Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point

par

S. ŁOJASIEWICZ (Kraków)

Sommaire

Dans cet article nous définissons les notions de valeur et de limite d'une distribution en un point et nous examinons diverses propriétés de ces notions.

Nous considérons les distributions d'une variable, en remettant le cas de plusieurs variables à une note ultérieure. Pour les définitions et les théorèmes fondamentaux nous renvoyons au livre de L. Schwartz [5] et nous rappelons maintenant quelques faits et notions.

Par $\mathcal{D}$ resp. par $\mathcal{D}_\Omega$ nous désignons l'ensemble des fonctions de la classe C^∞ à support compact, resp. contenu dans Ω et compact. Pareillement $\mathcal{D}^m$ et $\mathcal{D}^m_\Omega$ désignent les ensembles de fonctions de la classe C^m à support compact, resp. contenu dans Ω et compact. Au lieu d'écrire $T(\varphi)$ nous désignerons par (T, φ) ou $\big(T(x), \varphi(x)\big)_x$ le produit scalaire d'une distribution et d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ (resp. $\varphi \in \mathcal{D}^m$). L'inégalité $T \leqslant S$ dans un Ω ouvert signifie que la relation $(T, \varphi) \leqslant (S, \varphi)$ a lieu pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi \geqslant 0$. Les distributions seront considérées localement; toutefois pour simplifier les notations nous écrirons p. ex.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\alpha(x)\,d\mu,$$

si F et μ sont définies dans un intervalle ouvert qui contient le support de α. La distribution déduite d'une distribution T par une substitution $x = x(u)$ (où $x'(u) \neq 0$ et $x(u)$ doit être suffisamment régulière) sera désignée par $T_{x=x(u)}$ ou par $T\big(x(u)\big)$.

$$\big(T(x),\,\varphi(x)\big)_x = \Big(T\big(x(u)\big),\,\varphi\big(x(u)\big)|x'(u)|\Big)_u,$$

$$\Big(T\big(x(u)\big),\,\psi(u)\Big)_u = \Big(T(x),\,\psi\big(u(x)\big)\,|u'(x)|\Big)_x.$$

En particulier, pour la mesure μ et pour une $f\,\epsilon\,\mathcal{D}^0$ nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,d\mu\big(x(u)\big) = \Big(\mu\big(x(u)\big),\,f(u)\Big)_u = \Big(\mu(x),\,f\big(u(x)\big)\,|u'(x)|\Big)_x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f\big(u(x)\big)\,|u'(x)|\,d\mu.$$

Nous désignons par $\mu(E)$ la valeur d'une mesure pour un ensemble borélien E et par $|\mu|$ la variation totale de μ. Nous admettons la notation suivante:

$$\mu(x_0,x) = \begin{cases} \mu\big((x_0,x]\big) & \text{pour} \quad x_0 < x, \\ 0 & \text{pour} \quad x_0 = x, \\ -\mu\big((x,x_0]\big) & \text{pour} \quad x < x_0, \end{cases} \qquad \int_{x_0}^{x} f d\mu = \begin{cases} \int\limits_{(x_0,x]} & \text{pour} \quad x_0 < x, \\ 0 & \text{pour} \quad x_0 = x, \\ -\int\limits_{(x,x_0]} & \text{pour} \quad x < x_0. \end{cases}$$

On a alors

$$\lim_{x\to x_0+} \int_{x_0}^{x} f d\mu = \lim_{x\to x_0+} \mu(x_0,x) = 0.$$

Rappelons enfin qu'une distribution est dite *d'ordre* $\leqslant n$ si elle est la n^e dérivée d'une mesure.

Plusieurs idées m'ont été suggérées au cours d'un séminaire sur les distributions, dirigé par J. Mikusiński et R. Sikorski. Je tiens beaucoup à leur exprimer ma sincère gratitude pour les précieux conseils qu'ils ont bien voulu m'accorder.

§ 1. Définitions

1.1. Définitions de la valeur d'une distribution en un point. Nous dirons qu'*une distribution T, définie dans un voisinage d'un point x_0, possède la valeur C en x_0* et nous écrirons $T(x_0) = C$, si la limite

$$\lim_{\lambda\to 0} T(x_0+\lambda x) \tag{1.1}$$

existe dans un voisinage de x_0 et si elle est la distribution constante C [1]).

[1]) On voit qu'alors la limite (1.1) existe et qu'elle est la constante C dans chaque intervalle (a,b).

La notion de valeur a un caractère local, c'est-à-dire si $T = S$ dans un voisinage de x_0, alors les valeurs n'existent qu'en même temps et elles sont égales. Évidemment, dans le cas où T est une fonction continue au point x_0, cette notion équivaut à celle au sens usuel.

Dans la limite (1.1) il suffit d'admettre $\lambda\to 0+$, car ceci entraîne qu'elle existe aussi pour $\lambda\to 0-$ et est égale à la même constante C. Il n'est pas nécessaire de supposer que la limite (1.1) soit constante; nous avons, en effet, le théorème suivant de Zieleźny: *Si la limite* (1.1) *existe, elle est constante* [2]).

1.2. Définition de la limite d'une distribution. Nous dirons qu'*une distribution T possède la limite C pour $x\to x_0+$ resp. $x\to x_0-$ resp. $x\to x_0$* et nous écrirons

$$C = \lim_{x\to x_0+} T \quad \text{resp.} \quad C = \lim_{x\to x_0-} T \quad \text{resp.} \quad C = \lim_{x\to x_0} T, \tag{1.2.1}$$

si la limite

$$\lim_{\lambda\to 0} T(x_0+\lambda x) \tag{1.2.2}$$

existe dans un voisinage de x_0 pour $x > x_0$ resp. pour $x < x_0$ resp. pour $x \neq x_0$ et si elle est la distribution constante C [3]).

La notion de limite a un caractère local. Évidemment, dans le cas d'une fonction ayant une limite usuelle, il existe la limite ci-dessus et elle est égale à la limite usuelle. Si une distribution T possède une valeur en x_0, toutes les trois limites (1.2.1) existent et elles sont égales à $T(x_0)$; afin que la limite bilatérale existe, il faut et il suffit que les limites unilatérales existent et qu'elles soient égales entre elles. Le théorème de Zieleźny subsiste (il se rapporte à la limite (1.2.2) dans un voisinage unilatéral resp. à la limite (1.1) dans un voisinage privé du point x^0).

Il est à noter que L. Schwartz dans [5] (vol. II, p. 61) a fait la remarque suivante pour le cas de la notion analogue de la limite à l'infini: „On peut encore dire qu'une distribution T est bornée, si l'ensemble de ses translatées $\tau_h T$ est borné dans $\mathcal{D}'$; que T converge vers 0 à l'infini, si $\tau_h T$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'$ pour $|h|\to\infty$".

[2]) Cf. [4]; une démonstration simple et élégante a été donnée par Z. Zieleźny [7].

[3]) On voit qu'alors la limite (1.2.2) existe et qu'elle est la constante C dans chaque intervalle (a,b), où $a \geqslant 0$ resp. $b \leqslant 0$.

§ 2. Conditions nécessaires et suffisantes

Le résultat essentiel de ce § est de ramener les notions de valeur et de limite définies dans le § précédent à celle du n^e quotient différentiel d'une fonction défini par A. Denjoy [2].

2.1. Lemme. *Soit $f(x)$ une fonction définie dans un voisinage de zéro pour $x>0$ et supposons que l'on ait*

$$(2.1.1)\qquad \lim_{\lambda\to 0+}\frac{f(\lambda x)-a_0(\lambda)-\ldots-a_{n-1}(\lambda)(\lambda x)^{n-1}}{\lambda^n}=0$$

uniformément pour $a\leqslant x\leqslant b$, où $0<a$ et les coefficients $a_i(\lambda)$ sont définis pour $\lambda>0$ (suffisamment petits). Ceci étant admis, les $a_i(\lambda)$ sont convergents pour $\lambda\to 0+$, on a

$$(2.1.2)\qquad a_i(\lambda)=a_i+o(\lambda^{n-1})\qquad (i=0,1,\ldots,n-1),$$

et par conséquent

$$(2.1.3)\quad f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+o(x^n)\qquad \textit{lorsque}\quad x\to 0+.$$

Démonstration. Écrivons l'hypothèse (2.1.1) sous la forme suivante:

$$(2.1.4)\quad |f(\lambda x)-a_0(\lambda)-\ldots-a_{n-1}(\lambda)\lambda^{n-1}x^{n-1}|\leqslant\varepsilon(\lambda)\lambda^n\qquad \text{pour}\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

où $\varepsilon(\lambda)$ est une fonction croissante et telle que $\varepsilon(\lambda)\to 0$ lorsque $\lambda\to 0$. Fixons $a<x_0<\ldots<x_n<b$ et $0<\vartheta<1$ de façon que $a<\vartheta x_0$. Supposons que

$$(2.1.5)\qquad 0<\vartheta\tau\leqslant\sigma\leqslant\tau;$$

en posant dans (2.1.4) $x=x_i$, $\lambda=\sigma$ et puis $x=\sigma x_i/\tau$, $\lambda=\tau$, nous obtenons

$$|f(\sigma x_i)-a_0(\sigma)-\ldots-a_{n-1}(\sigma)\sigma^{n-1}x_i^{n-1}|\leqslant\varepsilon(\sigma)\sigma^n,$$
$$|f(\sigma x_i)-a_0(\tau)-\ldots-a_{n-1}(\tau)\sigma^{n-1}x_i^{n-1}|\leqslant\varepsilon(\tau)\tau^n,$$

d'où

$$|[a_0(\tau)-a_0(\sigma)]+\ldots+[a_{n-1}(\tau)-a_{n-1}(\sigma)]\sigma^{n-1}x_i^{n-1}|\leqslant 2\varepsilon(\tau)\tau^n\qquad (i=0,\ldots,n-1).$$

Puisque $\det(x_i^j)\neq 0$, ces inégalités entraînent

$$|a_i(\tau)-a_i(\sigma)|\,\sigma^i\leqslant K\varepsilon(\tau)\tau^n\qquad (i=0,\ldots,n-1),$$

où K est une constante qui ne dépend que de x_i. Nous obtenons donc, en vertu de (2.1.5)

$$(2.1.6)\qquad |a_i(\tau)-a_i(\sigma)|\leqslant K\vartheta^{-i}\varepsilon(\tau)\tau^{n-i},$$

pourvu que $0<\vartheta\tau\leqslant\sigma\leqslant\tau$ $(i=0,\ldots,n-1)$. En admettant $\sigma=\vartheta^{\nu+1}$, $\tau=\vartheta^\nu$, nous avons

$$|a_i(\vartheta^{\nu+1})-a_i(\vartheta^\nu)|\leqslant K\vartheta^{-i}\varepsilon(\tau)\vartheta^{(n-i)\nu}$$

et puis, pour $p\leqslant q$

$$(2.1.7)\quad |a_i(\vartheta^p)-a_i(\vartheta^q)|\leqslant K\vartheta^{-i}\varepsilon(\vartheta^p)\frac{\vartheta^{p(n-i)}}{1-\vartheta^{n-i}}\qquad (i=0,\ldots,n-1).$$

Soient maintenant σ et τ quelconques (suffisamment petits et tels que $0<\sigma<\tau$); il existe donc deux entiers p et q, $p\leqslant q$, tels que $\vartheta^q\leqslant\sigma\leqslant\vartheta^{q-1}$ et $\vartheta^p\leqslant\tau\leqslant\vartheta^{p-1}$, et nous voyons, en vertu de (2.1.6) et (2.1.7), qu'il existe une constante K_0 telle que

$$|a_i(\tau)-a_i(\sigma)|\leqslant K_0\varepsilon(\tau)\tau^{n-i}\qquad\text{pour}\qquad 0<\sigma<\tau.$$

Les limites

$$a_i=\lim_{\sigma\to 0+}a_i(\sigma)$$

existent donc et l'on a $|a_i(\tau)-a_i|\leqslant K_0\varepsilon(\tau)\tau^{n-i}$, c. q. f. d.

