier Sätze:

Satz 18. *Sind $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$, $f(x)$ drei in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktionen, für welche die Bedingungen* (46) *und*

$$(61)\quad (v_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n-1}(x_\varrho)_1^n[\sum_{i=1}^{n-2}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,x_i))\,\&\,R_1(v_{n-1},x_n)\,\&$$
$$\&\,R_2(v_{n-1},x_{n-1})\,\&\sum_{i=1}^{n-2}(R_1(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1})\,\&\,R_2(\overset{*}{v}_i,x_i))\,\&\,R_1(\overset{*}{v}_{n-1},x_n)\,\&$$
$$\&\,R_2(\overset{*}{v}_{n-1},x_{n-1})\,\&\,f(v_1)\rightarrow f(\overset{*}{v}_1)]$$

erfüllt sind, so besteht die Äquivalenz

$$(62)\quad \begin{aligned}&(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,x_i))\,\&\,f(v_1)]\equiv\\ &\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,x_i))\rightarrow f(v_1)].\end{aligned}$$

Satz 19. *Erfüllen zwei logische Funktionen $R_1(x,y),R_2(x,y)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ die Bedingung*

$$(63)\quad (x)(\overset{*}{x})(y)(z)[R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)\,\&\,R_1(\overset{*}{x},y)\,\&\,R_2(\overset{*}{x},z)\rightarrow x=\overset{*}{x}],$$

so erfüllen sie für jedes $n>1$ die Bedingung

$$(64)\quad (v_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n-1}(x_\varrho)_1^n[\sum_{i=1}^{n-2}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,x_i))\,\&\,R_1(v_{n-1},x_n)\,\&$$
$$\&\,R_2(v_{n-1},x_{n-1})\,\&\sum_{i=1}^{n-2}(R_1(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1})\,\&\,R_2(\overset{*}{v}_i,x_i))\,\&\,R_1(\overset{*}{v}_{n-1},x_n)\,\&$$
$$\&\,R_2(\overset{*}{v}_{n-1},x_{n-1})\rightarrow v_1=\overset{*}{v}_1].$$

Satz 20. *Erfüllen zwei logische Funktionen $R_1(x,y), R_2(x,y)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ die Bedingung* (63), *so ist für jede natürliche Zahl $n>1$ und jede logische Funktion $f(x)$ die Formel* (61) *richtig.*

Satz 21. *Erfüllen zwei logische Funktionen $R_1(x,y), R_2(x,y)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ die Bedingungen* (46) *und* (63), *so besteht für jede logische Funktion $f(x)$ und jede natürliche Zahl $n>1$ die Äquivalenz* (62).

Es gilt ferner der folgende

Satz 22. *Erfüllt eine logische Funktion $R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ die Bedingungen* a) *und* b), *so gilt für jede logische Funktion $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ die Implikation*

$$(x)(Ey_\varrho)_1^n[R(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\&F(y_1,y_2,\dots,y_n)]\to(x_\varrho)_1^n F(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Beweis. Aus $(x)(Ey_\varrho)_1^n[R(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\&F(y_1,y_2,\dots,y_n)]$ und der Formel b) folgt zunächst, gemäß der Schlußregel

$$(x)f(x)\&(Ex)g(x)\to(Ex)(g(x)\&f(x)),$$

die Formel

$$(x_\varrho)_1^n(Ex)(Ey_\varrho)_1^n[R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)\&R(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\&F(y_1,y_2,\dots,y_n)],$$

aus welcher unter Berücksichtigung der Formel a) leicht

$$(x_\varrho)_1^n F(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

gewonnen wird.

Satz 23. *Erfüllt eine logische Funktion $\Phi(x,y,z)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ die Bedingungen* a*) *und* b*), *so besteht für jede logische Funktion $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ die Implikation*

$$(v_1)(Ey_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\varrho)_2^n[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},y_i)\&F(y_1,y_2,\dots,y_{n-1},v_n)]\to$$
$$\to(x_\varrho)_1^n F(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Satz 23 ergibt sich aus Satz 22, indem man für $R(x,x_1,x_2,\dots,x_n)$ die durch die Äquivalenz

$$R(v_1,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)$$

definierte Funktion setzt, und Satz 3 aus P_1 sowie Satz 6 (aus der vorliegenden Arbeit) berücksichtigt.

Satz 24. *Erfüllen zwei logische Funktionen $R_1(x,y), R_2(x,y)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ die zwei Bedingungen* (46) *und* (51), *so besteht für jede logische Funktion $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ die Implikation*

$$(v_1)(Ey_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\varrho)_2^n[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\&R_2(v_i,y_i))\&F(y_1,y_2,\dots,y_{n-1},v_n)]\to$$
$$\to(x_\varrho)_1^n F(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Satz 24 ergibt sich aus Satz 23, indem man $R_1(x,y)\&R_2(x,z)$ für $\Phi(x,y,z)$ einsetzt und die bereits benutzte Tatsache, daß (45) aus (51) folgt, berücksichtigt.

Inwieweit die verschiedenen oben aufgestellten Sätze beim Entscheidungsproblem anwendbar sind, werden wir in II, bei der genauen Durchführung, sehen. Wir wollen aber jetzt schon auf die Äquivalenzenpaare (29), (30); (43), (44); (49), (50) — von denen in diesen Sätzen viel die Rede war — die Aufmerksamkeit des Lesers lenken. Sehen wir uns von diesen Äquivalenzenpaaren ein Paar — etwa (43), (44) — näher an.

Beachtet man, daß die Äquivalenz (44) wegen $(A\equiv B)\sim(\bar{A}\equiv\bar{B})$ und wegen des Gesetzes der Bildung eines negierten Ausdrucks mit der Äquivalenz

$$\bar{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\&\bar{f}(v_1)]$$

gleichwertig ist, so sieht man sofort ein, daß das Äquivalenzenpaar (43), (44) durch das Paar

$$(65)\qquad F(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\&f(v_1)],$$

$$(66)\qquad \bar{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\&\bar{f}(v_1)]$$

ersetzbar ist.

Beachtet man ferner, daß die Äquivalenz (43) (wiederum wegen $(A\equiv B)\sim(\bar{A}\equiv\bar{B})$ und des Gesetzes der Bildung eines negierten Ausdrucks) mit der Äquivalenz

$$\bar{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\to\bar{f}(v_1)]$$

gleichwertig ist, so sieht man sofort ein, daß das Äquivalenzenpaar (43), (44) auch durch das Paar

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\to f(v_1)], \quad (67)$$

$$\overline{F}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\to \bar{f}(v_1)] \quad (68)$$

ersetzt werden kann.

Nun scheinen aber die Äquivalenzenpaare (65),(66) und (67),(68), rein äußerlich betrachtet, dem logischen Gesetze der Bildung eines negierten Ausdrucks gewissermaßen zu widersprechen, da in ihnen der Übergang von $F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ zu $\overline{F}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ nicht nach diesem Gesetze erfolgt (welches u.a. verlangt, daß die Seinszeichen durch gleichnamige Allzeichen ersetzt werden und umgekehrt), sondern einfach in der Weise, daß $f(v_1)$ durch $\bar{f}(v_1)$ ersetzt wird. Es ist überflüssig zu bemerken, daß wir hier mit keinem Widerspruch, sondern nur mit einer rein äußerlichen Abweichung vom Gesetze der Negationsbildung zu tun haben, da ja die genannten Äquivalenzenpaare in exakter Weise unter den Voraussetzungen des Satzes 7 als richtig bewiesen wurden. Aber eben die äußerliche Abweichung der Negationsbildung von $F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ in diesen Äquivalenzenpaaren von dem üblichen Gesetze der Negationsbildung erweist sich, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ eine ganz beliebige in einem unendlichen Individuenbereich definierte logische Funktion sein kann, als bedeutungsvoll und erlaubt (mit Hilfe einer „zusammengeflickten" Einsetzung) Reduktionssätze des Entscheidungsproblems zu erzielen, die durch bisherigen Methoden nicht zu gewinnen waren. Sucht man das Allzeichen zu vermeiden, so bedient man sich dabei des Äquivalenzenpaares (65),(66); will man umgekehrt das Seinszeichen vermeiden, so wendet man das Paar (67),(68) an.

In II werden wir Beispiele für die Anwendbarkeit beider Äquivalenzenpaare angeben.

Alles über das Äquivalenzenpaar (43),(44) Gesagte überträgt sich sofort auf das Äquivalenzenpaar (49),(50), indem man einfach $R_1(x,y)\&R_2(x,z)$ für $\Phi(x,y,z)$ einsetzt.

Was nun das Äquivalenzenpaar (29),(30) betrifft, so weist es zwar die entsprechenden günstigen Merkmale auch auf, wird aber in II nicht benutzt, da es überhaupt nur als Hilfsmittel zur Gewinnung der schärferen Äquivalenzenpaare (43),(44) und (49),(50) herangezogen wurde.

II. Reduktionssätze des logischen Entscheidungsproblems. Wir wiederholen jetzt die Definitionen der bereits in P_1 eingeführten Begriffe des β-Ausdrucks und γ-Ausdrucks und wollen hier noch zwei ihnen ähnliche Begriffe einführen, die wir im folgenden benutzen werden [27]).

Definition 1. *Ein Zählausdruck A, der die dreistellige Funktionsvariable Φ enthält (und dessen übrige Funktionsvariablen etwa $F_1,F_2,\ldots,F_k$ sind), möge γ-Ausdruck heißen, wenn es, falls er überhaupt erfüllbar ist, einen Individuenbereich $\mathfrak{J}$ und ein A in $\mathfrak{J}$ erfüllendes System von Funktionen $F_1',F_2',\ldots,F_k',\Phi'$ gibt, wo die Funktion $\Phi'(x,y,z)$ eine eineindeutige Abbildung der Elemente x von $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y,z]$ von solchen bewirkt. Derartiges Erfüllungssystem $F_1',F_2',\ldots,F_k',\Phi'$ möge eine ausgezeichnete Erfüllung des γ-Ausdrucks A und die Funktionsvariable Φ seine ausgezeichnete Funktionsvariable heißen.*

Definition 2. *Ein Zählausdruck A, der die zwei zweistelligen Funktionsvariablen R_1,R_2 enthält (und dessen übrige Funktionsvariablen etwa $F_1,F_2,\ldots,F_k$ sind), möge β-Ausdruck heißen, wenn es, falls er überhaupt erfüllbar ist, einen Individuenbereich $\mathfrak{J}$ und ein A in $\mathfrak{J}$ erfüllendes System von Funktionen $F_1',F_2',\ldots,F_k',R_1',R_2'$ gibt, so daß die Funktion $R_1'(x,y)\&R_2'(x,z)$ eine eineindeutige Abbildung der Elemente x von $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y,z]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ leistet. Derartiges Erfüllungssystem $F_1',F_2',\ldots,F_k',R_1',R_2'$ möge eine ausgezeichnete Erfüllung des β-Ausdrucks A und die Funktionsvariablen R_1,R_2 seine ausgezeichneten Funktionsvariablen heißen.*

Definition 3. *Ein Zählausdruck A, der die drei zweistellige Funktionsvariablen R_1,R_2,R_3 enthält (und dessen übrige Funktionsvariablen $F_1,F_2,\ldots,F_k$ seien), möge δ-Ausdruck heißen, wenn es — falls er überhaupt erfüllbar ist — einen Individuenbereich $\mathfrak{J}$ und ein A in $\mathfrak{J}$ erfüllendes System von Funktionen $F_1',F_2',\ldots,F_k',R_1',R_2',R_3'$ gibt, so daß $R_3'(x,y)$ die logische Identität $x=y$ darstellt und daß die Funktion $R_1'(x,y)\&R_2'(x,z)$ eine eineindeutige Abbildung der Elemente x von $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y,z]$ von solchen bewirkt. Ein solches Erfüllungssystem $F_1',F_2',\ldots,F_k',R_1',R_2',R_3'$ möge eine ausgezeichnete Erfüllung des δ-Ausdrucks A heißen und die Funktionsvariablen R_1,R_2,R_3 mögen als seine ausgezeichneten Funktionsvariablen gelten.*

[27]) Die Heranziehung dieser Begriffe ist zwar nicht unbedingt notwendig, doch aber aus gewissen Gründen sehr nützlich.

Definition 4. *Ein Zählausdruck A, der die dreistellige ausgezeichnete Funktionsvariable Φ enthält (und dessen übrige Funktionsvariablen $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sind), möge $\varkappa$-Ausdruck heißen, wenn es — falls er überhaupt erfüllbar ist — zu jeder im Bereich $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen definierten mathematischen Funktion $\psi(x,y)$ mit den Eigenschaften* [28]:

$$\text{a)}\quad (x)(y)[(\psi(x,y)>x)\&(\psi(x,y)>y)],$$

$$\text{b)}\quad (x)(y)(\overset{*}{x})(\overset{*}{y})[(\psi(x,y)=\psi(\overset{*}{x},\overset{*}{y}))\rightarrow(x=\overset{*}{x}\&y=\overset{*}{y})]$$

ein Erfüllungssystem $F_1', F_2', \ldots, F_k', \Phi'$ von A in $\mathfrak{Z}$ gibt, für welches

$$(x)(y)(z)[\Phi'(x,y,z)\sim(x=\psi(y,z))]$$

gilt. Ein solches Erfüllungssystem $F_1', F_2', \ldots, F_k', \Phi'$ möge eine (durch die Funktion $\psi(x,y)$ erzeugte) ausgezeichnete Erfüllung von A heißen.

Es gilt folgender

Satz 25. *Ist A ein $\varkappa$-Ausdruck und geht B aus A hervor, indem man in A für die ausgezeichnete Funktionsvariable $\Phi(x,y,z)$ den Ausdruck $R_1(x,y)\&R_2(x,z)$ einsetzt, so sind A und B in bezug auf die Erfüllbarkeit gleichwertige Zählausdrücke* [29].

Beweis. Sind $F_1, F_2, \ldots, F_k, \Phi$ die Funktionsvariablen aus A, so sind $F_1, F_2, \ldots, F_k, R_1, R_2$ die Funktionsvariablen aus B. Ist A erfüllbar, so hat er als $\varkappa$-Ausdruck eine ausgezeichnete Erfüllung $F_1', F_2', \ldots, F_k', \Phi'$, die etwa durch die Funktion $\psi(x,y)$ erzeugt sei. Es gilt also jedenfalls

$$(x)(y)(z)[\Phi'(x,y,z)\sim(x=\psi(y,z))]$$

und

$$(x)(y)(\overset{*}{x})(\overset{*}{y})[(\psi(x,y)=\psi(\overset{*}{x},\overset{*}{y}))\rightarrow(x=\overset{*}{x}\&y=\overset{*}{y})]$$

im Bereich der natürlichen Zahlen $\mathfrak{Z}$, woraus sich leicht die Richtigkeit von

$$(x)(y)(z)(u)(v)[\Phi'(x,y,u)\&\Phi'(x,v,z)\rightarrow\Phi'(x,y,z)]$$

[28]) Einfache Beispiele für Funktionen $\psi(x,y)$ mit den Eigenschaften a), b) leisten folgende drei Funktionen: $2^x\cdot(2y-1)$, $(x+y)^2+x$, $2^x\cdot 3^y$. Sind überhaupt p und q zwei verschiedene Primzahlen, so hat die Funktion $p^x\cdot q^y$ die Eigenschaften a) und b).

[29]) d. h. sie sind entweder beide erfüllbar oder beide nicht erfüllbar. Statt „gleichwertig in bezug auf die Erfüllbarkeit" wird im folgenden — ähnlich wie in $\boldsymbol{P}_1$ — kürzer „gleichwertig" gesagt.

ergibt und daher läßt sich die Funktion $\Phi'(x,y,z)$ wegen Satz 4 aus $\boldsymbol{P}_1$ in der Form $R_1'(x,y)\&R_2'(x,z)$ darstellen. Das System $F_1', F_2', \ldots, F_k', R_1', R_2'$ erfüllt dann offensichtlich den Zählausdruck B in $\mathfrak{Z}$; also aus der Erfüllbarkeit von A die Erfüllbarkeit von B folgt.

Ist umgekehrt $F_1'', F_2'', \ldots, F_k'', R_1'', R_2''$ ein Erfüllungssystem von B in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$, so erfüllt das System

$$F_1'', F_2'', \ldots, F_k'', R_1''(x,y)\&R_2''(x,z)$$

offenbar A in $\mathfrak{J}$. Die Zählausdrücke A und B sind also gleichwertig.

Bevor wir zu den eigentlichen Reduktionssätzen des Entscheidungsproblems übergehen, beweisen wir noch folgenden einfachen, aber wichtigen

Hilfssatz 1. *Sind $H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $G_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, wo $i=1,2\ldots,r$, $2r$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte n-stellige logische Funktionen, so gibt es dann und nur dann eine logische Funktion $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, die den Bedingungen*

$$(1)\qquad (x_\varrho)_1^n[H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\rightarrow(F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_i(x_1,x_2,\ldots,x_n))]$$

für $i=1,2,\ldots,r$ in $\mathfrak{J}$ genügt, wenn

$$(2)\qquad \begin{aligned}&(x_\varrho)_1^n[H_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\&H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\rightarrow\\&\rightarrow(G_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_i(x_1,x_2,\ldots,x_n))]\end{aligned}$$

für $i,k=1,2,\ldots,r$ gilt.

Um Quantoren zu ersparen, operieren wir mit freien Variablen.

Sind die Bedingungen (1) durch eine Funktion $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ erfüllt, so bestehen offenbar die Formeln:

$$(3)\qquad H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\rightarrow(F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)),$$

$$(4)\qquad H_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\rightarrow(F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_k(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

für $i,k=1,2,\ldots,r$, also auch die Formel

$$\begin{aligned}&H_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\&H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\rightarrow(F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim\\&\sim G_k(x_1,x_2,\ldots,x_n))\&(F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)),\end{aligned}$$

aus welcher, gemäß der identisch richtigen Formel des Aussagenkalküls $(A\sim B)\&(A\sim C)\rightarrow(B\sim C)$, sich

$$H_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\&H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\rightarrow(G_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)),$$

also auch (2) ergibt.

Seien umgekehrt die Bedingungen (2) erfüllt. Sei im Individuenbereich $\mathfrak{J}$ eine n-stellige, nur die Werte $1,2,\ldots,r$ anzunehmen fähige mathematische Funktion $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ folgendermaßen definiert: falls es für das n-Tupel $x_1,x_2,\ldots,x_n$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ eine Zahl i gibt, für welche $H_i(x_1,x_2,\ldots;x_n)$ besteht, so soll $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ die kleinste solche Zahl bedeuten; falls nicht, so soll $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$ sein. Dann genügt die durch die Festsetzung

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv G_{\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

definierte logische Funktion $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ den Bedingungen (1). Aus der Definition der mathematischen Funktion $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ folgt nämlich unmittelbar die Formel

$$H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to H_{\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

welche zusammen mit der sich aus (2) sofort ergebenden Formel

$$H_{\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to$$
$$\to(G_{\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_i(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

leicht die Formel

$$H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(G_{\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)),$$

also auch die Formel (1) für $i=1,2,\ldots,r$ liefert.

Die Bedingungen (2) braucht man eigentlich nur für $k<i$ zu berücksichtigen, da sie für $i=k$ in trivialer Weise erfüllt sind und für $k>i$ wegen Symmetriegründen aus $k<i$ folgen. Es kann auch, umgekehrt, nur der Fall $k>i$ berücksichtigt werden.

Bestehen insbesondere für $i,k=1,2,\ldots,r$ und $k<i$ die Bedingungen

(5) $$(x_\varrho)_1^n\overline{[H_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)]},$$

so sind die Bedingungen (2) offenbar erfüllt und daher lassen sich die Bedingungen (1) durch eine Funktion $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ erfüllen[30].

[30]) Hilfssatz 1 läßt u.a. auch folgende Verallgemeinerung zu:

Sind $H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $G_{k,i}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, wo $i=1,2,\ldots,r$ und $k=1,2,\ldots,s$, in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ definierte $r(s+1)$ logische Funktionen, so gibt es dann und nur dann den Bedingungen

$$(x_\varrho)_1^n[H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\sum_{k=1}^{s}(F_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_{k,i}(x_1,x_2,\ldots,x_n))]$$

für $i=1,2,\ldots,r$ genügende s logische Funktionen $F_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, wo $k=1,2,\ldots,s$, wenn

$$(x_\varrho)_1^n[H_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\&H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\sum_{l=1}^{s}(G_{l,k}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim G_{l,i}(x_1,x_2,\ldots,x_n))]$$

für $i,k=1,2,\ldots,r$ besteht. Die letzten Bedingungen braucht man wiederum nur für $i<k$ zu betrachten und sie sind sicher erfüllt, falls (5) für $i,k=1,2,\ldots,r$ und $i<k$ richtig ist.

Satz 26. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auf Zählausdrücke mit Skolemschem Präfix $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ und einer einzigen Funktionsvariablen im Kern beschränken.*

Zum Beweis genügt es offenbar zu zeigen, daß zu jedem Zählausdruck A mit Skolemschem Präfix ein in bezug auf die Erfüllbarkeit gleichwertiger Zählausdruck B angegeben werden kann, der ebenfalls ein Skolemsches Präfix hat und im Kern nur eine einzige Funktionsvariable enthält.

Sei A gleich $(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_q)$, wo $p<q$, und $F_1,F_2,\ldots,F_r$ seine Funktionsvariablen, wobei F_i etwa n_i-stellig sei. Sei weiter $n=r+\mathrm{Max}(n_1,n_2,\ldots,n_r)+1$ und $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ eine n-stellige Funktionsvariable. Seien $y_1,y_2,\ldots,y_r$ gebundene r Variablen, die voneinander und von $x_1,x_2,\ldots,x_q$ verschieden sind. Ferner, bezeichne

$$\mathfrak{B}(x_1,x_2,\ldots,x_q;\,y_1,y_2,\ldots,y_r)$$

den Ausdruck, welcher aus $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ entsteht, indem

$$F_i(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_{n_i}})$$

durch $F(y_1,y_2,\ldots,y_r,x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_{n_i}},y_i,y_i,\ldots,y_i)$ [31]) für $i=1,2,\ldots,r$ und $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n_i}=1,2,\ldots,q$ ersetzt wird. Sei schließlich B die Konjunktion der folgenden zwei Ausdrücke:

$$(B_1)\quad \begin{aligned}&(y_\varrho)_1^r(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q[\sum_{i=1}^{p}F(y_1,y_2,\ldots,y_r,x_i,x_i,\ldots,x_i)\to\\ &\to(\sum_{i=p+1}^{q}F(y_1,y_2,\ldots,y_r,x_i,x_i,\ldots,x_i)\,\&\,\mathfrak{B}(x_1,x_2,\ldots,x_q;\,y_1,y_2,\ldots,y_r))],\end{aligned}$$

$$(B_2)\quad (Ez_\varrho)_1^r(Ez)F(z_1,z_2,\ldots,z_r,z,z,\ldots,z).$$

[31]) Die r ersten Leerstellen sind der Reihe nach mit $y_1,y_2,\ldots,y_r$, die n_i weiteren mit $x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_{n_i}}$ ausgefüllt und die übrigen (die es sicher gibt, da ja aus $n=r+\mathrm{Max}(n_1,n_2,\ldots,n_r)+1$ sofort $n-r-n_i>0$ folgt) mit y_i.

