Or, on a l'identité

$$(6)\qquad A_1A_2\ldots A_p\cdot CB_1\cdot CB_2\ldots CB_q=$$
$$=A_1-[(A_1-A_2)+(A_1-A_3)+\ldots+(A_1-A_p)+B_1+B_2+\ldots+B_q]$$

et on en conclut d'après (5) que (6) est un ensemble de la famille $\Phi_{\varrho s\varrho}$.

Ainsi, E est une somme d'un nombre fini d'ensembles de la famille $\Phi_{\varrho s\varrho}$; c'est donc un ensemble de la famille $\Phi_{\varrho s\varrho s}$.

Nous avons ainsi établi que $\Phi_{\varrho s\varrho s\varrho}\subset\Phi_{\varrho s\varrho s}$.

Or, on a évidemment $\Phi_{\varrho s\varrho s}\subset\Phi_{\varrho s\varrho s\varrho}$. L'égalité (1) est ainsi établie, c. q. f. d.

On peut évidemment exprimer notre théorème de la façon suivante:

La plus petite famille d'ensembles contenant une famille donnée Φ et close par rapport aux opérations ϱ et s est la famille $\Phi_{\varrho s\varrho s}$.

Comme on sait, *on ne peut pas remplacer dans cet énoncé l'opération s par l'opération σ* (la sommation finie ou dénombrable d'ensembles), puisqu'il est en défaut p. ex. pour la famille Φ de tous les intervalles rectilignes (car il existe des ensembles mesurables B qui ne sont pas des $F_{\varrho\sigma\varrho\sigma}$). Or, il résulte tout de suite du théorème précité de M-elle Piccard (th. II) que l'*on peut remplacer dans notre énoncé l'opération s par l'opération Σ* (la sommation finie ou infinie quelconque, même indénombrable, d'ensembles).

Une construction du plus petit corps Ψ d'ensembles contenant une famille donnée Φ d'ensembles a été donnée par M. F. Hausdorff dans son livre *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 16. M. Hausdorff construit d'abord le plus petit anneau Θ d'ensembles contenant Φ (en appelant *anneau* toute famille d'ensembles qui contient la somme et le produit de tout couple d'ensembles qu'elle contient) et montre ensuite qu'on a $\Psi=\Theta_{\varrho s}$. Pour la famille Θ, M. Hausdorff donne la formule $\Theta=\Phi_{ds}=\Phi_{sd}$, où Φ_d désigne la famille de tous les produits finis d'ensembles de la famille Φ. Ainsi la formule pour Ψ, trouvée par M. Hausdorff, est $\Psi=\Phi_{ds\varrho s}=\Phi_{sd\varrho s}$. Quant à la relation de la famille Φ_d aux familles de la suite $\Phi_\varrho, \Phi_{\varrho s}, \Phi_{\varrho s\varrho}, \ldots$, on trouve sans peine que $\Phi_d\subset\Phi_{\varrho s\varrho}$, l'inclusion $\Phi_d\subset\Phi_{\varrho s}$ pouvant être en défaut. Or, on peut démontrer que $\Psi=\Phi_{\varrho ds}$.

Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications à la théorie des espaces connexes [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Dans tout ce qui suit, l'espace $\mathcal{X}$ sera supposé métrique séparable.

1. ***Familles monotones d'ensembles fermés.*** Une famille d'ensembles est dite *monotone*, lorsqu'on a pour chaque couple A,B de ses éléments soit $A\subset B$, soit $B\subset A$. Une famille monotone sera considérée comme *ordonnée*: nous dirons que A *précède* B lorsque $A\subset B$ et $A\neq B$.

D'après un théorème de M. Sierpiński [2]), *dans toute famille monotone $\boldsymbol{F}$ d'ensembles fermés, chaque élément de $\boldsymbol{F}$, sauf une infinité dénombrable, est la fermeture de la somme de tous les éléments qui le précèdent et le produit de tous les éléments qui le suivent.*

Pour s'en convaincre, désignons par $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace $\mathcal{X}$ et, par A^* l'ensemble formé par la réunion de tous les éléments de $\boldsymbol{F}$ qui précèdent A. A chaque A tel que $A\neq\overline{A^*}$ faisons correspondre un indice $n(A)$ satisfaisant à la condition $A\cdot R_{n(A)}\neq 0=A^*\cdot R_{n(A)}$. Si $A\neq B\neq\overline{B^*}$, on a $n(A)\neq n(B)$. La famille de tous les éléments A tels que $A\neq\overline{A^*}$ est donc dénombrable [3]).

Le cas des éléments qui ne coïncident pas avec le produit des éléments qui le suivent est analogue.

---

[1]) Présenté au III Congrès des Mathématiciens Polonais à Varsovie, le 30. IX. 1937.

[2]) Bull. de l'Acad. Polon. des Sc. 1921, p. 62. Le théorème de M. Sierpiński contient comme des cas particuliers les théorèmes classiques de Baire sur les familles bien ordonnées d'ensembles fermés (croissants ou décroissants).

[3]) Nous entendons par *dénombrable* tout ensemble de puissance $\leqslant\aleph_0$.

Théorème 1. *Toute famille monotone F d'ensembles fermés, considérée comme ordonnée, admet une partie dense dénombrable, c. à d. contient une suite (finie ou infinie) $D_1, D_2, \ldots$ telle qu'à chaque couple $A \subset B$ d'éléments distincts extraits de F correspond un D_n tel que $A \subset D_n \subset B$.*

Démonstration. On peut admettre que l'espace $\mathcal{X}$ est totalement borné (c. à d. que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il est somme d'un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \varepsilon$), car on peut imaginer $\mathcal{X}$ comme sous-ensemble du cube fondamental de Hilbert. L'espace $2^{\mathcal{X}}$ de tous les sous-ensembles fermés de $\mathcal{X}$, métrisé par la distance de M. Hausdorff[4]), est alors séparable[5]); il en est donc de même de l'ensemble F qui contient par conséquent un ensemble dénombrable D dense dans F (toujours dans le sens de la distance de M. Hausdorff).

Soit $D_1, D_2, \ldots$ la suite composée de tous les éléments de D et de tous les éléments qui admettent dans F un élément „voisin" (l'ensemble de ces derniers étant dénombrable selon le théorème de M. Sierpiński). C'est bien la suite demandée.

Soit, en effet, $A \subset B$ et $A \neq B$. Il s'agit de définir un D_n tel que $A \subset D_n \subset B$. Il est donc légitime d'admettre que le couple A, B ne constitue pas un saut, c. à d. qu'il existe dans F un C pour lequel on a $A \subset C \subset B$ et $A \neq C \neq B$, d'où $\mathrm{dist}(A,C) \neq 0 \neq \mathrm{dist}(C,B)$. Soit D_n un élément de D tel que $\mathrm{dist}(C,D_n) < \mathrm{dist}(A,C)$ et $\mathrm{dist}(C,D_n) < \mathrm{dist}(C,B)$. Il vient $B \not\subset D_n \not\subset A$, car, d'une façon générale, la double inclusion $X \subset Y \subset Z$ implique que

$$\mathrm{dist}(X,Y) \leqslant \mathrm{dist}(X,Z) \quad \text{et} \quad \mathrm{dist}(Y,Z) \leqslant \mathrm{dist}(X,Z).$$

On en conclut que $A \subset D_n \subset B$, la famille F étant monotone.