Remarque. Si la fonction $f(x)$ est définie dans un voisinage de x_0 pour $x<0$, resp. dans le voisinage de x_0 tout entier, et si la condition (2.1.1) est remplie avec $b<0$, resp. $a<0<b$, alors la thèse du lemme subsiste avec $x\to 0-$ resp. $x\to 0$ dans (2.1.3).

2.2. Théorème. *Pour que la limite*

$$(2.2.1)\qquad \lim_{x\to x_0+}T=C$$

existe, il faut et il suffit qu'il existe un entier n et une fonction F continue dans un voisinage de x_0 pour $x>x_0$ tels que l'on ait

$$(2.2.2)\qquad T=F^{(n)}\quad (\textit{pour } x>x_0)\qquad \textit{et}\qquad \lim_{x\to x_0+}\frac{F(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{C}{n!}.$$

Évidemment des théorèmes analogues sont vrais pour la limite à gauche et pour la limite bilatérale.

Démonstration. 1° La condition est suffisante. En admettant (2.2.2) nous avons

$$F(x)=\left(\frac{C}{n!}+\varepsilon(x)\right)(x-x_0)^n\qquad\text{où}\qquad \lim_{x\to x_0+}\varepsilon(x)=0,$$

donc pour $\lambda\to 0+$

$$\frac{1}{\lambda^n}F(x_0+\lambda x)=\left[\frac{C}{n!}+\varepsilon(x_0+\lambda x)\right]x^n\to\frac{C}{n!}x^n$$

uniformément dans un intervalle $(0, h)$. En dérivant n fois nous obtenons

(2.2.3) $$T(x_0+\lambda x) \to C \quad \text{dans} \quad (0, h),$$

c. q. f. d.

2° La condition est nécessaire. En supposant que (2.2.3) est remplie, il existe des fonctions continues $\Phi_\lambda(x)$ telles que l'on a pour un entier n

$$T(x_0+\lambda x) = \Phi_\lambda^{(n)}(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda\to 0}\Phi_\lambda(x) = \frac{C}{n!}x^n$$

uniformément dans $[a, b]$, où $0 < a < b < h$. La distribution T étant la dérivée d'ordre n de la fonction continue

$$\lambda^n \Phi_\lambda\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)$$

dans l'intervalle $(x_0+\lambda a, x_0+\lambda b)$ pour chaque λ suffisamment petit, il en est de même dans un intervalle $(0, h_1)$, où $0 < h_1 < h$, c'est-à-dire il existe une fonction F_0 continue dans $(0, h_1)$ et telle que $T = F_0^{(n)}$ dans $(0, h_1)$ [4]. Il s'ensuit que la différence

$$F_0(x) - \lambda^n \Phi_\lambda\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right),$$

et par conséquent la différence

$$F_0(x_0+\lambda x) - \lambda^n \Phi_\lambda(x) = w_\lambda(x)$$

est un polynôme de degré $< n$, dont les coefficients dépendent de λ. Nous avons donc pour $\lambda \to 0+$

$$\frac{F_0(x_0+\lambda x) - w_\lambda(x)}{\lambda^n} \to \frac{C}{n!}x^n$$

uniformément dans $[a, b]$ et, en posant $f(x) = F_0(x_0+x) - Cx^n/n!$,

$$\frac{f(\lambda x) - w_\lambda(x)}{\lambda^n} \to 0$$

uniformément dans $[a, b]$.

Selon le lemme du N° 2.1 on a donc

$$f(x) = a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^n),$$

d'où, en posant

[4] Il faut définir la fonction F_0 de proche en proche dans les intervalles $(x_0+\vartheta^i a, x_0+\vartheta^i b)$, où $a/b < \vartheta < \sqrt{a/b}$.

$$F(x) = F_0(x) - a_0 - \ldots - a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} = \frac{C}{n!}(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n),$$

on tire les relations (2.2.2).

Corollaire. *L'existence de la limite*

$$\lim_{x\to x+} T$$

équivaut à celle d'une différentielle à droite d'ordre n au sens de Denjoy:

(2.2.4) $$F(x) = a_0 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n) \quad (x > x_0),$$

pour une primitive quelconque F de T, d'ordre n suffisamment grand; on a alors

(2.2.5) $$\lim_{x\to x_0+} T = n!\, a_n,$$

c'est-à-dire la limite (à droite) est égale au n^e quotient différentiel (à droite) au sens de Denjoy d'une primitive d'ordre n (suffisamment grand).

2.3. On redémontre le théorème 2.2 pour la valeur d'une distribution, en s'appuyant sur la remarque du N° 2.1:

Théorème. *Afin qu'une distribution T possède la valeur*

(2.3.1) $$T(x_0) = C,$$

il faut et il suffit qu'il existe une fonction F continue dans un voisinage de x_0 et un entier n tels que l'on ait

(2.3.2) $$T = F^{(n)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{C}{n!}.$$

Corollaire. *L'existence de la valeur $T(x_0)$ équivaut à celle d'une différentielle d'ordre n au sens de Denjoy,*

(2.3.3) $$F(x) = a_0 + \ldots + a^n(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n),$$

pour une primitive quelconque F de T, d'ordre n suffisamment grand; on a alors

(2.3.4) $$T(x_0) = n!\, a_n,$$

c'est-à-dire la valeur est égale au n^e quotient différentiel au sens de Denjoy d'une primitive d'ordre n (suffisamment grand).

2.4. Dans les N^os 2.4.-2.9. nous ne considérons que la notion de valeur, puisque les raisonnements sont les mêmes que dans le cas de la limite.

Revenons à la condition (2.3.2). On a

$$F(x) = \frac{T(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \varepsilon(x), \quad \text{où} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\varepsilon(x)}{|x-x_0|^n} = 0.$$

En considérant des fonctions F, ε comme des mesures μ, σ (au sens des distributions[5])), nous avons

$$|\sigma|(x_0, x) = \int_{x_0}^{x}|\varepsilon(x)|\,dx \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{|\sigma|(x_0, x)}{|x-x_0|^{n+1}} = 0.$$

Définition. Supposons que la valeur $T(x_0)$ existe. Nous dirons que *la valeur de T en x_0 est d'ordre $\leqslant n$*, s'il existe des mesures μ, σ telles que l'on ait dans un voisinage de x_0

$$(2.4.1) \quad T = \mu^{(n)}, \qquad \mu = \frac{T(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \sigma, \qquad |\sigma|(x_0, x) = o(|x-x_0|^{n+1}).$$

Remarque 1. Chacune des conditions (2.3.2), (2.4.1) reste remplie, si l'on remplace n par un entier plus grand.

On a évidemment

(2.4.2) ordre de $T(x_0) \geqslant$ ordre de T dans un voisinage de x_0.

Si l'on pose

$$F(x) = \int_0^x (x-u)\,d\mu(u),$$

il résulte de la condition (2.4.1) que

$$(2.4.3) \qquad T = f^{(n+2)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{(x-x_0)^{n+2}} = \frac{T(x_0)}{(n+2)!},$$

où la fonction F est continue. Nous avons donc le

Théorème. *Pour que la valeur $T(x_0)$ existe (et qu'elle soit d'ordre $\leqslant n$), il faut et il suffit qu'il existe une mesure μ qui satisfasse à la condition (2.4.1). Cette condition entraîne (2.4.3), mais inversement, si la condition (2.4.3) est satisfaite, on n'obtient que l'inégalité: ordre de $T(x_0) \leqslant n+2$.*

Remarque 2. La condition (2.4.1) entraîne

$$(2.4.4) \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{\mu(x_0, x)}{|x-x_0|^{n+1}} = \frac{T(x_0)}{(n+1)!},$$

[5]) L'égalité entre une fonction et une mesure, $f = \mu$, signifie que $(f, \varphi) = (\mu, \varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}$, où

$$\mu(E) = \int_E f(x)\,dx,$$

c'est-à-dire que μ est une mesure absolument continue de densité $f(x)$.

mais inversement, la condition (2.4.4) n'entraîne que l'inégalité: ordre de $T(x_0) \leqslant n+1$.

Remarque 3. Si $T = f^{(n)}$,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{C}{n!},$$

où f est une fonction sommable, alors la valeur de T en x_0 existe, $T(x_0) = C$, et elle est d'ordre $\leqslant n$. Si T est une fonction sommable f, la condition

$$\int_{x_0}^{x}|f(x)-f(x_0)|\,dx = o(|x-x_0|)\ ^{6)}$$

est nécessaire et suffisante pour que la valeur $T(x_0)$ existe, $T(x_0) = f(x_0)$, et soit d'ordre zéro.

2.5. Supposons qu'une distribution T possède en x_0 une valeur d'ordre $\leqslant n$ et que $\alpha \in \mathcal{D}^n$ (le support de α contenu dans le voisinage de x_0 dans lequel la condition (2.4.1) subsiste). En vertu de (2.4.1) nous avons $(T, \alpha) = (-1)^n(\mu, \alpha^{(n)})$, d'où la formule

$$(2.5.1) \quad (T, \alpha) = T(x_0)\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}\alpha^{(n)}\,d\sigma, \quad \text{où} \quad |\sigma|(x_0, x) = o(|x-x_0|^{n+1}).$$

Pareillement, en supposant que la condition (2.3.2) est remplie, nous obtenons pour $\alpha \in \mathcal{D}^n$ (le support de α contenu dans le voisinage de x_0, dans lequel la condition (2.3.2) subsiste)

$$(2.5.2) \quad (T, \alpha) = T(x_0)\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}\alpha^{(n)}(x)\,\eta(x)\,dx, \quad \text{où} \quad \eta(x) = o(|x-x_0|^n).$$

2.6. Revenons à la définition de la valeur du № 1.1. L'existence de $T(x_0)$ équivaut à la condition qu'il existe une constante C telle que l'on ait

$$\big(T(x_0+\lambda x), \varphi(x)\big)_x = \left(T, \frac{1}{|\lambda|}\varphi\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\right)_x \to C\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx,$$

[6]) Evidemment cette condition implique que la fonction $f(x)$ est continue approximativement en x_0, mais non pas inversement. Il peut même arriver qu'une fonction $f(x)$ sommable et continue approximativement en x_0 ne possède pas de valeur en ce point. Il suffir d'admettre $x_0 = 0$ et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\varphi\left(3^n\left(x-\frac{1}{2^n}\right)\right), \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathcal{D}^0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi\,dx = 1;$$

on a alors

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{x}{2^k}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\,\delta\left(x-\frac{1}{2^\nu}\right) \qquad \text{pour} \quad x > 0.$$

lorsque $\lambda \to 0$, pour chaque $\varphi \epsilon \mathcal{D}$. Il en résulte que si

(2.6.1) $$\lim_{\lambda\to 0+}\left(T, \frac{1}{|\lambda|}\varphi\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\right)_x = C$$

pour chaque $\varphi \epsilon \mathcal{D}$ telle que $\varphi \geqslant 0$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\, dx = 1,$$

la distribution T possède la valeur $T(x_0) = C$ en x_0.