Dann enthält der Zählausdruck B nur eine einzige Funktionsvariable F, läßt sich offenbar auf die Skolemsche Normalform mit Präfix $(y_\varrho)_1^r (x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q (Ez_\varrho)_1^r (Ez)$ bringen und ist mit A in bezug auf die Erfüllbarkeit gleichwertig. Die letztere Behauptung wird folgendermaßen bewiesen:

Ist der Zählausdruck A erfüllbar und $F_1', F_2', \ldots, F_r'$ ein Erfüllungssystem von A in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}'$, sind ferner $a_1, a_2, \ldots, a_r$ beliebige voneinander und von allen Elementen aus $\mathfrak{J}'$ verschiedene Gegenstände, so gibt es zunächst eine in dem aus $\mathfrak{J}'$ durch Hinzufügung der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_r$ entstehenden Individuenbereich $\mathfrak{J}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ definierte logische Funktion $F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die folgenden Bedingungen genügt:

(i) Das Prädikat $F'(a_1, a_2, \ldots, a_r, x, x, \ldots, x)$ charakterisiert den Individuenbereich $\mathfrak{J}'$, d.h. daß die Aussage

$$F'(a_1, a_2, \ldots, a_r, x, x, \ldots, x)$$

für x aus $\mathfrak{J}'$ wahr, dagegen für $x = a_1, a_2, \ldots, a_r$ falsch ist;

(ii) Die Funktion $F'(a_1, a_2, \ldots, a_r, x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}, a_i, a_i, \ldots, a_i)$ ist für $x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}$ aus $\mathfrak{J}'$ mit der Funktion $F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i})$ (für $i = 1, 2, \ldots, r$) identisch;

(iii) $F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist stets falsch, falls die r ersten Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_r$ nicht mit $a_1, a_2, \ldots, a_r$ der Reihe nach übereinstimmen.

Dies zeigt man in exakter Weise auf Grund des Hilfssatzes 1 wie folgt:

Werden in $\mathfrak{J}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ die logischen Funktionen:

$$H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

durch die Festsetzungen:

$$H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \Big(\sum_{\varrho=1}^{r} (x_\varrho = a_\varrho) \; \& \sum_{\varrho=r+1}^{n} (x_\varrho = x_n)\Big),$$

$$G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{\varrho=1}^{r} (x_n \neq a_\varrho)$$

definiert, so verlangt (i), daß

$$(x_\varrho)_1^n [H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$$

richtig sei. Werden in $\mathfrak{J}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ die logischen Funktionen $H_{1+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $G_{1+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ durch die Festsetzungen:

$$H_{1+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \Big(\sum_{\varrho=1}^{r} (x_\varrho = a_\varrho) \; \& \sum_{\varrho=r+1}^{r+n_i} \sum_{\sigma=1}^{r} (x_\varrho \neq a_\sigma) \; \& \sum_{\varrho=r+n_i+1}^{n} (x_\varrho = a_i)\Big),$$

$$G_{1+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_i'(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+n_i})$$

(wo die F_i' außerhalb $\mathfrak{J}'$ beliebig zu verstehen sind) definiert, so verlangt (ii), daß

$$(x_\varrho)_1^n [H_{1+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_{1+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$$

für $i = 1, 2, \ldots, r$ richtig sei. Werden schließlich in $\mathfrak{J}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ die Funktionen $H_{2+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $G_{2+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ durch die Festsetzungen:

$$H_{2+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \overline{\sum_{\varrho=1}^{r}} (x_\varrho = a_\varrho), \qquad G_{2+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x_1 \neq x_1)$$

definiert, so verlangt (iii), daß

$$(x_\varrho)_1^n [H_{2+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_{2+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$$

richtig sei. Die Bedingungen (i)-(iii) verlangen also insgesamt, daß die Bedingungen

$$(x_\varrho)_1^n [H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$$

für $i = 1, 2, \ldots, r+2$ durch eine Funktion $F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in

$$\mathfrak{J}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$$

erfüllt seien, und dazu ist wegen des Hilfssatzes 1 notwendig und hinreichend, daß die Beziehungen

$$(x_\varrho)_1^n [H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$$

für $i, k = 1, 2, \ldots, r+2$ und $i < k$ bestehen. Diese bestehen aber einfach wegen der Richtigkeit der Formel

$$(x_\varrho)_1^n \overline{[H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)]}$$

für $i, k = 1, 2, \ldots, r+2$ und $i < k$; in der Tat:

$H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& H_{1+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist für $i = 1, 2, \ldots, r$ stets falsch, da aus $H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sich $x_n = x_{r+1}$ ergibt, während aus $H_{1+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ leicht $x_n \neq x_{r+1}$ gefolgert werden kann;

$H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& H_{2+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist stets falsch, da aus $H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sich sofort $\sum_{\varrho=1}^{r} (x_\varrho = a_\varrho)$, also $\overline{H}_{2+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ergibt;

$H_{1+i}(x_1,x_2,\dots,x_n) \,\&\, H_{1+k}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ist für $i,k=1,2,\dots,r$ und $i<k$ stets falsch, da sich aus $H_{1+i}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ sofort $x_n=a_i$ ergibt, während $x_n=a_k$ aus $H_{1+k}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ folgt und $a_i \neq a_k$ ist;

$H_{1+i}(x_1,x_2,\dots,x_n) \,\&\, H_{2+r}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ist für $i=1,2,\dots,r$ stets falsch, da sich aus $H_{1+i}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ sofort $\sum\limits_{\varrho=1}^{r}(x_\varrho=a_\varrho)$, also $\bar{H}_{2+r}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ergibt.

Ist nun $F'(x_1,x_2,\dots,x_n)$ eine den Bedingungen (i)-(iii) genügende Funktion, so zeigen wir daß sie den Zählausdruck B in $\mathfrak{J}'+\{a_1,a_2,\dots,a_r\}$ erfüllt. Da laut Voraussetzung die Funktionen $F_1',F_2',\dots,F_r'$ den Zählausdruck A in $\mathfrak{J}'$ erfüllen, so gilt $(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\,\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\dots,x_q)$ [32]) und daher — wegen (ii) und der Definition des Ausdrucks

$$\mathfrak{B}(x_1,x_2,\dots,x_q;\ y_1,y_2,\dots,y_r),$$

wie leicht einzusehen — auch $(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\,\mathfrak{B}'(x_1,x_2,\dots,x_q;\ a_1,a_2,\dots,a_r)$ in $\mathfrak{J}'$. Es gilt also wegen (i) auch

$$(x_\varrho)_1^p\,(Ex_\varrho)_{p+1}^q\Big[\sum_{i=1}^{p}F'(a_1,a_2,\dots,a_r,x_i,x_i,\dots,x_i)\rightarrow$$
$$\rightarrow\Big(\sum_{i=p+1}^{q}F'(a_1,a_2,\dots,a_r,x_i,x_i,\dots,x_i)\,\&\,\mathfrak{B}'(x_1,x_2,\dots,x_q;\ a_1,a_2,\dots,a_r)\Big)\Big],$$

wobei die Quantoren jetzt über $\mathfrak{J}'+\{a_1,a_2,\dots,a_r\}$ zu erstrecken sind. Der letzte Ausdruck bleibt aber auch richtig, wenn man $a_1,a_2,\dots,a_r$ durch ganz beliebige Elemente $y_1,y_2,\dots,y_r$ aus $\mathfrak{J}'+\{a_1,a_2,\dots,a_r\}$ ersetzt, da ja falls die Reihen $a_1,a_2,\dots,a_r$ und $y_1,y_2,\dots,y_r$ nicht übereinstimmen, das Vorderglied $\sum\limits_{i=1}^{p}F'(y_1,y_2,\dots,y_r,x_i,x_i,\dots,x_i)$ wegen (iii) falsch und daher der ganze Ausdruck

$$(x_\varrho)_1^p\,(Ex_\varrho)_{p+1}^q\Big[\sum_{i=1}^{p}F'(y_1,y_2,\dots,y_r,x_i,x_i,\dots,x_i)\rightarrow$$
$$\rightarrow\Big(\sum_{i=p+1}^{q}F'(y_1,y_2,\dots,y_r,x_i,x_i,\dots,x_i)\,\&\,\mathfrak{B}'(x_1,x_2,\dots,x_q;\ y_1,y_2,\dots,y_r)\Big)\Big]$$

richtig ist. Damit ist gezeigt, daß die Funktion $F'(x_1,x_2,\dots,x_n)$ den Ausdruck (B_1) erfüllt. Da aber $(Ez)F'(a_1,a_2,\dots,a_r,z,z,\dots,z)$ wahr ist (da ja $F'(a_1,a_2,\dots,a_r,z,z,\dots,z)$ gemäß (i) den nichtleeren Bereich $\mathfrak{J}'$ charakterisiert), so ist es auch offenbar $(Ez_\varrho)_1^r(Ez)F'(z_1,z_2,\dots,z_r,z,z,\dots,z)$ und damit wird überhaupt B als ein durch die Funktion $F'(x_1,x_2,\dots,x_n)$ erfüllter Ausdruck erkannt.

[32]) $\mathfrak{A}'$ soll, ähnlich wie in P_1, den durch Einsetzung der F_i' an Stelle der F_i aus $\mathfrak{A}$ entstehenden Ausdruck bezeichnen. Analoge Bedeutung sollen unten $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}'$ etc. haben.

Erfüllt, umgekehrt, eine Funktion $F''(x_1,x_2,\dots,x_n)$ den Zählausdruck B in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$, so folgt aus der Richtigkeit von $(Ez_\varrho)_1^r(Ez)F''(z_1,z_2,\dots,z_r,z,z,\dots,z)$ zunächst die Existenz in $\mathfrak{J}''$ von $r+1$ Elementen $b_1,b_2,\dots,b_r,b$, für welche

$$F''(b_1,b_2,\dots,b_r,b,b,\dots,b) \tag{6}$$

besteht. Aus der Richtigkeit von

$$(y_\varrho)_1^r(x_\varrho)_1^p\,(Ex_\varrho)_{p+1}^q\Big[\sum_{i=1}^{p}F''(y_1,y_2,\dots,y_r,x_i,x_i,\dots,x_i)\rightarrow$$
$$\rightarrow\Big(\sum_{i=p+1}^{q}F''(y_1,y_2,\dots,y_r,x_i,x_i,\dots,x_i)\,\&\,\mathfrak{B}''(x_1,x_2,\dots,x_q;\ y_1,y_2,\dots,y_r)\Big)\Big]$$

folgt insbesondere die Richtigkeit von

$$(x_\varrho)_1^p\,(Ex_\varrho)_{p+1}^q\Big[\sum_{i=1}^{p}F''(b_1,b_2,\dots,b_r,x_i,x_i,\dots,x_i)\rightarrow$$
$$\rightarrow\Big(\sum_{i=p+1}^{q}F''(b_1,b_2,\dots,b_r,x_i,x_i,\dots,x_i)\,\&\,\mathfrak{B}''(x_1,x_2,\dots,x_q;\ b_1,b_2,\dots,b_r)\Big)\Big]$$

in $\mathfrak{J}''$, und daraus die Richtigkeit von

$$(x_\varrho)_1^p\,(Ex_\varrho)_{p+1}^q\,\mathfrak{B}''(x_1,x_2,\dots,x_q;\ b_1,b_2,\dots,b_r) \tag{7}$$

im Teilbereiche $\mathfrak{J}$ derjenigen Elemente x aus $\mathfrak{J}''$, für welche $F''(b_1,b_2,\dots,b_r,x,x,\dots,x)$ gilt ($\mathfrak{J}$ ist nicht leer, da ja wegen (6) das Element b zu ihm sicher gehört). Werden nun in $\mathfrak{J}$ die Funktionen $F_1'',F_2'',\dots,F_r''$ durch die Festsetzung

$$F_i''(x_1,x_2,\dots,x_{n_i})\equiv F''(b_1,b_2,\dots,b_r,x_1,x_2,\dots,x_{n_i},b_i,b_i,\dots,b_i)$$

für $i=1,2,\dots,r$ definiert, so ist es klar, daß diese Funktionen den vorgegebenen Ausdruck A in $\mathfrak{J}$ erfüllen, da wegen (7) und der Definition des Ausdrucks $\mathfrak{B}(x_1,x_2,\dots,x_q;\ y_1,y_2,\dots,y_r)$ der Ausdruck $(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\,\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\dots,x_q)$ eine in $\mathfrak{J}$ richtige Aussage darstellt.

Die Zählausdrücke A und B sind also gleichwertig und dadurch Satz 26 bewiesen.

Satz 27. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auf γ-Ausdrücke mit Skolemschem Präfix $(x_1)(x_2)\dots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\dots(Ey_s)$ beschränken, die außer der ausgezeichneten dreistelligen Funktionsvariablen Φ nur noch eine einzige, und zwar eine einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Zum Beweis genügt es wegen Satz 26 offenbar zu zeigen, daß zu jedem Zählausdruck A mit Skolemschem Präfix und einer einzigen Funktionsvariablen ein gleichwertiger γ-Ausdruck B in Skolemscher Normalform angegeben werden kann, der außer der ausgezeichneten Funktionsvariablen Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthält.

Sei A gleich $(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ und $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ die einzige in A vorkommende Funktionsvariable. Ist $\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ die konjunktive Normalform von $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_q)$, wobei $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ Elementardisjunktionen darstellen, so gilt die Formel

$$(x_\varrho)_1^q[\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_q)\sim\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)] \tag{8}$$

allgemein. Jedes Glied der Elementardisjunktionen $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ (wo $k=1,2,\ldots,r$) ist entweder von der Form $F(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_n})$ oder von der Form $\overline{F}(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_n})$. Wir ersetzen in $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ jedes Glied von der ersten Form durch den Ausdruck

$$(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_{\alpha_i})\,\&\,\Phi(\overset{k}{v}_{n-1},x_{\alpha_n},x_{\alpha_{n-1}})\,\&\,f(\overset{k}{v}_1)]$$

und jedes Glied von der zweiten durch den Ausdruck

$$(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_{\alpha_i})\,\&\,\Phi(\overset{k}{v}_{n-1},x_{\alpha_n},x_{\alpha_{n-1}})\,\&\,\overline{f}(\overset{k}{v}_1)],$$

wobei Φ die ausgezeichnete dreistellige und f irgend eine einstellige Funktionsvariable ist. Den in dieser Weise aus $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ entstehenden Ausdruck bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ (für $k=1,2,\ldots,r$).

Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q;\,\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})$ denjenigen Ausdruck, der aus $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ entsteht, indem jedes Disjunktionsglied der Form $F(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_n})$ durch

$$[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_{\alpha_i})\,\&\,\Phi(\overset{k}{v}_{n-1},x_{\alpha_n},x_{\alpha_{n-1}})\,\&\,f(\overset{k}{v}_1)]$$

und jedes Disjunktionsglied der Form $\overline{F}(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_n})$ durch

$$[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_{\alpha_i})\,\&\,\Phi(\overset{k}{v}_{n-1},x_{\alpha_n},x_{\alpha_{n-1}})\,\&\,\overline{f}(\overset{k}{v}_1)]$$

ersetzt wird (für $k=1,2,\ldots,r$). Man sieht leicht ein, wenn man die allgemeingültige Äquivalenz $(Ev)[F(v)\vee G(v)]\sim[(Ev)F(v)\vee(Ev)G(v)]$ berücksichtigt, daß die Formeln

$$(x_\varrho)_1^q[\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)\sim(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q;\,\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})],$$

wo $k=1,2,\ldots,r$, allgemeingültig sind und daß es daher die Formel

$$\begin{aligned}&(x_\varrho)_1^q[(\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q))\sim\\ &\sim(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q;\,\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})]\end{aligned} \tag{9}$$

ist.

Bezeichnen wir nun mit B die Konjunktion der folgenden drei Ausdrücke:

$$(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q;\,\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1}), \tag{B_1}$$

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z), \tag{B_2}$$

$$\begin{aligned}&(v_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n-1}(x_\varrho)_1^n[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(v_{n-1},x_n,x_{n-1})\,\&\\ &\&\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(\overset{*}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\,\&\,f(v_1)\rightarrow f(\overset{*}{v}_1)],\end{aligned} \tag{B_3}$$

so enthält der Zählausdruck B außer der ausgezeichneten Funktionsvariablen Φ nur noch die einstellige Funktionsvariable f, hat außer den in Evidenz gesetzten Quantoren keine anderen, läßt sich also offenbar auf die Skolemsche Normalform bringen, und ist ein mit dem Zählausdruck A gleichwertiger γ-Ausdruck. Die letztere Behauptung wird folgendermaßen bewiesen:

Ist der Zählausdruck A erfüllbar, so hat er wegen des Löwenheim-Skolemschen Satzes auch eine Erfüllung im Bereich $\mathfrak{Z}$ der positiven ganzen Zahlen. Erfüllt die Funktion $F'(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ den Zählausdruck A in $\mathfrak{Z}$, so gilt $(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\ldots,x_q)$, also wegen (8) auch

$$(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{B}_k'(x_1,x_2,\ldots,x_q) \tag{10}$$

in $\mathfrak{Z}$.

Sei nun $\Phi'(x,y,z)$ irgend eine logische Funktion, welche die positiven ganzen Zahlen x auf die Paare $[y,z]$ von solchen eineindeutig abbildet (etwa die Funktion $x=2^{y-1}(2z-1)$), und $f'(v_1)$ die durch die Festsetzung

$$(11)\quad f'(v_1)\equiv(Ey_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\varrho)_2^{n}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},y_i)\&F'(y_1,y_2,\dots,y_{n-1},v_n)]$$

in $\mathfrak{Z}$ definierte Funktion. Wir wollen zeigen, daß die Funktionen Φ',f' eine ausgezeichnete Erfüllung des Zählausdrucks B in $\mathfrak{Z}$ bilden.

Wegen (11) und Satz 8 bestehen in $\mathfrak{Z}$ die Äquivalenzen:

$$F'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&\ f'(v_1)],$$

$$F'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},x_i)\to f'(v_1)],$$

denen wir die ihnen gleichwertige Formen:

$$F'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&\ f'(v_1)],$$

$$\bar{F}'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&\ \bar{f}'(v_1)]$$

geben. Ersetzt man in den zwei letzten Äquivalenzen die Variable v_n, welche aus Abkürzungsgründen so bezeichnet wurde, wiederum durch x_n und die gebundenen Variablen $v_1,v_2,\dots,v_{n-1}$ der Reihe nach durch die gebundenen Variablen $\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1}$ (für $k=1,2,\dots,r$), so erhält man folgende in $\mathfrak{Z}$ für $k=1,2,\dots,r$ bestehenden Äquivalenzen:

$$F'(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi'(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_i)\&\Phi'(\overset{k}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\&f'(\overset{k}{v}_1)],$$

$$\bar{F}'(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi'(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_i)\&\Phi'(\overset{k}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\&\bar{f}'(\overset{k}{v}_1)].$$

Aus diesen Äquivalenzen und der Konstruktion der Ausdrücke $\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\dots,x_q)$ für $k=1,2,\dots,r$ ist ersichtlich, daß auch die Äquivalenzen $\mathfrak{B}_k'(x_1,x_2,\dots,x_q)\equiv\mathfrak{C}_k'(x_1,x_2,\dots,x_q)$ für $k=1,2,\dots,r$ in $\mathfrak{Z}$ bestehen. Wegen (10) ist also auch $(x_\varrho)_1^p\,(Ex_\varrho)_{p+1}^q\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{C}_k'(x_1,x_2,\dots,x_q)$ richtig, welches, zusammen mit der allgemeingültigen Formel (9), sofort die Richtigkeit von

$$(x_\varrho)_1^p\,(Ex_\varrho)_{p+1}^q\,(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\dots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k'(x_1,x_2,\dots,x_q;\ \overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1})$$

in $\mathfrak{Z}$ ergibt. Dadurch ist aber gezeigt, daß die Funktionen Φ',f' den Ausdruck (B_1) erfüllen. Da offenbar $(y)(z)(Ex)\Phi'(x,y,z)$ und $(x)(\overset{*}{x})(y)(z)[\Phi'(x,y,z)\&\Phi'(\overset{*}{x},y,z)\to x=\overset{*}{x}]$ in $\mathfrak{Z}$ richtig sind, so ist einerseits auch (B_2) und andererseits, wegen Satz 16, auch (B_3) durch Φ',f' in $\mathfrak{Z}$ erfüllt. Das Paar Φ',f' erfüllt also überhaupt den ganzen Zählausdruck B in $\mathfrak{Z}$ und ist (weil $\Phi'(x,y,z)$ die Zahlen x auf die Zahlenpaare $[y,z]$ eineindeutig abbildet) dessen ausgezeichnete Erfüllung.

Ist, umgekehrt, der Zählausdruck B durch die Funktionen Φ'',f'' in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllt, so zeigen wir, daß die durch die Festsetzung

$$(12)\quad F''(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\&f''(v_1)]$$

in $\mathfrak{J}''$ definierte Funktion $F''(x_1,x_2,\dots,x_n)$ den Zählausdruck A in $\mathfrak{J}''$ erfüllt. Da die Funktionen Φ'',f'' die Ausdrücke (B_2) und (B_3) erfüllen, folgt zunächst wegen Satz 14 das Bestehen der Äquivalenz

$$(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&\ f''(v_1)]\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\to f''(v_1)]$$

in $\mathfrak{J}''$. Diese Äquivalenz und (12) ergeben sofort die Äquivalenz

$$F''(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\to f''(v_1)],$$

welche der Äquivalenz

$$(13)\quad \bar{F}''(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\&\bar{f}''(v_1)]$$

gleichwertig ist. Ersetzt man in den Äquivalenzen (12) und (13) die Variable v_n durch x_n und nennt die gebundenen Variablen $v_1,v_2,\dots,v_{n-1}$ der Reihe nach in $\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1}$ um (für $k=1,2,\dots,r$), so erhält man die Richtigkeit der folgenden Äquivalenzen in $\mathfrak{J}''$:

$$F''(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv(E\overset{k}{v}_\varrho)^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi''(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_i)\&\Phi''(\overset{k}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\&f''(\overset{k}{v}_1)],$$

$$\bar{F}''(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi''(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_i)\&\Phi''(\overset{k}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\&\bar{f}''(\overset{k}{v}_1)]$$

(für $k=1,2,\ldots,r$). Aus diesen Äquivalenzen und aus der Entstehungsart der Ausdrücke $\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ aus $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ ist ersichtlich, daß $\mathfrak{C}_k''(x_1,x_2,\ldots,x_q)\equiv\mathfrak{B}_k''(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ für $k=1,2,\ldots,r$ in $\mathfrak{J}''$ besteht, was mit der allgemeingültigen Formel (9) zusammen sofort

$$(x_\varrho)_1^q\Big[\Big(\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{B}_k''(x_1,x_2,\ldots,x_q)\Big)\sim$$
$$\sim(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k''(x_1,x_2,\ldots,x_q;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})\Big]$$

ergibt. Aus dieser Formel und der allgemeingültigen Formel (8) folgt weiter

$$(x_\varrho)_1^q\big[\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\ldots,x_q)\sim$$
$$\sim(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k''(x_1,x_2,\ldots,x_q;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})\big]$$

und daraus leicht

$$(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\ldots,x_q)\sim$$
$$\sim(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k''(x_1,x_2,\ldots,x_q;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1}).$$

Da aber

$$(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k''(x_1,x_2,\ldots,x_q;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1}),$$

als der aus (B_1) durch Setzung der Φ'',f'' an Stelle der Φ,f entstehender Ausdruck, richtig ist, so ist auch

$$(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\ldots,x_q)$$

richtig, und damit gezeigt, daß die Funktion $F''(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ den Zählausdruck A in $\mathfrak{J}''$ erfüllt.