Corollaire 1. *F étant une famille monotone d'ensembles fermés, on peut munir chaque élément A de F d'un indice y tel que $0 \leqslant y \leqslant 1$ et que l'inégalité $y_1 < y_2$ équivale à la relation: $A_{y_1} \subset A_{y_2}$, $A_{y_1} \neq A_{y_2}$.*

En outre, J désignant l'ensemble de ces indices, les extrémités des intervalles contigus à $\bar{J}$ appartiennent à J; si F contient le premier ou le dernier élément, ces éléments sont munis des indices 0 ou 1 respectivement.

[4]) Si $A \subset B$, la distance de A et B est la borne supérieure des distances de x à A, x parcourant B.

[5]) Voir ma *Topologie I*, p. 91.

C'est une conséquence directe du théorème de la Théorie générale des ensembles ordonnés, d'après lequel, F étant un ensemble ordonné qui admet une partie dense dénombrable D, il existe une correspondance φ entre F et un sous-ensemble de l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$ qui conserve l'ordre des éléments; cette correspondance peut être assujettie à la condition supplémentaire énoncée dans le corollaire[6]).

La correspondance φ en question se laisse définir comme suit. Soit $d_0, d_1, \ldots$ la suite composée de tous les éléments de la partie dense dans F et de tous les éléments de F qui admettent un élément voisin. Supposons, ce qui est évidemment légitime, que F contient un premier élément d_0 et un dernier élément d_1.

Posons $\varphi(d_0) = 0$, $\varphi(d_1) = 1$ et $\varphi(d_n) = \frac{1}{2}[\varphi(d_k) + \varphi(d_l)]$, où (pour $n > 1$) d_k, d_l désigne le couple des éléments voisins dans le système $d_0, \ldots, d_{n-1}$ tels que $d_k \prec d_n \prec d_l$. Enfin, pour $a \in F - D$, soit $\varphi(a)$ la borne inférieure des nombres $\varphi(d_n)$ où $a \prec d_n$.

La fonction φ ainsi définie établit la correspondance demandée.

En effet, on démontre par induction pour chaque n que, d_j, d_q étant deux éléments voisins dans le système $d_0, \ldots, d_{n-1}$, il existe un s tel que $|\varphi(d_j) - \varphi(d_q)| = 1/2^s$. On conclut de là que, si $\varphi(d_n) = i/2^m$ où i est impair, on a $\varphi(d_k) = (i-1)/2^m$ et $\varphi(d_l) = (i+1)/2^m$, k et l ayant le même sens qu'auparavant.

Soit, u, v un intervalle contigu à $\bar{J}$. Soit m le plus grand entier tel qu'il existe dans la suite $\varphi(d_0), \varphi(d_1), \ldots$ deux nombres de la forme $i/2^m$ et $(i+1)/2^m$ satisfaisant à la condition $i/2^m \leqslant u < v \leqslant (i+1)/2^m$. L'un des deux nombres i ou $i+1$, soit i, est impair; désignons par n l'indice tel que $\varphi(d_n) = i/2^m$. Il existe par conséquent un $l < n$ tel que $\varphi(d_l) = (i+1)/2^m$ et que dans le système $d_0, \ldots, d_n$, les éléments d_n et d_l sont voisins. Nous en concluons que $i/2^m = u$ et $(i+1)/2^m = v$.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, il existe un d_s tel que $d_n \prec d_s \prec d_l$; s étant le plus petit indice possible, il vient $\varphi(d_s) = (2i+1)/2^{m+1}$. Conformément à la définition du nombre m, on a $u < (2i+1)/2^{m+1} < v$; mais ceci contredit l'hypothèse que u, v est un intervalle contigu.

En employant les notations du cor. 1, le théorème de M. Sierpiński s'énonce comme il suit: *abstraction faite d'un ensemble dénombrable d'indices, on a pour chaque y*

$$(1) \quad A_y = \overline{\sum_{u<y} A_u}, \qquad\qquad (2) \quad A_y = \prod_{z>y} A_z.$$

En outre, en considérant A_y comme fonction de y (dont les valeurs sont des sous-ensembles fermés de $\mathcal{X}$), la condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit *continue du côté gauche au point y* (c. à d. que les conditions $\lim u_n = y$, $u_n < y$ entraî-

[6]) Voir ma note des Fund. Math. 3 (1921), p. 215.

nent $\operatorname{Lim} A_{u_n} = A_y$ [7])) est qu'on ait $A_y = \overline{\sum_{u<y} A_u}$, à moins que A_y n'admette un élément qui le précède immédiatement (ou bien que $y=0$). D'une façon analogue, la continuité *du côté droit* s'exprime par l'égalité $A_y = \prod_{z>y} A_z$.

C'est une conséquence du fait, que lorsque $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, on a $\overline{\sum X_n} = \operatorname{Lim} X_n$, et lorsque $X_1 \supset X_2 \supset \dots$, on a $\prod \overline{X}_n = \operatorname{Lim} X_n$.

On parvient donc en vertu de (1) et (2) à la conclusion, que *les points de discontinuité de la fonction A_y constituent un ensemble dénombrable.*

Corollaire 2. *F étant une famille monotone d'ensembles fermés, on a pour chaque y, abstraction faite d'un ensemble dénombrable de ces indices*

$$\operatorname{Int}(A_y) = \sum_{u<y} \operatorname{Int}(A_u) \quad [8]. \tag{3}$$

En effet, la famille des ensembles $B_y = \overline{\mathcal{X} - A_y}$ étant monotone, la famille des B_y tels que $B_y \neq \prod_{u<y} B_u$, c. à d. tels que $\operatorname{Int}(A_y) \neq \sum_{u<y} \operatorname{Int}(A_u)$, est dénombrable. Il suffit de prouver que, si $y' < y$ et $B_{y'} = B_y$, on a $B_y = \prod_{u<y} B_u$. Or cette égalité résulte de la double inclusion

$$B_y \subset \prod_{u<y} B_u \subset B_{y'}.$$

2. *Familles strictement monotones.* Nous dirons qu'une famille d'ensembles (fermés) est *strictement monotone*, lorsqu'on a pour chaque couple A, B de ses éléments soit $A \subset \operatorname{Int}(B)$, soit $B \subset \operatorname{Int}(A)$. Les éléments de la famille considérée étant munis d'indices (conformément au cor. 1), la monotonie stricte signifie que l'inégalité $y_1 < y_2$ entraîne l'inclusion $A_{y_1} \subset \operatorname{Int}(A_{y_2})$.