La fonction

$$\frac{1}{|\lambda|}\varphi\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)$$

tend vers $\delta(x-x_0)$ d'une façon assez particulière. Or, il résulte de la formule (2.5.1), que la valeur $T(x_0)$ est la limite du produit scalaire (T, a) lorsque a tend vers $\delta(x-x_0)$ d'une façon moins restrictive. En effet, si la valeur $T(x_0)$ existe et si elle est d'ordre $\leqslant n$, on a

(2.6.2) $$T(x_0) = \lim_{\delta\to 0}(T, a),$$

où

(2.6.3) $$\begin{cases} a \epsilon \mathcal{D}^n, \quad \text{support de } a \subset [x_0-\delta, x_0+\delta]\ ^{7}), \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} a\, dx = 1, \quad \sup|a^{(n)}| = O\left(\frac{1}{\delta^{n+1}}\right)^{8}). \end{cases}$$

2.7. R. Sikorski a remarqué que la formule (2.5.2) peut servir à étudier la limite

(2.7.1) $$\lim_{\lambda,\varepsilon\to 0} T(x_0+\lambda x+\varepsilon).$$

En effet, si $\lambda \to 0$ et $\varepsilon = O(\lambda)$, la fonction

$$a = \frac{1}{|\lambda|}\varphi\left(\frac{x-x_0-\varepsilon}{\lambda}\right)$$

satisfait aux conditions (2.6.3) (φ étant une fonction de $\mathcal{D}$, quelconque), donc

$$\left(T, \frac{1}{|\lambda|}\varphi\left(\frac{x-x_0-\varepsilon}{\lambda}\right)\right)_x \to T(x_0),$$

pourvu que $T(x_0)$ existe. Nous avons donc le

[7]) Dans le cas de la limite à droite on admet que le support de φ resp. a est contenu dans l'intervalle $(0, \infty)$ resp. $(x_0, x_0+\delta]$.

[8]) Nous montrerons dans le N° 4.4 que la condition (2.6.2)-(2.6.3) suffit pour que la valeur soit d'ordre $\leqslant n$.

THÉORÈME. *Si la valeur $T(x_0)$ existe, alors*

$$\lim_{\lambda\to 0,\, \varepsilon=O(\lambda)} T(x_0+\lambda x+\varepsilon) = \text{const.} = T(x_0).$$

Si $\lambda = \lambda_\nu$, $\varepsilon = \varepsilon_\nu$ et $\varepsilon_\nu/\lambda_\nu \to \infty$ pour $\nu \to \infty$, le théorème est faux; pour trouver un contre-exemple, il suffit de choisir T de manière que pour la fonction $\eta(x)$ de la formule (2.5.2) la convergence de l'expression $\eta(x)/(x-x_0)^n$ vers zéro soit suffisamment faible.

2.8. Considérons le cas où la limite (2.7.1) existe si $\lambda \to 0$ et $\varepsilon \to 0$ d'une façon quelconque. On a alors le

THÉORÈME. *Si la limite*

(2.8.1) $$\lim_{\lambda\to 0+,\, \varepsilon\to 0} T(x_0+\lambda x+\varepsilon)$$

existe, alors T est une fonction continue en x_0 dans un voisinage de x_0.

Soit φ une fonction non-négative de support $[-1, 1]$, appartenant à $\mathcal{D}$, et telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\, dx = 1.$$

Posons

(2.8.2) $$\varphi_h(x) = \frac{1}{h}\varphi\left(\frac{x}{h}\right) \quad \text{pour} \quad h > 0.$$

On a

(2.8.3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(x)\, dx = 1.$$

Dans la démonstration du théorème nous nous appuyons sur le lemme suivant:

LEMME. *Soit S une distribution quelconque et soit a une fonction non-négative de $\mathcal{D}$ (le support de a étant contenu dans le domaine d'existence de S). Si*

(2.8.4) $$(S, a) < 0,$$

alors pour chaque h suffisamment petit il existe un $\xi_h \epsilon$ support de a tel que

(2.8.5) $$\big(S, \varphi_h(x-\xi_h)\big)_x < 0.$$

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Lorsque $h \to 0$, les $a * \varphi_h$ convergent vers a dans $\mathcal{D}$, donc $(S, a*\varphi_h) \to (S, a)$. Mais nous avons (cf. [5], tome II, p. 22)

$$(S, a*\varphi_h) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)\big(S, \varphi_h(x-\xi)\big)_x\, d\xi,$$

donc, en vertu de (2.8.4),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\xi)\big(S, \varphi_h(x-\xi)\big)_x d\xi < 0,$$

pourvu que h soit suffisamment petit. D'après l'inégalité $\alpha \geqslant 0$, on a nécessairement $\big(S, \varphi_h(x-\xi)\big)_x < 0$ pour un ξ_h appartenant au support de α.

Démonstration du théorème. L'existence de la limite (2.8.1) entraîne celle de la limite (1.1), donc selon le théorème de Zieleźny (cf. N° 1.1) la valeur $T(x_0)$ existe et nous avons

$$(2.8.6) \qquad \lim_{\lambda\to 0+,\, \varepsilon\to 0} \big(T(x_0+\lambda x+\varepsilon), \varphi\big)_x = \lim_{\lambda\to 0+,\, \xi\to x_0} \big(T, \varphi_\lambda(x-\xi)\big)_x = T(x_0).$$

Il suffit de prouver qu'à chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$(2.8.7) \qquad T(x_0)-\varepsilon \leqslant T \leqslant T(x_0)+\varepsilon \quad \text{dans} \quad (x_0-\delta, x_0+\delta),$$

puisque T est alors une fonction qui satisfait à l'inégalité (2.8.7) (presque partout).

A cet effet supposons, par impossible, qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que p. ex. la première des inégalités (2.8.7) ne soit remplie dans aucun des intervalles $(x_0-1/n, x_0+1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Il existe donc des fonctions non négatives de $\mathcal{D}$ telles que l'on a: support de $\alpha_n \subset [x_0-1/n, x_0+1/n]$ et $\big(T-T(x_0)+\varepsilon_0, \alpha_n\big) < 0$.

Selon le lemme il existerait $\lambda_n \epsilon (0, 1/n)$ et $\xi_n \epsilon (x_0-1/n, x_0+1/n)$ tels que $\big(T-T(x_0)+\varepsilon_0, \varphi_{\lambda_n}(x-\xi_n)\big)_x < 0$ ou $\big(T, \varphi_{\lambda_n}(x-\xi_n)\big)_x < T(x_0)-\varepsilon_0$, contrairement à (2.8.7).

2.9. Supposons maintenant qu'une distribution T soit une mesure ν et qu'elle possède une valeur $T(x_0)$ d'ordre $\leqslant n$. Il existe donc une mesure μ qui satisfait aux conditions (2.4.1). Par conséquent

$$g_0(x) = \mu(x_0, x) \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^n}{n!}\, d\nu(u)$$

sont des $(n+1)^{\text{ièmes}}$ primitives de T et l'on a $g(x) = o(|x-x_0|^n)$ et $g_0(x) = o(|x-x_0|^n)$. La différence $g-g_0$ étant un polynôme de degré $\leqslant n$, on a nécessairement $g = g_0$, donc selon la remarque 2 du N° 2.4 nous obtenons la formule

$$(2.9.1) \qquad T(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{n+1}{(x-x_0)^{n+1}} \int_{x_0}^{x} (x-u)^n\, d\nu(u).$$

Inversement, il résulte de la remarque 3 du N° 2.4 que, si la limite de (2.9.1) existe, la mesure ν possède une valeur en x_0 d'ordre $\leqslant n+1$, égale à cette limite.

En particulier ($n = 0$) nous voyons que la valeur d'ordre zéro d'une mesure est la densité de cette mesure et la densité d'une mesure est la valeur d'ordre $\leqslant 1$ de cette mesure.

Si T est une fonction sommable f, nous avons la formule

$$(2.9.2) \qquad T(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{n+1}{(x-x_0)^{n+1}} \int_{x_0}^{x} f(u)(x-u)^n du$$

pour la valeur d'ordre $\leqslant n$ (mais cette formule n'entraîne que l'inégalité: ordre de $T(x_0) \leqslant n+1$). La valeur d'ordre zéro est donc la dérivée usuelle d'une primitive et la dérivée usuelle d'une primitive est la valeur d'ordre $\leqslant 1$. Une fonction sommable (mais non bornée inférieurement et supérieurement, cf. N° 4.3) peut possèder des valeurs d'ordre arbitrairement grand (cf. N° 4.6) et alors la dérivée usuelle de la primitive n'existe pas.

Si T est la dérivée d'une fonction continue $f(x)$, nous obtenons pareillement une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la valeur exprimée par la formule

$$(2.9.3) \qquad T(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{n(n+1)}{(x-x_0)^{n+1}} \int_{x_0}^{x} (x-u)^{n-1}[f(u)-f(x_0)]du.$$

2.10. En utilisant cette dernière formule (2.9.3) nous pouvons montrer par la méthode de S. Banach (cf. [1] ou [3], p. 327) qu'il existe des distributions qui sont les dérivées de fonctions continues et qui ne possèdent de valeur en aucun point[9]). Nous prouverons, en effet, que l'ensemble Ψ de ces fonctions est résiduel dans l'espace Φ des fonctions continues et périodiques de période 1. Si la dérivée d'une fonction $f \epsilon \Phi$ possède une valeur en un point x_0, alors, d'après (2.9.3), il existe des entiers n et p tels que l'on a

$$(2.10.1) \qquad \left| \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \int_{x_0}^{x} (x-u)^{n-1}[f(u)-f(x_0)]du \right| \leqslant p \quad \text{pour} \quad x \neq x_0.$$

Soit Ψ_{np} l'ensemble des fonctions $f \epsilon \Phi$ qui satisfont à la condition (2.10.1) (pour un x_0 qui dépend de f). Cet ensemble est fermé et non dense dans Φ (car il ne contient pas de fonctions-lignes polygonales dont tous les segments aient des coefficients angulaires suffisamment grands), Puisque le complémentaire de Ψ est contenu dans $\Sigma\Psi_{np}$, Ψ est résiduel, c. q. f. d.

§ 3. Quelques propriétés de la valeur et de la limite

3.1. De la définition 1.1 résultent immédiatement les propriétés suivantes: on a

[9]) La dérivée d'une fonction continue sans dérivée (au sens usuel) peut posséder une valeur en quelques points (cf. (3.7.2)).

(3.1.1) $$(aT+bS)(x_0) = aT(x_0)+bS(x_0),$$

pourvu que $T(x_0)$ et $S(x_0)$ existent; on a

(3.1.2) $$T(x_0) \leqslant M \quad \text{lorsque} \quad T \leqslant M$$

dans un voisinage unilatéral de x_0. Il en est de même pour la limite. Soit $T(x_0)$ d'ordre $\leqslant n$ et soit $\alpha(x)$ une fonction de la classe C^n [10]; on a

(3.1.3) $$(T\alpha)(x_0) = T(x_0)\,\alpha(x_0)$$

(la distribution $T\alpha$ est définie dans un voisinage de x_0).

En effet, étant donnée une $\varphi \epsilon \mathcal{D}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx = 1,$$

on a

$$\left(T\alpha, \frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\right)_x = (T, \bar\alpha_\lambda)A_\lambda, \quad \text{où} \quad A_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_0+\lambda u)\varphi(u)\,du,$$

$$\bar\alpha_\lambda(x) = \frac{1}{A_\lambda}\,\frac{\alpha(x)}{\lambda}\,\varphi\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right).$$

Les fonctions $\bar\alpha_\lambda$ satisfaisant aux conditions (2.6.3) pour $\lambda \to 0+$, nous avons $(T, \bar\alpha_\lambda) \to T(x_0)$ et en outre $A_\lambda \to \alpha(x_0)$, donc, selon N° 2.6, (3.1.3) subsiste.

Soit $T(x_0)$ d'ordre $\leqslant n$ et soit $x(u)$ une fonction de la classe C^{n+1} [11]) telle que $x(u_0) = x_0$ et $x'(u_0) \neq 0$; on a

(3.1.4) $$T_{x=x(u)}(u_0) = T(x_0)$$

(la distribution $T_{x=x(u)}$ est définie dans un voisinage de x_0).