Aus dem Bewiesenen folgt die Gleichwertigkeit der Zählausdrücke A,B und außerdem daß B ein γ-Ausdruck ist. Das letztere folgt durch Kettenschluß: ist B erfüllbar so ist es auch A; ist A erfüllbar, so hat B eine ausgezeichnete Erfüllung; folglich: ist B überhaupt erfüllbar, so hat es dann auch eine ausgezeichnete Erfüllung.

Damit ist Satz 27 bewiesen.

Bezeichnet man mit B^* die Konjunktion der folgenden drei Ausdrücke:

$$(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_q;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1}),$$

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)$$

$$(x)(\overset{*}{x})(y)(z)[\Phi(x,y,z)\,\&\,\Phi(\overset{*}{x},y,z)\rightarrow x=\overset{*}{x}],$$

so ist auch B^* ein mit dem Zählausdruck A gleichwertiger γ-Ausdruck. Dies zeigt man in derselben Weise wie für B, indem man aber statt Satz 14 jetzt den Satz 17 anwendet. Durch die so modifizierte Konstruktion erhält man zwar statt Satz 27 nur folgenden etwas schwächeren

Satz 27*. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf diejenige γ-Ausdrücke mit S k o l e m schen Präfix $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ beschränken, welche außer der ausgezeichneten Funktionsvariablen Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable und das $=$-Zeichen enthalten*;

da aber einerseits der jetzt konstruierte Ausdruck B^* einfacher als B ist und andererseits Satz 27* in gewissen Überlegungen genau dieselben Dienste leistet, wie der schärfere Satz 27, so ist die modifizierte Konstruktion nicht ohne Bedeutung.

In Satz 27 haben wir beim Übergang vom Zählausdruck A zum Zählausdruck (B_1) eine Art von Einsetzung angewendet, die wir als eine „doppelte" oder „zusammengeflickte" Einsetzung bezeichnen können. Sie beruht darauf, daß man für die Nennform einer Funktionsvariablen F nicht — wie es bei der einfachen Einsetzung geschieht [33]) — einen, sondern gleichzeitig zwei verschiedene Ausdrücke zur Einsetzung angibt und daß man dann innerhalb eines Zählausdrucks, in welchem die Einsetzung stattfindet, an Stellen, wo die Funktionsvariable F (mit wechselnden Argumenten) auftritt, bald nach dem einen, bald aber nach dem anderen Ausdruck einsetzt. In Satz 27, beim Übergang von A zu (B_1), haben wir so gehandelt, als ob für die Nennform $F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ der Funktionsvariable F gleichzeitig die zwei Ausdrücke:

$$(Ev_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,f(v_1)\Big],\qquad (v_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\rightarrow f(v_1)\Big]$$

zur Einsetzung angegeben worden wären, und diejenigen Stellen,

[33]) Bezüglich der einfachen Einsetzung siehe das Werk von D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik I*, S. 90.

an welchen für $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$ nach dem ersten, sowie diejenigen, an welchen nach dem zweiten Ausdruck einzusetzen wäre, an Hand der konjunktiven Normalform aufgewiesen.

Es sei bemerkt, daß im Falle des Satzes 27 und in allen anderen Fällen, wo in dieser Arbeit eine „doppelte" Einsetzung stattfindet, die Stellen, an welchen nach dem einen, sowie diejenigen, an welchen nach dem anderen von den zwei zur Einsetzung angegebenen Ausdrücken einzusetzen ist, nicht notwendig an Hand einer konjunktiven oder disjunktiven Normalform aufgewiesen zu werden brauchen. Man kann nämlich alle Stellen, an welchen eine Funktionsvariable (mit wechselnden Argumenten) in einem Zählausdruck auftritt, in positive und negative Stellen einteilen, und zwar in genau derselben Weise, in welcher J. Herbrand sämtliche Stellen, an welchen eine Grundaussage p in einer Aussagenverknüpfung $f(p)$ vorkommt, in „*occurrences positives*" und „*négatives*" einteilt [34]).

Diese Vorzeichenverteilung vorausgesetzt, läßt sich über alle in dieser Arbeit vorkommenden Fälle der Anwendung einer „zusammengeflickten" Einsetzung folgendes sagen:

In jedem Falle, in welchen wir eine solche Einsetzung anwenden, geben wir zunächst für die Nennform der entsprechenden

[34]) J. Herbrand, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego III, **33** (1930), insbesondere Chap. 1, 5.11 und Chap. 2, 3.102. Herbrand operiert zwar nur mit Aussagenverknüpfungen $f(p)$, in welchen nur logische Zeichen $\overline{}$, $\vee$, (x), (Ex) vorkommen, es bietet aber keine Schwierigkeiten auch die Zeichen &, $\rightarrow$ zuzulassen. Man braucht dazu bloß die Herbrandschen rekursiven Bestimmungen durch folgende zwei zu erweitern:

1^0 Das Vorzeichen einer fixierten Stelle ändert sich nicht, wenn man von der Aussage p zu der Aussage $(p\&q)$ oder von der Aussage q zu der Aussage $(p\&q)$ übergeht (diese Erweiterung liegt durch die Definition $(p\&q) \underset{\text{Def}}{=} \overline{(\overline{p} \vee \overline{q})}$ nahe).

2^0 Das Vorzeichen einer fixierten Stelle ändert sich beim Übergang von p zu $(p \rightarrow q)$, ändert sich aber nicht beim Übergang von q zu $(p \rightarrow q)$ (diese Erweiterung liegt durch die Definition $(p \rightarrow q) \underset{\text{Def}}{=} (\overline{p} \vee q)$ nahe).

Nur das logische Zeichen $\sim$ macht gewisse Schwierigkeiten beim Definieren der Vorzeichenverteilung; daher werden wir immer den entsprechenden Zählausdruck als ohne dieses Zeichen geschrieben voraussetzen. Die Schwierigkeiten, auf welche man stößt, wenn man obige rekursive Bestimmungen auch auf das Zeichen $\sim$ auszudehnen sucht, sind auf Grund etwa der Definition $(p \sim q) \underset{\text{Def}}{=} ((p \rightarrow q)\&(q \rightarrow p))$ ersichtlich. Sie beruhen darauf, daß p im Definiendum nur an einer Stelle, während im Definiens an zwei Stellen vorkommt, und zwar mit verschiedenen Vorzeichen.

Funktionsvariable, etwa F, zwei Ausdrücke zur Einsetzung an: den einen, welcher (in pränexer Normalform gedacht) nur Seinszeichen enthält, und den zweiten, welcher (in pränexer Normalform gedacht) nur Allzeichen enthält. Dann setzen wir an einer Stelle, wo im Zählausdruck eine Einsetzung stattfinden soll, für eine Kombination $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$ nach dem einen oder nach dem zweiten Ausdruck ein, je nachdem $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$ an einer positiven oder an einer negativen Stelle steht, d.h. daß wir an den Stellen desselben Vorzeichens nach demselben von den zwei zur Einsetzung angegebenen Ausdrücken einsetzen.

Die Bestimmung, welcher von den zwei Ausdrücken zu den positiven und welcher zu den negativen Stellen gehören soll, ist noch davon abhängig, ob man das All- oder das Seinszeichen in der pränexen Normalform des Endergebnisses zu vermeiden beabsichtigt. Will man nämlich Allzeichen vermeiden, so setzt man an den Stellen, wo $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$ positives Vorzeichen hat, nach dem Ausdruck, der nur Seinszeichen enthält, und an den Stellen mit negativen Vorzeichen nach dem Ausdruck, der nur Allzeichen enthält, ein. Will man dagegen Seinszeichen vermeiden, so wird umgekehrt vorgefahren.

Der Übergang vom Zählausdruck A zum Zählausdruck (B_1) in Satz 27, aus diesem Gesichtspunkt betrachtet, läßt sich ohne Bezugnahme auf die konjunktive Normalform von A [35]) folgendermaßen charakterisieren.

Für die Nennform $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, v_n)$ der in A vorkommenden Funktionsvariablen F gibt man zunächst die zwei Ausdrücke:

$$(Ev_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\, f(v_1)\Big], \qquad (v_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow f(v_1)\Big]$$

zur Einsetzung an. Dann setzt man in A für eine Kombination $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$ nach $(Ev_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\, f(v_1)\Big]$ oder nach $(v_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow f(v_1)\Big]$ ein (d. h. daß man $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$

[35]) Es wird nur vorausgesetzt, daß in A das logische Zeichen $\sim$ nicht vorkommt. Kommt es zunächst vor, so soll es — auf Grund etwa der Definition $(p \sim q) \underset{\text{Def}}{=} ((p \rightarrow q)\&(q \rightarrow p))$ — durch die anderen logischen Zeichen ausgedrückt werden.

durch $(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_{a_i}) \& \Phi(v_{n-1}, x_{a_n}, x_{a_{n-1}}) \& f(v_1)]$ oder durch $(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_{a_i}) \& \Phi(v_{n-1}, x_{a_n}, x_{a_{n-1}}) \rightarrow f(v_1)]$ ersetzt), je nachdem die Kombination $F(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_n})$ an einer positiven oder an einer negativen Stelle in A steht. Man entfernt aus A auf diese Weise alle Kombinationen der Form $F(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_n})$ und bezeichnet das Endergebnis mit (B_1). Da im Ausdruck $(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \& f(v_1)]$ die Funktionsvariable Φ (mit wechselnden Argumenten) nur an positiven Stellen auftritt und im Zählausdruck A nach diesem Ausdruck eben an denjenigen Stellen eingesetzt wurde, wo die $F(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_n})$ positives Vorzeichen haben; da ferner im Ausdruck $(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow f(v_1)]$ die Funktionsvariable Φ nur an negativen Stellen steht, wobei in A eben nach diesem Ausdruck an denjenigen Stellen eingesetzt wurde, wo die $F(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_n})$ negatives Vorzeichen haben, so ergibt sich sofort, daß Φ in (B_1) sich nur an Stellen positiven Vorzeichens befinden kann. Da auch in (B_2) die Funktionsvariable Φ an einer positiven und in (B_3), wie leicht einzusehen, nur an negativen Stellen steht, so läßt sich Satz 27 in folgender, etwas schärferen Form aussprechen:

Satz 28. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf γ-Ausdrücke der Gestalt*

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, y_1, y_2, \ldots, y_s) \&$$
$$\& (z_1)(z_2)\ldots(z_m)\mathfrak{B}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

beschränken, die außer der ausgezeichneten Funktionsvariablen Φ nur noch eine, und zwar eine einstellige Funktionsvariable enthalten, wobei Φ in $\mathfrak{A}$ nur an Stellen positiven und in $\mathfrak{B}$ nur an Stellen negativen Vorzeichens vorausgesetzt werden kann [36]).

[36]) Man kann es auch so ausdrücken: Denkt man sich $\mathfrak{A}$ in der konjunktiven bzw. disjunktiven Normalform geschrieben, so darf vorausgesetzt werden, daß in jeder Elementardisjunktion der konjunktiven bzw. in jeder Elementarkonjunktion der disjunktiven Normalform die Funktionsvariable Φ nur unverneint vorkommt; denkt man sich dagegen $\mathfrak{B}$ in der konjunktiven bzw. disjunktiven Normalform geschrieben, so darf vorausgesetzt werden, daß in jeder Elementardisjunktion der konjunktiven bzw. in jeder Elementarkonjunktion der disjunktiven Normalform die Funktionsvariable Φ nur verneint vorkommt.

Was nun die Anwendbarkeit der Methode der „zusammengeflickten“ Einsetzung betrifft, so ist sie mannigfacher Art. Diese Methode erlaubt nicht nur Reduktionssätze des Entscheidungsproblems zu gewinnen, die auf anderem Wege vielleicht überhaupt unerzielbar würden, sondern auch Konstruktionen zu ersparen und Formeln zu vereinfachen.

Zum Beispiel: angenommen, es liege ein Zählausdruck A in der Skolemschen Normalform $(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ vor, welcher mehrstellige Funktionsvariable enthält; es handle sich um Angabe ebenfalls in der Skolemschen Normalform eines gleichwertigen binären [37]) Zählausdrucks B.

Überlegen wir uns zunächst, auf welche Weise mit den bisherigen Methoden ein solcher Zählausdruck B konstruiert werden kann. Es ist vielleicht interessant, daß noch im Jahre 1932 überhaupt keine Methode bekannt war, um einen solchen Zählausdruck B anzugeben. Die einzige zu jener Zeit bekannte (die Löwenheimsche) Methode der Konstruktion eines mit einem Zählausdruck gleichwertigen binären Zählausdrucks stört nämlich, auf A angewandt, das Skolemsche Präfix von A, und das einzige damals bekannte Verfahren (von Skolem) um das Skolemsche Präfix wiederherzustellen, führt wiederum mehrstellige Funktionsvariable ein [38]). Eine Änderung der Lage hat erst K. Gödel geschaffen [39]), indem er das Skolemsche Verfahren durch ein nur mit zweistelligen Funktionsvariablen auskommendes Verfahren ersetzte. Konstruiert man zu A einen gleichwertigen binären Zählausdruck A^* mit Hilfe der Löwenheimschen oder einer ähnlichen Methode [40]) und wendet

[37]) Einen Zählausdruck nennen wir *binär*, wenn er nur Funktionsvariable mit höchstens zwei Leerstellen enthält.

[38]) Man vergleiche darüber die Fußnote [19]) der Arbeit von L. Kalmár, *Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem*, Acta Scient. Math. Szeged **5**, S. 222-236, welche eben aus jener Zeit stammt.

[39]) Vgl. K. Gödel, *Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls*, Monatsh. f. Math. und Phys. **40** (1933), S. 433-443, insb. S. 441.

[40]) Löwenheim hat seine Methode in der Arbeit *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, Math. Annalen, **76**, S. 447-470, insb. § 4, dargelegt. Diese Methode wurde von J. Herbrand in der Arbeit *Sur le problème fondamental de la logique mathématique*, Comptes Rendus Soc. Sc. Varsovie III, **24** (1931), S. 12-56, insb. S. 34-39, finit umgestaltet. Eine einfachere Methode (finite und nicht finite) hat später L. Kalmár in der Arbeit *Über einen Löwenheimschen Satz*, Acta Scient. Math. Szeged **7** (1934), S. 112-121 angegeben. In Satz 16 aus P_1 ist eine in gewissen Hinsichten noch einfachere und schärfere Methode enthalten. Alle diese Methoden haben aber denselben Nachteil, daß sie, auf Zählausdrücke in Skolemscher Normalform angewandt, Skolemsches Präfix im allgemeinen stören.

dann auf den binären Zählausdruck A^* (der im allgemeinen das Skolemsche Präfix verloren hat) ein- oder mehrmalig das durch Gödel modifizierte, mit nur zweistelligen Funktionsvariablen auskommende Skolemsche Verfahren an, so gelangt man zwar schließlich zu einem mit A gleichwertigen binären Zählausdruck B in Skolemscher Normalform, jedoch auf einem Umwege über den Zählausdruck A^*, wobei das zunächt gestörte Skolemsche Präfix von A erst durch eine ein- oder mehrmalige nachträgliche Anwendung des durch Gödel modifizierten Skolemschen Verfahrens und im allgemeinen unter Heranziehung einer Anzahl von zweistelligen Funktionsvariablen wieder hergestellt wird. Zwar lässt sich der Umweg erheblich verkürzen, wenn man beim Übergang von A zu A^* die von mir in Satz 16 aus $\boldsymbol{P}_1$ angegebene Methode anwendet [41]), ferner den Zählausdruck A^* in geschickter Weise in die pränexe Normalform bringt und schließlich beim Übergang von A^* zu B statt der Gödelschen meine in Satz 18 aus $\boldsymbol{P}_1$ angegebene Modifikation des Skolemschen Verfahrens benützt. Es ist aber, wie wir sofort sehen werden, überhaupt kein Umweg nötig, da die Methode der „zusammengeflickten" Einsetzung den Zählausdruck B konstruieren erlaubt, ohne das in A vorhandene Skolemsche Präfix überhaupt zu stören.

Sei A gleich $(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q)$; die mehrstelligen Funktionsvariablen aus A seien $F_1, F_2, \ldots, F_s$; die etwa vorkommenden einstelligen Funktionsvariablen seien $g_1, g_2, \ldots, g_t$, wobei F_i etwa n_i-stellig. Seien weiter $f_1, f_2, \ldots, f_s$ voneinander und von $g_1, g_2, \ldots, g_t$ verschiedene einstellige Funktionsvariablen. Ist $\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{B}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ die konjunktive Normalform von $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, wobei $\mathfrak{B}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ Elementardisjunktionen bedeuten, so ist die Formel

$$(x_\varrho)_1^q[\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q) \sim \sum_{k=1}^{r}\mathfrak{B}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)] \tag{14}$$

[41]) Die in Satz 16 aus $\boldsymbol{P}_1$ angewandte Methode erlaubt einen mit dem Zählausdruck A gleichwertigen binären Zählausdruck A^* zu konstruieren, der zwei zweistellige Funktionsvariablen R_1, R_2 und sonst nur einstellige enthält, wobei die Anzahl der letzteren der Anzahl aller Funktionsvariablen aus A gleich ist. Durch entsprechende Umformung kann man A^* auf die pränexe Normalform zweiten Grades bringen und durch eine einzige Anwendung des von mir modifizierten Skolemschen Verfahrens schließlich zu einem Zählausdruck B von den verlangten Eigenschaften zu gelangen, wobei der letzte Schritt nur die Heranziehung einer einzigen einstelligen Funktionsvariablen erfordert.

allgemeingültig. Wir ersetzen in der Elementardisjunktion

$$\mathfrak{B}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)$$

jedes Glied der Form $F_i(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n_i}})$ durch

$$(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n_i-1}[\sum_{j=1}^{n_i-2}(R_1(\overset{k}{v}_j, \overset{k}{v}_{j+1}) \mathbin{\&} R_2(\overset{k}{v}_j, x_{\alpha_j})) \mathbin{\&} R_1(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{\alpha_{n_i}}) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} R_2(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{\alpha_{n_i-1}}) \mathbin{\&} f_i(\overset{k}{v}_1)]$$

und jedes Glied der Form $\bar{F}_i(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n_i}})$ durch

$$(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n_i-1}[\sum_{j=1}^{n_i-2}(R_1(\overset{k}{v}_j, \overset{k}{v}_{j+1}) \mathbin{\&} R_2(\overset{k}{v}_j, x_{\alpha_j})) \mathbin{\&} R_1(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{\alpha_{n_i}}) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} R_2(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{\alpha_{n_i-1}}) \mathbin{\&} \bar{f}_i(\overset{k}{v}_1)].$$

Den auf diese Weise aus $\mathfrak{B}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ entstehenden Ausdruck bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)$. Mit $\mathfrak{D}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q; \overset{k}{v}_1, \overset{k}{v}_2, \ldots, \overset{k}{v}_{n-1})$ bezeichnen wir ferner denjenigen Ausdruck, welcher aus $\mathfrak{B}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ entsteht, indem jedes Disjunktionsglied der Form $F_i(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n_i}})$ durch

$$[\sum_{j=1}^{n_i-2}(R_1(\overset{k}{v}_j, \overset{k}{v}_{j+1}) \mathbin{\&} R_2(\overset{k}{v}_j, x_{\alpha_j})) \mathbin{\&} R_1(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{\alpha_{n_i}}) \mathbin{\&} R_2(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{\alpha_{n_i-1}}) \mathbin{\&} f_i(\overset{k}{v}_1)]$$

und jedes Disjunktionsglied der Form $\bar{F}_i(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n_i}})$ durch

$$[\sum_{j=1}^{n_i-2}(R_1(\overset{k}{v}_j, \overset{k}{v}_{j+1}) \mathbin{\&} R_2(\overset{k}{v}_j, x_{\alpha_j})) \mathbin{\&} R_1(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{\alpha_{n_i}}) \mathbin{\&} R_2(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{\alpha_{n_i-1}}) \mathbin{\&} \bar{f}_i(\overset{k}{v}_1)]$$

ersetzt wird, wobei $n = \mathrm{Max}(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ ist. Auf Grund der allgemeingültigen Äquivalenz $[(Ev)F(v) \vee (Ev)G(v)] \sim (Ev)[F(v) \vee G(v)]$ ist die Allgemeingültigkeit der Formeln

$$(x_\varrho)_1^q[\mathfrak{C}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q) \sim (E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}\mathfrak{D}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q; \overset{k}{v}_1, \overset{k}{v}_2, \ldots, \overset{k}{v}_{n-1})]$$

für $k = 1, 2, \ldots, r$ ersichtlich. Aus diesen Formeln folgt aber auch die Allgemeingültigkeit der Formel

$$\begin{aligned}(x_\varrho)_1^q[(\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{C}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)) \sim \\ \sim (E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q; \overset{k}{v}_1, \overset{k}{v}_2, \ldots, \overset{k}{v}_{n-1})].\end{aligned} \tag{15}$$

Bezeichnen wir nun mit B die Konjunktion der folgenden drei Formeln:

$$(B_1)\qquad (x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q (E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1} \ldots (E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1} \sum_{k=1}^{r} \mathfrak{D}_k(x_1, x_2, .., x_q; \overset{k}{v}_1, \overset{k}{v}_2, \ldots, \overset{k}{v}_{n-1}),$$

$$(B_2)\qquad (y)(z)(Ex)(R_1(x,y) \& R_2(x,z)),$$

$$(B_3)\qquad \sum_{i=1}^{s} (v_\varrho)_1^{n_i-1} (\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n_i-1} (x_\varrho)_1^{n_i} [\sum_{j=1}^{n_i-2} (R_1(v_j, v_{j+1}) \& R_2(v_j, x_j)) \& R_1(v_{n_i-1}, x_{n_i}) \&$$

$$\& R_2(v_{n_i-1}, x_{n_i-1}) \& \sum_{j=1}^{n_i-2} (R_1(\overset{*}{v}_j, \overset{*}{v}_{j+1}) \& R_2(\overset{*}{v}_j, x_j)) \& R_1(\overset{*}{v}_{n_i-1}, x_{n_i}) \&$$

$$\& R_2(\overset{*}{v}_{n_i-1}, x_{n_i-1}) \& f_i(v_1) \to f_i(\overset{*}{v}_1)],$$

so enthält der Zählausdruck B außer den zwei ausgezeichneten zweistelligen Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch die einstelligen Funktionsvariablen $f_1, f_2, \ldots, f_s$, $g_1, g_2, \ldots, g_t$ und keine Quantoren außer den in Evidenz gesetzten, offenbar läßt sich also in die Skolemsche Normalform bringen [42]) und ist ein mit dem Zählausdruck A gleichwertiger β-Ausdruck.