F étant une famille strictement monotone d'ensembles fermés, on a pour chaque y, abstraction faite d'un ensemble dénombrable:

$$A_y = \prod_{z>y} A_z = \prod_{z>y} \operatorname{Int}(A_z), \tag{4}$$

$$A_y = \overline{\sum_{u<y} A_u} = \overline{\operatorname{Int}(A_y)}, \tag{5}$$

[7]) La limite d'ensembles est entendue ici dans le sens de la limite topologique. Cf. par. ex. *Topologie I*, p. 155.

[8]) $\operatorname{Int}(X)$ désigne *l'intérieur* de X: $\operatorname{Int}(X) = X - \overline{\mathcal{X} - X}$.

$$\operatorname{Int}(A_y) = \sum_{u<y} \operatorname{Int}(A_u) = \sum_{u<y} A_u, \tag{6}$$

$$\overline{\mathcal{X} - A_y} = \prod_{u<y} \overline{\mathcal{X} - A_u} = \prod_{u<y} (\mathcal{X} - A_u). \tag{7}$$

La formule (4) résulte de (2) en vertu de l'inclusion $A_y \subset \operatorname{Int}(A_z) \subset A_z$. La formule (5) est une conséquence de (1); elle signifie que A_y est un *domaine fermé.* Les formules (6) et (7), qui sont équivalentes, résultent de (3) en vertu de l'inclusion $\operatorname{Int}(A_u) \subset A_u \subset \operatorname{Int}(A_y)$.

En combinant les formules (4) et (7), on obtient des formules pour la *frontière* de A_y (c. à d. pour l'ensemble $\operatorname{Fr}(A_y) = A_y \cdot \overline{\mathcal{X} - A_y}$). On a ainsi

$$\operatorname{Fr}(A_y) = \prod_{z>y} \operatorname{Int}(A_z) - \sum_{u<y} A_u, \tag{8}$$

ou encore (cf. (2) et (7)): il existe deux suites d'indices

$$u_1 < u_2 < \dots < y < \dots < z_2 < z_1$$

telles que

$$\operatorname{Fr}(A_y) = \prod_n [\operatorname{Int}(A_{z_n}) - A_{u_n}] = \prod_n A_{z_n} \cdot \overline{\mathcal{X} - A_{u_n}}. \tag{9}$$

3. *Rapports aux fonctions continues.*

Théorème 2. *Etant donnée une transformation continue $y = f(x)$ de l'espace $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ de l'intervalle 01, la famille F des ensembles*

$$f^{-1}(0y) = \underset{x}{E}\,[0 \leqslant f(x) \leqslant y],$$

où y parcourt $\mathcal{Y}$, est strictement monotone et, pour chaque y qui n'admet pas d'élément qui le suit immédiatement, $f^{-1}(0y)$ est le produit de tous les éléments qui le suivent, c. à d. que

$$f^{-1}(0y) = \prod_{z>y} f^{-1}(0z),$$

la variabilité de z étant restreinte à $\mathcal{Y}$.

Soient, en effet, $y_1 < y_2$ deux éléments de $\mathcal{Y}$. L'inclusion évidente $0y_1 \subset 0y_2 - y_2 = \operatorname{Int}(0y_2)$ entraîne

$$f^{-1}(0y_1) \subset f^{-1}[\operatorname{Int}(0y_2)] \subset \operatorname{Int}[f^{-1}(0y_2)] \quad [9]).$$

La famille F est donc strictement monotone.

[9]) L'inclusion $f^{-1}[\operatorname{Int}(B)] \subset \operatorname{Int}[f^{-1}(B)]$ est valable pour chaque fonction continue f. L'intérieur $\operatorname{Int}(0y)$ est entendu par rapport à l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Admettons que y ne soit pas le dernier élément de $\mathcal{Y}$ et que parmi les $z>y$ il n'existe pas de plus petit dans $\mathcal{Y}$. Par conséquent $\mathcal{Y}\cdot(0y)=\prod\limits_{z>y}\mathcal{Y}\cdot(0z)$; d'où $f^{-1}(0y)=f^{-1}[\prod\limits_{z>y}\mathcal{Y}\cdot(0z)]=\prod\limits_{z>y}f^{-1}(0z)$.

Théorème 3. *$\boldsymbol{F}$ étant une famille strictement monotone d'ensembles fermés munis d'indices conformément au cor. 1 (et où $A_1=\mathfrak{X}$), il existe une fonction continue f à valeurs réelles définie sur l'espace $\mathfrak{X}$ et telle qu'on a, pour chaque indice $y<1$,*

$$A_y=f^{-1}(0y) \quad \textit{ou bien} \quad \prod_{z>y}A_z=f^{-1}(0y), \tag{10}$$

suivant que A_y admet ou non un élément qui le suit immédiatement dans $\boldsymbol{F}$.

La fonction f se laisse définir comme il suit: $(A_{r_1},A_{s_1}),(A_{r_2},A_{s_2}),\ldots$ désignant la suite des sauts, posons $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{X}-\sum[\mathrm{Int}(A_{s_n})-A_{r_n}]$ et

1⁰ pour $x\in\mathfrak{X}^*$

$$f(x)=\text{borne inférieure des } y \text{ tels que } x\in A_y,$$

2⁰ pour $x\in\mathrm{Int}(A_{s_n})-A_{r_n}$

$$f(x)=r_n+(s_n-r_n)\,\frac{\varrho(x,A_{r_n})}{\varrho(x,A_{r_n})+\varrho[x,\mathfrak{X}-\mathrm{Int}(A_{s_n})]}\ ^{10}).$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous allons démontrer d'abord que la fonction f est continue sur $\mathfrak{X}^*$. Notons a ce but la double implication évidente

$$[f(x)<y]\rightarrow[x\in A_y]\rightarrow[f(x)\leqslant y], \tag{11}$$

valable pour chaque y appartenant à l'ensemble J des indices.

Or, soit $\lim x_n=x$, $x_n\in X^*$, $f(x)=q$ et $\lim f(x_n)=q'$. Il s'agit de démontrer que $q'=q$.

Pour prouver que $q'\geqslant q$, il y a deux cas à distinguer, suivant que q est l'extrémité droite d'un intervalle contigu à $\bar{J}$ ou non. Dans le premier cas, on a $q\in J$ selon le cor. 1; soit r l'extrémité gauche de l'intervalle contigu envisagé (on a aussi $r\in J$). Comme x n'appartient pas à A_r, il en est de même pour x_n avec n suffisamment grand; d'où $f(x_n)\geqslant q$ et par conséquent $q'\geqslant q$.

[10]) Cette formule fournit une *interpolation* de la fonction f définie par la condition 1⁰; c. à d. que l'on a $f(x)\leqslant r_n$ pour $x\in A_{r_n}$, $r_n<f(x)<s_n$ pour $x\in\mathrm{Int}(A_{s_n})-A_{r_n}$ et $f(x)\geqslant s_n$ pour $x\in X-\mathrm{Int}(A_{s_n})$.

Ajoutons que, lorsque $E=0$, on pose $\varrho(x,E)=1$.