En effet, étant donnée une $\varphi \epsilon \mathcal{D}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,du = 1,$$

on a

$$\left(T(x(u))\frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{u-u_0}{\lambda}\right)\right)_u = \left(T(x),\, \alpha_\lambda(x)\right)_x$$

où $$\alpha_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\,|u'(x)|\,\varphi\left(\frac{u(x)-u_0}{\lambda}\right).$$

Les fonctions $\alpha_\lambda(x)$ satisfaisant aux conditions (2.6.3) pour $\lambda \to 0+$, nous avons $(T, \alpha_\lambda) \to T(x_0)$, d'où résulte (3.1.4).

[10]) Il suffit que $\alpha^{(n-1)}$ satisfasse à la condition de Lipschitz.
[11]) Il suffit que $x^{(n)}$ satisfasse à la condition de Lipschitz.

Dans le cas de la limite on suppose que $\alpha(x)$ resp. $x(u)$ sont de la classe C^n resp. C^{n+1} dans un voisinage tout entier de x_0.

Exemple. Par la substitution $x = 1/\ln u$ on déduit la convergence dans la limite

$$\lim_{x\to 0-} \sin\frac{1}{x}$$

(qui existe d'après le N° 3.7). En effet, la suite des fonctions $\sin(\ln\lambda_n x) = \sin(\ln\lambda_n + \ln x)$ a pour limite $\sin\ln x$, si l'on admet $\lambda_n = e^{-2n\pi}$, donc la limite $\lim_{u\to 0}\sin\ln u$ n'existe pas.

3.2. Soit $F(x)$ une fonction continue [12]) dans un voisinage de x_0 et supposons qu'elle admete une différentielle d'ordre n au sens de Denjoy:

(3.2.1) $$F(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + \frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n).$$

Elle admet donc une différentielle de tout ordre $k \leqslant n$ et $F^{(k)}$ possède la valeur c_k en x_0, $k = 0, 1, \ldots, n$. Nous avons par conséquent le

Théorème. *Si une distribution T possède une valeur en x_0, il en est de même de sa primitive.*

Le théorème reste vrai pour la limite.

3.3. Théorème. *Si*

$$\lim_{x\to x_0-} T_1 = C = \lim_{x\to x_0+} T_2,$$

où T_1 resp. T_2 est défini dans (a, x_0) resp. dans (x_0, b), alors il existe une et une seule distribution T dans (a, b) telle qu'on ait $T = T_1$ dans (a, x_0), $T = T_2$ dans (x_0, b) et $T(x_0) = C$.

Démonstration. Selon le théorème du N° 2.3 et la remarque 1 du N° 2.4 il existe des fonctions continues F_1, F_2 et un entier n tels que l'on ait $T_1 = F_1^{(n)}$ dans (a, x_0), $T_2 = F_2^{(n)}$ dans (x_0, b) et

$$\lim_{x\to x_0-} \frac{F_1}{(x-x_0)^n} = \frac{C}{n!} = \lim_{x\to x_0+} \frac{F_2}{(x-x_0)^n}.$$

Il suffit donc de poser $T = F^{(n)}$, où $F = F_1$ dans (a, x_0), $F = F_2$ dans (x_0, b) et $F(x_0) = 0$.

Corollaire 1. *Si la limite $\lim_{x\to x_0} T$ existe, alors*

[12]) Il suffit qu'elle soit sommable; cf. la remarque 3 du N° 2.4.

$$T = T_0 + \sum_{i|0}^{q} a_i \delta^{(i)}(x-x_0),$$

où T_0 possède une valeur en x_0 égale à $\lim_{x\to x_0} T$.

COROLLAIRE 2. *Si $T(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0} T'$ existent, alors $T'(x_0)$ $(=\lim_{x\to x_0} T')$ existe aussi.*

En effet, d'après le corollaire 1,

$$T' = T_1 + \sum_{i=1}^{q} a_i \delta^{(i)}(x-x_0),$$

où $T_1(x_0)$ existe. T_0 étant une primitive de T_1, on a

$$T = T_0 + a_0 H(x-x_0) + \sum_{i=1}^{q} a_i \delta^{(i-1)}(x-x_0) + C,$$

où H est la fonction de Heaviside et C est une constante. Mais, selon le théorème du N° 3.2, $T_0(x_0)$ existe, donc on a nécessairement $a_0 = a_1 = \ldots = a_q = 0$ et par conséquent $T' = T_1$, d'où $T'(x_0)$ existe.

Remarque sur le recollement des distributions dans les intervalles contigus. Soient T_1, T_2 des distributions définies dans un voisinage de x_0 pour $x < x_0$ resp. pour $x > x_0$ dont les primitives possèdent des limites pour $x \to x_0$. Il existe une et une seule distribution T égale à T_1 resp. T_2 pour $x < x_0$ resp. $x > x_0$, dont la primitive possède une valeur dans x_0.

En général, si T_1, T_2 sont d'ordre fini, on a $T_1 = F_1^{(n)}$ pour $x < x_0$ et $T_2 = F_2^{(n)}$ pour $x > x_0$, où F_1, F_2 sont des fonctions continues pour $x \leqslant x_0$ resp. $x \geqslant x_0$ et on pose $T = F^{(n)}$, où $F = F_1$ pour $x \leqslant x_0$ et $F = F_2$ pour $x \geqslant x_0$. Mais la distribution T n'a pas été définie univoquement; elle contient un terme indéterminé de la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \delta^{(i)}(x-x_0).$$

Cependant, si l'on peut choisir les F_i de façon que l'on ait $F_i(x) = o(|x-x_0|^{n-1})$, ce qui n'a lieu que dans le cas où les primitives de T_i possèdent des limites pour $x \to x_0$, les F_i sont déterminées par cette condition et l'on a $F(x) = o(|x-x_0|^{n-1})$ d'où il résulte l'existence de la valeur d'une primitive de T.

3.4. THÉORÈME. *Soient une distribution T et une fonction a, définies dans un voisinage de x_0 pour $x > x_0$, et considérons les limites*

$$\lim_{x\to x_0} T/a, \tag{3.4.1}$$

$$\lim_{x\to x_0} T'/a' \tag{3.4.2}$$

où $a \neq 0$ et $a \to 0$ resp. $|a| \to \infty$. L'existence d'une de ces limites entraîne celle de l'autre et toutes les deux sont égales, si l'on suppose que

1° dans le cas où la limite (3.4.1) existe, étant d'ordre $\leqslant n$, a soit de la classe C^{n+2} et

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^{(k)} = O(|x-x_0|^{1-k}), \qquad k = 0, \ldots, n+1; \tag{3.4.3}$$

2° dans le cas où la limite (3.4.2) existe, étant d'ordre $\leqslant n \geqslant 1$, a soit de la classe C^{n+1},

$$a' = O(|a|\,|x-x_0|^{-1}), \qquad a^{(k)} = O(|a'|\,|x-x_0|^{1-k}), \qquad k = 2, \ldots, n+1\ \text{[13]}, \tag{3.4.4}$$

et que l'on ait $\lim_{x\to x_0} T = 0$ dans le cas où $a \to 0$ [14].

Démonstration. Soit φ une fonction de $\mathcal{D}$, non négative, à support contenu dans $(0, \infty)$ et telle que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\, dx = 1;$$

il existe alors deux nombres $A > a > 0$ tels que le support de φ soit contenu dans $[a, A]$. Posons

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right);$$

on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\lambda\, dx = 1, \text{ support de } \varphi_\lambda \subset [x_0+a\lambda, x_0+A\lambda] \text{ et } |\varphi_\lambda^{(k)}| \leqslant M_k \lambda^{-k-1}, \tag{3.4.5}$$

où M_k sont des constantes. Selon N° 2.6 il suffit de prouver que, pour $\lambda \to 0$, $(T'/a', \varphi_\lambda)$ converge vers la limite (3.4.1) dans le cas 1° et que $(T/a, \varphi_\lambda)$ converge vers la limite (3.4.2) dans le cas 2°.

1° On a

$$\left(\frac{T'}{a'}, \varphi_\lambda\right) = \left(T', \frac{\varphi_\lambda}{a'}\right) = \left(\frac{T}{a}, \chi_\lambda\right), \tag{3.4.6}$$

[13]) On montre que la première de ces conditions résulte de la seconde.

[14]) On montre que dans ce cas $(a \to 0)$ la limite $\lim_{x\to x_0} T$ existe.

où

$$\chi_\lambda = -a\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_\lambda}{a'}\right) = \left[1-\left(\frac{a}{a'}\right)'\right]\varphi_\lambda - \frac{a}{a'}\varphi_\lambda'.$$

D'après (3.4.5) nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\lambda\, dx = 1$$

et support de $\chi_\lambda \subset [x_0+a\lambda, x_0+A\lambda]$; selon (3.4.3) on a $|(a/a')^{(k)}| \leqslant M_0\lambda^{1-k}$, $k = 0, \ldots, n+1$, dans $[x_0+a\lambda, x_0+A\lambda]$, où M_0 est une constante, donc, d'après (3.4.5)

$$|\chi_\lambda^{(k)}| \leqslant M\lambda^{1-k} \qquad (k = 0, \ldots, n),$$

où M est une constante. Les fonctions χ_λ satisfaisant aux conditions (2.6.3), le produit scalaire (3.4.6) converge vers la limite (3.4.1).

2° D'après (3.4.4) on a

(3.4.7) $$a^{(k)} = O(|a|\,|x-x_0|^{-k}), \qquad k = 0, \ldots, n+1,$$

et il existe une constante L telle que l'on ait $|a'| \leqslant L|a|\,|x-x_0|^{-1}$ et $|a''| \leqslant L|a'|\,|x-x_0|^{-1}$, d'où l'on obtient que

$$\left|\ln\left|\frac{a(y)}{a(x)}\right|\right|, \left|\ln\left|\frac{a'(y)}{a'(x)}\right|\right| \leqslant L\ln\left|\frac{y-x_0}{x-x_0}\right|,$$

et par conséquent

(3.4.8) $$\left|\frac{a(y)}{a(x)}\right|, \left|\frac{a'(y)}{a'(x)}\right| \leqslant \left(\frac{A}{a}\right)^L \quad \text{lorsque} \quad x, y \in [x_0+\lambda a, x_0+\lambda A].$$

Posons

(3.4.9) $$k_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_\lambda}{a}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{a(x_0+\lambda x)}\, dx;$$

on a donc

$$k_\lambda' = \frac{d}{d\lambda}\, k_\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)\varphi_\lambda a'}{\lambda a^2}\, dx.$$

Selon (3.4.5) et (3.4.8) il existe donc des constantes $M > \varepsilon > 0$ telles que l'on a

(3.4.10) $$\varepsilon < k_\lambda a(x) < M, \qquad \varepsilon < \frac{k_\lambda' a^2}{a'} < M \quad \text{pour} \quad x \in [x_0+\lambda a, x_0+\lambda A].$$

Posons $T_\lambda = (T/a, \varphi_\lambda)$. D'après (3.4.10) on a (pour $\lambda \to 0$) $|1/k_\lambda| \to \infty$ dans le cas où $|a| \to \infty$ et on a $1/k_\lambda \to 0$ et $T_\lambda/k_\lambda = (T, \varphi_\lambda/ak_\lambda) \to 0$

dans le cas où $a \to 0$, car, d'après (3.4.5), (3.4.7), (3.4.9) et (3.4.10), les fonctions $\varphi_\lambda/ak_\lambda$ satisfont aux conditions (2.6.3). Selon la règle de De l'Hôspital (usuelle) il suffit donc de prouver que l'expression