Das letztere wird wie folgt bewiesen:

Ist der Zählausdruck A erfüllbar, so hat er wegen des Löwenheim-Skolemschen Satzes auch eine Erfüllung im Bereich der positiven ganzen Zahlen $\mathfrak{Z}$. Erfüllen die Funktionen $F_1', F_2', \ldots, F_s'$, $g_1', g_2', \ldots, g_t'$ den Zählausdruck A in $\mathfrak{Z}$, so gilt $(x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, also wegen (14) auch

$$(16)\qquad (x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \sum_{k=1}^{r} \mathfrak{B}_k'(x_1, x_2, \ldots, x_q)$$

in $\mathfrak{Z}$. Sind weiter $R_1'(x,y)$ und $R_2'(x,z)$ zwei in $\mathfrak{Z}$ definierte logische Funktionen derart, daß durch die Funktion $R_1'(x,y) \& R_2'(x,z)$ eine eineindeutige Abbildung der positiven ganzen Zahlen x auf die

[42]) Um die Anzahl der Allzeichen in der Skolemschen Normalform möglichst zu vermindern, empfiehlt es sich dabei (und in allen ähnlichen Fällen) die allgemeingültige Äquivalenz $[(x)F(x) \& (y)G(y)] \sim (x)[F(x) \& G(x)]$ zu berücksichtigen. Unter Berücksichtigung dieser Äquivalenz läßt sich z. B. der Ausdruck (B_3), welcher die Form $\sum_{i=1}^{s} (v_\varrho)_1^{n_i-1} (\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n_i-1} (x_\varrho)_1^{n_i} [\ldots]$ hat, auf $(v_\varrho)_1^{n-1} (\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n-1} (x_\varrho)_1^{n} \sum_{i=1}^{s} [\ldots]$ zusammenziehen.

Paare $[y,z]$ von solchen gegeben wird (etwa die Funktionen $R_1'(x,y) \equiv (Ez)(x = 2^{y-1}(2z-1))$ und $R_2'(x,z) \equiv (Ey)(x = 2^{y-1}(2z-1))$ und sind $f_1', f_2', \ldots, f_s'$ die durch Festsetzungen

$$(17)\qquad f_i'(v_1) \equiv (Ey_\varrho)_1^{n_i-1} (Ev_\varrho)_2^{n_i} [\sum_{j=1}^{n_i-1} (R_1'(v_j, v_{j+1}) \& R_2'(v_j, y_j)) \& \& F_i'(y_1, y_2, \ldots, y_{n_i-1}, v_{n_i})],$$

für $i = 1, 2, \ldots, s$, in $\mathfrak{Z}$ definierten Funktionen, so bildet das System

$$(18)\qquad f_1', f_2', \ldots, f_s', \qquad g_1', g_2', \ldots, g_t', \qquad R_1', R_2'$$

eine ausgezeichnete Erfüllung des Zählausdrucks B. Wegen (17) und Satz 11 bestehen zunächst in $\mathfrak{Z}$ die Äquivalenzen:

$$F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i-1}, v_{n_i}) \equiv (E v_\varrho)_1^{n_i-1} [\sum_{j=1}^{n_i-1} (R_1'(v_j, v_{j+1}) \& R_2'(v_j, x_j)) \& f_i'(v_1)],$$

$$F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i-1}, v_{n_i}) \equiv (v_\varrho)_1^{n_i-1} [\sum_{j=1}^{n_i-1} (R_1'(v_j, v_{j+1}) \& R_2'(v_j, x_j)) \to f_i'(v_1)]$$

(für $i = 1, 2, \ldots, s$), denen wir jetzt die ihnen gleichwertige Form:

$$F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i-1}, v_{n_i}) \equiv (Ev_\varrho)_1^{n_i-1} [\sum_{j=1}^{n_i-1} (R_1'(v_j, v_{j+1}) \& R_2'(v_j, x_j)) \& f_i'(v_1)],$$

$$\overline{F}_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i-1}, v_{n_i}) \equiv (Ev_\varrho)_1^{n_i-1} [\sum_{j=1}^{n_i-1} (R_1'(v_j, v_{j+1}) \& R_2'(v_j, x_j)) \& \overline{f}_i'(v_1)]$$

geben. Aus diesen Äquivalenzen folgt sofort das Bestehen der Äquivalenzen:

$$F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i-1}, x_{n_i}) \equiv (E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n_i-1} [\sum_{j=1}^{n_i-2} (R_1'(\overset{k}{v}_j, \overset{k}{v}_{j+1}) \& R_2'(\overset{k}{v}_j, x_j)) \&$$

$$\& R_1'(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{n_i}) \& R_2'(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{n_i-1}) \& f_i'(\overset{k}{v}_1)],$$

$$\overline{F}_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i-1}, x_{n_i}) \equiv (E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n_i-1} [\sum_{j=1}^{n_i-2} (R_1'(\overset{k}{v}_j, \overset{k}{v}_{j+1}) \& R_2'(\overset{k}{v}_j, x_j)) \&$$

$$\& R_1'(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{n_i}) \& R_2'(\overset{k}{v}_{n_i-1}, x_{n_i-1}) \& \overline{f}_i'(\overset{k}{v}_1)]$$

für $i = 1, 2, \ldots, s$ und $k = 1, 2, \ldots, r$, woraus wegen der Entstehungsweise von $\mathfrak{C}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ aus $\mathfrak{B}_k(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ leicht das Bestehen der Äquivalenzen

$$\mathfrak{B}_k'(x_1, x_2, \ldots, x_q) \equiv \mathfrak{C}_k'(x_1, x_2, \ldots, x_q)$$

für $k=1,2,\dots,r$ in $\mathfrak{Z}$ folgt. Wegen (16) ist also auch

$$(x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \sum_{k=1}^{r} \mathfrak{C}_k'(x_1,x_2,\dots,x_q)$$

richtig, was mit der allgemeingültigen Formel (15) zusammen sofort die Richtigkeit von

$$(x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q (E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1} (E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1} \dots (E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1} \sum_{k=1}^{r} \mathfrak{D}_k'(x_1,x_2,\dots,x_q;\ \overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1})$$

in $\mathfrak{Z}$ ergibt. Damit ist gezeigt, daß das Funktionensystem (18) den Ausdruck (B_1) in $\mathfrak{Z}$ erfüllt. Da offenbar $(y)(z)(Ex)(R_1'(x,y)\,\&\,R_2'(x,z))$ und $(x)(\overset{*}{x})(y)(z)[R_1'(x,y)\,\&\,R_2'(x,z)\,\&\,R_1'(\overset{*}{x},y)\,\&\,R_2'(\overset{*}{x},z)\to x=\overset{*}{x}]$ in $\mathfrak{Z}$ richtig sind, so ist einerseits auch (B_2) und anderseits wegen Satz 20 auch (B_3) durch dieses Funktionensystem erfüllt. Das System (18) erfüllt also überhaupt den ganzen Zählausdruck B in $\mathfrak{Z}$ und bildet (weil $R_1'(x,y)\,\&\,R_2'(x,z)$ die Zahlen x auf die Zahlenpaare $[y,z]$ eineindeutig abbildet) dessen ausgezeichnete Erfüllung.

Ist, umgekehrt, der Zählausdruck B durch die Funktionen

(19) $\qquad f_1'',f_2'',\dots,f_s'',\qquad g_1'',g_2'',\dots,g_t'',\qquad R_1'',R_2''$

in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllt und werden die Funktionen $F_1'',F_2'',\dots,F_s''$ in $\mathfrak{J}''$ durch Festsetzungen

(20) $$F_i''(x_1,x_2,\dots,x_{n_i-1},v_{n_i})\equiv(Ev_\varrho)_1^{n_i-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_i-1}(R_1''(v_j,v_{j+1})\,\&\,R_2''(v_j,x_j))\,\&\,f_i''(v_1)\Big]$$

für $i=1,2,\dots,s$ definiert, so erfüllen die Funktionen $F_1'',F_2'',\dots,F_s''$, $g_1'',g_2'',\dots,g_t''$ den Zählausdruck A in $\mathfrak{J}''$. Aus der Tatsache, daß die Funktionen (19) die Ausdrücke (B_2) und (B_3) erfüllen und aus Satz 18 folgt zunächst das Bestehen der Äquivalenzen

$$(Ev_\varrho)_1^{n_i-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_i-1}(R_1''(v_j,v_{j+1})\,\&\,R_2''(v_j,x_j))\,\&\,f_i''(v_1)\Big]\equiv$$
$$\equiv(v_\varrho)_1^{n_i-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_i-1}(R_1''(v_j,v_{j+1})\,\&\,R_2''(v_j,x_j))\to f_i''(v_1)\Big]$$

für $i=1,2,\dots,s$ in $\mathfrak{J}''$. Diese Äquivalenzen, mit (20) zusammen, ergeben sofort die Äquivalenzen

$$F_i''(x_1,x_2,\dots,x_{n_i-1},v_{n_i})\equiv(v_\varrho)_1^{n_i-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_i-1}(R_1''(v_j,v_{j+1})\,\&\,R_2''(v_j,x_j))\to f_i''(v_1)\Big]$$

für $i=1,2,\dots,s$, welche den Äquivalenzen

(21) $$\bar{F}_i''(x_1,x_2,\dots,x_{n_i-1},v_{n_i})\equiv(Ev_\varrho)_1^{n_i-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_i-1}(R_1''(v_j,v_{j+1})\,\&\,R_2''(v_j,x_j))\,\&\,\bar{f}_i''(v_1)\Big]$$

für $i=1,2,\dots,s$ gleichwertig sind. Aus (20) und (21) ergibt sich leicht das Bestehen in $\mathfrak{J}''$ der Äquivalenzen:

$$F_i''(x_1,x_2,\dots,x_{n_i})\equiv(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n_i-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_i-2}(R_1''(\overset{k}{v}_j,\overset{k}{v}_{j+1})\,\&\,R_2''(\overset{k}{v}_j,x_j))\,\&$$
$$\&\,R_1''(\overset{k}{v}_{n_i-1},x_{n_i})\,\&\,R_2''(\overset{k}{v}_{n_i-1},x_{n_i-1})\,\&\,f_i''(\overset{k}{v}_1)\Big],$$

$$\bar{F}_i''(x_1,x_2,\dots,x_{n_i})\equiv(E\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n_i-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_i-2}(R_1''(\overset{k}{v}_j,\overset{k}{v}_{j+1})\,\&\,R_2''(\overset{k}{v}_j,x_j))\,\&$$
$$\&\,R_1''(\overset{k}{v}_{n_i-1},x_{n_i})\,\&\,R_2''(\overset{k}{v}_{n_i-1},x_{n_i-1})\,\&\,\bar{f}_i''(\overset{k}{v}_1)\Big]$$

für $i=1,2,\dots,s$ und $k=1,2,\dots,r$, woraus wegen der Entstehungsweise von $\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\dots,x_q)$ ersichtlich ist, daß die Äquivalenzen

$$\mathfrak{B}_k''(x_1,x_2,\dots,x_q)\equiv\mathfrak{C}_k''(x_1,x_2,\dots,x_q)$$

für $k=1,2,\dots,r$ in $\mathfrak{J}''$ richtig sind. Diese Äquivalenzen und die allgemeingültige Formel (15) ergeben zusammen die Formel

$$(x_\varrho)_1^q\Big[\Big(\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{B}_k''(x_1,x_2,\dots,x_q)\Big)\sim$$
$$\sim(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\dots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k''(x_1,x_2,\dots,x_q;\ \overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1})\Big],$$

woraus wegen (14)

$$(x_\varrho)_1^q[\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\dots,x_q)\sim$$
$$\sim(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\dots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k''(x_1,x_2,\dots,x_q;\ \overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1})]$$

und weiter

$$(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\dots,x_q)\sim$$
$$\sim(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\dots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k''(x_1,x_2,\dots,x_q;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1})$$

folgt. Da aber

$$(x_\varrho)_1^p\ (Ex_\varrho)_{p+1}^q(E\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(E\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\dots(E\overset{r}{v}_\varrho)_1^{n-1}\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{D}_k''(x_1,x_2,\dots,x_q;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1})$$

richtig ist (als der aus (B_1) ja durch Setzung von $f_i'', g_i'', R_1'', R_2''$ an Stelle von f_i, g_i, R_1, R_2 entstehende Ausdruck), so ist auch $(x_\varrho)_1^p(Ex_\varrho)_{p+1}^q\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ richtig. Damit ist gezeigt, daß die Funktionen $F_1'', F_2'', \ldots, F_s'', g_1'', g_2'', \ldots, g_t''$ den Zählausdruck A in $\mathfrak{J}''$ erfüllen.

Aus dem Bewiesenen folgt die Gleichwertigkeit der Zählausdrücke A, B und daß B außerdem ein β-Ausdruck ist.

Was nun noch die Frage der Konstruktion eines zum Zählausdruck A in Skolemscher Normalform mit mehrstelligen Funktionsvariablen gleichwertigen binären Zählausdrucks B ebenfalls in Skolemscher Normalform betrifft, so sehen wir, daß die letzt angegebene Konstruktion nicht nur allen gestellten Vorderungen genüge leistet sowie das in A vorhandene Skolemsche Präfix überhaupt nicht stört, sondern daß sie in gewissen Hinsichten diese Vorderungen sogar überschreitet. In Hinsicht z.B. der Anzahl der Funktionsvariablen, enthält der durch diese Konstruktion entstehende Zählausdruck B nur zwei zweistellige Funktionsvariablen (nämlich die ausgezeichneten R_1, R_2) und sonst lauter einstellige, die den Funktionsvariablen aus A genau entsprechen[43]). Nimmt man in obiger Konstruktion als A insbesondere einen Zählausdruck, der nur eine mehrstellige Funktionsvariable und keine einstelligen enthält (wo also $s=1$ und $t=0$ ist), so enthält der entsprechende Zählausdruck B außer R_1, R_2 nur noch eine einstellige Funktionsvariable. Berücksichtigt man dazu den Satz 26, so erhält man folgenden Satz, der sich übrigens auch sofort aus dem Satze 27 gemäß Satz 14 aus $\boldsymbol{P}_1$ ergibt:

Satz 29. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf β-Ausdrücke mit Skolemschen Präfix $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ beschränken, welche außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Es ist leicht einzusehen, daß die Funktionsvariablen R_1, R_2 im Zählausdruck (B_1) nur an Stellen positiven Vorzeichens stehen. Der Übergang vom Zählausdruck A zu dem Zählausdruck (B_1) läßt sich

[43]) Man beachte, daß die in Fußnote [41]) skizzierte, auf meinen Ergebnissen aus $\boldsymbol{P}_1$ beruhende Konstruktion, außer einstelligen Funktionsvariablen, welche sämtlichen Funktionsvariablen aus A entsprechen, noch eine zusätzliche einstellige Funktionsvariable erfordert.

nämlich auch als eine Einsetzung für jede Funktionsvariable F_i (wo $i=1,2,\ldots,s$) nach dem Ausdruck

$$(Ev_\varrho)_1^{n_i-1}[\sum_{j=1}^{n_i-1}(R_1(v_j, v_{j+1})\,\&\,R_2(v_j, x_j))\,\&\,f_i(v_1)]$$

an den Stellen von F_i in A mit positivem Vorzeichen und nach dem Ausdruck $(v_\varrho)_1^{n_i-1}[\sum_{j=1}^{n_i-1}(R_1(v_j, v_{j+1})\,\&\,R_2(v_j, x_j))\to f_i(v_1)]$ an den Stellen mit negativen Vorzeichens ausführen. Da die Funktionsvariablen R_1, R_2 in $(Ev_\varrho)_1^{n_i-1}[\sum_{j=1}^{n_i-1}(R_1(v_j, v_{j+1})\,\&\,R_2(v_j, x_j))\,\&\,f_i(v_1)]$ nur an positiven Stellen und in $(v_\varrho)_1^{n_i-1}[\sum_{j=1}^{n_i-1}(R_1(v_j, v_{j+1})\,\&\,R_2(v_j, x_j))\to f_i(v_1)]$ nur an negativen Stellen auftreten, so ist die Behauptung leicht zu ersehen. Da auch in (B_2) die Funktionsvariablen R_1, R_2 an positiven Stellen und in (B_3), umgekehrt, nur an negativen Stellen stehen, so läßt sich insbesondere Satz 29 in folgender etwas schärferen Form aussprechen:

Satz 30. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf β-Ausdrücke der Gestalt*

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\,\&$$
$$\&\,(z_1)(z_2)\ldots(z_m)\mathfrak{B}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

beschränken, welche außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthalten, wobei die R_1, R_2 in $\mathfrak{A}$ nur an Stellen positiven und in $\mathfrak{B}$ nur an Stellen negativen Vorzeichens vorausgesetzt werden können.

Läßt man das $=$-Zeichen zu, so kann der Ausdruck (B_3) durch den einfacheren Ausdruck

$$(x)(\overset{*}{x})(y)(z)[R_1(x,y)\,\&R_2(x,z)\,\&\,R_1(\overset{*}{x},y)\,\&\,R_2(\overset{*}{x},z)\to x=\overset{*}{x}]$$

ersetzt werden. Der Beweis der Gleichwertigkeit des Zählausdrucks A mit dem so modifizierten Zählausdruck B bleibt im Grunde derselbe; man braucht nur statt Satz 18 den Satz 21 heranzuziehen. Durch diese Konstruktion erhält man zwar statt Satz 29 nur den folgenden etwas schwächeren

Satz 29*. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf β-Ausdrücke mit Skolemschem Präfix $(x_1)(x_2)\dots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\dots(Ey_s)$ beschränken, welche außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch eine einstellige Funktionsvariable und das $=$-Zeichen enthalten;*

da aber die so modifizierte Konstruktion von der ursprünglichen einfacher ist und der Satz 29* — wie wir bald sehen — in gewissen Überlegungen dieselbe Dienste leistet, wie der schärfere Satz 29, so ist die modifizierte Konstruktion nicht ohne Bedeutung[44]).

Satz 31. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf β-Ausdrücke mit einem Gödelschen Präfix $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\dots(Ey_s)$ beschränken, welche außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch eine einstellige Funktionsvariable und das $=$-Zeichen enthalten.*

Beweis. Sei A ein beliebiger Zählausdruck. Wegen Satz 29* finden wir einen mit A gleichwertigen β-Ausdruck B in Skolemscher Normalform, der außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch eine einstellige Funktionsvariable und das $=$-Zeichen enthält. Zum Beweise des Satzes 31 genügt es nur noch zu zeigen, daß ein mit B gleichwertiger β-Ausdruck C konstruiert werden kann, der dieselben Funktionsvariablen enthält und ein Gödelsches Präfix besitzt[45]). Sei $(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_r;\, y_1,y_2,\dots,y_s)$ der β-Ausdruck B und f die in B auftretende einstellige Funktionsvariable. Wir bezeichnen mit C die Konjunktion der folgenden drei Formeln:

$$(C_1)\qquad (v_1)(Ev_\varrho)_2^r(Ew_\varrho)_2^r(Ey_\varrho)_1^s\Big[\sum_{i=1}^{r-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,w_{i+1}))\,\&\,\&\mathfrak{A}(v_r,w_2,w_3,\dots,w_r;\, y_1,y_2,\dots,y_s)\Big],$$

$$(C_2)\qquad (y)(z)(Ex)(R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)),$$

$$(C_3)\qquad (x)(y)(z)[(R_1(x,y)\,\&\,R_1(x,z)\to y=z)\,\&\,(R_2(x,y)\,\&\,R_2(x,z)\to y=z)].$$

[44]) Satz 29* steht also in ähnlicher Beziehung zu Satz 29, wie Satz 27* zu Satz 27.

[45]) Den Beweis des Satzes 31 könnten wir in genau derselben Weise wie den Beweis des Satzes 25 aus $\boldsymbol{P}_1$ führen. Wir geben hier aber einen anderen Beweis, welcher einerseits von jenem ein wenig kürzer ist und anderseits der Übertragung in den beweistheoretischen Kalkül besser geeignet ist. Dieser Beweis läßt sich nämlich auf rein formale Übergänge von Formeln zu Formeln nach den Regeln des Prädikatenkalküls zurückführen, während jener Beweis mehr inhaltliche Schlußprinzipien, wie z.B. Herausgreifen von Elementen aus einem inhaltlich gedeuteten Individuenbereich erfordert.

Der Zählausdruck C enthält dann, ähnlich wie B, nur die Funktionsvariablen R_1, R_2, f und das $=$-Zeichen[46]). Wir zeigen jetzt, daß C ein mit B gleichwertiger β-Ausdruck ist. Ist der Zählausdruck B überhaupt erfüllbar, so hat er als β-Ausdruck auch eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa R_1', R_2', f' über $\mathfrak{J}'$. Dieses Erfüllungssystem bildet dann auch eine ausgezeichnete Erfüllung von C. Laut Voraussetzung ist $(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\dots,x_r;\, y_1,y_2,\dots,y_s)$ in $\mathfrak{J}'$ richtig. Dieses und Satz 13 aus $\boldsymbol{P}_1$ (erste Äquivalenz) ergeben leicht

$$(v_1)(Ev_\varrho)_2^r(Ew_\varrho)_2^r(Ey_\varrho)_1^s\Big[\sum_{i=1}^{r-1}(R_1'(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2'(v_i,w_{i+1}))\,\&\,\&\mathfrak{A}'(v_r,w_2,w_3,\dots,w_r;\, y_1,y_2,\dots,y_s)\Big].$$

Da die Funktion $R_1'(x,y)\,\&\,R_2'(x,z)$ eine eineindeutige Abbildung der Elemente x aus $\mathfrak{J}'$ auf die Paare $[y,z]$ von solchen bewirkt, so gilt einerseits $(y)(z)(Ex)(R_1'(x,y)\,\&\,R_2'(x,z))$ und anderseits wegen Satz 3 auch[47])

$$(x)(y)(z)[(R_1'(x,y)\,\&\,R_1'(x,z)\to y=z)\,\&\,(R_2'(x,y)\,\&\,R_2'(x,z)\to y=z)],$$

womit R_1', R_2', f' als eine ausgezeichnete Erfüllung von C in $\mathfrak{J}'$ nachgewiesen ist. Erfüllen, umgekehrt, die Funktionen R_1'', R_2'', f'' den Zählausdruck C in $\mathfrak{J}''$, so erfüllen sie auch den Zählausdruck B. Aus der Voraussetzung und Satz 24 (indem man dort $n=r$ setzt, für F die Funktion $(Ey_\varrho)_1^s\,\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\dots,x_r;\, y_1,y_2,\dots,y_s)$ nimmt und die Variablen entsprechend umbenennt) ergibt sich nämlich leicht $(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\dots,x_r;\, y_1,y_2,\dots,y_s)$. C ist also ein mit B gleichwertiger β-Ausdruck. Da sich C offenbar auf die Gödelsche Normalform bringen läßt, so ist Satz 31 bewiesen.