Soit, dans le cas où q n'est pas une extrémité droite d'un intervalle contigu, $y_1<y_2<\ldots$, $\lim y_n=q$ et $y_n\in J$. Pour n fixe, on a x non-$\in A_{y_n}$, donc, pour k suffisamment grand, x_k non-$\in A_{y_n}$, d'où $f(x_k)\geqslant y_n$. Il en résulte que $q'\geqslant q$.

La démonstration de l'inégalité $q'\leqslant q$ est analogue. Dans le cas où q est l'extrémité gauche d'un intervalle contigu $\langle q,s\rangle$, on a, pour n suffisamment grand, $x_n\in A_q$, car les formules $x_n\in\mathfrak{X}^*$ et x_n non-$\in A_q$ impliquent x_n non-$\in\mathrm{Int}(A_s)$, tandis que $x\in A_q\subset\mathrm{Int}(A_s)$. Il vient $f(x_n)\leqslant q$ et $q'\leqslant q$.

Dans le cas contraire, soit $y_1>y_2>\ldots$, $\lim y_n=q$ et $y_n\in J$. Pour n fixe, on a $x\in A_{y_{n+1}}\subset\mathrm{Int}\,A_{y_n}$. Donc, pour k suffisamment grand, $x_k\in A_{y_n}$, d'où $f(x_k)\leqslant y_n$ et $q'\leqslant q$.

La continuité de la fonction f sur $\mathfrak{X}^*$ étant ainsi établie, il s'agit de prouver que $\{x_n\}$ étant une suite d'éléments extraits de $A_{s_{m_n}}-A_{r_{m_n}}$, convergente vers x, on a $f(x)=\lim f(x_n)$.

Or, il est légitime d'admettre que $r_{m_1}<r_{m_2}<\ldots$, d'où, en posant, $q'=\lim r_{m_n}$, on a $q'=\lim f(x_n)$, puisque $r_{m_n}\leqslant f(x_n)\leqslant s_{m_n}\leqslant r_{m_{n+1}}$. Evidemment, x n'appartient à aucun $A_{r_{m_n}}$, d'où $f(x)\geqslant q'$. D'autre part, si $q'\leqslant y\in J$, on a $x\in\overline{\sum A_{s_{m_n}}}\subset A_y$, car $s_{m_n}\leqslant q'$; donc $f(x)\leqslant y$ et par suite $f(x)\leqslant q'$.

Afin d'établir la formule (10), remarquons que l'on a selon (11):

$$A_y\subset f^{-1}(0y) \quad \text{et, pour} \quad y<z\in J,\ f^{-1}(0y)\subset A_z. \tag{12}$$

Or, dans le cas où y est l'extrémité gauche d'un intervalle contigu, l'inclusion $f^{-1}(0y)\subset A_y$ est une conséquence directe de 1⁰ et 2⁰. Dans le cas contraire, posons $y=\lim z_n$, $z_1>z_2>\ldots$ Il vient, selon (12)

$$\prod_{z>y}A_z=\prod_{n=1}^{\infty}A_{z_n}\subset\prod_{n=1}^{\infty}f^{-1}(0z_n)\subset\prod_{n=2}^{\infty}A_{z_{n-1}}=\prod_{z>y}A_z$$

et comme $(0y)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}(0z_n)$, on a $f^{-1}(0y)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}f^{-1}(0z_n)=\prod\limits_{z>y}A_z$.

Conséquences du th. 3.

$$f^{-1}(0y-y)\subset\mathrm{Int}(A_y)\subset A_y\subset f^{-1}(0y), \tag{13}$$

$$\mathrm{Fr}(A_y)\subset f^{-1}(y)\subset\prod_{z>y}A_z-\sum_{u<y}A_u\subset\prod_{z>y}A_z-\sum_{u<y}\mathrm{Int}(A_u), \tag{14}$$

(15) *si y n'admet pas d'élément qui le précède immédiatement,*

$$f^{-1}(0y-y)=\sum_{u<y}\mathrm{Int}(A_u), \quad c.\ à\ d. \quad f^{-1}(y1)=\prod_{u<y}\overline{\mathcal{X}-A_u},$$

(16) *si y n'admet pas d'élément voisin et $0<y<1$, on a*

$$f^{-1}(y)=\prod_{u<y}\overline{\mathcal{X}-A_u}\cdot\prod_{z>y}A_z,$$

(17) *abstraction faite de $\aleph_0$ éléments A_y de F, on a toujours:*

$$A_y=f^{-1}(0y), \quad \mathrm{Int}(A_y)=f^{-1}(0y-y), \quad \mathcal{X}-A_y=f^{-1}(y1-y),$$

$$\mathrm{Fr}(A_y)=f^{-1}(y)=\overline{f^{-1}(0y-y)}\cdot\overline{f^{-1}(y1-y)},$$

(18) *si* $\sum_{y<1}A_y=A_0+\sum_{0<y<1}\mathrm{Fr}(A_y)$, *on a* $\mathrm{Fr}(A_y)=f^{-1}(y)$ *pour* $0\neq y\neq 1$.

Afin d'établir (13), posons $u=f(x)<y$, d'où $x\,\epsilon\, f^{-1}(0u)$. Si y admet un élément précédent voisin, on a $f^{-1}(0u)\subset\mathrm{Int}(A_y)$. Si $u<v<y$ et $v\,\epsilon\, J$, il vient $f^{-1}(0u)\subset A_v\subset\mathrm{Int}(A_y)$. Donc $f^{-1}(0y-y)\subset\mathrm{Int}(A_y)$. Le reste de la formule (13) est évident.

La formule (14) résulte de (13) et (10):

$$\mathrm{Fr}(A_y)=A_y-\mathrm{Int}(A_y)\subset f^{-1}(0y)-f^{-1}(0y-y)=f^{-1}(y)\subset f^{-1}(0y)\subset A_z$$

et $A_u\subset f^{-1}(0u)$, d'où $A_u\cdot f^{-1}(y)=0$.

Pour démontrer (15), posons $f(x)<u<y$, d'où $x\,\epsilon\, f^{-1}(0u-u)$ et selon (13), $x\,\epsilon\,\mathrm{Int}(A_u)$, donc $f^{-1}(0y-y)\subset\sum_{u<y}\mathrm{Int}(A_u)$. L'inclusion inverse résulte de (13).

La formule (16) résulte de (15) et (10).

D'après (4), (6), (10) et (15), on a, abstraction faite de $\aleph_0$ ensembles A_y:

$$A_y=\prod_{z>y}A_z=f^{-1}(0y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Int}(A_y)=\sum_{u<y}\mathrm{Int}(A_u)=f^{-1}(0y-y)$$

et, selon (5), $\mathrm{Fr}(A_y)=A_y\cdot\overline{\mathcal{X}-A_y}=\overline{\mathrm{Int}(A_y)}\cdot\overline{\mathcal{X}-A_y}$, d'où le reste de (17).

Enfin (18) se déduit de (14).