(3.4.11) $$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{T_\lambda}{k_\lambda}\right) \Big/ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{k_\lambda}\right)$$

converge vers la limite (3.4.2). On a

(3.4.12) $$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{T_\lambda}{k_\lambda}\right) \Big/ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{k_\lambda}\right) = \left(T, \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{k_\lambda}\frac{\varphi_\lambda}{a}\right) \Big/ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{k_\lambda}\right)\right) = \left(\frac{T'}{a'}, \psi_\lambda\right)$$

où

$$\psi_\lambda = -a'\int_{-\infty}^{x} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{k_\lambda}\frac{\varphi_\lambda}{a}\right) dx \Big/ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{k_\lambda}\right)$$

$$= -a'\int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi_\lambda}{a}\, dx - \frac{k_\lambda a'}{\lambda k_\lambda'}\int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi_\lambda'(x-x_0)+\varphi_\lambda}{a}\, dx$$

car, d'après (3.4.9),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{k_\lambda}\frac{\varphi_\lambda}{a}\right) dx = 0,$$

et par conséquent $\psi_\lambda \in \mathcal{D}^n$. Nous avons ensuite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{k_\lambda}\varphi_\lambda\right) dx \Big/ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{k_\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\lambda\, dx - \frac{k_\lambda}{k_\lambda'}\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\lambda\, dx = 1.$$

Puisque, d'après (3.4.10) et (3.4.4), on a

$$\frac{k_\lambda a^{(k)}}{\lambda k_\lambda'} = O(|a|\lambda^{-k})$$

dans $[x_0+\lambda a, x_0+\lambda A]$ pour $\lambda \to 0$, il s'ensuit, en vertu de (3.4.7) et (3.4.5), que

$$\sup|\psi_\lambda^{(k)}| = O\left(\frac{1}{\lambda^{k+1}}\right),$$

les fonctions ψ_λ satisfont donc aux conditions (2.6.3), d'où, d'après (3.4.12), l'expression (3.4.11) tend vers la limite (3.4.2), c. q. f. d.

3.5. Admettons $x_0 = 0$. Les hypothèses (3.4.3) et (3.4.4) sont remplies p. ex. si $a(x) = x^\sigma$ (σ étant un nombre réel quelconque)[15]) ou si $a(x)$ est

[15]) Pour $a = x^n$, où n est un entier, on démontre le théorème plus simplement en utilisant les développements (2.2.4).

suffisamment régulière dans un voisinage de zéro et $\alpha^{(k)}(0) \neq 0$ pour un k. Elles ont pour conséquence une restriction de la croissance de α.

L'hypothèse (3.4.3) entraîne la condition

$$(3.5.1) \quad |\alpha(x)| < |x|^{\varepsilon} \quad \text{resp.} \quad |\alpha(x)| > \frac{1}{|x|^{\varepsilon}} \ (x \text{ étant suffisamment petit})$$

pour un $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire la convergence de $\alpha(x)$ ne saurait être trop faible. Si cette condition n'est pas remplie, le théorème 3.4 peut être en défaut; p. ex. le rapport

$$\frac{(1/\ln x)^2 \sin(-\ln x)}{1/\ln x}$$

possède une limite pour $x \to 0$, bien que la limite du rapport des dérivées n'existe pas[16]). Par contre l'hypothèse (3.4.3) permet une convergence arbitrairement forte; elle est remplie p. ex. pour

$$(3.5.3) \qquad \alpha(x) = \exp\left(-\int_x^1 \frac{du}{\gamma(u)}\right),$$

où γ est une fonction positive resp. négative de la classe C^{n+1}, satisfaisant aux conditions

$$(3.5.4) \qquad \gamma^{(k)}(x) = O(|x|^{1-k}), \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1,$$

pour $x \to 0$, donc la convergence de $\gamma(x)$ vers zéro peut être arbitrairement forte.

L'hypothèse (3.4.4) implique que

$$(3.5.5) \quad |\alpha(x)| > |x|^{M} \quad \text{resp.} \quad |\alpha(x)| < \frac{1}{|x|^{M}} \ (x \text{ étant suffisamment petit})$$

pour un $M > 0$, c'est-à-dire la convergence de $\alpha(x)$ ne peut être trop forte. On ne sait pas si cette restriction est essentielle pour la validité du théorème 3.4. L'hypothèse (3.4.4) permet une convergence arbitrairement faible; elle est satisfaite p. ex. si $\alpha(x)$ est la fonction inverse de la fonction

$$\beta(u) = \exp\left(-\int_u^1 \frac{dv}{\gamma(v)}\right) \quad \text{resp.} \quad \beta_1(u) = \exp\left(-\int_0^u \frac{dv}{\gamma_1(v)}\right),$$

où $\gamma(u)$ resp. $\gamma_1(u)$ est une fonction positive satisfaisant aux conditions (3.5.4) pour $u \to 0$ resp. pour $u \to \infty$.

[16]) On a un exemple analogue dans le cas $|\alpha| \to \infty$.

3.6. Le théorème 3.4 implique que l'on a

$$(3.6.1) \qquad T'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0} \ ^{17})$$

pourvu qu'un des termes existe.

Si la valeur $S(x_0)$ est d'ordre $\leqslant n$ et si α est une fonction de la classe C^{n+k} et telle que $\alpha(x_0) = \ldots = \alpha^{(k-1)}(x_0) = 0$, nous avons

$$(3.6.2) \qquad (S^{(k)}\alpha)(x_0) = 0.$$

En particulier on a

$$(3.6.3) \qquad (S^{(k)}x^k)(0) = 0 \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \to 0} S^{(k)}x^k = 0,$$

pourvu que $S(0)$ resp. $\lim_{x \to 0} S$ existe[18]). En effet, admettons $x_0 = 0$ et $k = 1$. En remplaçant α par $\alpha + Mx$, nous pouvons supposer que $\alpha'(0) < 0$. Selon le N° 3.5 la fonction

$$\beta(x) = \exp\left(-\int_x^1 \frac{dx}{\alpha(x)}\right)$$

satisfait à l'hypothèse (3.4.3) du théorème 3.4, $\beta \to \infty$ et l'on a $\alpha = \beta/\beta'$; puisque la limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{S\beta}{\beta} = S(0),$$

existe, on a donc

$$\lim_{x \to 0+} \frac{S\beta' + S'\beta}{\beta'} = S(0) + \lim_{x \to 0+} S'\alpha,$$

d'où

$$\lim_{x \to 0+} S'\alpha = 0;$$

pareillement

$$\lim_{x \to 0-} S'\alpha = 0.$$

[17]) On obtient aussi la „formule de Peano"

$$T(x) = T(x_0) + \ldots + \frac{T^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \varepsilon(x)(x - x_0)^n, \quad \text{où} \quad \varepsilon(x_0) = 0$$

(au sens des distributions), sous l'hypothèse que $T^{(n)}(x_0)$ existe.

[18]) D'ailleurs on obtient ceci directement de la définition du § 1 en dérivant (1.1) resp. (1.2.2) par rapport à λ. L'assertion inverse est fausse, ce qu'on voit à l'exemple de la fonction $S = \ln|\ln|x||$.

Par conséquent la limite
$$\lim_{x\to 0}(S\alpha)'$$
existe aussi, d'où selon le corollaire 2 du N° 3.3, $(S\alpha)'(0) = 0$ existe, donc $(S'\alpha)(0) = 0$. Admettons la validité de (3.6.2) pour $k-1$. Les α/x, α' étant de la classe C^{n+k-1},
$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\alpha}{x}\right)_{x=0} = \frac{d^i}{dx^i}(\alpha')_{x=0} = 0 \qquad (i = 0, \ldots, k-2)$$
on a
$$\left(S^{(k-1)}\frac{\alpha}{x}\right)(0) = 0, \qquad 0 = \left(\left(S^{(k-1)}\frac{\alpha}{x}\right)'x\right) = \left(S^{(k)}\alpha + S^{(k-1)}\left(\alpha' - \frac{\alpha}{x}\right)\right)(0),$$
$$\left(S^{(k-1)}\left(\alpha' - \frac{\alpha}{x}\right)\right)(0) = 0,$$
d'où $(S^{(k)}\alpha)(0) = 0$.

Par conséquent, si T est une distribution d'ordre $\leqslant n$ et si α est une fonction de la classe C^{n+2}, où $\alpha(x_0) = \ldots = \alpha^{(n+1)}(x_0) = 0$, alors

$$(T\alpha)(x_0) = 0. \tag{3.6.4}$$

3.7. Exemples. Pour $\beta > 0$ et pour α quelconque on a toujours[19])

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|^\alpha}\sin\frac{1}{|x|^\beta} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|^\alpha}\cos\frac{1}{|x|^\beta} = 0. \tag{3.7.1}$$

En effet, (3.7.1) subsiste pour $\alpha < 0$. Il suffit de montrer que si (3.7.1) subsiste pour un $\alpha = \alpha_0$, il en est de même pour $\alpha = \alpha_0+\beta$; si l'on on a
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\alpha_0}}\sin\frac{1}{x^\beta} = 0,$$
alors, selon (3.6.3),
$$0 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{\alpha_0}}\sin\frac{1}{x^\beta}\right)'x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\alpha_0}{x^{\alpha_0}}\sin\frac{1}{x^\beta} - \frac{\beta}{x^{\alpha_0+\beta}}\cos\frac{1}{x^\beta}\right),$$
d'où
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\alpha_0+\beta}}\cos\frac{1}{x^\beta} = 0.$$

[19]) A. Denjoy ([2], p. 277) prend $f(x) = x^{n+\alpha}\sin x^{-p}$, $f(0) = 0$ $(p \geqslant n+\alpha-1)$ pour exemple d'une fonction qui admet une différentielle d'ordre n en zéro et dont la première dérivée est discontinue (en zéro).

Selon le théorème 3.2, il existe une et une seule distribution qui possède la valeur zéro en $x = 0$ et qui est égale à la fonction
$$\frac{1}{|x|^\alpha}\sin\frac{1}{|x|^\beta} \qquad \text{pour} \qquad x \neq 0.$$
Nous pouvons identifier cette fonction avec cette distribution (cf. N° 6.3).

Nous allons maintenant donner un exemple d'une fonction continue sans dérivée (usuelle) dont la dérivée possède la valeur en zéro. f étant une fonction continue sans dérivée, il en est de même pour

$$g(x) = x\sin\frac{1}{x} + x^2 f(x), \tag{3.7.2}$$

cependant nous avons, selon (3.6.1),
$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x} + xf(x)\right) = 0.$$

§ 4. Ordre de la valeur (et de la limite)

4.1. Revenons maintenant aux théorèmes des N^{os} 3.1.-3.3. On vérifie facilement que si $T_i(x_0)$ sont d'ordre $\leqslant n$, il en est de même de $(\sum_{i=1}^{q}\lambda_i T_i)(x_0)$.

Si $T(x_0)$ est d'ordre $\leqslant n$, alors la valeur de la primitive est d'ordre $\leqslant n-1$[20]).

En effet, en admettant $T(x_0) = 0$ on a $T = \mu^{(n)}$ où $|\mu|(x_0, x) = o(|x-x_0|^{n+1})$ d'où la primitive $S = \mu^{(n-1)}$ possède en x_0 la valeur zéro d'ordre $\leqslant n-1$.

Si $T(x_0)$ est d'ordre $\leqslant n$ et si α est de la classe C^n, alors $(T\alpha)(x_0)$ est d'ordre $\leqslant n$.

En effet, admettons $T(x_0) = 0$. On a alors $T = \mu^{(n)}$ où $|\mu|(x_0, x) = o(|x-x_0|^{n+1})$, d'où
$$|\mu\alpha|(x_0, x) = \int_{x_0}^{x}|\alpha|\,d\mu = o(|x-x_0|^{n+1}),$$
donc $(\alpha\mu)^{(n)}(x_0)$ est d'ordre $\leqslant n$. En particulier, si $n = 0$, $(\alpha T)(x_0) = (\alpha\mu)(x_0)$ est d'ordre zéro. Supposons que le théorème soit vrai pour $n-1$; d'après $(\alpha\mu)^{(n)} = \alpha\mu^{(n)} + \binom{n}{1}\alpha'\mu^{(n-1)} + \ldots + \alpha^{(n)}\mu$, il en résulte que $(\alpha\mu^{(n)})(x_0)$ est d'ordre $\leqslant n$.