Entfernt man das $=$-Zeichen aus C nach Kalmár-Gödelschem Verfahren[48]) und führt statt dessen die Funktionsvariable R_3 ein, so erhält man einen mit C, also auch mit A, gleichwertigen Zähl-

[46]) Man beachte, daß der herangezogene Satz 29* hier dieselben Dienste leistet, wie der schärfere Satz 29, weil — unabhängig davon, ob B das $=$-Zeichen enthält oder nicht — der Zählausdruck C muß das $=$-Zeichen enthalten, da es jedenfalls in (C_3) vorkommt.

[47]) Die erst in Satz 3 der vorliegenden Arbeit bewiesene Tatsache wurde bereits (ohne exakten Beweis) an einer analogen Stelle in Satz 25 aus $\boldsymbol{P}_1$ benutzt.

[48]) Vgl. L. Kalmár, *Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie*, Acta Scient. Math. Szeged. **4** (1929), S. 248-252; vgl. auch K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatsh. f. Math. und Phys. **37** (1930), S. 349-360, insb. S. 356-357.

ausdruck D, welcher nur die Funktionsvariablen R_1, R_2, R_3, f enthält und sich auf die pränexe Normalform mit Gödelschem Präfix bringen läßt. Ist D überhaupt erfüllbar, so ist es auch C und dann hat C als β-Ausdruck auch eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa R_1', R_2', f' über $\mathfrak{I}'$. Werden $R_1', R_2', =, f'$ als R_1, R_2, R_3, f genommen, so erfüllen sie D in $\mathfrak{I}'$ und bilden dessen ausgezeichnete Erfüllung. Wegen der Definition des Begriffs *δ-Ausdruck* erhalten wir also folgenden

Satz 32. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf δ-Ausdrücke in Gödelscher Normalform beschränken, welche außer den ausgezeichneten zweistelligen Funktionsvariablen R_1, R_2, R_3 nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Die Behauptungen der Sätze 31 und 32 können übrigens noch in dem Sinne verschärft werden, daß man die entsprechenden Zählausdrücke, statt in allgemeiner Gödelschen Normalform, nur in der spezielleren Form

$$(x_1)(Ex_\varrho)_2^n \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, (x)(y)(Ez)(R_1(z,x) \,\&\, R_2(z,y)) \,\&$$
$$\& \,(x_1)(x_2)(x_3)\mathfrak{B}(x_1, x_2, x_3)$$

voraussetzt[49]). C ist nämlich offensichtlich dieser Form und da — wie leicht einzusehen — eine Anwendung des Kalmár-Gödelschen Verfahrens auf binäre Zählausdrücke dieser Form stets zu Zählausdrücken derselben Form führt, so hat auch D diese Form.

Satz 32 verschärft den Satz 25 aus $\boldsymbol{P}_1$ hauptsächlich in Hinsicht der Anzahl einstelliger Funktionsvariablen, welche um zwei vermindert wird. In einem Zusatz zu jener Arbeit habe ich ohne Beweis die Behauptung ausgesprochen, daß in allen Sätzen von 22 bis 39 aus $\boldsymbol{P}_1$, in welchen die Anzahl der einstelligen Funktionsvariablen überhaupt bestimmt ist, diese Anzahl um zwei vermindert werden könne. Da jene Sätze sich auf Satz 22 stützen und einstellige Funktionsvariablen in jenen Sätzen einfach aus Satz 22 stammen, so genügt es zum Beweis der Behauptung nur zu zeigen, daß die Anzahl der einstelligen Funktionsvariablen in Satz 22 aus $\boldsymbol{P}_1$ um zwei vermindert werden kann. Eine derartige Verschärfung des Satzes 22 aus $\boldsymbol{P}_1$ ist aber in Satz 27 der vorliegenden Arbeit enthalten, womit die Behauptung wirklich bewiesen ist.

---

[49]) Diese Form ist schärfer als die in der Arbeit von Th. Skolem, *Ein Satz über Zählausdrücke*, Acta Scient. Math. Szeged **7** (1935), S. 193-199, erreichte Form.

Insbesondere läßt demnach der Satz 38 aus $\boldsymbol{P}_1$ folgende Verschärfung zu:

Satz 33. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf β-Ausdrücke beschränken, die ein Präfix der Form*

$$(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$$

(also mit nur zwei Allzeichen) besitzen und außer den ausgezeichneten zweistelligen Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch eine einstellige Funktionsvariable und das $=$-Zeichen enthalten.

Zur Verminderung der Anzahl einstelliger Funktionsvariablen um zwei sei noch Folgendes bemerkt. Eine der einstelligen Funktionsvariablen wurde durch Heranziehung der „zusammengeflickten“ Einsetzung an Stelle der „gewöhnlichen“ Einsetzung erspart. Die andere einstellige Funktionsvariable wurde dadurch erspart, daß wir in vorliegender Arbeit, statt eines in $\boldsymbol{P}_1$ benutzten Satzes von Herbrand, den Satz 26 herangezogen haben. Satz 26 ist aber von dem Herbrandschen Satz (der aussagt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf Zählausdrücke mit einer einzigen dreistelligen Funktionsvariablen beschränken darf) teilweise schärfer, teilweise schwächer. Schwächer ist der Satz 26 in Hinsicht der Stellenzahl der Funktionsvariablen, schärfer dagegen in Hinsicht der Präfixform, da man sich in Satz 26 auf Zählausdrücke in Skolemscher Normalform beschränken darf. Nun hat sich aber eben herausgestellt, daß die Stellenzahl der Funktionsvariable in den entsprechenden Überlegungen aus $\boldsymbol{P}_1$ ohne Bedeutung ist, da ja die dort benutzte Tatsache, daß sich jede logische Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)$ in einem unendlichen Individuenbereich in der Form

$$(Ev_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\, f(v_1)\Big] \quad \text{bzw.} \quad (v_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow f(v_1)\Big]$$

darstellen läßt, richtig bleibt, unabhängig davon ob $n=3$ oder $n>3$ ist. Dagegen hat sich der Umstand, daß man sich in Satz 26 auf Zählausdrücke in Skolemscher Normalform beschränken darf, als bedeutungsvoll erwiesen, da er eine einstellige Funktionsvariable zu ersparen erlaubt.

Übrigens werden wir sofort in Satz 34 eine gleichzeitige Verschärfung des Satzes 26 und des Herbrandschen Satzes kennen lernen.

Satz 34. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke mit Präfix der Form* $(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ *(d. h. Skolemscher Normalform mit nur vier Allzeichen) beschränken, die eine einzige, und zwar eine dreistellige Funktionsvariable enthalten.*

Beweis. Wegen des Satzes 32 genügt es offenbar zu zeigen, daß zu jedem δ-Ausdruck A in Gödelscher Normalform, welcher außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2, R_3 nur noch eine einzige, einstellige Funktionsvariable enthält, ein gleichwertiger Zählausdruck B in Skolemscher Normalform mit nur vier Allzeichen angegeben werden kann, der nur eine einzige, dreistellige Funktionsvariable enthält.

Sei $(x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ der δ-Ausdruck A und $f(x)$ die in A vorkommende einstellige Funktionsvariable. Sei y eine von $x_1,x_2,\ldots,x_q$ verschiedene gebundene Individuenvariable und Ψ eine dreistellige Funktionsvariable. Ferner bezeichne $\mathfrak{B}(x_1,x_2,\ldots,x_q;y)$ den aus $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ durch Ersetzung von $R_1(x_i,x_k)$ durch $\Psi(x_i,x_k,y)$, von $R_2(x_i,x_k)$ durch $\Psi(x_i,y,x_k)$, von $R_3(x_i,x_k)$ durch $\Psi(y,x_i,x_k)$ und von $f(x_i)$ durch $\Psi(y,y,x_i)$ (für $i,k=1,2,\ldots,q$) entstehenden Ausdruck. Sei B die Konjunktion der folgenden zwei Ausdrücke:

$$(B_1)\qquad (y)(x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q\Big[\sum_{i=1}^{3}\Psi(y,x_i,x_i)\rightarrow\Big(\sum_{i=4}^{q}\Psi(y,x_i,x_i)\,\&\,\mathfrak{B}(x_1,x_2,\ldots,x_q;y)\Big)\Big],$$

$$(B_2)\qquad (Eu)(Ez)\Psi(u,z,z).$$

Demnach enthält B nur eine einzige, dreistellige Funktionsvariable Ψ, läßt sich offenbar auf die Skolemsche Normalform mit nur vier Allzeichen bringen und ist mit A in bezug auf die Erfüllbarkeit gleichwertig. Die letzte Behauptung beweist man folgendermaßen:

Ist der Zählausdruck A überhaupt erfüllbar, so hat er als δ-Ausdruck sogar eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa R_1', R_2', R_3', f' über $\mathfrak{J}'$. Es gilt dann jedenfalls

$$(22)\qquad (x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\ldots,x_q)$$

und wegen der Definition 3, S. 289, auch

$$(23)\qquad R_3'(x,y)\equiv(x=y)$$

in $\mathfrak{J}'$. Wird mit a ein beliebiger von allen Elementen aus $\mathfrak{J}'$ verschiedener Gegenstand bezeichnet, so gibt es zunächst eine in dem aus $\mathfrak{J}'$ durch Hinzufügung des Elementes a entstehenden Individuenbereich $\mathfrak{J}'+\{a\}$ definierte logische Funktion $\Psi'(x,y,z)$, die folgenden Bedingungen genügt:

[1] Das Prädikat $\Psi'(a,x,x)$ charakterisiert den Individuenbereich $\mathfrak{J}'$, d.h. daß $\Psi'(a,x,x)$ dann und nur dann wahr ist, falls x zu $\mathfrak{J}'$ gehört;

[2] Die zweistellige Funktion $\Psi'(x,y,a)$ ist in $\mathfrak{J}'$ mit der Funktion $R_1'(x,y)$ identisch;

[3] Die zweistellige Funktion $\Psi'(x,a,y)$ ist in $\mathfrak{J}'$ mit der Funktion $R_2'(x,y)$ identisch;

[4] Die zweistellige Funktion $\Psi'(a,x,y)$ ist in $\mathfrak{J}'$ mit der Funktion $R_3'(x,y)$ identisch;

[5] Die einstellige Funktion $\Psi'(a,a,x)$ ist in $\mathfrak{J}'$ mit der Funktion $f'(x)$ identisch;

[6] $\Psi'(y,x,x)$ ist falsch, falls y von a verschieden ist.

Dies zeigt man in exakter Weise auf Grund des (schon beim Satz 26 benutzten) Hilfssatzes 1, wie folgt. Definieren wir in $\mathfrak{J}'+\{a\}$ die logischen Funktionen $H_i(x_1,x_2,x_3)$, $G_i(x_1,x_2,x_3)$ für $i=1,2,\ldots,6$ durch die Festsetzungen (in welchen dabei $f'(x)$ und die $R_i'(x,y)$ für $x=a$ oder $y=a$ beliebig zu verstehen sind):

$$\begin{aligned}
&H_1(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_1=a\,\&\,x_2=x_3), && G_1(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_3\neq a),\\
&H_2(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_1\neq a\,\&\,x_2\neq a\,\&\,x_3=a), && G_2(x_1,x_2,x_3)\equiv R_1'(x_1,x_2),\\
&H_3(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_1\neq a\,\&\,x_2=a\,\&\,x_3\neq a), && G_3(x_1,x_2,x_3)\equiv R_2'(x_1,x_3),\\
&H_4(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_1=a\,\&\,x_2\neq a\,\&\,x_3\neq a), && G_4(x_1,x_2,x_3)\equiv R_3'(x_2,x_3),\\
&H_5(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_1=a\,\&\,x_2=a\,\&\,x_3\neq a), && G_5(x_1,x_2,x_3)\equiv f'(x_3),\\
&H_6(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_1\neq a\,\&\,x_2=x_3), && G_6(x_1,x_2,x_3)\equiv(a\neq a),
\end{aligned}$$

so verlangt die Bedingung $[j]$ $(j=1,2,\ldots,6)$, daß

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_j(x_1,x_2,x_3)\rightarrow(\Psi'(x_1,x_2,x_3)\sim G_j(x_1,x_2,x_3))]$$

in $\mathfrak{J}'+\{a\}$ richtig sei. Die Bedingungen [1]-[6] verlangen also insgesamt, daß die Bedingungen

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_i(x_1,x_2,x_3)\rightarrow(\Psi'(x_1,x_2,x_3)\sim G_i(x_1,x_2,x_3))]$$

für $i=1,2,\ldots,6$ durch eine Funktion $\Psi'(x_1,x_2,x_3)$ in $\mathfrak{J}'+\{a\}$ erfüllt seien, und dazu ist wegen des Hilfssatzes 1 das Bestehen von Beziehungen

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_i(x_1,x_2,x_3)\,\&\,H_k(x_1,x_2,x_3)\rightarrow(G_i(x_1,x_2,x_3)\sim G_k(x_1,x_2,x_3))]$$

für $i,k=1,2,\ldots,6$ und $i<k$ in $\mathfrak{J}'+\{a\}$ zugleich notwendig und hinreichend. Diese Beziehungen bestehen aber tatsächlich:

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_2(x_1,x_2,x_3)\to(G_1(x_1,x_2,x_3)\sim G_2(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_2(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_1(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_1=a$, während aus $H_2(x_1,x_2,x_3)$, umgekehrt, $x_1\neq a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_3(x_1,x_2,x_3)\to(G_1(x_1,x_2,x_3)\sim G_3(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_3(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_1(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_1=a$, während aus $H_3(x_1,x_2,x_3)$ $x_1\neq a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_4(x_1,x_2,x_3)\to(G_1(x_1,x_2,x_3)\sim G_4(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da falls $H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_4(x_1,x_2,x_3)$ richtig ist, so muß $x_3\neq a$ und $x_2=x_3$ sein, woraus einerseits sich $G_1(x_1,x_2,x_3)$ und anderseits, unter Berücksichtigung von (23), $G_4(x_1,x_2,x_3)$ als richtig ergibt; aus $G_1(x_1,x_2,x_3)$ und $G_4(x_1,x_2,x_3)$ folgt aber $(G_1(x_1,x_2,x_3)\sim G_4(x_1,x_2,x_3))$;

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_5(x_1,x_2,x_3)\to(G_1(x_1,x_2,x_3)\sim G_5(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_5(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_1(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_2=x_3$, während aus $H_5(x_1,x_2,x_3)$ $x_2\neq x_3$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)\to(G_1(x_1,x_2,x_3)\sim G_6(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_1(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_1(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_1=a$, während aus $H_6(x_1,x_2,x_3)$ $x_1\neq a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_2(x_1,x_2,x_3)\&H_3(x_1,x_2,x_3)\to(G_2(x_1,x_2,x_3)\sim G_3(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_2(x_1,x_2,x_3)\&H_3(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_2(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_2\neq a$, während aus $H_3(x_1,x_2,x_3)$ $x_2=a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_2(x_1,x_2,x_3)\&H_4(x_1,x_2,x_3)\to(G_2(x_1,x_2,x_3)\sim G_4(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_2(x_1,x_2,x_3)\&H_4(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_2(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_1\neq a$, während aus $H_4(x_1,x_2,x_3)$ $x_1=a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_2(x_1,x_2,x_3)\&H_5(x_1,x_2,x_3)\to(G_2(x_1,x_2,x_3)\sim G_5(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_2(x_1,x_2,x_3)\&H_5(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_2(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_1\neq a$, während aus $H_5(x_1,x_2,x_3)$ $x_1=a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_2(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)\to(G_2(x_1,x_2,x_3)\sim G_6(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_2(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_2(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_2\neq x_3$, während aus $H_6(x_1,x_2,x_3)$ $x_2=x_3$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_3(x_1,x_2,x_3)\&H_4(x_1,x_2,x_3)\to(G_3(x_1,x_2,x_3)\sim G_4(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_3(x_1,x_2,x_3)\&H_4(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_3(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_1\neq a$, während aus $H_4(x_1,x_2,x_3)$ $x_1=a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_3(x_1,x_2,x_3)\&H_5(x_1,x_2,x_3)\to(G_3(x_1,x_2,x_3)\sim G_5(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_3(x_1,x_2,x_3)\&H_5(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_3(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_1\neq a$, während aus $H_5(x_1,x_2,x_3)$ $x_1=a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_3(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)\to(G_3(x_1,x_2,x_3)\sim G_6(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_3(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_3(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_2\neq x_3$, während aus $H_6(x_1,x_2,x_3)$ $x_2=x_3$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_4(x_1,x_2,x_3)\&H_5(x_1,x_2,x_3)\to(G_4(x_1,x_2,x_3)\sim G_5(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_4(x_1,x_2,x_3)\&H_5(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_4(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_2\neq a$, während aus $H_5(x_1,x_2,x_3)$ $x_2=a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_4(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)\to(G_4(x_1,x_2,x_3)\sim G_6(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_4(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_4(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_1=a$, während aus $H_6(x_1,x_2,x_3)$ $x_1\neq a$ folgt);

$$(x_1)(x_2)(x_3)[H_5(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)\to(G_5(x_1,x_2,x_3)\sim G_6(x_1,x_2,x_3))]$$

besteht, da das Vorderglied $H_5(x_1,x_2,x_3)\&H_6(x_1,x_2,x_3)$ falsch ist (aus $H_5(x_1,x_2,x_3)$ folgt nämlich $x_1=a$, während aus $H_6(x_1,x_2,x_3)$ $x_1\neq a$ folgt);

Ist nun $\Psi'(x,y,z)$ irgend eine Funktion, die den Bedingungen [1]-[6] genügt, so zeigen wir, daß sie den Zählausdruck B in $\mathfrak{J}'+\{a\}$ erfüllt.

Aus (22) und der Bedingung [1] folgt nämlich zunächst

$$(x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q[\sum_{i=1}^{3}\Psi'(a,x_i,x_i)\to(\sum_{i=4}^{q}\Psi'(a,x_i,x_i)\&\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\ldots,x_q))],$$

wobei die Quantoren jetzt über $\mathfrak{J}'+\{a\}$ zu erstrecken sind. Daraus folgt aber, wegen der Entstehungsweise des Ausdrucks $\mathfrak{B}(x_1,x_2,\ldots,x_q;y)$ und wegen der Bedingungen [2]-[5]

$$(x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q[\sum_{i=1}^{3}\Psi'(a,x_i,x_i)\to(\sum_{i=4}^{q}\Psi'(a,x_i,x_i)\&\mathfrak{B}'(x_1,x_2,\ldots,x_q;\,a))],$$

woraus sogar die Richtigkeit von

(24) $(y)(x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q[\sum_{i=1}^{3}\Psi'(y,x_i,x_i)\to(\sum_{i=4}^{q}\Psi'(y,x_i,x_i)\,\&\,\mathfrak{B}'(x_1,x_2,\dots,x_q;y))]$

folgt, da falls y mit a nicht übereinstimmt, das Vorderglied $\sum_{i=1}^{3}\Psi'(y,x_i,x_i)$ wegen [6] falsch wird und somit die ganze Implikation der Formel (24) richtig bleibt. Da $\mathfrak{J}'$ nicht leer ist, so folgt aus [1] sofort $(Ez)\Psi'(a,z,z)$, und daraus $(Eu)(Ez)\Psi'(u,z,z)$. Dieses und (24) beweisen aber, daß die Funktion $\Psi'(x,y,z)$ den Zählausdruck B in $\mathfrak{J}'+\{a\}$ erfüllt.

Sei umgekehrt $\Psi''(x,y,z)$ eine Funktion, die den Zählausdruck B in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllt. Es bestehen also in $\mathfrak{J}''$ die zwei Formeln:

(25) $(y)(x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q[\sum_{i=1}^{3}\Psi''(y,x_i,x_i)\to(\sum_{i=4}^{q}\Psi''(y,x_i,x_i)\,\&\,\mathfrak{B}''(x_1,x_2,\dots,x_q;y))]$,

(26) $$(Eu)(Ez)\Psi''(u,z,z).$$

Wegen (26) gibt es in $\mathfrak{J}''$ zwei Elemente b,c, so daß

(27) $$\Psi''(b,c,c)$$

richtig ist. Aus (25) ergibt sich sofort

$$(x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q[\sum_{i=1}^{3}\Psi''(b,x_i,x_i)\to(\sum_{i=4}^{q}\Psi''(b,x_i,x_i)\,\&\,\mathfrak{B}''(x_1,x_2,\dots,x_q;b))],$$

woraus die Richtigkeit von

(28) $$(x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q\mathfrak{B}''(x_1,x_2,\dots,x_q;b)$$

folgt, wobei sich aber jetzt die Quantoren auf den Teilbereich $\mathfrak{J}$ derjenigen Elemente x aus $\mathfrak{J}''$ beziehen, für welche $\Psi''(b,x,x)$ gilt (dabei ist $\mathfrak{J}$ nicht leer, da wegen (27) das Element c sicher zu $\mathfrak{J}$ gehört). Definiert man nun die Funktionen $R_1''(x,y)$, $R_2''(x,y)$, $R_3''(x,y)$, $f''(x)$ in $\mathfrak{J}$ durch die Festsetzungen:

$$R_1''(x,y)\equiv\Psi''(x,y,b),\qquad R_2''(x,y)\equiv\Psi''(x,b,y),$$
$$R_3''(x,y)\equiv\Psi''(b,x,y),\qquad f''(x)\equiv\Psi''(b,b,x),$$

so erfüllen die so definierten Funktionen den Zählausdruck A, da aus (28) und der Entstehungsweise von $\mathfrak{B}(x_1,x_2,\dots,x_q;y)$ aus $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_q)$ sofort die Richtigkeit von

$$(x_\varrho)_1^3(Ex_\varrho)_4^q\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\dots,x_q)$$

in $\mathfrak{J}$ folgt. Die Zählausdrücke A und B sind also gleichwertig, womi Satz 34 bewiesen ist.

Satz 35. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf $\varkappa$-Ausdrücke der Form*

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\,\&\,(x_1)(x_2)\dots(x_n)\,\mathfrak{U}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

beschränken, welche außer der ausgezeichneten Funktionsvariablen Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthalten, wobei außerdem im quantorenfreien Ausdruck $\mathfrak{U}$ die ausgezeichnete Funktionsvariable Φ nur an Stellen negativen Vorzeichens vorausgesetzt werden kann.

Beweis. Zwei Methoden werden kombiniert angewendet: die Methode der „zusammengeflickten" Einsetzung und eine in gewissen Punkten zu der Ackermannschen ähnliche Methode[50].

Wegen Satz 26 genügt es[51] zum Beweis des Satzes 35 zu zeigen, daß zu jedem Zählausdruck A in Skolemscher Normalform mit einer einzigen Funktionsvariablen ein gleichwertiger $\varkappa$-Ausdruck B der Form

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\,\&\,(x_1)(x_2)\dots(x_n)\,\mathfrak{U}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

angegeben werden kann, der außer Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthält, wobei außerdem Φ in $\mathfrak{U}$ nur an Stellen negativen Vorzeichens vorkommt.