Le théorème 3 entraîne le

Corollaire. *Etant donnée une famille F de sous-ensembles fermés de $\mathcal{X}$, strictement monotone et telle que chaque élément de cette famille qui n'admet pas d'élément qui le suit immédiatement est le produit de tous les éléments qui le suivent, il existe une fonction continue f à valeurs réelles définie sur $\mathcal{X}$ et un ensemble $J\subset\langle 0,1\rangle$ tels que la famille F coïncide avec la famille des ensembles $f^{-1}(0y)$, où $y\,\epsilon\, J$.*

Applications aux espaces connexes.

Le N° 4 ne contiendra que des applications des énoncés des NN° 1 et 2. Les théorèmes du N° 3 seront appliqués dans les NN° 5-7.

$\mathcal{X}$ désignera désormais un espace *connexe* (métrique séparable).

4. *Coupures de l'espace.* C est dit une *coupure* (fermée) de $\mathcal{X}$ entre deux points a et b, lorsque $\mathcal{X}-C$ se décompose en deux ensembles ouverts et disjoints dont l'un contient a et l'autre b:

(19) $$\mathcal{X}-C=M+N, \quad MN=0, \quad a\,\epsilon\, M, \quad b\,\epsilon\, N.$$

La décomposition (19) n'est pas, en général, déterminée d'une façon univoque: tel est l'exemple où $\mathcal{X}$ se compose de trois segments ac, bc et dc n'ayant que le point c en commun.

Théorème 4. *Soit $\boldsymbol{C}$ une famille de coupures entre a et b, fermées, connexes et disjointes. En faisant correspondre à chaque $C\,\epsilon\,\boldsymbol{C}$ deux ensembles ouverts $M(C)$ et $N(C)$ assujettis aux conditions (19) et en posant $A(C)=M(C)+C$, la famille F des ensembles $A(C)$, où C parcourt $\boldsymbol{C}$, est strictement monotone.*

En outre, si $C\neq D$, on a, soit $A(D)\subset M(C)$, soit $A(C)\subset M(D)$ [11].

Démonstration. Soit $C\neq D$ deux éléments de $\boldsymbol{C}$. Les ensembles $M(C)$ et $N(C)$ étant séparés et D étant un sous-ensemble connexe de leur somme, l'un d'eux contient D, tandis que l'autre en est disjoint. Admettons que $D\subset M(C)$. Nous allons démontrer que $M(D)\subset M(C)$.

On a d'abord $C\subset N(D)$. Car si cette inclusion était en défaut, on aurait $C\subset M(D)$ (pour la raison mentionnée tout-à-l'heure). Or les formules

(20) $$\mathcal{X}=M(C)+C+N(C) \quad et \quad \mathcal{X}=M(D)+D+N(D)$$

entraînent $\mathcal{X}=M(C)+M(D)+C+D+N(C)\cdot N(D)$ et comme $D\subset M(C)$, l'hypothèse $C\subset M(D)$ entraînerait la décomposition de l'espace

$$\mathcal{X}=[M(C)+M(D)]+[N(C)\cdot N(D)]$$

---

[11]) On rapprochera ce théorème des énoncés qui se trouvent dans la Note de M. G. T. Whyburn, *Non-separated cuttings of connected point sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), p. 444 ss. La démonstration du théorème est une reproduction d'un raisonnement contenu dans cette Note. Il est à remarquer que l'hypothèse de la connexité des ensembles-éléments de $\boldsymbol{C}$ peut être remplacée (comme le fait M. Whyburn), par l'hypothèse moins restrictive, à savoir que ces éléments „ne se séparent pas mutuellement", c. à d. que, quelle que soit la définition des ensembles ouverts M et N assujettis à la condition (19), l'on ait, soit $MD=0$, soit $ND=0$.

en deux ensembles ouverts, disjoints et non vides (contenant a et b respectivement), qui est incompatible avec l'hypothèse de la connexité de cet espace.

L'inclusion $C\subset N(D)$ établie, considérons la décomposition (qui résulte aussi de (20)):

$$\mathcal{X}=M(C)+N(D)+C+D+N(C)\cdot M(D)=[M(C)+N(D)]+[N(C)\cdot M(D)].$$

Ces deux sommandes étant ouverts et disjoints et le premier n'étant pas vide, il vient $N(C)\cdot M(D)=0$, d'où $M(D)\subset M(C)+C$ et comme $C\cdot M(D)=0$ (puisque $C\subset N(D)$), il vient finalement $M(D)\subset M(C)$.

Il en résulte que $A(D)=D+M(D)\subset M(C)\subset \mathrm{Int}[A(C)]$, puisque $M(C)$ est un sous-ensemble ouvert de $A(C)$.

D'une façon analogue, si l'on admet que $D\subset N(C)$, on en déduit que $C\subset M(D)$ et, par raison de symétrie, que

$$A(C)\subset M(D)\subset \mathrm{Int}[A(D)].$$

Le th. 4 étant ainsi établi, on parvient en le rapprochant du cor. 1, p. 18, et en tenant compte du fait que l'inégalité $C\neq D$ entraîne $A(C)\neq A(D)$, au suivant

Corollaire 1. *Les éléments C de la famille $\mathbf{C}$ peuvent être munis d'indices y tels que $0<y<1$ et que l'inégalité $u<y$ entraîne $M(C_u)\subset A(C_u)\subset M(C_y)$.*

Corollaire 2. *Abstraction faite d'un ensemble dénombrable d'éléments de la famille $\mathbf{C}$, chaque $C\in\mathbf{C}$ satisfait aux conditions suivantes:*

(21) $$\mathrm{Int}[A(C)]=M(C), \quad \textit{d'où} \quad \mathrm{Fr}[A(C)]=C,$$

(22) $$C=\mathrm{Fr}[M(C)]=\mathrm{Fr}[N(C)],$$

(23) *il existe deux suites $\{D_n\}$ et $\{E_n\}$ dans $\mathbf{C}$ telles que*
$$C=\prod_n M(D_n)\cdot N(E_n)=\prod_n A(D_n)\cdot\overline{\mathcal{X}-A(E_n)},$$

(24) *$M(C)$ et $N(C)$ est connexe.*

Démonstration. En vertu du corollaire précédent, on a

$$\sum_{u<y}\mathrm{Int}[A(C_u)]\subset M(C_y)\subset \mathrm{Int}[A(C_y)].$$

Si y satisfait à la condition (3), c. à d. si $\mathrm{Int}[A(C_y)]=\sum_{u<y}\mathrm{Int}[A(C_u)]$, il vient $\mathrm{Int}[A(C_y)]=M(C_y)$, d'où $\mathrm{Fr}[A(C_y)]=A(C_y)-\mathrm{Int}[A(C_y)]=C_y$.

La formule (21) établie, on en déduit en vertu de (5) que

$$C=\mathrm{Fr}[A(C)]=A(C)-\mathrm{Int}[A(C)]=$$
$$=\overline{\mathrm{Int}[A(C)]}-\mathrm{Int}[A(C)]=\mathrm{Fr}[\mathrm{Int}(A(C))]=\mathrm{Fr}[M(C)].$$

(23) résulte de (9) et (21):

$$C_y=\prod_n\{\mathrm{Int}[A(D_n)]-A(E_n)\}\subset\prod_n M(D_{n-1})N(E_n)\subset\prod_n A(D_{n-1})\overline{\mathcal{X}-A(E_n)}=C_y,$$

puisque selon le corollaire précédent, $A(D_n)\subset M(D_{n-1})$.