[20]) La différence entre les deux ordres peut être arbitrairement grande (cf. N° 4.6).

Pareillement, on peut prouver que l'ordre du premier membre de l'égalité (3.1.4) est $\leqslant n$. On vérifie enfin que l'ordre d'une valeur est égal au maximum des ordres des limites unilatérales.

4.2. Selon la remarque 2 du N° 2.4, les points dans lesquels une mesure μ possède la densité sont ceux où μ possède une valeur d'ordre $\leqslant 1$, donc la mesure possède une valeur d'ordre $\leqslant 1$ presque partout. Le théorème suivant est plus fort:

THÉORÈME. *La mesure possède une valeur d'ordre zéro presque partout; il en est de même pour une fonction sommable.*

En effet, dans le cas d'une fonction sommable f l'existence d'une valeur d'ordre zéro en x_0 équivaut (cf. la remarque 3 du N° 2.4) à la condition

$$\int_{x_0}^{x} |f(x)-f(x_0)|\,dx = o(x-x_0),$$

c'est-à-dire il s'agit de points de Lebesgue pour la fonction sommable f; on sait que les points qui ne le sont pas forment un ensemble de mesure nulle. Si maintenant μ est une mesure, nous faisons la décomposition $\mu = f+\sigma$, où f est une fonction sommable et σ — une mesure singulière. On a donc presque partout

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|\sigma|(x_0, x)}{|x-x_0|} = 0,$$

d'où, selon la définition du N° 2.4, $\sigma(x_0)$ est d'ordre zéro presque partout.

4.3. LEMME. *Supposons qu'une fonction g soit convexe ou concave séparément pour $x<0$ et pour $x>0$ dans un voisinage de zéro. Si*

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n} = a,$$

alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{nx^{n-1}} = a$$

(où $g'(x)$ désigne une dérivée unilatérale).

Démonstration. Soit $x\neq 0$ et soient $\vartheta_1 < 1 < \vartheta_2$. Puisqu'on a alors $x \in (\vartheta_1 x, \vartheta_2 x)$, donc, en vertu de la convexité resp. concavité de g, nous avons

$$g'(x) \in \left[\frac{g(\vartheta_1 x)-g(x)}{\vartheta_1 x - x}, \frac{g(\vartheta_2 x)-g(x)}{\vartheta_2 x - x}\right],$$

d'où

$$\frac{g'(x)}{nx^{n-1}} \in \left[\frac{g(\vartheta_1 x)-g(x)}{n(\vartheta_1 -1)x^n}, \frac{g(\vartheta_2 x)-g(x)}{n(\vartheta_2 -1)x^n}\right].$$

En faisant tendre x vers zéro nous avons pour $i=1,2$

$$\frac{g(\vartheta_i x)-g(x)}{n(\vartheta_i -1)x^n} \to a\frac{\vartheta_i^n -1}{n(\vartheta_i -1)},$$

d'où, d'après

$$\lim_{\vartheta\to 1} \frac{\vartheta^n -1}{n(\vartheta -1)} = 1,$$

il résulte que $g'(x)/nx^{n-1} \to a$.

THÉORÈME. *Pour une mesure positive μ la notion de valeur coïncide avec celle de la densité:*

$$\mu(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\mu(x_0, x)}{x-x_0};$$

dans ce cas la valeur est toujours d'ordre $\leqslant 1$.

Démonstration. Admettons $x_0 = 0$ et supposons que $\mu(0)$ existe. Selon le théorème 2.3 il existe une fonction continue F telle que $\mu = F^{(n)}$ et

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^n} = \frac{\mu(0)}{n!}.$$

Les fonctions $F^{(n-2)}, F^{(n-3)}, \ldots, F', F$ étant convexes ou concaves séparément pour $x>0$ et pour $x<0$, nous pouvons appliquer le lemme $n-1$ fois et nous obtenons

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mu(0, x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F^{(n-1)}(x)}{x} = \mu(0).$$

COROLLAIRE 1. *Afin qu'une fonction f sommable et bornée supérieurement resp. inférieurement possède une valeur en x_0, il faut et il suffit que la primitive possède en x_0 une dérivée usuelle:*

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(u)\,du;$$

dans ce cas la valeur de f est toujours d'ordre $\leqslant 1$.

COROLLAIRE 2. *Si $S \geqslant T$ dans un voisinage de x_0, on a*

$$|\text{ordre de } S(x_0) - \text{ordre de } T(x_0)| \leqslant 1.$$

4.4. Dans le N° 2.6 nous avons montré que la condition (2.6.2), jointe à (2.6.3), est nécessaire afin que $T(x_0)$ soit d'ordre $\leqslant n$. Nous prouverons maintenant qu'elle est aussi suffisante.

THÉORÈME. *Pour que la valeur $T(x_0)$ existe et soit d'ordre $\leqslant n$, il faut et il suffit que T soit d'ordre $\leqslant n$ dans un voisinage de x_0 et que la limite*

(2.6.2) $$\lim_{\delta\to 0}(T, \alpha)$$

existe, où

(2.6.3) $$\alpha\in\mathcal{D}^n,\quad \text{support de } \alpha\subset[x_0-\delta, x_0+\delta],$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\alpha dx = 1 \quad \textit{et} \quad \sup|\alpha^{(n)}(x)| = 0\left(\frac{1}{\delta^{n+1}}\right)^{21)}.$$

Démonstration. Évidemment (cf. N° 2.6) la valeur $T(x_0)$ existe et est égale à la limite (2.6.2). Admettons $x_0 = 0$ et $T(0) = 0$. Selon le théorème 2.3 il existe un entier $p>0$ et une fonction continue $\eta(x)$ tels que l'on a $T = \eta^{(n+p)}$ et

(4.4.1) $$\eta(x) = o(x^{n+p}).$$

Puisque T est d'ordre $\leqslant n$, $\mu = \eta^{(p)}$ est une mesure,

(4.4.2) $$T = \mu^{(n)},$$

et, d'après (4.4.1),

(4.4.3) $$\eta(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{p-1}}{(p-1)!}d\mu(y).$$

On a $(T, \alpha) = (-1)^n(\mu, \alpha^{(n)})$, donc $(\mu, \alpha^{(n)})\to 0$ pour $\delta\to 0$, où α satisfait à (2.6.3). En faisant les substitutions $x = \delta u$, $\psi(u) = \delta\alpha(\delta u)$, $\mu_\delta(u) = \delta^{-n}\mu(\delta u)$ nous obtenons

(4.4.4) $$(\mu_\delta, \psi^{(n)})\to 0 \quad \text{pour} \quad \delta\to 0,$$

où la convergence est uniforme dans l'ensemble des fonctions ψ:

(4.4.5) $$\psi\in C^n,\quad \text{support de } \psi\subset[-1, 1],\quad |\psi^{(n)}|\leqslant M$$

(M étant fixé de façon quelconque). Soient β_i, $i = 0, \ldots, n-1$, des fonctions continues et telles que

(4.4.6) $$\text{support de } \beta_i\subset[-1, 1] \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\beta_i(u)du = x^i$$

(à cet effet il suffit d'admettre $\beta_i = i!\beta^{(n-i)}$, où β est une fonction de $\mathcal{D}^n_{[-1,1]}$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty}\beta du = 1$).

Soit φ une fonction quelconque de $\mathcal{D}^0_{[-1,1]}$. On a alors
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(u)du = \sum_{i=0}^{n-1}a_i[\varphi]x^i,$$

[21]) C'est-à-dire que la convergence dans (1.1) soit forte dans $\mathcal{D}^n$.

où

(4.4.7) $$a_i[\varphi] = \frac{1}{(n-1)!}\binom{n-1}{i}(u^{n-i-1}, \varphi)_u;$$

en vertu de (4.4.6) nous avons donc
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\varphi(u)-\sum_0^{n-1}a_i[\varphi]\beta_i(u)\Big]du = 0.$$

Par conséquent, la fonction
$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\varphi(u)-\sum_0^{n-1}a_i[\varphi]\beta_i(u)\Big]du$$

appartient à $\mathcal{D}^n_{[-1,1]}$ et l'on a
$$\psi^{(n)}(u) = \varphi(u)-\sum_0^{n-1}a_i[\varphi]\beta_i(u).$$

Si la fonction φ parcourt un ensemble de fonctions de $\mathcal{D}^0_{[-1,1]}$ équibornées, la fonction ψ parcourt un ensemble (4.4.5). On a
$$(\mu_\delta, \psi^{(n)}) = (\mu_\delta, \varphi)-\sum_0^{n-1}a_i[\varphi](\mu_\delta, \beta_i) = (\mu_\delta, \varphi)-(w_\delta(u), \varphi) = (\bar\mu_\delta, \varphi),$$

où

(4.4.8) $$\bar\mu_\delta = \mu_\delta - w_\delta,$$

et (selon (4.4.7)) w_δ est un polynôme de degré $\leqslant n-1$, donc, d'après (4.4.4), $(\bar\mu_\delta, \varphi)\to 0$ et la convergence est forte, d'où

(4.4.9) $$|\bar\mu_\delta|((-1, 1))\to 0.$$

Il s'ensuit que
$$\int_0^u\frac{(u-v)^{p-1}}{(p-1)!}d\bar\mu_\delta(v)\to 0$$

uniformément (dans un intervalle fermé contenu dans $(-1, 1)$). Mais, d'après (4.4.8) et (4.4.3), on a
$$\int_0^u\frac{(u-v)^{p-1}}{(p-1)!}d\bar\mu_\delta = \frac{\eta(\delta u)}{\delta^{n+p}} - \int_0^u\frac{(u-v)^{p-1}}{(p-1)!}w_\delta(v)dv,$$

donc, d'après (4.4.1),
$$W_\delta(u) = \int_0^u\frac{(u-v)^{p-1}}{(p-1)!}w_\delta(v)dv\to 0,$$

uniformément par rapport à u. Si l'on écrit

$$(4.4.10)\qquad w_\delta(u) = \frac{a_0(\delta)+a_1(\delta)\delta u+\ldots+a_{n-1}(\delta)\delta^{n-1}u^{n-1}}{\delta^n},$$

alors

$$W_\delta(u) = \frac{a_0(\delta)\dfrac{\delta^p u^p}{p!}+\ldots+a_{n-1}(\delta)\dfrac{\delta^{p+n-1}u^{p+n-1}}{n(n+1)\ldots(n+p-1)}}{\delta^{n+p}}.$$

Selon le lemme 2.1, il en résulte que $a_i(\delta) = o(\delta^{n+p-(p+i)}) = o(\delta^{n-i})$, donc, d'après (4.4.10), on a uniformément $w_\delta(u)\to 0$; en tenant compte de (4.4.8) et (4.4.9), nous obtenons $|\mu_\delta|((-1,1))\to 0$, d'où il résulte (d'après $|\mu_\delta|(-1,1) = |\mu|((-\delta,\delta))/\delta^{n+1}$) que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mu(0,x)}{x^{n+1}} = 0.$$

Ainsi nous avons prouvé que $T(0)$ est d'ordre $\leqslant n$.