Sei $(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_r,y_1,y_2,\dots,y_s)$ der Zählausdruck A und $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ die einzige in A vorkommende Funktionsvariable. Ist $\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})$ die disjunktive Normalform[52] von $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})$, so gilt die Formel

(29) $$(x_\varrho)_1^{r+s}[\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})\sim\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})]$$

allgemein. Jedes Glied der Elementarkonjunktionen $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})$, wo $k=1,2,\dots,m$, ist entweder von der Form $F(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\dots,x_{\alpha_n})$ oder von der Form $\overline{F}(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\dots,x_{\alpha_n})$. Wir ersetzen in $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})$ jedes Glied der Form $F(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\dots,x_{\alpha_n})$ durch den Ausdruck

$$(\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_{\alpha_i})\,\&\,\Phi(\overset{k}{v}_{n-1},x_{\alpha_n},x_{\alpha_{n-1}})\to f(\overset{k}{v}_1)]$$

und jedes der Form $\overline{F}(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\dots,x_{\alpha_n})$ durch den Ausdruck

---

[50] Vgl. die auf Seite 259 zitierte Arbeit.

[51] Man könnte, statt vom Satz 26, vom schärferen Satz 34 ausgehen; es genügt aber der Satz 26.

[52] Die $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})$ sollen (für $k=1,2,\dots,m$) Elementarkonjunktionen sein und das Π-Zeichen soll die Disjunktion andeuten.

$$(\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_{\alpha_i})\,\&\,\Phi(\overset{k}{v}_{n-1},x_{\alpha_n},x_{\alpha_{n-1}})\to\bar{f}(\overset{k}{v}_1)],$$

wobei Φ die ausgezeichnete dreistellige und f irgend eine einstellige Funktionsvariable ist. Den auf diese Weise aus $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})$ entstehenden Ausdruck bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s};\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})$ denjenigen Ausdruck, welcher aus $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})$ entsteht, indem jedes Konjunktionsglied der Form $F(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_n})$ durch

$$[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_{\alpha_i})\,\&\,\Phi(\overset{k}{v}_{n-1},x_{\alpha_n},x_{\alpha_{n-1}})\to f(\overset{k}{v}_1)]$$

und jedes Konjunktionsglied der Form $\bar{F}(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_n})$ durch

$$[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_{\alpha_i})\,\&\,\Phi(\overset{k}{v}_{n-1},x_{\alpha_n},x_{\alpha_{n-1}})\to\bar{f}(\overset{k}{v}_1)]$$

ersetzt wird. Man sieht leicht ein, indem man die allgemeingültige Äquivalenz $[(v)F(v)\,\&\,(v)G(v)]\sim(v)[F(v)\,\&\,G(v)]$ berücksichtigt, daß die Formeln

$$(x_\varrho)_1^{r+s}[\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})\sim(\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s};\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})]$$

für $k=1,2,\ldots,m$ allgemeingültig sind und daß es daher auch die Formel

$$\begin{aligned}(30)\qquad &(x_\varrho)_1^{r+s}[(\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s}))\sim\\ &\sim(\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(\overset{m}{v}_\varrho)_1^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s};\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})]\end{aligned}$$

ist. Bezeichnen wir nun mit B die Konjunktion der folgenden drei Ausdrücke:

$$(B_1)\qquad (y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z),$$

$$\begin{aligned}(B_2)\qquad &(v_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_\varrho)_1^{n-1}(x_\varrho)_1^{n}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(v_{n-1},x_n,x_{n-1})\,\&\\ &\&\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi(\overset{*}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\,\&\,f(v_1)\to f(\overset{*}{v}_1)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B_3)\qquad &(\overset{0}{w}_1)(x_\varrho)_2^{r}(\overset{1}{w}_\varrho)_1^{r}(\overset{2}{w}_\varrho)_1^{r}\ldots(\overset{s}{w}_\varrho)_1^{r}(\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\ldots(\overset{m}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=0}^{s-1}\Phi(\overset{i+1}{w}_1,\overset{i}{w}_1,\overset{0}{w}_1)\,\&\\ &\&\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r-1}\Phi(\overset{i}{w}_{j+1},\overset{i}{w}_j,x_{j+1})\to\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}_k(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w}_r,\overset{2}{w}_r,\ldots,\overset{s}{w}_r;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})],\end{aligned}$$

so läßt sich der Zählausdruck B offenbar in die verlangte Form

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\,\&\,(x_1)(x_2)\ldots(x_n)\,\mathfrak{U}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

bringen und enthält außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable f, wobei Φ in dem mit $\mathfrak{U}$ bezeichneten Ausdruck (d. h. in (B_2) und (B_3)) nur an Stellen negativen Vorzeichens vorkommt. Um die letzte Tatsache einzusehen, genügt es zu zeigen, daß die Funktionsvariable Φ im Ausdruck

$$\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}_k(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w}_r,\overset{2}{w}_r,\ldots,\overset{s}{w}_r;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})$$

nur an Stellen negativen Vorzeichens vorkommt, da ja man unmittelbar sieht, daß Φ in (B_2) und wegen des Vordergliedes in (B_3) nur an Stellen negativen Vorzeichens auftritt. Der Übergang von $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})$ zu $\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s};v_1,v_2,\ldots,v_{n-1})$ für $k=1,2,\ldots,m$ läßt sich auch als eine Einsetzung für die Funktionsvariable $F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)$ nach dem Ausdruck $(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\to f(v_1)]$ an Stellen, wo F positives, und nach dem Ausdruck

$$(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,f(v_1)]$$

an Stellen, wo F negative Vorzeichen hat, charakterisieren. Da aber eben in $(v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\to f(v_1)]$ die Funktionsvariable Φ nur an Stellen negativen und in $(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\,\&\,f(v_1)]$ nur an Stellen positiven Vorzeichens vorkommt, so ergibt sich sofort, daß die Funktionsvariable Φ in $\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s};v_1,v_2,\ldots,v_{n-1})$ für $k=1,2,\ldots,m$, und daher auch in $\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s};v_1,v_2,\ldots,v_{n-1})$ nur an Stellen negativen Vorzeichens vorkommt. Da die Ersetzung der Individuenvariablen durch andere offenbar die Vorzeichenverteilung der Funktionsvariablen nicht ändert, so kommt die Funktionsvariable Φ auch in $\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}_k(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w}_r,\overset{2}{w}_r,\ldots,\overset{s}{w}_r;\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})$ nur an Stellen negativen Vorzeichens vor.

Es bleibt also zu zeigen, daß B ein mit dem Zählausdruck A gleichwertiger $\varkappa$-Ausdruck ist.

Ist A erfüllbar, so gibt es einen Individuenbereich $\mathfrak{J}$, eine logische Funktion $F^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und s mathematische Funktionen [53])

---

[53]) d. h. Funktionen deren Argumente und Werte zu $\mathfrak{J}$ angehören.

$\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_r), \varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_r), \ldots, \varphi_s(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ über $\mathfrak{J}$ derart, daß

(31) $(x_\varrho)_1^r\mathfrak{A}^*(x_1,x_2,\ldots,x_r,\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_r),\varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_r),\ldots,\varphi_s(x_1,x_2,\ldots,x_r))$

in $\mathfrak{J}$ besteht. Sei $\psi(x,y)$ irgend eine im Bereich $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen definierte Funktion mit den Eigenschaften a), b) der Definition 4, S. 290. Wir definieren für $i=1,2,3,\ldots$ eine $(i+1)$-stellige Funktion $\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_i,x_{i+1})$ in $\mathfrak{Z}$ rekursiv durch die Festsetzungen:

(32) $$\psi_1(x_1,x_2)=\psi(x_1,x_2),$$

(33) $$\psi_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{i+1},x_{i+2})=\psi(\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_i,x_{i+1}),x_{i+2}).$$

Ferner bezeichnen wir mit $\overset{i}{\psi}(x)$ die einstellige Funktion, welche aus $\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_i,x_{i+1})$ entsteht, indem man alle Argumente gleich x setzt. Aus (32) und (33) ergeben sich sofort die Gleichungen:

(34) $$\overset{1}{\psi}(x)=\psi(x,x),$$

(35) $$\overset{i+1}{\psi}(x)=\psi(\overset{i}{\psi}(x),x),$$

durch welche die Funktionen $\overset{i}{\psi}(x)$ auch direkt definiert werden können. Wir definieren schließlich s r-stellige Funktionen $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_s$ in $\mathfrak{Z}$ durch die Festsetzungen

(36) $$\pi_i(x_1,x_2,\ldots,x_r)=\psi_{r-1}(\overset{i}{\psi}(x_1),x_2,\ldots,x_r)$$

für $i=1,2,\ldots,s$ und wollen in erster Linie zeigen, daß sich in $\mathfrak{Z}$ eine logische Funktion $F'(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ derart definieren läßt, daß

(37) $(x_\varrho)_1^r\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\ldots,x_r,\pi_1(x_1,x_2,\ldots,x_r),\pi_2(x_1,x_2,\ldots,x_r),\ldots,\pi_s(x_1,x_2,\ldots,x_r))$

eine wahre Aussage in $\mathfrak{Z}$ darstellt. Dazu benötigen wir folgende Eigenschaften c)-j) der Funktionen ψ_i, $\overset{i}{\psi}$ und π_i, die wir zunächst beweisen wollen:

c) *Für jedes i ist die Funktion $\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_i,x_{i+1})$ von ihren Argumenten größer, d.h. es gilt stets $\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_i,x_{i+1})>x_1,x_2,\ldots,x_i,x_{i+1}$.*

Für $i=1$ gilt nämlich c) wegen der Eigenschaft a) aus Definition 4 und (32). Angenommen, c) sei für i richtig, wir zeigen dasselbe für $i+1$. Wegen (33) und der Eigenschaft a) gilt:

(38) $$\psi_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{i+2})>\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_{i+1}),$$

(39) $$\psi_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{i+2})>x_{i+2}.$$

Wegen der Induktionsannahme ist $\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_{i+1})>x_1,x_2,\ldots,x_{i+1}$, was mit (38) zusammen

(40) $$\psi_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{i+2})>x_1,x_2,\ldots,x_{i+1}$$

ergibt. Aus (40) und (39) folgt

$$\psi_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{i+2})>x_1,x_2,\ldots,x_{i+1},x_{i+2},$$

womit c) durch Induktion bewiesen ist.

d) *Die Gleichung $\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_{i+1})=\psi_i(y_1,y_2,\ldots,y_{i+1})$ kann nur dann bestehen, wenn die Reihe $x_1,x_2,\ldots,x_{i+1}$ mit der Reihe $y_1,y_2,\ldots,y_{i+1}$ übereinstimmt.*

Für $i=1$ gilt nämlich d) wegen (32) und der Eigenschaft b) aus Definition 4. Angenommen, d) sei für i richtig, wir zeigen dasselbe für $i+1$. Aus

$$\psi_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{i+2})=\psi_{i+1}(y_1,y_2,\ldots,y_{i+2})$$

folgt wegen (33)

$$\psi(\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_{i+1}),x_{i+2})=\psi(\psi_i(y_1,y_2,\ldots,y_{i+1}),y_{i+1})$$

und daraus, wegen der Eigenschaft b):

(41) $$\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_{i+1})=\psi_i(y_1,y_2,\ldots,y_{i+2}),$$

(42) $$x_{i+2}=y_{i+2}.$$

Wegen der Induktionsannahme folgt aus (41), daß die Reihe $x_1,x_2,\ldots,x_{i+1}$ mit der Reihe $y_1,y_2,\ldots,y_{i+1}$ übereinstimmt, was mit (42) zusammen zeigt, daß auch die Reihe $x_1,x_2,\ldots,x_{i+1},x_{i+2}$ mit der Reihe $y_1,y_2,\ldots,y_{i+1},y_{i+2}$ übereinstimmen muß, womit d) durch Induktion bewiesen ist.

e) *Für jedes i ist $\overset{i}{\psi}(x)>x$.*

Für $i=1$ gilt nämlich e) wegen (34) und der Eigenschaft a) aus Definition 4. Angenommen

(43) $$\overset{i}{\psi}(x)>x$$

für ein i, wir zeigen dasselbe für $i+1$. Aus (35) und a) folgt

$$\overset{i+1}{\psi}(x)>\overset{i}{\psi}(x),$$

was mit (43) zusammen $\overset{i+1}{\psi}(x) > x$ ergibt, womit e) durch Induktion bewiesen ist.

f) *Die Gleichung* $\overset{i}{\psi}(x) = \overset{k}{\psi}(x)$ *kann nur dann bestehen, wenn* $i=k$ *ist.*

Aus (35) und der Eigenschaft a) folgt nämlich $\overset{i+1}{\psi}(x) > \overset{i}{\psi}(x)$, und daraus, allgemeiner, $\overset{k}{\psi}(x) > \overset{i}{\psi}(x)$ für $k>i$. Aus Symmetriegründen ist weiter $\overset{k}{\psi}(x) < \overset{i}{\psi}(x)$ für $k<i$, also jedenfalls $\overset{k}{\psi}(x) \neq \overset{i}{\psi}(x)$ für $k \neq i$, womit f) bewiesen ist.

g) *Die Gleichung* $\overset{i}{\psi}(x) = \overset{k}{\psi}(y)$ *kann nur dann bestehen, wenn* $i=k$ *und* $x=y$ *ist.*

Ist nämlich eine der Zahlen i,k, etwa i, größer als 1 und die zweite gleich 1, so kann die Gleichung

$$\overset{i}{\psi}(x) = \overset{k}{\psi}(y) \tag{44}$$

nicht bestehen. Aus $\overset{i}{\psi}(x) = \overset{1}{\psi}(y)$ und $i>1$ folgt tatsächlich, wegen (34) und (35), zunächst $\psi(\overset{i-1}{\psi}(x), x) = \psi(y,y)$, woraus sich weiter wegen b)

$$\overset{i-1}{\psi}(x) = y, \tag{45}$$

$$x = y \tag{46}$$

ergibt. Aus (45) und (46) folgt $\overset{i-1}{\psi}(x) = x$, was mit e) unvereinbar ist.

Sind beide Zahlen i,k in (44) gleich 1, so gilt $i=k$ und wegen (34) $\psi(x,x) = \psi(y,y)$, woraus wegen b) auch $x=y$ folgt.

Sind schließlich beide Zahlen i, k in (44) größer als 1, so gilt wegen (35) zunächst

$$\psi(\overset{i-1}{\psi}(x), x) = \psi(\overset{k-1}{\psi}(y), y)$$

woraus wegen b)

$$\overset{i-1}{\psi}(x) = \overset{k-1}{\psi}(y), \tag{47}$$

$$x = y \tag{48}$$

folgt. (48) in (47) eingetragen liefert $\overset{i-1}{\psi}(x) = \overset{k-1}{\psi}(x)$, woraus wegen f) auch $i=k$ folgt. Damit ist g) bewiesen.

h) *Für* $i=1,2,\dots,s$ *ist die Funktion* $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$ *von ihren Argumenten größer, d.h. es gilt* $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) > x_1, x_2, \dots, x_r$.

Aus (36) und der Eigenschaft c) folgen nämlich für $i=1,2,\dots,s$ die Ungleichungen:

$$\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) > \overset{i}{\psi}(x_1), \tag{49}$$

$$\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) > x_2, x_3, \dots, x_r. \tag{50}$$

Aus (49) und e) folgt $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) > x_1$, was mit (50) zusammen $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) > x_1, x_2, \dots, x_r$ für $i=1,2,\dots,s$ ergibt.

j) *Die Gleichung* $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) = \pi_k(y_1, y_2, \dots, y_r)$ *kann nur dann bestehen, wenn die Reihe* $i, x_1, x_2, \dots, x_r$ *mit der Reihe* $k, y_1, y_2, \dots, y_r$ *übereinstimmt.*

Aus $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) = \pi_k(y_1, y_2, \dots, y_r)$ folgt nämlich wegen (36) zunächst die Gleichung

$$\psi_{r-1}(\overset{i}{\psi}(x_1), x_2, \dots, x_r) = \psi_{r-1}(\overset{k}{\psi}(y_1), y_2, \dots, y_r),$$

und daher stimmt wegen d) die Reihe $\overset{i}{\psi}(x_1), x_2, \dots, x_r$ mit der Reihe $\overset{k}{\psi}(y_1), y_2, \dots, y_r$ überein. Da aus $\overset{i}{\psi}(x_1) = \overset{k}{\psi}(y_1)$ wegen g) $i=k$ und $x_1 = y_1$ folgt, so stimmt überhaupt die Reihe $i, x_1, x_2, \dots, x_r$ mit der Reihe $k, y_1, y_2, \dots, y_r$ überein, w.z.b.w.

Nehmen wir den Beweis von Satz 35 wieder auf. Ist a irgend ein Element aus $\mathfrak{I}$, so ordnen wir jeder Zahl x aus $\mathfrak{Z}$ ein Element $\{x\}$ aus $\mathfrak{I}$ durch Induktion folgendermaßen eindeutig zu: $\{1\}$ soll gleich a sein. Angenommen, $\{y\}$ sei für alle Zahlen $y<x$ definiert, wir definieren $\{x\}$, indem wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: x läßt sich in der Form $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$ darstellen. Die Zahlen $i, x_1, x_2, \dots, x_r$ sind dann wegen der Eigenschaft j) eindeutig bestimmt, wobei die $x_1, x_2, \dots, x_r$ wegen der Eigenschaft h) kleiner als x sind. Die Symbole $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_r\}$ stellen dann nach Induktionsannahme eindeutig bestimmte Elemente aus $\mathfrak{I}$ dar und wir setzen $\{x\}$ gleich $\varphi_i(\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_r\})$.

2. Fall: x läßt sich nicht in der Form $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$ darstellen. In diesem Falle setzen wir $\{x\}$ dem Elemente a gleich.

Damit ist das Symbol $\{x\}$ durch Induktion definiert und es gilt insbesondere für beliebige natürliche Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_r$ und $i=1,2,\dots,s$ die Beziehung (1. Fall)

(51) $$\{\pi_i(x_1,x_2,\dots,x_r)\}=\varphi_i(\{x_1\},\{x_2\},\dots,\{x_r\}).$$

Wird nun die logische Funktion $F'(x_1,x_2,\dots,x_n)$ in $\mathfrak{Z}$ durch die Festsetzung
$$F'(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv F^*(\{x_1\},\{x_2\},\dots,\{x_n\})$$
definiert, so ist stets $\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})$ mit $\mathfrak{A}^*(\{x_1\},\{x_2\},\dots,\{x_{r+s}\})$, und daher insbesondere

(52) $$\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\dots,x_r,\ \pi_1(x_1,x_2,\dots,x_r),\ \pi_2(x_1,x_2,\dots,x_r),\dots,\pi_s(x_1,x_2,\dots,x_r))$$

mit

(53) $$\mathfrak{A}^*(\{x_1\},\{x_2\},\dots,\{x_r\},\{\pi_1(x_1,x_2,\dots,x_r)\},\{\pi_2(x_1,x_2,\dots,x_r)\},\dots,\{\pi_s(x_1,x_2,\dots,x_r)\})$$

gleichwertig. Da aber (53) wegen (51) mit dem Ausdruck
$$\mathfrak{A}^*(\{x_1\},\dots,\{x_r\},\varphi_1(\{x_1\},\dots,\{x_r\}),\varphi_2(\{x_1\},\dots,\{x_r\}),\dots,\varphi_s(\{x_1\},\dots,\{x_r\}))$$
identisch ist, welcher wegen (31) eine wahre Aussage darstellt, so ist (52) und daher auch (37) als richtig bewiesen.

Wir definieren jetzt in $\mathfrak{Z}$ die logischen Funktionen $\Phi'(x,y,z),f'(x)$ durch die Festsetzungen:

(54) $$\Phi'(x,y,z)\equiv(x=\psi(y,z)),$$

(55) $$f'(v_1)\equiv(Ey_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\varrho)_2^n[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},y_i)\,\&\,F'(y_1,y_2,\dots,y_{n-1},v_n)]$$

und zeigen, daß diese Funktionen den Zählausdruck B erfüllen[54].

Da aus (54) sich sofort die Richtigkeit von

(56) $$(y)(z)(Ex)\,\Phi'(x,y,z)$$

und von
$$(x)(\overset{*}{x})(y)(z)[\Phi'(x,y,z)\ \&\ \Phi'(\overset{*}{x},y,z)\to x=\overset{*}{x}]$$
ergibt, so ist einerseits (B_1) und anderseits, wegen Satz 16, auch (B_2) durch die Funktionen Φ',f' erfüllt. Wegen (54) und der Eigenschaft b) aus der Def. 4 ist weiter

[54]) Aus der Definition einer ausgezeichneten Erfüllung eines $\varkappa$-Ausdrucks (Definition 4, S. 290) folgt dann, daß diese Funktionen auch eine durch die Funktion $\psi(x,y)$ erzeugte ausgezeichnete Erfüllung des Zählausdrucks B bilden.

$$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[\Phi'(x,y,z)\,\&\,\Phi'(x,\overset{*}{y},\overset{*}{z})\to y=\overset{*}{y}\,\&\,z=\overset{*}{z}]$$
richtig, was mit (56) und (55) zusammen dem Satze 7 zufolge die zwei Äquivalenzen:
$$F'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&\ f'(v_1)],$$
$$F'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv\ (v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},x_i)\to f'(v_1)]$$
ergibt, denen wir jetzt die ihnen gleichwertige Form:
$$F'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv\ (v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},x_i)\to f'(v_1)],$$
$$\bar{F}'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},v_n)\equiv\ (v_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},x_i)\to\bar{f}'(v_1)]$$
geben. Ersetzt man in den zwei letzten Äquivalenzen die Variable v_n, welche aus Abkürzungsgründen so bezeichnet wurde, wiederum durch x_n, und die gebundenen Variablen $v_1,v_2,\dots,v_{n-1}$ der Reihe nach durch die gebundenen Variablen $\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1}$ (für $k=1,2,\dots,m$), so erhält man die folgenden in $\mathfrak{Z}$ für $k=1,2,\dots,m$ bestehenden Äquivalenzen:
$$F'(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv(\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi'(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi'(\overset{k}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\to f'(\overset{k}{v}_1)],$$
$$\bar{F}'(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv(\overset{k}{v}_\varrho)_1^{n-1}[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi'(\overset{k}{v}_i,\overset{k}{v}_{i+1},x_i)\,\&\,\Phi'(\overset{k}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\to\bar{f}'(\overset{k}{v}_1)].$$

Aus diesen Äquivalenzen und der Entstehungsweise von $\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})$ aus $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})$ folgt sofort das Bestehen der Äquivalenzen
$$\mathfrak{B}'_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})\equiv\mathfrak{C}'_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})$$
für $k=1,2,\dots,m$ in $\mathfrak{Z}$. Aus diesen Äquivalenzen und der allgemeingültigen Formel (30) folgt sofort die Äquivalenz
$$\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{B}'_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})\equiv$$
$$\equiv(\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\dots(\overset{m}{v}_\varrho)_1^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}'_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s};\ \overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1}),$$
welche, mit der allgemeingültigen Formel (29) zusammen, die Äquivalenz

$$\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\dots,x_{r+s})\equiv$$

(57) $$\equiv(\overset{1}{v}_\varrho)_1^{n-1}(\overset{2}{v}_\varrho)_1^{n-1}\dots(\overset{m}{v}_\varrho)_1^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}'_k(x_1,x_2,\dots,x_{r+s};\overset{k}{v}_1,\overset{k}{v}_2,\dots,\overset{k}{v}_{n-1})$$

ergibt.