Enfin, comme nous allons voir, (23) entraîne (24).

Soit $M(C)=M_1+M_2$, deux ensembles ouverts et disjoints et $a\in M_1$. Il s'agit de prouver que $M_2=0$.

Les ensembles $M(C)$ et $N(C)$ étant séparés et $\mathcal{X}$ et C étant connexes, les ensembles $C+M(C)$ et $C+N(C)$ sont connexes[12]. Pour les mêmes raisons les ensembles $C+N(C)+M_1$ et $C+N(C)+M_2$ sont connexes. Or, l'ensemble $C+N(C)+M_1$ unissant les points a et b et E_n étant une coupure entre ces points, on a $E_n\cdot[C+N(C)+M_1]\neq 0$. Comme l'ensemble $A(E_n)$ précède $A(C)$, il vient $E_n\cdot N(C)=0$, donc $E_n\cdot M_1\neq 0$ et par conséquent $E_n\cdot M_2=0$. Les ensembles M_2 et $M_1+N(C)$ étant séparés, M_2+C est connexe et, d'après l'égalité précédente, disjoint de E_n. L'inclusion $C\subset N(E_n)$, qui résulte de (23), implique donc $M_2+C\subset N(E_n)$, d'où $M_2\subset N(E_n)$. D'autre part, selon le corollaire précédent, $M_2\subset A(C)\subset M(D_n)$, d'où

$$M_2\subset\prod_n M(D_n)\cdot N(E_n)=C$$

et comme $C\cdot M_2=0$, il vient $M_2=0$.

Le corollaire établi, on en déduit que *dans chaque famille de coupures connexes, fermées et disjointes, toute coupure — abstraction faite d'un ensemble dénombrable — coupe l'espace en deux ensembles connexes dont elle forme la frontière commune; elle est donc une coupure irréductible*[13].

---

[12]) D'après le th. VI, p. 210, du mémoire de M. Knaster et moi *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921).

[13]) Théorème établi pour le cas du plan dans ma note des Fund. Math. 6 (1924), p. 145 et pour le cas général par M. G. T. Whyburn dans sa note précitée p. 449. Un cas particulier de ce théorème, à savoir que *l'ensemble des points qui coupent un espace connexe en plus de deux parties est dénombrable* a été établi par M. Zarankiewicz et moi dans le Bull. Amer. Math. Soc. 1927, p. 571.

En effet, on montre facilement que

(*) $p_1, p_2, \ldots$ *étant une suite de points dense dans l'espace, chaque coupure de l'espace en est une coupure entre un couple* p_i, p_j.

La famille de coupures considérée se décompose par conséquent en une suite (dénombrable) de sous-familles $\boldsymbol{C}_{ij}$ de coupures entre p_i et p_j. Notre énoncé se déduit ainsi des propositions (22) et (24), l'irréductibilité étant une conséquence du fait que, si les ensembles $M(C)$ et $N(C)$ sont connexes et $C = \mathrm{Fr}[M(C)] = \mathrm{Fr}[N(C)]$, le complémentaire de tout vrai sous-ensemble X de C est connexe; car q étant un point de $C - X$, l'ensemble $M(C)+q+N(C)$ est connexe et $M(C)+q+N(C) \subset \mathcal{X} - X \subset \overline{M(C)+q+N(C)}$.

En vue des applications ultérieures, nous allons déduire à présent des th. 3 et 4 le théorème suivant:

Théorème 5. $\boldsymbol{C}$ *étant une famille de coupures entre a et b, fermées, connexes, disjointes et munies d'indice conformément au cor. 1 p. 26, il existe une transformation continue f de l'espace $\mathcal{X}$ en l'intervalle* 01 *(tout entier), telle que l'on ait $f(a)=0$, $f(b)=1$ et que pour chaque indice $y<1$, on ait soit $f^{-1}(0y) = A(C_y)$, soit $f^{-1}(0y) = \prod\limits_{z>y} A(C_z)$, suivant que l'indice y admet ou non un indice qui le suit immédiatement.*

Soit, en effet, $\boldsymbol{F}^*$ la famille des ensembles $A_y = A(C_y)$ avec $0<y<1$, augmentée des ensembles $A_0 = (a)$ et $A_1 = \mathcal{X}$. Considérons la fonction f définie p. 22. Evidemment $f(a)=0$ et on a $f(b)=1$, s'il n'existe aucun indice qui précède 1 immédiatement. En désignant, dans le dernier cas, cet indice par r, on n'aura qu'à modifier la définition de la fonction f sur l'ensemble $\mathcal{X} - A_r$; on posera notamment

$$f(x) = r + (1-r)\,\frac{\varrho(x, A_r)}{\varrho(x, A_r) + |x-b|}.$$

Le th. 5 établi, plusieurs propriétés de la classe $\boldsymbol{C}$ se laissent déduire des formules (13)-(18). Notons qu'en particulier (en vertu de (17) et (21):

(25) *abstraction faite de $\aleph_0$ ensembles C_y, on a $C_y = f^{-1}(y)$.*

5. *Points de coupure.* Considérons à présent le cas où les éléments de la famille $\boldsymbol{C}$ se réduisent à des points individuels.

Remarquons d'abord que, *si chaque point de $\mathcal{X}$ coupe $\mathcal{X}$ entre a et b* (autrement dit, s'il n'existe aucun vrai sous-ensemble connexe de $\mathcal{X}$ unissant a à b), on a, en assignant à chaque point c différent de a et de b un indice y conformément au cor. 1, p. 26, $\mathcal{X} = a + \sum\limits_{0<y<1} c_y + b$, d'où $\mathcal{X} = a + \sum\limits_{0<y<1} \mathrm{Fr}[A(c_y)] + b$, puisque $c_y = \mathrm{Fr}[A(c_y)]$. Donc selon le th. 5 et (18), *l'espace $\mathcal{X}$ se laisse transformer d'une façon continue et biunivoque en l'intervalle* $\langle 0,1 \rangle$. Si, en particulier, $\mathcal{X}$ est compact, cette transformation est une homéomorphie, de sorte que $\mathcal{X}$ est dans ce cas un *arc simple*. Nous retrouvons ainsi le théorème de M. Lennes[14]).

Théorème 6. *C désignant l'ensemble des points qui coupent l'espace entre a et b, il existe une transformation continue f de l'espace en l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$, dont l'ensemble des points de biunivocité*[15]), *augmenté d'un ensemble dénombrable convenablement choisi, coïncide avec $C+a+b$.*

f est notamment la fonction donnée par le th. 5.

Démonstration. En effet, si p est un point de biunivocité, différent de a et de b, il existe un y tel que $p = f^{-1}(y)$ et $0 \neq y \neq 1$. Par conséquent la formule $\mathcal{X} - p = f^{-1}(0y - y) + f^{-1}(y1 - y)$ représente une décomposition en deux ensembles ouverts dont l'un contient a et l'autre b. Donc $p \in C$.