4.5. Le théorème 4.4 permet d'obtenir les limitations des ordres dans les théorèmes du § 3. Il suffit de modifier un peu les démonstrations en remplaçant les fonctions φ_λ par des fonctions quelconques satisfaisant aux conditions (2.6.3). De cette manière on arrive à la conclusion que dans le théorème 3.4 les limites (3.4.1) et (3.4.2) sont d'ordre $\leqslant n+1$ (dans la seconde partie de la démonstration au lieu de dériver par rapport à λ il faut introduire des différences de la forme

$$\frac{1}{k}\left(\frac{T}{a},\varphi\right)-\frac{1}{k}\left(\frac{T}{a},\varphi\right).$$

4.6. Exemples. Nous avons montré que

$$(4.6.1)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x^\beta} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^\alpha}\cos\frac{1}{x^\beta} = 0\qquad(\beta>0).$$

Nous allons prouver maintenant que l'ordre de la limite (4.6.1) est strictement égal à

$$(4.6.2)\qquad n = E(\alpha/\beta)+1,$$

c'est-à-dire $(n-1)\beta\leqslant\alpha<n\beta$ si $\alpha\geqslant-\beta$.

A cet effet considérons la fonction

$$\Phi(x) = x^{n+n\beta-\alpha}\sin\left(\frac{1}{x^\beta}-n\frac{\pi}{2}\right),$$

en admettant que la relation (4.6.2) subsiste. On a alors $\varphi(x) = o(x^n)$, donc, d'après la remarque 3 du N° 2.4, la fonction

$$(4.6.3)\qquad \Phi^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1}C_\nu x^{(n-\nu)\beta-\alpha}\sin\left(\frac{1}{x^\beta}-(n-\nu)\frac{\pi}{2}\right)+(-\beta)^n x^{-\alpha}\sin\frac{1}{x^\beta}$$

possède une limite d'ordre $\leqslant n$ pour $x\to 0$, égale à zéro. Nous affirmons que l'ordre de cette limite est égal strictement à n. Supposons, par l'impossible, qu'il soit $\leqslant n-1$; on aurait donc $\Phi^{(n)} = \mu^{(n-1)}$, où $|\mu|(0,x) = o(x^n)$, et il existerait un polynôme w_{n-2} de degré $\leqslant n-2$ tel qu'on aurait

$$\mu = \varphi'+w_{n-2}$$
$$= w_{n-2}+Ax^{n-1+n\beta-\alpha}\sin\left(\frac{1}{x^\beta}-n\frac{\pi}{2}\right)-\beta x^{n-1+(n-1)\beta-\alpha}\sin\left(\frac{1}{x^\beta}-(n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Le second terme du second membre étant $o(x^{n-1})$, on aurait

$$\int_0^x\left|w_{n-2}(x)-\beta x^\varrho\sin\left(\frac{1}{x^\beta}-(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right|dx = o(x^n),$$

où $\varrho = n-1+(n-1)\beta-\alpha\leqslant n-1$ et c'est impossible.

Procédons maintenant par induction. Notre assertion est vraie pour $n = 0$, car alors la limite (4.6.1) existe au sens usuel. En supposant qu'elle est vraie pour $n-1$, la somme du second membre de (4.6.3) possède une limite d'ordre $\leqslant n-1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}x^{-\alpha}\sin(1/x^\beta)$ est nécessairement d'ordre n.

Nous voyons maintenant qu'*il existe des fonctions sommables possèdant des valeurs d'ordre arbitrairement grand*, p. ex.

$$(4.6.5)\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\sin\frac{1}{\sqrt[2n]{|x|}}$$

qui a en zéro une valeur d'ordre $n+1$. Puisque la primitive possède une valeur d'ordre zéro, *la différence entre l'ordre de la valeur d'une distribution et celui de sa primitive peut être aussi grande que l'on veut.*

§ 5. Distributions qui possèdent une valeur partout

5.1. Lemme. *Soit T une distribution ayant une valeur en chaque point d'un ensemble ouvert Ω et soit g une fonction localement sommable et semi-continue supérieurement dans Ω. Si*

$$(5.1.1)\qquad (T,\alpha)<(g,\alpha)$$

pour une fonction non négative $\alpha\in\mathcal{D}_\Omega$, alors il existe un $\xi\in\Omega$ tel que l'on a

$$(5.1.2)\qquad T(\xi)<g(\xi).$$

Démonstration. Soit ϱ l'écart du support de a de la frontière de Ω. Nous allons définir par induction les suites $\{\xi_n\}$ et $\{h_n\}$. Selon le lemme du N° 2.8, il existe en vertu de (5.1.1) h_1 et $\xi_1 \epsilon$ support de a, tels que l'on a $\big(T-g, \varphi_{h_1}(x-\xi_1)\big)<0$ et $h_1<\varrho/2$.

h_{n-1}, ξ_{n-1} étant définis de façon que $\big(T-g, \varphi_{h_{n-1}}(x-\xi_{n-1})\big)_x<0$, nous obtenons, selon le lemme du N° 2.8, des h_n, ξ_n tels que

$$h_n<\frac{1}{2}h_{n-1}, \qquad |\xi_n-\xi_{n-1}|\leqslant h_{n-1}, \tag{5.1.3}$$

$$\big(T, \varphi_{h_n}(x-\xi_n)\big)_x<\big(g, \varphi_{h_n}(x-\xi_n)\big)_x. \tag{5.1.4}$$

D'après (5.1.3), la suite $\{\xi_n\}$ converge vers un point $\xi \epsilon \Omega$, car

$$|\xi-\xi_n|<\sum_1^\infty h_n<\varrho$$

et $\xi_1 \epsilon$ support de a. Soit p l'ordre de la valeur $T(\xi)$. D'après (5.1.3) on a $|\xi_n-\xi|<2h_n$, d'où support de $\varphi_{h_n} \subset [\xi-\delta, \xi+\delta]$, où $\delta=3h_n$. Puisque l'on a, de plus,

$$|\varphi_{h_n}^{(p)}(x-\xi_n)|\leqslant\frac{M}{h_n^{p+1}}=\frac{3^{p+1}M}{\delta^{p+1}},$$

donc les $\varphi_{h_n}(x-\xi_n)$ satisfont aux conditions (2.6.3) pour $\delta=3h_n\to 0$ et nous avons

$$\big(T, \varphi_{h_n}(x-\xi_n)\big)_x\to T(\xi). \tag{5.1.5}$$

La fonction g étant semicontinue supérieurement, nous avons pour chaque $\eta>0$ l'inégalité $g(x)<g(\xi)+\eta$ dans un voisinage de ξ, d'où

$$\limsup_{n\to\infty}\big(g, \varphi_{h_n}(x-\xi_n)\big)_x\leqslant g(\xi). \tag{5.1.6}$$

En comparant (5.1.3), (5.1.4), (5.1.6), nous obtenons $T(\xi)\leqslant g(\xi)$[22]. Pour obtenir l'inégalité forte, il suffit de remarquer que la relation (5.1.1) entraîne

$$(T, a)<(g-\varepsilon, a),$$

pourvu que $\varepsilon>0$ soit suffisamment petit.

5.2. Soient T, S des distributions *possédant une valeur partout* dans un Ω ouvert et soit f une fonction localement sommable dans Ω. Nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si $T(\xi)\geqslant f(\xi)$ presque partout dans Ω, alors $T\geqslant f$ dans Ω (au sens des distributions).*

[22]) Le théorème 5.2 implique que l'ensemble des points qui satisfont à (5.1.2) est de mesure positive.

Démonstration. Il résulte du lemme 5.1 (par contraposition) que dans le cas où f est semi-continue supérieurement et satisfait partout à l'inégalité de l'hypothèse on a $(T, a)\geqslant(f, a)$ pour chaque $a \epsilon \mathcal{D}_\Omega$, $a\geqslant 0$. Dans le cas général nous modifions la fonction f sur un ensemble de mesure nulle de façon que l'on ait $T(\xi)\geqslant f(\xi)$ partout dans Ω. Selon le théorème de Vitali-Carathéodory il existe une suite non décroissante de fonctions g_n, localement sommables et semi-continues supérieurement, telle que $g_n(x)\leqslant f(x)$ partout et

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)$$

presque partout. On a donc $(g_n, a)\leqslant(T, a)$ et $(g_n, a)\to(f, a)$, d'où $(f, a)\leqslant(T, a)$ pour chaque $a \epsilon \mathcal{D}_\Omega$, $a\geqslant 0$, c. q. f. d.

COROLLAIRE 1. *Si $T(\xi)=f(\xi)$ presque partout, on a $T=f$, c'est-à-dire, si la valeur $T(\xi)$ existe partout et si elle est localement sommable comme fonction du point ξ, cette fonction est égale à T (au sens des distributions).*

COROLLAIRE 2. *Si $T(\xi)\geqslant 0$ presque partout, on a $T\geqslant 0$; si $T(\xi)\geqslant S(\xi)$ presque partout, on a $T\geqslant S$.*

COROLLAIRE 3. *Si $T(\xi)=0$ presque partout, on a $T=0$; si $T(\xi)=S(\xi)$ presque partout, on a $T=S$, c'est-à-dire la distribution est complètement déterminée par ses valeurs pourvu qu'elles existent partout*[23]).

5.3. Le théorème 5.2 avec ses conséquences reste vrai sous l'hypothèse que $T(\xi)$ existe, sauf pour un ensemble au plus dénombrable de ξ, et que la primitive possède une valeur partout.

Notamment il suffit de modifier la démonstration du lemme 5.1, en s'appuyant sur le lemme suivant, au lieu du lemme 2.8:

LEMME. *Si la primitive d'une distribution T possède une valeur en chaque point du support d'une fonction non négative $a \epsilon \mathcal{D}$ et si $(T, a)<0$, alors pour chaque h suffisamment petit il existe des points ξ_h' et ξ_h'' dans un voisinage arbitraire du support de a tels que l'on a*

$$|\xi_h''-\xi_h'|\geqslant 5h, \qquad \big(T, \varphi_h(x-\xi_h')\big)_x<0 \quad \text{et} \quad \big(T, \varphi_h(x-\xi_h'')\big)_x<0.$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du lemme du N° 2.8, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)\big(T, \varphi_h(x-\xi)\big)_x d\xi\to(T, a),$$

donc, en posant $K=\frac{1}{2}(T, a)$, nous avons

[23]) Sous l'hypothèse que l'ordre de la valeur $T(x)$ est borné cette proposition résulte d'un théorème de Denjoy ([2], N° 56, p. 319-320).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\xi)\big(T, \varphi_h(x-\xi)\big)_x d\xi < K < 0, \tag{5.3.1}$$

pourvu que h soit suffisamment petit. Si notre lemme était en défaut, il existerait un $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $h_n \to 0$ tels que pour chaque n l'ensemble de tous les points ξ, dont la distance au support de α ne surpasse pas ε^0 et pour lesquels on a $\big(T, \varphi_{h_n}(x-\xi)\big)_x < 0$, serait contenu dans un intervalle (c_n, d_n), où $0 < d_n - c_n < 5h_n$. On aurait donc, d'après (5.3.1),

$$\int_{c_n}^{d_n} \alpha(\xi)\big(T, \varphi_{h_n}(x-\xi)\big)_x d\xi < K < 0, \tag{5.3.2}$$

et il existerait un point $\xi_n \epsilon$ support de α, $\xi_n \epsilon (c_n, d_n)$ pour lequel

$$\big(T, \varphi_{h_n}(x-\xi_n)\big)_x < \frac{K}{5M_0 h_n}, \tag{5.3.3}$$

où M_0 est la borne supérieure de $|\alpha|$. Soit $h_n < \varepsilon_0$; selon le lemme 2.8, on peut choisir un $m > n$ de façon que l'on ait $h_m < \frac{1}{2}h_n$ et qu'il existe un point $\xi' \epsilon [\xi_n - h_n, \xi_n + h_n]$ tel que $\big(T, \varphi_{h_m}(x-\xi')\big)_x < 0$. Puisque la distance de ξ' au support de α ne surpasse pas ε_0, $\xi' \epsilon [c_m, d_m]$. On aurait donc $|\xi' - \xi_n| < h_n$ et $|\xi' - \xi_m| < 5h_m$, d'où $|\xi_n - \xi_m| < 4h_n$. En remplaçant $\{\xi_n\}$ par une suite extraite convenablement, nous pouvons donc exiger que l'on ait $|\xi_n - \xi_{n+1}| \leqslant 4h_n$ et $h_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}h_n$.