Jetzt zeigen wir, daß

(58) $$(\overset{0}{w}_1)(x_\varrho)_2^r(\overset{1}{w}_\varrho)_1^r(\overset{2}{w}_\varrho)_1^r\dots(\overset{s}{w}_\varrho)_1^r\Big[\sum_{i=0}^{s-1}\overset{i+1}{w}_1=\psi(\overset{i}{w}_1,\overset{0}{w}_1)\,\&$$
$$\&\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r-1}\overset{i}{w}_{j+1}=\psi(\overset{i}{w}_j,x_{j+1})\to\mathfrak{A}'(\overset{0}{w}_1,x_2,\dots,x_r,\overset{1}{w}_r,\overset{2}{w}_r,\dots,\overset{s}{w}_r)\Big]$$

eine in $\mathfrak{Z}$ richtige Aussage darstellt. Ist das Vorderglied von (58) bei irgend einem festen Wertensystem der Variablen richtig, so gilt:

(59) $$\overset{i+1}{w}_1=\psi(\overset{i}{w}_1,\overset{0}{w}_1)\qquad\text{für } i=0,1,\dots,s-1,$$

(60) $$\overset{i}{w}_{j+1}=\psi(\overset{i}{w}_j,x_{j+1})\qquad\text{für } i=1,2,\dots,s \text{ und } j=1,2,\dots,r-1.$$

Es gilt dann auch

(61) $$\overset{i}{w}_1=\overset{i}{\psi}(\overset{0}{w}_1)\qquad\text{für } i=1,2,\dots,s.$$

Setzt man in (59) $i=0$, so ergibt sich $\overset{1}{w}_1=\psi(\overset{0}{w}_1,\overset{0}{w}_1)$, was mit (34) zusammen $\overset{1}{w}_1=\overset{1}{\psi}(\overset{0}{w}_1)$ ergibt. Damit ist (61) für $i=1$ bewiesen. Angenommen, es gelte

(62) $$\overset{i}{w}_1=\overset{i}{\psi}(\overset{0}{w}_1)$$

für eine Zahl $i<s$, wir zeigen dasselbe für $i+1$. Aus (59) und (62) folgt nämlich $\overset{i+1}{w}_1=\psi(\overset{i}{\psi}(\overset{0}{w}_1),\overset{0}{w}_1)$, was mit (35) zusammen die Gleichung $\overset{i+1}{w}_1=\overset{i+1}{\psi}(\overset{0}{w}_1)$ ergibt. (61) ist also durch Induktion bewiesen.

Es gilt ferner

(63) $$\overset{i}{w}_{j+1}=\overset{i}{\psi}_j(w_1,x_2,x_3,\dots,x_{j+1})\quad\text{für } i=1,2,\dots,s \text{ und } j=1,2,\dots,r-1.$$

Wir beweisen (63) durch Induktion nach j. Setzt man in (60) $j=1$, so erhält man $\overset{i}{w}_2=\psi(\overset{i}{w}_1,x_2)$ für $i=1,2,\dots,s$, woraus wegen (32) $\overset{i}{w}_2=\overset{i}{\psi}_1(w_1,x_2)$ für $i=1,2,\dots,s$ folgt. Damit ist aber (63) für $j=1$ und $i=1,2,\dots,s$ bewiesen.

Angenommen, es gelte

(64) $$\overset{i}{w}_{j+1}=\overset{i}{\psi}_j(w_1,x_2,x_3,\dots,x_{j+1})\qquad\text{für } i=1,2,\dots,s$$

bei einem festen $j<r-1$, so folgt aus (60)

(65) $$\overset{i}{w}_{j+2}=\psi(\overset{i}{w}_{j+1},x_{j+2})\qquad\text{für } i=1,2,\dots s.$$

(64) in (65) eingetragen liefert

(66) $$\overset{i}{w}_{j+2}=\psi(\overset{i}{\psi}_j(w_1,x_2,x_3,\dots,x_{j+1}),x_{j+2})\qquad\text{für } i=1,2,\dots,s.$$

Da aber wegen (33) die Gleichungen

$$\overset{i}{\psi}_{j+1}(w_1,x_2,x_3,\dots,x_{j+1},x_{j+2})=\psi(\overset{i}{\psi}_j(w_1,x_2,x_3,\dots,x_{j+1}),x_{j+2})\quad\text{für } i=1,2,\dots,s$$

bestehen, so folgt aus (66) sofort

$$\overset{i}{w}_{j+2}=\overset{i}{\psi}_{j+1}(w_1,x_2,x_3,\dots,x_{j+1},x_{j+2})\qquad\text{für } i=1,2,\dots,s,$$

womit (63) durch Induktion bewiesen ist.

Setzt man in (63) insbesondere $j=r-1$, so ergeben sich die Gleichungen

(67) $$\overset{i}{w}_r=\overset{i}{\psi}_{r-1}(w_1,x_2,x_3,\dots,x_r)\qquad\text{für } i=1,2,\dots,s.$$

(61) in (67) eingetragen liefert weiter die Gleichungen

(68) $$\overset{i}{w}_r=\psi_{r-1}(\overset{i}{\psi}(\overset{0}{w}_1),x_2,x_3,\dots,x_r)\qquad\text{für } i=1,2,\dots,s.$$

Da nun aber wegen (36) die Gleichungen

$$\pi_i(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\dots,x_r)=\psi_{r-1}(\overset{i}{\psi}(\overset{0}{w}_1),x_2,x_3,\dots,x_r)\qquad\text{für } i=1,2,\dots,s$$

bestehen, so folgen aus (68) schließlich die Gleichungen

(69) $$\overset{i}{w}_r=\pi_i(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\dots,x_r)\qquad\text{für } i=1,2,\dots,s.$$

Das Hinterglied $\mathfrak{A}'(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\dots,x_r,\overset{1}{w}_r,\overset{2}{w}_r,\dots,\overset{s}{w}_r)$ der Implikation aus (58) ist wegen (69) mit

$$\mathfrak{A}'(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\dots,x_r,\pi_1(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\dots,x_r),\pi_2(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\dots,x_r),\dots,\pi_s(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\dots,x_r))$$

identisch und stellt daher wegen (37) eine richtige Aussage dar. Aus der Richtigkeit des Vordergliedes folgt also die Richtigkeit des Hintergliedes der Implikation in (58), womit (58) bewiesen ist.

Aus (58) und (54) folgt sofort

$$(\overset{0}{w_1})(x_\varrho)_2^r(\overset{1}{w_\varrho})_1^r(\overset{2}{w_\varrho})_1^r\ldots(\overset{s}{w_\varrho})_1^r\Big[\sum_{i=0}^{s-1}\Phi'(\overset{i+1}{w_1},\overset{i}{w_1},\overset{0}{w_1})\;\&$$
$$\&\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r-1}\Phi'(\overset{i}{w}_{j+1},\overset{i}{w_j},x_{j+1})\to\mathfrak{A}'(\overset{0}{w_1},x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w_r},\overset{2}{w_r},\ldots,\overset{s}{w_r})\Big],$$

und daraus wegen (57) leicht

$$(\overset{0}{w_1})(x_\varrho)_2^r(\overset{1}{w_\varrho})_1^r(\overset{2}{w_\varrho})_1^r\ldots(\overset{s}{w_\varrho})_1^r(\overset{1}{v_\varrho})_1^{n-1}(\overset{2}{v_\varrho})_1^{n-1}\ldots(\overset{m}{v_\varrho})_1^{n-1}\Big[\sum_{i=0}^{s-1}\Phi'(\overset{i+1}{w_1},\overset{i}{w_1},\overset{0}{w_1})\;\&$$
$$\&\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r-1}\Phi'(\overset{i}{w}_{j+1},\overset{i}{w_j},x_{j+1})\to\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}'_k(\overset{0}{w_1},x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w_r},\overset{2}{w_r},\ldots,\overset{s}{w_r};\overset{k}{v_1},\overset{k}{v_2},\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})\Big].$$

Damit ist aber gezeigt, daß die Funktionen Φ', f' den Zählausdruck (B_3), und daher auch den ganzen Zählausdruck B in $\mathfrak{Z}$ erfüllen, wobei sie eine durch die Funktion $\psi(x,y)$ erzeugte ausgezeichnete Erfüllung des Zählausdrucks B bilden[55]).

Es seien nun umgekehrt $\Phi''(x,y,z)$, $f''(x)$ logische Funktionen, die den Zählausdruck B in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ erfüllen. Wir definieren eine logische Funktion $F''(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ in $\mathfrak{J}$ durch die Festsetzung

$$(70)\qquad F''(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(Ev_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\;\&\;f''(v_1)\Big],$$

und wollen zeigen, daß diese Funktion den Zählausdruck A erfüllt.

Aus dem Satze 14 folgt wegen (B_1) und (B_2) zunächst die Äquivalenz

$$(Ev_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\;\&\;f''(v_1)\Big]\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\to f''(v_1)\Big],$$

welche mit (70) zusammen die Äquivalenz

[55]) Aus dem Beweis — insbesondere aber aus Satz 7 — ist ersichtlich, daß die Funktion $f'(v_1)$ statt durch (55) auch durch

$$f'(v_1)\equiv(y_\varrho)_1^{n-1}(v_\varrho)_2^n\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi'(v_i,v_{i+1},y_i)\to F'(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},v_n)\Big],$$

und sogar auf unendlich viele andere Arten definiert werden könnte.

$$(71)\qquad F''(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\to f''(v_1)\Big]$$

ergibt. Den Äquivalenzen (70) und (71) geben wir jetzt die ihnen gleichwertige Form:

$$(72)\qquad F''(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\to f''(v_1)\Big],$$

$$(73)\qquad \bar{F}''(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\equiv(v_\varrho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i,v_{i+1},x_i)\to \bar{f}''(v_1)\Big].$$

Aus (72) und (73) folgen durch Umbezeichnung der Variablen leicht die Äquivalenzen:

$$F''(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv(\overset{k}{v_\varrho})_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi''(\overset{k}{v_i},\overset{k}{v}_{i+1},x_i)\;\&\;\Phi''(\overset{k}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\to f''(\overset{k}{v_1})\Big],$$

$$\bar{F}''(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv(\overset{k}{v_\varrho})_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi''(\overset{k}{v_i},\overset{k}{v}_{i+1},x_i)\;\&\;\Phi''(\overset{k}{v}_{n-1},x_n,x_{n-1})\to \bar{f}''(\overset{k}{v_1})\Big]$$

für $k=1,2,\ldots,m$, aus welchen wegen der Entstehungsart von $\mathfrak{C}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})$ aus $\mathfrak{B}_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})$ sich sofort die Äquivalenzen

$$(74)\qquad \mathfrak{B}''_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})\equiv\mathfrak{C}''_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})\qquad \text{für } k=1,2,\ldots,m$$

in $\mathfrak{J}$ ergeben. Aus (74) und der allgemeingültigen Formel (29) folgt die Äquivalenz $\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})\equiv\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{C}''_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})$, welche mit der allgemeingültigen Formel (30) zusammen die Äquivalenz

$$(75)\qquad \begin{aligned}&\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s})\equiv\\ &\equiv(\overset{1}{v_\varrho})_1^{n-1}(\overset{2}{v_\varrho})_1^{n-1}\ldots(\overset{m}{v_\varrho})_1^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}''_k(x_1,x_2,\ldots,x_{r+s};\overset{k}{v_1},\overset{k}{v_2},\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})\end{aligned}$$

ergibt. Da die Funktionen Φ'', f'' laut Voraussetzung auch den Ausdruck (B_3) erfüllen, so gilt, wie leicht einzusehen,

$$(\overset{0}{w_1})(x_\varrho)_2^r(\overset{1}{w_\varrho})_1^r(\overset{2}{w_\varrho})_1^r\ldots(\overset{s}{w_\varrho})_1^r\Big[\sum_{i=0}^{s-1}\Phi''(\overset{i+1}{w_1},\overset{i}{w_1},\overset{0}{w_1})\;\&\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r-1}\Phi''(\overset{i}{w}_{j+1},\overset{i}{w_j},x_{j+1})\to$$
$$\to(\overset{1}{v_\varrho})_1^{n-1}(\overset{2}{v_\varrho})_1^{n-1}\ldots(\overset{m}{v_\varrho})_1^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\mathfrak{D}''_k(\overset{0}{w_1},x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w_r},\overset{2}{w_r},\ldots,\overset{s}{w_r};\overset{k}{v_1},\overset{k}{v_2},\ldots,\overset{k}{v}_{n-1})\Big],$$

was mit (75) zusammen sofort die Richtigkeit von

$$(\overset{0}{w}_1)(x_\varrho)_2^r(\overset{1}{w}_\varrho)_1^r(\overset{2}{w}_\varrho)_1^r\ldots(\overset{s}{w}_\varrho)_1^r[\sum_{i=0}^{s-1}\Phi''(\overset{i+1}{w}_1,\overset{i}{w}_1,\overset{0}{w}_1)\&\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r-1}\Phi''(\overset{i}{w}_{j+1},\overset{i}{w}_j,x_{j+1})\to$$
$$\to\mathfrak{A}''(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w}_r,\overset{2}{w}_r,\ldots,\overset{s}{w}_r)] \tag{76}$$

in $\mathfrak{J}$ ergibt. Seien nun $x_1,x_2,\ldots,x_r$ ganz beliebige Elemente aus $\mathfrak{J}$. Wir definieren zunächst rekursiv weitere $s+1$ Elemente $\overset{0}{w}_1,\overset{1}{w}_1,\ldots,\overset{s}{w}_1$ aus $\mathfrak{J}$ folgendermaßen.

Wir setzen

$$\overset{0}{w}_1=x_1 \tag{77}$$

und greifen für jedes Paar $\overset{i}{w}_1,\overset{0}{w}_1$ (wo $i=0,1,\ldots,s-1$) unter den gemäß (B_1) existierenden Elementen ein Element heraus, welches wir mit $\overset{i+1}{w}_1$ bezeichnen. Dadurch sind die Elemente $\overset{0}{w}_1,\overset{1}{w}_1,\ldots,\overset{s}{w}_1$ in $\mathfrak{J}$ definiert und es gilt

$$\Phi''(\overset{i+1}{w}_1,\overset{i}{w}_1,\overset{0}{w}_1) \qquad \text{für } i=0,1,\ldots,s-1. \tag{78}$$

Wir wollen jetzt rs Elemente $\overset{i}{w}_j$ (wo $i=1,2,\ldots,s$ und $j=1,2,\ldots,r$) in $\mathfrak{J}$ durch Rekursion nach j definieren. Die Elemente $\overset{i}{w}_1$ $(i=1,2,\ldots,s)$ sind bereits definiert, d.h. der Fall $j=1$ erledigt. Angenommen, $\overset{i}{w}_j$ seien schon für $i=1,2,\ldots,s$ bei einem festen $j<r$ in $\mathfrak{J}$ definiert. Die Elemente $\overset{i}{w}_{j+1}$ für $i=1,2,\ldots,s$ definieren wir dann dadurch, daß wir für jedes Paar $\overset{i}{w}_j, x_{j+1}$ wo $i=1,2,\ldots,s$ unter den gemäß (B_1) existierenden Elementen ein Element herausgreifen und es mit $\overset{i}{w}_{j+1}$ bezeichnen, wodurch

$$\Phi''(\overset{i}{w}_{j+1},\overset{i}{w}_j,x_{j+1}) \qquad \text{für } i=1,2,\ldots,s \text{ und } j=1,2,\ldots,r-1 \tag{79}$$

richtig wird. Nimmt man in (76) für die Variablen die gleichbezeichneten oben definierten Elemente aus $\mathfrak{J}$, so gilt

$$[\sum_{i=0}^{s-1}\Phi''(\overset{i+1}{w}_1,\overset{i}{w}_1,\overset{0}{w}_1)\&\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r-1}\Phi''(\overset{i}{w}_{j+1},\overset{i}{w}_j,x_{j+1})\to\mathfrak{A}''(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w}_r,\overset{2}{w}_r,\ldots,\overset{s}{w}_r)]$$

und da aus (78) und (79) $\sum_{i=0}^{s-1}\Phi''(\overset{i+1}{w}_1,\overset{i}{w}_1,\overset{0}{w}_1)\&\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r-1}\Phi''(\overset{i}{w}_{j+1},\overset{i}{w}_j,x_{j+1})$ folgt,

so gilt auch

$$\mathfrak{A}''(\overset{0}{w}_1,x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w}_r,\overset{2}{w}_r,\ldots,\overset{s}{w}_r). \tag{80}$$

Tragen wir (77) in (80) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{A}''(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r,\overset{1}{w}_r,\overset{2}{w}_r,\ldots,\overset{s}{w}_r),$$

und daher (da $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r$ ja ganz beliebige Elemente aus $\mathfrak{J}$ sind) ist

$$(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\ldots,x_r,y_1,y_2,\ldots,y_s)$$

in $\mathfrak{J}$ richtig, womit A sich als ein durch die Funktion $F''(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ erfüllter Zählausdruck erwiesen hat.

Wir haben also gezeigt, daß aus der Erfüllbarkeit von B die jenige von A folgt. Da wir früher gezeigt haben, daß, umgekehrt, aus der Erfüllbarkeit von A die Existenz einer durch die Funktion $\psi(x,y)$ erzeugten ausgezeichneten Erfüllung von B folgt, wobei $\psi(x,y)$ irgend eine Funktion mit den Eigenschaften a), b) aus Definition 4 ist, so ist B ein mit dem Zählausdruck A gleichwertiger $\varkappa$-Ausdruck. Satz 35 ist also vollständig bewiesen.

Da sich jeder Zählausdruck der Gestalt

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\&(x_1)(x_2)\ldots(x_n)\,\mathfrak{U}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

offenbar in pränexe Normalform mit Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_n)(Ex)$ bzw. der Form $(y)(z)(Ex)(x_1)(x_2)\ldots(x_n)$ bringen läßt, so ergeben sich aus Satz 35 sofort folgende zwei Sätze:

Satz 36. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf $\varkappa$-Ausdrücke in pränexer Normalform mit Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_n)(Ex)$ d. h. Skolemscher Normalform mit nur einem Seinszeichen, beschränken, welche außer der ausgezeichneten dreistelligen Funktionsvariablen Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Satz 37. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf $\varkappa$-Ausdrücke in der pränexen Normalform mit Präfix der Form $(y)(z)(Ex)(x_1)(x_2)\ldots(x_n)$, d. h. Kalmárscher Normalform ohne voranstehende Seinszeichen, beschränken, welche außer der ausgezeichneten dreistelligen Funktionsvariablen Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Aus den Sätzen 35-37 ergeben sich gemäß Satz 25 sofort folgende drei Sätze:

Satz 38. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke der Form*

$$(y)(z)(Ex)(R_1(x,y)\&R_2(x,z))\&(x_1)(x_2)\dots(x_n)\mathfrak{U}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

beschränken, welche außer den zwei zweistelligen Funktionsvariablen R_1,R_2 *nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthalten, wobei außerdem im quantorenfreien Ausdruck* $\mathfrak{U}$ *die Funktionsvariablen* R_1,R_2 *nur an Stellen negativen Vorzeichens vorausgesetzt werden können.*

Satz 39. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke in der pränexen Normalform mit Präfix der Form* $(x_1)(x_2)\dots(x_n)(Ex)$ *(Skolemsche Normalform mit nur einem Seinszeichen) beschränken, welche nur zwei zweistellige und eine einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Satz 40. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke in der pränexen Normalform mit Präfix der Form* $(y)(z)(Ex)(x_1)(x_2)\dots(x_n)$ *(Kalmársche Normalform ohne voranstehende Seinszeichen) beschränken, welche nur zwei zweistellige und eine einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Jetzt beweisen wir den

Satz 41. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke in der pränexen Normalform mit Präfix der Form* $(Ey_1)(x_1)(x_2)(Ey_2)(x_3)(x_4)\dots(x_n)$ *(Kalmársche Normalform mit nur einem voranstehenden Seinzeichen) beschränken, welche nur zwei zweistellige Funktionsvariable enthalten.*

Beweis. Es genügt wegen Satz 40 nur zu zeigen, daß zu jedem Zählausdrück A in Kalmárscher Normalform ohne voranstehende Seinszeichen, welcher zwei zweistellige Funktionsvariable R_1,R_2 und eine einstellige f enthält, ein gleichwertiger Zählausdruck B ebenfalls in der Kalmárschen Normalform, aber mit einem voranstehenden Seinszeichen konstruiert werden kann, welcher dafür nur die zwei zweistelligen Funktionsvariablen R_1,R_2 enthält.

Sei $(x_2)(x_3)(Ex_1)(x_\varrho)_4^n\mathfrak{A}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ der Zählausdruck A, y eine von den $x_1,x_2,\dots,x_n$ verschiedene gebundene Variable und $\mathfrak{B}(x_1,x_2,\dots,x_n;y)$ der Ausdruck, welcher aus $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ dadurch entsteht, daß $f(x_i)$ durch $R_1(x_i,y)$ für $i=1,2,\dots,n$ ersetzt wird. Wir setzen B gleich

$$(Ey)(x_2)(x_3)(Ex_1)(x_\varrho)_4^n[(\sum_{\varrho=2}^{n}R_1(y,x_\varrho)\to\mathfrak{B}(x_1,x_2,\dots,x_n;y))\&R_1(y,x_1)]$$

und zeigen, daß der Zählausdruck B, der offenbar die verlangte Gestalt hat und nur die Funktionsvariablen R_1,R_2 enthält, mit A gleichwertig ist.

Ist A erfüllbar, so gibt es einen Individuenbereich $\mathfrak{J}'$, eine in $\mathfrak{J}'$ definierte, nur Werte aus $\mathfrak{J}'$ anzunehmen fähige mathematische Funktion $\varphi(x_2,x_3)$, und drei logische Funktionen R_1',R_2',f', so daß

(81) $$(x_\varrho)_2^n\mathfrak{A}'(\varphi(x_2,x_3),x_2,x_3,\dots,x_n)$$

richtig ist. Sei a irgend ein von allen Elementen aus $\mathfrak{J}'$ verschiedener Gegenstand. Wir erweitern die in $\mathfrak{J}'$ definierten logischen Funktionen R_1',R_2' und die mathematische Funktion $\varphi(x_2,x_3)$ auf den Bereich $\mathfrak{J}'+\{a\}$, indem wir

1^0 $R_1'(a,x)$ nur dann falsch setzen, wenn $x=a$ gilt, wodurch erreicht wird, daß die Funktion $R_1'(a,x)$ den Individuenbereich $\mathfrak{J}'$ charakterisiert;

2^0 $R_1'(x,a)$ für jedes $x\neq a$ mit $f'(x)$ gleichwertig machen;

3^0 $R_2'(x,y)$ ganz beliebig erweitern;

4^0 $\varphi(x,y)$ so erweitern, daß diese Funktion nur Werte aus $\mathfrak{J}'$ annimmt, sonst aber beliebig ist.

