3° aux fonctions r, R (probabilités de l'absorption de la molécule dans le segment) correspondent les fonctions $\pi_{k,l}$ pour $|k| \neq |l|$, c'est-à-dire les probabilités pour qu'il y ait changement de la direction du mouvement en une direction perpendiculaire ou bien arrêt de la molécule dans le parallélépipède.

Une différence essentielle apparaît donc au point 3°. Une autre différence consiste dans le nombre des arguments continus, les fonctions (153) en ayant n (à savoir $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

3. 3. Solution des équations fonctionnelles. En posant

$$p = \pi_{i,i}, \qquad q = \pi_{i,-i}, \qquad r = \sum_{l=-n,|l|\neq i}^{n} \pi_{i,l},$$

$$P = \pi_{i,-i}, \qquad Q = \pi_{-i,i}, \qquad R = \sum_{l=-n,|l|\neq i}^{n} \pi_{-i,l}$$

(où $i = 1, 2, \ldots, n$), en considérant x_i comme argument des fonctions p, q, r, P, Q, R et les autres arguments $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ comme paramètres et en écrivant x au lieu de x_i' et y au lieu de x_i'', le système (154) devient identique au système (2)-(9) non seulement au point de vue formel, mais aussi au point de vue des hypothèses. Ainsi on peut appliquer les résultats de la note I, où (§ 1.2) l'on a donné toutes les solutions du système (2)-(9) qui sont des probabilités. Il faut cependant tenir compte du fait que, maintenant, les paramètres (14), (16) dépendent de $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Après avoir trouvé les fonctions r et R nous utilisons les résultats de la note II (§ 2.3, formules (71), (72), (74)-(81)); on y a démontré que ce sont toutes les solutions des équations (5) et (9) (sans les hypothèses (2) et (6)). Plus précisément, nous n'avons envisagé dans le § 2.3 que le cas $p(0) = P(0) = 1$ (correspondant au cas I de la note I). Il est facile de compléter les solutions du § 2.3 lorsque la condition $p(0) = P(0) = 1$ n'est pas satisfaite. Elles fournissent donc des expressions pour les fonctions $\pi_{k,l}$ ($|k| \neq |l|$). Seuls les paramètres μ et M dans les formules (71), (72), (74)-(81) dépendent de l'indice l; μ et M doivent pourtant satisfaire à certaines conditions supplémentaires, provenant des relations $0 \leqslant \pi_{k,l}(x) \leqslant 1$ et

$$r = \sum_{l=-n,|l|\neq i}^{n} \pi_{i,l}, \qquad R = \sum_{l=-n,|l|\neq i}^{n} \pi_{-i,l},$$

qui doivent être vérifiées pour chaque $x \geqslant 0$.

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1956

Sur les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles à coefficients constants

par

J. MIKUSIŃSKI (Warszawa)

Dans un travail antérieur [2], j'ai démontré que le nombre de solutions linéairement indépendantes d'une équation différentielle opérationnelle

$$x^{(n)}(\lambda) + a_{n-1}x^{(n-1)}(\lambda) + \ldots + a_0 x(\lambda) = 0$$

ne peut surpasser le degré n. J'ai donné aussi une méthode qui permet d'établir le nombre exact de solutions linéairement indépendantes dans le cas particulier où le polynôme caractéristique correspondant à cette équation se décompose en facteurs linéaires. La démonstration s'appuyait sur des propriétés d'un déterminant qui est une généralisation du déterminant de Vandermonde.

Le but de cette note est de remplir une lacune dans le travail cité, en donnant des théorèmes généraux sur le nombre de solutions linéairement indépendantes, sans faire restriction au cas des facteurs linéaires. La méthode de démonstration est purement algébrique et concerne un espace linéaire quelconque[1]). Ainsi l'article peut être lu et compris sans avoir quelque idée sur le calcul opérationnel, de plus, les théorèmes sont susceptibles d'interprétations bien différentes.

1. Nos considérations concernent un espace linéaire $\mathcal{E}$ quelconque. On suppose seulement que l'ensemble des coefficients est un corps commutatif $\mathcal{C}$ de caractéristique 0.

Les éléments $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathcal{E}$ sont linéairement indépendants lorsque l'égalité $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ $(a_i \in \mathcal{C})$ entraîne $a_1 = \ldots = a_n = 0$; dans le cas contraire, ils sont linéairement dépendants.