D'autre part, selon (25), chaque point de C, abstraction faite d'un ensemble dénombrable, est un point de biunivocité de la fonction f.

Le théorème établi, on en déduit que dans le cas particulier où l'espace est compact (donc un continu), *l'ensemble C est un G_δ augmenté d'un ensemble dénombrable*[16]).

Car l'ensemble des points de biunivocité d'une fonction continue sur un espace compact est un G_δ. Son complémentaire se compose, en effet, des points x satisfaisant à la condition

$$\sum_{x'} \{(x \neq x') \cdot [f(x) = f(x')]\}.$$

Ajoutons qu'en vertu de (*) *l'ensemble de tous les points qui coupent un continu est un $G_{\delta\sigma}$*[17]), comme somme d'une suite d'ensembles de la forme $G_\delta + \aleph_0$.

---

[14]) Voir p. ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 3-me éd. p. 220.

[15]) x est dit point de *biunivocité* de la fonction f, si l'inégalité $x' \neq x$ entraîne $f(x') \neq f(x)$.

[16]) Théorème de M. G. T. Whyburn, Trans. Amer. Math. Soc. 32 (1930), p. 151.

[17]) Ibid.

D'autre part, sans l'hypothèse de compacité, on ne peut pas affirmer que l'ensemble C est borelien. En effet, C étant un sous-ensemble frontière de l'intervalle ouvert $0<x<1$ et $\mathcal{X}$ désignant la somme de l'intervalle (fermé) $\langle 0,1\rangle$, et de tous les segments verticaux d'ordonnées $\geqslant 0$ et $\leqslant 1$ et d'abscisse appartenant à $\langle 0,1\rangle - C$, l'ensemble des points qui coupent $\mathcal{X}$ entre 0 et 1 coïncide avec C.

Le théorème suivant de M. G. T. Whyburn[18]) est une conséquence du cor. 2, p. 26:

Tous les points qui coupent un continu donné, sauf une infinité dénombrable, sont d'ordre 2.

En effet, si c_y satisfait à la condition (23), c. à d. si

$$c_y = \prod_n A(c_{z_n}) \cdot \overline{\mathcal{X} - A(c_{u_n})},$$

on a pour n suffisamment grand $\delta[A(c_{z_n}) \cdot \overline{\mathcal{X} - A(c_{u_n})}] < \varepsilon$ et

$$\mathrm{Fr}[A(c_{z_n}) \cdot \overline{\mathcal{X} - A(c_{u_n})}] = A(c_{z_n}) \cdot \overline{\mathcal{X} - A(c_{u_n})}\, [\overline{\mathcal{X} - A(c_{z_n})} + \overline{\mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - A(c_{u_n})}}] \subset$$
$$\subset \mathrm{Fr}[A(c_{z_n})] + \mathrm{Fr}[A(c_{u_n})] = (c_{z_n}) + (c_{u_n}).$$

Le théorème suivant de M. Zarankiewicz[19]) est aussi une conséquence du cor. 2:

Chaque famille d'ensembles connexes, disjoints, ne se réduisant pas à des points individuels et dont chacun contient un point qui coupe $\mathcal{X}$ est dénombrable.

Extrayons, en effet, de chacun de ces ensembles un point qui coupe l'espace. Sans restreindre la généralité (cf. l'énoncé (*) p. 28) on peut admettre que chacun de ces points coupe l'espace entre les mêmes points fixes a et b. Soit C leur ensemble. Nous les imaginons munis d'indices y conformément au cor. 1, p. 26; l'indice y sera attribué aussi à l'ensemble connexe S dont le point c_y a été extrait.

D'après (23), on a, abstraction faite de $\aleph_0$ indices, $c_y = \prod_{z<y} M(c_z) \cdot \prod_{u<y} N(c_u)$. On a donc $S_y \cdot M(c_z) \neq 0$ et comme $\mathrm{Fr}[M(c_z)] = c_z$ non-$\epsilon\, S_y$ (puisque $S_y \cdot S_z = 0$), il vient $S_y \subset M(c_z)$. D'une façon analogue, $S_y \subset N(c_u)$, d'où $S_y \subset \prod_{z<y} M(c_z) \cdot \prod_{u<y} N(c_u) = c_y$.

S_y se réduit donc au point c_y.

Le cor. 1, p. 26 implique que, *étant donnée une suite convergente d'ensembles connexes disjoints S_n, la limite de cette suite $S = \mathrm{Lim}\, S_n$ contient tout au plus deux points qui coupent l'espace entre les points a et b donnés en avance.*

Soit C l'ensemble des points qui coupent l'espace entre a et b. Supposons que S contienne trois points c_u, c_y et c_z de C avec $u<y<z$. Il vient $c_u \epsilon M(c_y)$ et $c_z \epsilon N(c_y)$. Donc, pour n suffisamment grand, $S_n \cdot M(c_y) \neq 0 \neq S_n \cdot N(c_y)$, d'où $c_y \epsilon S_n$, contrairement à l'hypothèse que les ensembles S_n sont disjoints.

[18]) Trans. Amer. Math. Soc. 33, p. 447.

[19]) Fund. Math. 12 (1928), p. 121.

Il en résulte en vertu de l'énoncé (*), p. 28, que S *contient un ensemble (au plus) dénombrable de points qui coupent l'espace*[20]). Cela conduit à la conclusion que *l'ensemble des points qui coupent un espace connexe ne contient d'autres continus que des dendrites*[21]); en effet, comme dépourvu des continus de convergence, il ne contient que des continus péaniens et ceux-ci sont des dendrites, puisqu'aucune courbe simple fermée ne peut être composée exclusivement de points qui coupent l'espace[22]).

6. *Espaces irréductibles entre deux points.* Un espace connexe $\mathcal{X}$ est dit *irréductible entre les points a et b*, lorsqu'il ne contient aucun vrai sous-ensemble connexe et fermé qui unit ces deux points. On démontre que la famille $\boldsymbol{F}$ des domaines fermés, connexes et contenant le point a est strictement monotone et n'admet pas de lacunes[23]). De sorte que l'ensemble L des indices des éléments de la famille $\boldsymbol{F}$ (augmentée de l'élément 0) est un sous-ensemble fermé de l'intervalle $\vartheta = \langle 0,1\rangle$ et contient les nombres 0 et 1.