Aus (81) und der Entstehungsweise von $\mathfrak{B}(x_1,x_2,\dots,x_n;y)$ aus $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ folgt gemäß 2^0 leicht $(x_\varrho)_2^n\mathfrak{B}'(\varphi(x_2,x_3),x_2,x_3,\dots,x_n;a)$ und daraus wegen 1^0

(82) $$(x_\varrho)_2^n(\sum_{\varrho=2}^{n}R_1'(a,x_\varrho)\to\mathfrak{B}'(\varphi(x_2,x_3),x_2,x_3,\dots,x_n;a)),$$

wobei in (82) die Quantoren schon auf $\mathfrak{J}'+\{a\}$ auszudehnen sind. Wegen 1^0 und 4^0 gilt weiter $(x_2)(x_3)R_1'(a,\varphi(x_2,x_3))$, was mit (82) zusammen leicht

(83) $$(x_\varrho)_2^n[(\sum_{\varrho=2}^{n}R_1'(a,x_\varrho)\to\mathfrak{B}'(\varphi(x_2,x_3),x_2,x_3,\dots,x_n;a))\&R_1'(a,\varphi(x_2,x_3))]$$

ergibt. Aus (83) folgt aber sofort

$$(x_2)(x_3)(Ex_1)(x_\varrho)_4^n[(\sum_{\varrho=2}^{n}R_1'(a,x_\varrho)\to\mathfrak{B}'(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n;a))\&R_1'(a,x_1)]$$

und daraus

$$(Ey)(x_2)(x_3)(Ex_1)(x_\varrho)_4^n[(\sum_{\varrho=2}^n R_1'(y,x_\varrho)\to\mathfrak{B}'(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n;y))\,\&\,R_1'(y,x_1)],$$

womit B als ein durch die Funktionen R_1', R_2' in $\mathfrak{J}'+\{a\}$ erfüllter Zählausdruck nachgewiesen ist.

Ist, umgekehrt, der Zählausdruck B in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllbar und sind R_1'', R_2'' die ihn erfüllenden Funktionen, so gilt

$$(Ey)(x_2)(x_3)(Ex_1)(x_\varrho)_4^n[(\sum_{\varrho=2}^n R_1''(y,x_\varrho)\to\mathfrak{B}''(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n;y))\,\&\,R_1''(y,x_1)]$$

in $\mathfrak{J}''$. Daraus folgt daß es in $\mathfrak{J}''$ einen Gegenstand b und eine in $\mathfrak{J}''$ definierte Funktion $\chi(x_2,x_3)$ gibt, so daß die Formeln:

$$(x_2)(x_3)(x_\varrho)_4^n(\sum_{\varrho=2}^n R_1''(b,x_\varrho)\to\mathfrak{B}''(\chi(x_2,x_3),x_2,x_3,\ldots,x_n;\,b)), \tag{84}$$

$$(x_2)(x_3)R_1''(b,\chi(x_2,x_3)) \tag{85}$$

in $\mathfrak{J}''$ richtig sind. Aus (84) folgt weiter, daß

$$(x_2)(x_3)(x_\varrho)_4^n\mathfrak{B}''(\chi(x_2,x_3),x_2,x_3,\ldots,x_n;b) \tag{86}$$

in dem durch die Funktion $R_1''(b,x)$ charakterisierten Teilbereich $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{J}''$ gilt, wobei $\mathfrak{J}$ nicht leer ist, da ja alle Werte, welche die Funktion $\chi(x_2,x_3)$ im nichtleeren Bereich $\mathfrak{J}''$ annimmt, wegen (85) zu $\mathfrak{J}$ gehören. Aus (86) folgt das Bestehen von

$$(x_2)(x_3)(Ex_1)(x_\varrho)_4^n\mathfrak{B}''(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n;b)$$

in $\mathfrak{J}$ und daraus, wenn man die Funktion $f''(x)$ durch die Festsetzung $f''(x)\equiv R_1''(x,b)$ definiert, auch die Richtigkeit von $(x_2)(x_3)(Ex_1)(x_\varrho)_4^n\mathfrak{A}''(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ in $\mathfrak{J}$, womit sich A als ein durch die Funktionen R_1'', R_2'', f'' in $\mathfrak{J}$ erfüllter Zählausdruck erwiesen hat. Demnach sind die Zählausdrücke A, B gleichwertig und Satz 41 vollständig bewiesen.

Die Sätze 40 und 41 bilden Verschärfungen der Resultate einer Kalmárschen Arbeit [56]), welche ich übrigens schon im Satze 31 von $\boldsymbol{P}_1$ ein wenig verschärft habe.

[56]) L. Kalmár, *Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem*, Acta Scient. Math. Szeged **5** (1932), S. 222-236.

Satz 42. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke in der Kalmárschen Normalform mit drei voranstehenden Seinszeichen beschränken, die nur eine zweistellige Funktionsvariable enthalten.*

Satz 42 ist eine Verschärfung einer neueren Arbeit von Kalmár [57]). In dieser Arbeit zeigt Kalmár, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf Zählausdrücke mit Präfix der Form

$$(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_m)(y_1)(y_2)(Ez)(u_1)(u_2)\ldots(u_n) \tag{87}$$

und einer zweistelligen Funktionsvariable beschränken darf. Dagegen besagt der Satz 42, daß der Spezialfall $m=3$ bereits ausreicht [58]). Der Kalmársche Beweis beruht darauf, daß zu jedem Zählausdruck $\mathfrak{A}$ mit Präfix der Form (87) und l zweistelligen Funktionsvariablen ein gleichwertiger Zählausdruck $\mathfrak{B}$ ebenfalls der Form (87) aber mit $m+l$ voranstehenden Seinszeichen und dafür mit einer einzigen zweistelligen Funktionsvariable konstruiert werden kann. Geht man bei dieser Konstruktion vom unseren Satz 41 aus, so kann als $\mathfrak{A}$ ein Zählausdruck mit $m=1$ und $l=2$ angenommen werden. Der gleichwertige Zählausdruck $\mathfrak{B}$ enthält dann nur $m+l=3$ voranstehende Seinszeichen, womit Satz 42 bewiesen ist.

Es ist nicht schwer von dem in Satz 35 erhaltenen Ergebnis zu dem Reduktionssatz von Ackermann (aus der auf Seite 259 zitierten Arbeit) zu übergehen und dabei diesen auch in Hinsicht der Anzahl und Stellenzahl der Funktionsvariablen zu verschärfen. In der Fußnote [8]) der unter [57]) zitierten Arbeit hat Kalmár nur auf folgende zwei Verschärfungen des Ackermannschen Resultates in Hinsicht der Anzahl und Stellenzahl der Funktionsvariablen hingewiesen:

1) Die zweistellige Funktionsvariable $F(x,y)$, welche der Beziehung $y=x+1$ entspricht, kann entbehrt werden, da sich die Beziehung $y=x+1$ durch die Beziehung $y=x+z$ ausdrücken läßt, und somit $F(x,y)$ gewissermaßen durch die dreistellige, der Beziehung $y=x+z$ entsprechende Funktionsvariable $G(x,z,y)$ aus-

[57]) L. Kalmár, *Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen*, Compos. Math. **4** (1936), 137-144.

[58]) Auf die Möglichkeit dieser Verschärfung des Kalmárschen Reduktionssatzes hat zum ersten Mal Herr A. Lindenbaum in seinem Referat über die Kalmársche Arbeit, Zbl. für Math. **15** (1937), S. 338, hingewiesen.

gedrückt werden kann (diese Kalmársche Bemerkung gilt natürlich nur für denjenigen Teil der Ackermannschen Behauptung, welcher die Zurückführung des Erfüllbarkeitsproblems auf Zählausdrücke mit Präfixtyp $(Ex)(y)(Ez)(u_1)(u_2)\dots(u_n)$ betrifft, nicht aber für die schärfere Behauptung über Zurückführung auf Zählausdrücke der Form

$$(y)(Ez)F(y,z)\,\&\,(Ex)(u_1)(u_2)\dots(u_n)\mathfrak{A}(x,u_1,u_2,\dots,u_n).);$$

2) Die dreistellige Funktionsvariable H, die der Beziehung $y=x\cdot z$ entspricht, kann durch eine zweistellige ersetzt werden, da man in der Ackermannschen Konstruktion statt der Beziehung $y=x\cdot z$ auch mit der Beziehung $y=x^2$ auskommen kann (diese Kalmársche Bemerkung gilt sowohl für die schwächere als auch für die schärfere Behauptung von Ackermann).

In den Sätzen 43 und 44 gebe ich nun weitere Verschärfungen des Ackermannschen Reduktionssatzes an, wobei ich u.a. zeige, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem ausschließlich auf *binäre* Zählausdrücke in der schärferen Ackermannschen Form $(y)(Ez)F(y,z)\,\&\,(Ex)(u_1)(u_2)\dots(u_n)\mathfrak{A}(x,u_1,u_2,\dots,u_n)$ beschränken kann.

Satz 43. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke in der Ackermannschen Form*

$$(y)(Ez)F(y,z)\,\&\,(Ex)(u_1)(u_2)\dots(u_n)\mathfrak{U}(x,u_1,u_2,\dots,u_n)$$

beschränken, die außer der zweistelligen Funktionsvariablen F nur noch eine dreistellige und eine einstellige Funktionsvariable enthalten.

Beweis. Es genügt wegen des Satzes 35 zu zeigen, daß zu jedem $\varkappa$-Ausdruck A von der Form

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\,\&\,(x_1)(x_2)\dots(x_n)\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

der außer Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable f enthält, ein gleichwertiger Zählausdruck B von der Form

$$(y)(Ez)F(y,z)\,\&\,(Ex)(u_1)(u_2)\dots(u_n)\mathfrak{U}(x,u_1,u_2,\dots,u_n)$$

angegeben werden kann, welcher nur die Funktionsvariablen F,Φ,f enthält. Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$\mathfrak{B}(x,y,z)$	für	$(F(x,y)\,\&\,F(y,z)\to\Phi(z,x,x))$;
$\mathfrak{C}(x,y,z,u,v,w)$	für	$(\Phi(y,x,z)\,\&\,F(z,u)\,\&\,F(y,v)\,\&\,F(v,w)\to\Phi(w,x,u))$;
$\mathfrak{D}(x,y,z,u,v,w,t)$	für	$(\Phi(u,y,z)\,\&\,\Phi(v,x,u)\,\&\,F(t,v)\,\&\,F(y,w)\to\Phi(t,w,z))$.

Wir setzen nun B gleich der Konjunktion der folgenden drei Ausdrücke:

$$(B_1)\qquad (y)(Ez)F(y,z),$$

$$(B_2)\qquad (Ex)(y)(z)(u)(v)(w)(t)[\mathfrak{B}(x,y,z)\,\&\,\mathfrak{C}(x,y,z,u,v,w)\,\&\,\&\,\mathfrak{D}(x,y,z,u,v,w,t)],$$

$$(B_3)\qquad (x_1)(x_2)\dots(x_n)\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Der Zählausdruck B läßt sich offenbar in die verlangte Form bringen, enthält nur die Funktionsvariablen F,Φ,f und ist — wie wir zeigen werden — mit A, d.h. mit dem Zählausdruck $(y)(z)(Ex)\,\Phi(x,y,z)\,\&\,(x_1)(x_2)\dots(x_n)\mathfrak{A}(x_1,x_2,\dots,x_n)$, gleichwertig.

Ist nämlich A erfüllbar, so hat A als ein $\varkappa$-Ausdruck auch eine durch die Funktion $2^{x-1}(2y+1)$ erzeugte [59]) ausgezeichnete Erfüllung Φ',f' im Bereich $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen. Es gelten dann in $\mathfrak{Z}$:

$$(88)\qquad (y)(z)(Ex)\,\Phi'(x,y,z)\,\&\,(x_1)(x_2)\dots(x_n)\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

$$(89)\qquad (x)(y)(z)[\Phi'(x,y,z)\sim(x=2^{y-1}\cdot(2z+1))].$$

Wir setzen

$$(90)\qquad F'(x,y)\equiv(y=x+1)$$

und zeigen, daß die Funktionen F',Φ',f' den Zählausdruck B in $\mathfrak{Z}$ erfüllen. Da aus (90) sofort $(y)(Ez)F'(y,z)$ folgt und aus (88) sich die Richtigkeit von $(x_1)(x_2)\dots(x_n)\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ergibt, so braucht nur gezeigt zu werden, daß (B_2) durch die Funktionen F',Φ',f' befriedigt wird. Dazu genügt es aber zu zeigen, daß

$$(y)(z)(u)(v)(w)(t)[\mathfrak{B}'(1,y,z)\,\&\,\mathfrak{C}'(1,y,z,u,v,w)\,\&\,\mathfrak{D}'(1,y,z,u,v,w,t)]$$

richtig ist, oder — was dasselbe bedeutet — daß:

$$(91)\qquad (y)(z)\mathfrak{B}'(1,y,z),$$

$$(92)\qquad (y)(z)(u)(v)(w)\mathfrak{C}'(1,y,z,u,v,w),$$

$$(93)\qquad (y)(z)(u)(v)(w)(t)\mathfrak{D}'(1,y,z,u,v,w,t)$$

---

[59]) Man beachte, daß die Funktion $2^{x-1}\cdot(2y+1)$ den Bedingungen a), b) aus Definition 4 genügt. Das Bestehen von a) ergibt sich etwa so:

$$2^{x-1}\cdot(2y+1)>2^x\cdot y>x,y.$$

richtig sind. Die Ausdrücke (91), (92) und (93) lauten aber (der Reihe nach aufgeschrieben):

$$(y)(z)(y=2\ \&\ z=y+1\rightarrow z=3),$$

$$(y)(z)(u)(v)(w)(y=2z+1\ \&\ u=z+1\ \&\ v=y+1\ \&$$
$$\&\, w=v+1\ \rightarrow\ w=2u+1),$$

$$(y)(z)(u)(v)(w)(t)(u=2^{y-1}(2z+1)\ \&\ v=2u+1\ \&\ v=t+1\ \&$$
$$\&\, w=y+1\rightarrow t=2^{w-1}(2z+1))$$

und stellen offenbar Identitäten dar.

Ist, umgekehrt, der Zählausdruck B erfüllbar und F^*,Φ^*,f^* irgend ein Erfüllungssystem von B in einem Individuenbereich $\mathfrak{I}$, so gibt es in $\mathfrak{I}$ ein Element a und eine in $\mathfrak{I}$ definierte mathematische Funktion $\varphi(x)$, derart daß die Ausdrücke

$$(y)F^*(y,\varphi(y)),$$

$$(y)(z)(u)(v)(w)(t)[\mathfrak{B}^*(a,y,z)\&\mathfrak{C}^*(a,y,z,u,v,w)\&\mathfrak{D}^*(a,y,z,u,v,w,t)],$$

$$(x_1)(x_2)\dots(x_n)\mathfrak{A}^*(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

in $\mathfrak{I}$ richtig sind. Wir ordnen jetzt eindeutig jeder Zahl x aus $\mathfrak{Z}$ ein Element $\{x\}$ aus $\mathfrak{I}$ rekursiv durch folgende Festsetzungen zu:

$$\{1\}=a,\qquad \{x+1\}=\varphi\{x\}$$

und definieren in $\mathfrak{Z}$ drei logische Funktionen F'',Φ'',f'', wie folgt:

$$F''(x,y)\equiv F^*(\{x\},\{y\}),\qquad \Phi''(x,y,z)\equiv\Phi^*(\{x\},\{y\},\{z\}),\qquad f''(x)\equiv f^*(\{x\}).$$

Diese drei Funktionen bilden eine Erfüllung von B in $\mathfrak{Z}$ und es gelten in $\mathfrak{Z}$ — wie leicht einzusehen — sogar die Aussagen:

(94) $$(y)F''(y,y+1),$$

(95) $$(y)(z)(u)(v)(w)(t)[\mathfrak{B}''(1,y,z)\&\mathfrak{C}''(1,y,z,u,v,w)\&\mathfrak{D}''(1,y,z,u,v,w,t)],$$

(96) $$(x_1)(x_2)\dots(x_n)\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Aus (95) folgt die Richtigkeit der folgenden drei Aussagen:

(97) $$(y)(z)(F''(1,y)\&F''(y,z)\rightarrow\Phi''(z,1,1)),$$

(98) $$(y)(z)(u)(v)(w)(\Phi''(y,1,z)\&F''(z,u)\&$$
$$\&F''(y,v)\&F''(v,w)\rightarrow\Phi''(w,1,u)),$$

(99) $$(y)(z)(u)(v)(w)(t)(\Phi''(u,y,z)\&\Phi''(v,1,u)\&$$
$$\&F''(t,v)\&F''(y,w)\rightarrow\Phi''(t,w,z)).$$

Setzt man in (97) $y=2$ und $z=3$, so ergibt sich sofort

(100) $$\Phi''(3,1,1),$$

da ja $F''(1,2)\&F''(2,3)$ wegen (94) richtig ist. Wir zeigen jetzt durch Induktion nach z, daß für jede natürliche Zahl z

(101) $$\Phi''(2z+1,1,z)$$

besteht. Für $z=1$ besteht (101) wegen (100). Angenommen, es gelte (101) für irgend eine Zahl z, so zeigen wir dasselbe für $z+1$. Setzt nämlich man in (98):

$$y=2z+1,\qquad u=z+1,\qquad v=y+1,\qquad w=v+1,$$

so geht das Vorderglied in

$$\Phi''(2z+1,1,z)\&F''(z,z+1)\&F''(y,y+1)\&F''(v,v+1)$$

über, was wegen der Induktionsannahme und (94) eine richtige Aussage darstellt. Das Hinterglied von (98) geht aber, wie leicht zu berechnen, in $\Phi''(2z+3,1,z+1)$ über, womit, da $2z+3=2(z+1)+1$ ist, (101) durch Induktion bewiesen ist.

Wir zeigen jetzt durch Induktion nach y, daß für jede natürliche Zahl y und z

(102) $$\Phi''(2^{y-1}(2z+1),y,z)$$

besteht. Für $y=1$ besteht (102) wegen (101). Angenommen, es gelte (102) für irgend eine Zahl y und für jede Zahl z, so zeigen wir dasselbe für $y+1$. Setzt man nämlich in (99):

$$u=2^{y-1}\cdot(2z+1),\qquad v=2u+1,\qquad t=v-1,\qquad w=y+1,$$

so geht das Vorderglied in

$$\Phi''(2^{y-1}(2z+1),y,z)\ \&\ \Phi''(2u+1,1,u)\&F''(v-1,v)\&F''(y,y+1)$$

über, was aber wegen der Induktionsannahme, nach (101) und (94) eine richtige Aussage darstellt. Das Hinterglied ist also auch richtig und stellt — wie leicht zu berechnen — die Aussage $\Phi''(2^y(2z+1),y+1,z)$ dar, womit (102) durch Induktion bewiesen ist.

Aus (102) folgt sofort die Richtigkeit von $(y)(z)(Ex)\Phi''(x,y,z)$, was mit (96) zusammen die Richtigkeit von

$$(y)(z)(Ex)\Phi''(x,y,z)\&(x_1)(x_2)\dots(x_n)\mathfrak{A}''(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

ergibt. Damit ist gezeigt, daß die Funktionen Φ'', f'' den Zählausdruck A in $\mathfrak{Z}$ erfüllen. Die Zählausdrücke A und B sind also gleichwertig und der Satz 43 bewiesen.

Bezeichnet man mit C den Zählausdruck, welcher aus B entsteht, indem man für $\Phi(x,y,z)$ allenthalben $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ einsetzt, so ist C mit den beiden Zählausdrücken A, B gleichwertig. Es genügt natürlich nur zu zeigen, daß B mit C gleichwertig ist.

Ist der Zählausdruck B erfüllbar, so hat er — wie bereits gezeigt — ein solches Erfüllungssystem F', Φ', f' im Bereich der natürlichen Zahlen, für welches (89) gilt. Aus (89) folgt aber leicht das Bestehen von $(x)(y)(z)(u)(v)[\Phi'(x,y,u)\,\&\,\Phi'(x,v,z) \rightarrow \Phi'(x,y,z)]$, und daher läßt sich die Funktion $\Phi'(x,y,z)$ wegen des Satzes 4 aus $\boldsymbol{P}_1$ in der Form $R_1'(x,y)\,\&\,R_2'(x,z)$ darstellen. Die Funktionen F', R_1', R_2', f' erfüllen dann offensichtlich den Zählausdruck C in $\mathfrak{Z}$.

Ist umgekehrt der Zählausdruck C erfüllbar und F'', R_1'', R_2'', f'' irgend ein Erfüllungssystem von C in irgend einem Individuenbereich, so erfüllen die Funktionen $F'', R_1''(x,y)\,\&\,R_2''(x,z), f''$ offenbar den Zählausdruck B in demselben Individuenbereich.

Die Zählausdrücke B, C sind also tatsächlich gleichwertig.

Da der Zählausdruck C nur die Funktionsvariablen F, R_1, R_2, f enthält, die zwei- und einstellig sind, so haben wir auch den

Satz 44. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf binäre Zählausdrücke in der Ackermannschen Form*

$$(y)(Ez)F(y,z)\,\&\,(Ex)(u_1)(u_2)\ldots(u_n)\mathfrak{U}(x,u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

beschränken, die außer der zweistelligen Funktionsvariablen F nur noch zwei zweistellige und eine einstellige Funktionsvariable enthalten.

Sur les fonctions indépendantes II.

Par

J. Marcinkiewicz (Wilno).

1. MM. W. Feller[1]) et P. Lévy[2]) ont trouvé des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de variables aléatoires indépendantes satisfasse à la loi de grands nombres ou à celle de Gauss. Les démonstrations des ces résultats importants donneés par ces deux auteurs sont bien différentes, mais il est très remarquable que, dans chacune d'elles, l'idée principale est la même pour la loi de grands nombres et celle de Gauss.

Il me semble que cela s'explique par le fait que ces résultats sont des conséquences particulières d'un principe général contenu dans le théorème suivant que j'ai démontré dans la première partie de cet ouvrage[3]):

Théorème A. *Etant donné pour chaque n un système de fonctions indépendantes $x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \ldots$, pour que les distribuantes des sommes $\sum_\nu x_{n,\nu}$ convergent vers une fonction $V(x)$ jouissant d'une fonction caractéristique entière, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\sum_\nu \left|\mathop{\mathrm{E}}_t\left(|X_{n,\nu}-\lambda_{n,\nu}|\geqslant K_n\right)\right| \to 0, \tag{1.1}$$

$$\int_0^1 \Big(\sum_\nu x'_{n,\nu}\Big)^k dt \to \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\, dV(x) \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{1.2}$$

où les nombres $K_1, K_2, \ldots$ sont des constantes convenables, $\lambda_{n,\nu}$ satisfont aux inégalités:

$$\left|\mathop{\mathrm{E}}_t(x_{n,\nu}\geqslant\lambda_{n,\nu})\right|\geqslant 1/2, \qquad \left|\mathop{\mathrm{E}}_t(x_{n,\nu}\leqslant\lambda_{n,\nu})\right|\geqslant 1/2$$

et $x'_{n,\nu}$ sont définis par la condition:

$$x'_{n,\nu}=\begin{cases} x_{n,\nu} & \text{lorsque } |x_{n,\nu}|\leqslant K_n,\\ 0 & \text{lorsque } |x_{n,\nu}|> K_n,\end{cases}$$

---

1) Feller [1], [2].

2) Lévy [1], [2], en particulier p. 107.

3) Cf. ce volume, p. 209.