On suppose qu'une opération de dérivation fait correspondre des éléments de E à certains éléments de $\mathcal{E}$ et que cette opération jouit des propriétés suivantes:

[1]) Pour un anneau linéaire, des théorèmes à peu près analogues ont été démontrés indépendamment, par la méthode des déterminants, par M. Kowalski dans un travail non publié encore.

1° Si x' et y' existent, on a $(ax+by)' = ax'+by'$;

2° Il existe au plus n éléments linéairement indépendants, satisfaisant à une même équation d'ordre n,

$$a_n x^{(n)}+\ldots+a_0 x = 0 \qquad (a_n \neq 0).$$

2. En posant

$$(1) \qquad Lx = a_n x^{(n)}+\ldots+a_0 x \qquad (a_n \neq 0),$$

on a évidemment $L(ax+by) = aLx+bLy$.

Si, pour un élément $x_0 \in \mathcal{E}$, on a $Lx_0 = 0$, cet élément est indéfiniment dérivable et l'on a $(Lx_0)^{(m)} = L(x_0^{(m)}) = 0$ pour tout $m = 1, 2, \ldots$ Si $L_1 x$ et $L_2 x$ sont deux expressions de la forme (1) et si $L_2 x_0 = 0$, on a $L_1 L_2 x_0 = L_1(L_2 x_0) = 0$.

A toute expression Lx est lié le polynôme caractéristique

$$P(\xi) = a_n \xi^n+\ldots+a_0,$$

possédant les mêmes coefficients que Lx.

Si $P_1(\xi)$ et $P_2(\xi)$ sont des polynômes caractéristiques des expressions $L_1 x$ et $L_2 x$ respectivement, alors

(a) la somme $P_1(\xi)+P(\xi)$ est le polynôme caractéristique de l'expression $(L_1+L_2)x = L_1 x+L_2 x$;

(b) le produit $P_1(\xi)P_2(\xi)$ est le polynôme caractéristique de l'expression $L_1 L_2 x = L_1(L_2 x)$.

L'ensemble des expressions Lx constitue donc un anneau isomorphe à l'anneau des polynômes $P(\xi)$. En particulier, on a $L_1 L_2 x = L_2 L_1 x$. Si l'une des expressions $L_1 x, \ldots, L_2 x$ s'annule pour $x = x_0$, il en est de même de leur produit $Lx = L_1 \ldots L_n x$.

3. Les trois propositions suivantes ne sont basées que sur l'axiome 1°:

Proposition 1. *Si les équations $L_2 x = 0$ et $L_2 x = 0$ n'ont pas de solution commune et si $L_1 x_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$, $L_1 y_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, chacun des systèmes $x_1, \ldots, x_m$ et $y_1, \ldots, y_n$ étant linéairement indépendant, alors le système de $m+n$ éléments $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ est linéairement indépendant.*

Démonstration. Si, au contraire, les $m+n$ éléments étaient linéairement dépendants, on aurait $a_1 x_1+\ldots+a_m x_m = b_1 y_1+\ldots+b_n y_n$, l'un au moins des coefficients a_i et b_i étant différent de 0. Or, le premier membre de la dernière égalité est une solution de $L_1 x = 0$ et son second membre est une solution de $L_2 x = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que ces équations n'ont pas de solution commune.

Proposition 2. *Si les équations $L_1 x = 0$ et $L_2 x = 0$ ont exactement m et n solutions linéairement indépendantes, l'équation $L_1 L_2 x = 0$ a au plus $m+n$ solutions linéairement indépendantes.*

Démonstration. Supposons, au contraire, qu'il existe $m+n+1$ solutions linéairement indépendantes de $L_1 L_2 x = 0$. Soient $x_1, \ldots, x_m$ des solutions linéairement indépendantes de $L_1 x = 0$. Chacune de ces solutions est en même temps une solution de $L_1 L_2 x = 0$. Soient $y_1, \ldots, y_{n+1}$ des solutions de $L_1 L_2 x = 0$ telles que les $m+n+1$ solutions $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_{n+1}$ soient linéairement indépendantes. Alors les éléments $L_1 y_1, \ldots, L_1 y_{n+1}$ sont linéairement indépendants. En effet, si $\sum c_i y_i = 0$, la somme $\sum c_i y_i$ satisfait à l'équation $L_1 x = 0$, elle est donc une combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_m$. Alors $c_1 = \ldots = c_{n+1} = 0$, ce qui prouve l'indépendance linéaire des $n+1$ éléments $L_1 y_i$. D'autre part, ces éléments satisfont à l'équation $L_2 x = 0$, ce qui contredit la supposition que cette équation a au plus n solutions linéairement indépendantes.