Comme dans la démonstration du lemme 5.1 nous obtenons $\xi_n \to \xi \,\epsilon$ support de α,

$$\text{support de } \varphi_{h_n}(x-\xi_n) \subset [\xi - 9h_n, \xi + 9h_n], \qquad |\varphi_{h_n}^{(p)}(x-\xi_n)| < \frac{M}{h_n^{p+1}}, \tag{5.3.4}$$

et la valeur $S(\xi) = 0$ est d'ordre $\leqslant p-1$, où S est une primitive de T. Selon la formule (2.5.2), d'après (5.3.4), nous aurions donc

$$\big|\big(T, \varphi_{h_n}(x-\xi_n)\big)_x\big| = \big|\big(S, \varphi'_{h_n}(x-\xi_n)\big)_x\big| \leqslant \frac{M}{h_n^{p+1}} \int_{-9h_n}^{9h_n} \eta(x)\,dx = o\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

(car $\eta(x) = o(|x|^{p-1})$) contrairement à (5.3.3).

En nous appuyant sur ce lemme nous pouvons prouver le lemme 5.1 sous les hypothèses énoncées au début de ce N°. En effet, nous obtenons, au lieu de la suite ξ_n, une suite de systèmes $\xi_n^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}$, $\varepsilon_i = \mp 1$, où

$$|\xi_{n+1}^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,-1)} - \xi_{n+1}^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1)}| \geqslant 5h_n,$$

$$|\xi_{n+1}^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})} - \xi_n^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}| < h_n, \qquad h_n < \tfrac{1}{2}h_{n-1}, \tag{5.3.5}$$

et

$$\big(T, \varphi_{h_n}(x - \xi_n^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)})\big)_x < \big(g, \varphi_{h_n}(x - \xi_n^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)})\big)_x.$$

Pour chaque suite $\{\varepsilon_n\}$ nous obtenons la limite

$$\xi^{\{\varepsilon_n\}} = \lim_{n\to\infty} \xi_n^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}$$

au lieu du point ξ. D'après (5.3.5) tous les $\xi^{\{\varepsilon_n\}}$ sont différents entre eux, ils forment donc un ensemble ayant la puissance du continu et par conséquent T possède une valeur dans un de ces points. Dans la suite le raisonnement est celui de la démonstration du lemme 5.1.

Remarque. L'hypothèse que T possède une valeur presque partout ne suffit pas; la dérivée d'une fonction continue et singulière en fournit un contre-exemple. Pareillement, l'hypothèse que *la première* primitive possède une valeur partout est essentielle; on le voit à l'exemple de la distribution δ de Dirac.

5.4. Théorème. *Si $T(\xi)$ existe partout, alors $T(\xi)$, considéré comme fonction de ξ, est de classe I de Baire*[24]) *et remplit la condition de Darboux.*

Démonstration. Soit

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\varphi(x/\lambda), \qquad \text{où} \qquad \varphi \,\epsilon\, D \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx = 1.$$

On a selon (2.6.1)

$$T(\xi) = \lim_{\lambda\to 0}\big(T, \varphi_\lambda(x-\xi)\big)_x;$$

mais $\psi_\lambda(\xi) = \big(T, \varphi_\lambda(x-\xi)\big)_x = T * \varphi_\lambda$ est une fonction continue (elle est même de classe C^∞) donc $T(\xi)$ est de classe I.

Pour montrer que $T(\xi)$ remplit la condition de Darboux il suffit de prouver, selon un théorème de Z. Zahorski ([5], p. 6), que chaque point de l'ensemble $(\xi: T(\xi) > a)$ resp. $(\xi: T(\xi) < a)$ est un point d'accumulation bilatéral de cet ensemble. Dans le cas contraire nous aurions p. ex. $T(x_0) > a$ et $T(\xi) \leqslant a$ pour $\xi > x_0$ dans un voisinage de x_0, d'où, selon le corollaire 2 du N° 5.2 et (3.1.2) nous aurions $T(x_0) \leqslant a$.

Corollaire. *Une distribution T qui possède une valeur partout est une fonction localement bornée (ayant des valeurs d'ordre $\leqslant 1$) en dehors d'un ensemble non dense.*

Exemple de fonction sommable ayant une valeur partout, pour laquelle tout ensemble fermé et non dense, arbitrairement donné, est celui des points où l'ordre de la valeur n'est pas localement borné. Posons

$$\xi_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu}}, \qquad n = 0, 1, \ldots;$$

[24]) Dans le cas où l'ordre de la valeur $T(x)$ est borné, c'est une conséquence d'un théorème de Denjoy ([2], p. 289, Th. IV).

la fonction $\varphi(x)$ définie dans $(0, \pi/1-\pi)$ par les formules

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x-\xi_n}} \sin \frac{1}{\sqrt[2n]{x-\xi_n}} \qquad \text{pour} \qquad \xi_n \leqslant x < \xi_{n-1}$$

est sommable et possède une valeur partout dans $(0, \pi/1-\pi)$; en particulier, la valeur en ξ_n est d'ordre $n+1$ (cf. N° 4.6). Etant donné un ensemble non dense et fermé $Z \subset (0,1)$, on a $(0,1)-Z = \sum_n \Delta_n$, où Δ_n sont des intervalles ouverts. En faisant dans φ une substitution linéaire nous obtenons une fonction φ_n ayant les mêmes propriétés dans l'intervalle Δ_n. On peut choisir la suite ε_n de façon que la fonction $g(x)$ définie par les formules

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \in Z, \\ \varepsilon_n \varphi_n(x) & \text{pour} \quad x \in \Delta_n \end{cases}$$

soit sommable dans $(0,1)$. Soit enfin a une fonction de classe C^∞, positive dans $\sum_n \Delta_n$, pour laquelle toutes les dérivées s'annulent dans Z. Alors la fonction $f(x) = a(x)g(x)$ est sommable, possède une valeur partout et chaque point de l'ensemble Z est la limite d'une suite de points dans lesquels l'ordre de la valeur converge vers ∞.

§ 6. Remarques finales

6.1. Partant de la formule $(T, a) = \big(T * a(-x)\big)_{x=0}$, où $a \in \mathcal{D}$, nous pouvons définir le produit scalaire de deux distributions en appliquant la notion de valeur. On pose

$$(6.1.1) \qquad (T, S) = (T * \check{S})(0)$$

(où $\check{S}$ est la distribution déduite de S par la substitution $u = -x$). Ainsi le produit scalaire existe, si le produit de composition $T * \check{S}$ existe et s'il possède une valeur en zéro. On obtient les règles usuelles, p. ex.

$$(6.1.2) \qquad (T, S') = -(T', S),$$

$$(6.1.3) \qquad \big(T, \delta(x-x_0)\big)_x = T(x_0),$$

dans l'hypothèse que l'un des membres existe.

6.2. En admettant $S = \chi_{[a,b]}(x)$, où $\chi_{[a,b]}$ est la fonction caractéristique de $[a, b]$, nous obtenons une définition de l'intégrale définie:

$$(6.2.1) \qquad \int_a^b T dx = (T, \chi_{[a,b]}).$$

En désignant par S une primitive de T nous avons, d'après (6.1.1) et (6.1.2),

$$\int_a^b T dx = (S', \chi_{[a,b]}) = \big(S, \delta(x-b)-\delta(x-a)\big)_x = \big(S(x-b)-S(x+a)\big)(0),$$

où l'existence du premier membre entraîne celle du second et vice versa. Cette définition équivaut donc à celle de Zieleźny [4], selon laquelle l'intégrale définie est la valeur de $S(x+b)-S(x+a)$ en zéro. Enfin, on a p. ex. les règles

$$(6.2.2) \qquad \int_a^b T dx = S(b)-S(a),$$

si $S(a)$, $S(b)$ existent, et

$$(6.3.2) \qquad \int_a^b T' a dx = Ta\Big|_a^b - \int_a^b T a' dx,$$

pourvu que $T(a)$, $T(b)$ existent et a soit suffisamment régulière.

6.3. Le corollaire 3 du N° 5.2 donne un nouveau procédé permettant d'associer (biunivoquement) une distribution T à une fonction f, telle que l'on ait $T(x) = f(x)$ partout (resp. sauf un ensemble au plus dénombrable). Ce procédé s'applique aux fonctions non sommables, comme p. ex.

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \sin \frac{1}{|x|^\beta},$$

qui ne sont même pas intégrables au sens de Denjoy, tandis qu'elles possèdent des intégrales définies au sens ci-dessus.

Partant de la remarque du N° 3.3 sur le recollement des distributions dans les intervalles contigus on peut étendre la correspondance biunivoque entre les fonctions et les distributions à une classe assez large de fonctions qui sont égales preque partout aux valeurs des dérivées des distributions ayant une valeur partout; on procède par induction transfinie en effectuant alternativement les opérations de Cauchy et de Harnack et on obtient ainsi une généralisation de l'intégrale de Denjoy.

Travaux cités

[1] S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. 3 (1931), p. 174-179.

[2] A. Denjoy, *Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur*, Fund. Math. 25 (1935), p. 273-326.

[3] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952.

[4] S. Łojasiewicz, J. Wloka und Z. Zieleźny, *Über eine Definition des Wertes einer Distribution*, Bull. Polon. Acad. des Sc., Cl. III. 3 (1955), p. 479-481.

[5] L. Schwartz, *Théorie des distributions, I, II*, Paris 1950/1951.

[6] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Am. Math. Soc. 69 (1950), p. 1-54.

[7] Z. Zieleźny, *Sur la définition de Łojasiewicz de la valeur d'une distribution dans un point*, Bull. Acad. Polon. des Sc., Cl. III. 3 (1955), p. 519-520.

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1956

Sur un problème du calcul de probabilité (III)*

(Mouvement d'une molécule dans l'espace)

par

S. PASZKOWSKI (Wrocław)

Cette note est un supplément à deux autres portant le même titre[1]. Nous nous occupons ici d'une méthode qui permet d'analyser le mouvement d'une molécule dans l'espace n-dimensionnel sous certaines hypothèses relatives à la direction du mouvement $(\mathcal{H}_1)$, à des probabilités $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3)$ et une hypothèse analytique $(\mathcal{H}_4)$.

Le numérotage des paragraphes et des formules fait suite à celui des notes précédentes.

3.1. Hypothèses. La molécule se meut dans l'espace euclidien à n dimensions. Nous supposons que

$(\mathcal{H}_1)$ à chaque instant la direction du mouvement de la molécule est parallèle à l'un des axes d'un système de coordonnées cartésiennes.

Soit C un parallélépipède n-dimensionnel dont les arêtes, parallèles aux axes du système de coordonnées, ont les longueurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous introduisons les probabilités de certains phénomènes dans le mouvement de la molécule par rapport au parallélépipède C:

1° $\pi_{\eta_i,\vartheta_j}(C)$ — probabilité pour que la molécule sorte du parallélépipède C dans la direction du vecteur

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},\vartheta,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-j}) \quad (\text{où } \vartheta^2=1),$$

en supposant qu'elle est entrée dans le parallélépipède C dans la direction du vecteur

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},\eta,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-i}) \quad (\text{où } \eta^2=1); \tag{152}$$

*) Ce travail fut présenté à la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique le 2 décembre 1955.

[1]) Voir Studia Mathematica 15 (1955), p. 188-200 (note I), et p. 273-299 (note II).