Considérons le cas où la famille $\boldsymbol{F}$ est indénombrable et reprenons la construction développée dans mon mémoire des Fund. Math. 10, p. 249: soient P la partie parfaite de L et $\varphi(y)$ une fonction continue sur ϑ, non-décroissante, telle que $\varphi(P) = \vartheta$ et que, sur l'ensemble P diminué des extrémités des intervalles contigus, la fonction φ est croissante. Soient $\gamma(t)$ et $\Gamma(t)$ le premier et le dernier y tel que $\varphi(y) = t$. En désignant toujours par f la fonction considérée dans le th. 3, p. 22, et en posant $g(x) = \varphi f(x)$, il vient

$$(26) \qquad g(\mathcal{X}) = \vartheta \qquad \text{et} \qquad g^{-1}(t) = \prod_{\Gamma(t)<z} A_z \cdot \prod_{u<\gamma(t)} \overline{\mathcal{X} - A_u}.$$

En effet, $\Gamma(t)$ n'admettant pas d'élément qui le suive immédiatement, ni $\gamma(t)$ qui le précède immédiatement, on a d'après (10) et (15):

$$\prod_{\Gamma(t)<z} A_z = f^{-1}[0, \Gamma(t)] = \underset{x}{E}[0 \leqslant f(x) \leqslant \Gamma(t)],$$
$$\prod_{u<\gamma(t)} \overline{\mathcal{X} - A_u} = f^{-1}[\gamma(t), 1] = \underset{x}{E}[\gamma(t) \leqslant f(x) \leqslant 1]$$

et, d'autre part,

$$\underset{x}{E}[0 \leqslant f(x) \leqslant \Gamma(t)] \cdot \underset{x}{E}[\gamma(t) \leqslant f(x) \leqslant 1] = \underset{x}{E}[\gamma(t) \leqslant f(x) \leqslant \Gamma(t)] =$$
$$= \underset{x}{E}[f(x) \,\epsilon\, \varphi^{-1}(t)] = f^{-1}\varphi^{-1}(t) = g^{-1}(t),$$

puisque $\varphi^{-1}(t) = \underset{y}{E}[\gamma(t) \leqslant y \leqslant \Gamma(t)]$ en vertu des définitions de γ et de Γ.

[20]) Cf. C. Zarankiewicz, Fund. Math. 9 (1927), p. 139.

[21]) Théorème de M. Zarankiewicz, ibid., p. 167.

[22]) Ibid., p. 140.

[23]) Voir ma note de Fund. Math. 3 (1921), p. 207 et Fund. Math. 10 (1927), p. 249 (3).

La formule (26) présente la décomposition de $\mathfrak{C}$ en „tranches" (à savoir, en ensembles $g^{-1}(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$), que j'ai étudiée dans mon mémoire précité des Fund. Math. 10. Plusieurs propriétés de cette décomposition se laissent déduire directement de celles des familles strictement monotones. Ainsi, par exemple, le fait que toutes les tranches, abstraction faite d'une infinité dénombrable, sont des tranches de „cohésion", c. à d. satisfont à l'égalité

$$g^{-1}(t) = \overline{g^{-1}(0t-t)} \cdot \overline{g^{-1}(t1-t)},$$

est une conséquence presque immédiate de la dernière partie de la formule (17).

7. *Courbes régulières et rationnelles.* Un continu $\mathfrak{C}$ est dit *courbe régulière (rationnelle)* lorsque chacun de ses points admet des entourages aussi petit que l'on veut à frontière finie (dénombrable). Il résulte aussitôt de cette définition que, dans chaque entourage d'un ensemble fermé F, il existe un ensemble fermé F^* à frontière finie (dénombrable) tel que $F \subset \mathrm{Int}(F^*)$ [24]). De là on conclut qu'il existe un ensemble fermé $^*F$ à frontière finie (dénombrable) tel que $^*F \subset \mathrm{Int}(F)$ et que l'inégalité $\varrho(x, \mathfrak{C}-F) > \varepsilon$ entraîne $x \in {}^*F$, ε étant donné en avance. En effet, H désignant un ensemble fermé à frontière finie (dénombrable), tel que $\overline{\mathfrak{C}-F} \subset \mathrm{Int}(H)$ et que la condition $x \in H$ entraîne $\varrho(x, \mathfrak{C}-F) < \varepsilon$, on pose $^*F = \mathfrak{C} - \mathrm{Int}(H)$.

On constate facilement que, si les trois ensembles fermés $A \subset F \subset B$ constituent un système strictement monotone, les ensembles $^*F$ et F^* peuvent être assujettis à la condition supplémentaire que le système $A \subset {}^*F \subset F \subset {}^*F \subset B$ soit aussi strictement monotone. Enfin, si $\mathrm{Int}(F) \neq 0$ et $F \neq \mathfrak{C}$, on peut assujettir $^*F$ et F^* aux mêmes inégalités.

Théorème [25]). *Toute courbe régulière (rationnelle) $\mathfrak{C}$ se laisse transformer en un intervalle à l'aide d'une fonction continue f telle que les y pour lesquels l'ensemble $f^{-1}(y)$ est finie (dénombrable) constituent un ensemble dense dans cet intervalle.*

Démonstration. Soit $F_1, F_2, \ldots$ une suite d'ensembles fermés définie de la façon suivante: F_1 désigne un ensemble fermé arbitraire à frontière finie (dénombrable) et tel que $\mathrm{Int}(F_1) \neq 0$ et $F_1 \neq \mathfrak{C}$; les ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_{3^k}$ ($k \geqslant 0$) étant supposés différents de $\mathfrak{C}$, leurs intérieurs non vides et leur famille étant supposée strictement monotone, on définit les ensembles $F_{3^k+1}, \ldots, F_{3^{k+1}}$, en posant $\varepsilon = 1/k$, $F_{j'} = F_j^*$ et $F_{j''} = {}^*F_j$, pour $j \leqslant 3^k$, $j' = 3^k + j$ et $j'' = 2 \cdot 3^k + j$, en admettant que le système $F_1, \ldots, F_{3^{k+1}}$ est strictement monotone et que $\mathrm{Int}(F_i) \neq 0$ et $F_i \neq \mathfrak{C}$ quel que soit $i \leqslant 3^{k+1}$.

Soit $\boldsymbol{F}$ la famille des ensembles F_n, $n = 1, 2, \ldots$ Le type d'ordre de $\boldsymbol{F}$ (ordonnée par l'inclusion) est dense, car l'inclusion $F_m \subset \mathrm{Int}(F_n)$, rapprochée de l'inégalité $0 \neq F_m \neq \mathfrak{C}$, entraîne $F_m' \neq F_n$. On peut donc (conformément au cor. 1, p. 18) représenter les éléments de $\boldsymbol{F}$ sous la forme A_r, l'indice r parcourant les nombres rationnels (binaires) entre 0 et 1. En vertu des définitions de F^* et de $^*F$, on a $A_r = \prod_{s>r} A_s$ et $\mathrm{Int}(A_r) = \sum_{q<r} \mathrm{Int}(A_q)$. On en conclut en vertu de (14) que, f désignant la transformation continue considérée dans le th. 3 de $\mathfrak{C}$ en l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$, on a

$$\mathrm{Fr}(A_r) \subset f^{-1}(r) \subset \prod_{s>r} A_s - \sum_{q<r} \mathrm{Int}(A_q) = A_r - \mathrm{Int}(A_r) = \mathrm{Fr}(A_r),$$

d'où $f^{-1}(r) = \mathrm{Fr}(A_r)$ quel que soit r.

---

[24]) Cf. K. Menger, *Kurventheorie*, p. 207.

[25]) Théorème de M. G. T. Whyburn, Amer. Journ. Math. 55 (1933), p. 131.