Proposition 3. *Si les équations $L_1 x = 0$ et $L_2 x = 0$ ont une solution commune non nulle, leurs polynômes caractéristiques respectifs $P_1(\xi)$ et $P_2(\xi)$ ont un diviseur commun*[2]).

Démonstration. Soit x_0 une solution commune non nulle et soit $L_3 x = 0$ l'équation de degré le plus petit possible ayant x_0 pour solution. Posons $P_1(\xi) = P_3(\xi)Q(\xi)+R(\xi)$, où $P_3(\xi)$ est le polynôme caractéristique de $L_3 x$ et le degré du polynôme $R(\xi)$ est inférieur à celui de $P_3(\xi)$. En désignant par Mx et Nx les expressions linéaires correspondant à $Q(\xi)$ et $R(\xi)$, on a $L_1 x_0 = L_3 M x_0+N x_0$, c'est-à-dire $0 = N x_0$. D'où $R(\xi) = 0$, en tenant compte de l'hypothèse sur $L_3 x$. Le polynôme $P_1(\xi)$ se divise donc par $P_3(\xi)$. Pareillement $P_2(\xi)$ se divise par $P_3(\xi)$.

Proposition 4. *Si les éléments $x_1, \ldots, x_n$ satisfont au système de n équations*

$$(2) \qquad x'_j = a_{j1} x_1+\ldots+a_{jn} x_n \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

chacun de ces éléments satisfait à la même équation $Lx = 0$ d'ordre n, correspondant au polynôme caractéristique

$$P(\xi) = \begin{vmatrix} a_{11}-\xi \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots a_{nn}-\xi \end{vmatrix}.$$

Démonstration. En adoptant les notations

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix} \qquad (i = 0, 1, \ldots),$$

le système (2) peut être remplacé par une seule équation $X' = AX$.

[2]) Je dois à M. Kowalski la remarque que la proposition 3 se laisse démontrer sans axiome 2°.

On a $X^{(i)} = A^i X$ $(i = 1, \ldots, n)$ et, par conséquent, $LX = P(A)X = 0$, en vertu du théorème bien connu de Cayley et Hamilton. Or, l'égalité $LX = 0$ équivaut au système de n égalités $Lx_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, ce qui achève la démonstration.

4. Les propositions de cette section s'appuyeront sur les deux axiomes 1° et 2°.

PROPOSITION 5. *Si $L_1 x_i = 0$ et $L_2 x_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$, de plus, L_2 est d'ordre p et les éléments $x_1, \ldots, x_p$ sont linéairement indépendants, alors le polynôme caractéristique $P_1(\xi)$ correspondant à $L_1 x$ est divisible par le polynôme caractéristique $P_2(\xi)$ correspondant à $L_2 x$.*

Démonstration. Posons $P_1(\xi) = P_2(\xi)Q(\xi) + R(\xi)$, où $R(\xi)$ est de degré $< p$. Alors $L_1 x = L_2 Mx + Nx$, où Mx et Nx sont des expressions linéaires correspondant aux polynômes $Q(\xi)$ et $R(\xi)$. En posant $x = x_i$, il s'ensuit $Nx_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$, d'où $Nx = 0$, en vertu de l'hypothèse 2° de la section 1. Donc, le polynôme $P_1(\xi)$ est divisible par $P_2(\xi)$.

L'équation $Lx = 0$ sera dite *irréductible*, lorsque son polynôme caractéristique $P(\xi)$ est irréductible.

PROPOSITION 6. *L'équation irréductible $Lx = 0$ d'ordre n a exactement n solutions linéairement indépendantes, ou bien elle n'en a aucune (c'est-à-dire sa seule solution est nulle).*

Démonstration. Si x_0 est une solution non nulle de $Lx = 0$, chacun des éléments $x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ est encore une solution de cette équation. Désignons par p le plus grand entier $\leqslant n$, tel que les éléments $x_0, \ldots, x_0^{(p-1)}$ sont linéairement indépendants. Alors

$$x^{(p)} + b_{p-1} x^{(p-1)} + \ldots + b_0 x = 0 \tag{3}$$

pour $x = x_0$. Par dérivation on voit que l'équation (3) est satisfaite pour tout $x = x_0^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, p-1)$. En vertu de la proposition 5, le polynôme $P(\xi)$ est divisible par

$$\xi^p + b_{p-1}\xi^{p-1} + \ldots + b_0, \tag{4}$$

d'où $p = n$, car $P(\xi)$ est irréductible.

5. La proposition 2 ne peut pas être renforcée, en affirmant que l'équation $L_1 L_2 x = 0$ ait exactement $m+n$ solutions linéairement indépendantes. En effet, soit $\mathcal{C}$ le corps des nombres imaginaires et $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions de la forme $c_1 e^{a_1 \lambda} + \ldots + c_k e^{a_k \lambda}$, où a_i, c_i sont des nombres complexes, k un nombre naturel et λ une variable complexe. La dérivation est entendue au sens usuel. Si $L_1 x = L_2 x = x' - ax$, l'équation $L_1 L_2 x = x'' - 2ax' + a^2 x = 0$ n'a qu'une seule solution $e^{a\lambda}$, car la fonction $\lambda e^{a\lambda}$ n'appartient pas à l'espace $\mathcal{E}$.

Afin de renforcer la proposition 2, introduisons dans l'espace $\mathcal{E}$ une opération faisant correspondre un élément λx aux éléments dérivables $x \in \mathcal{E}$, de manière que

3° $\lambda(ax + by) = a\lambda x + b\lambda y$;

4° $(\lambda x)' = \lambda x' + x$.

En posant par induction

$$\lambda^0 x = x, \qquad \lambda^{i+1} x = \lambda\lambda^i x \qquad \text{pour} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

et

$$W(\lambda)x = (a_0 + \ldots + a_n \lambda^n)x = a_0 x + \ldots + a_n \lambda^n x,$$

on peut démontrer sans peine que

$$[W(\lambda)x]' = W'(\lambda)x + W(\lambda)x',$$

où $W'(\lambda)$ est la dérivée formelle du polynôme $W(\lambda)$.

Posons par induction $L^1 x = Lx$ et $L^{i+1} x = LL^i x$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Cela étant, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 7. *Si Lx s'annule pour $x = x_0$, alors $L^n x$ s'annule pour $x = \lambda^i x_0$, où $i = 0, \ldots, n-1$.*

Démonstration. Si le polynôme caractéristique de $L'x$ est $P(\xi)$, désignons par Lx l'expression différentielle correspondant à la dérivée formelle $P'(\xi)$ du polynôme $P(\xi)$. Alors $(L^n)'x = nL^{n-1}L'x$.

Il est facile de vérifier que l'on a généralement $L(\lambda x) = \lambda Lx + L'x$. Donc

$$L^{n+1}(\lambda^n x) = L^{n+1}(\lambda^{n-1} x) + (n+1) L^n L'(\lambda^{n-1} x),$$

d'où la proposition résulte par induction.

PROPOSITION 9. *Si x_0 est une solution non nulle d'une équation irréductible $Lx = 0$ d'ordre n, les éléments*

$$\lambda^i x_0^{(j)} \qquad (i = 0, \ldots, m-1;\ j = 0, \ldots, n-1) \tag{5}$$

sont linéairement indépendants, quel que soit m naturel.

Démonstration. Supposons, au contraire, que les éléments (5) soient linéairement dépendants, ou ce qui revient au même, qu'il existe des polynômes $W_0(\lambda), \ldots, W_{n-1}(\lambda)$ de degré $\leqslant m-1$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=0}^{n-1} W_j(\lambda) x_0^{(j)} = 0. \tag{6}$$

De plus, si les degrés de ces polynômes sont $p_0, \ldots, p_{n-1}$, on peut supposer que l'un quelconque des éléments

(7) $$\lambda^{p_j} x_0^{(j)} \qquad (j = 0, \ldots, n-1)$$

étant supprimé, les éléments (5) restants sont linéairement dépendants.

En dérivant (6), on a

$$\sum_{j=0}^{n-1} [W_j'(\lambda) x_0^{(j)} + W_j(\lambda) x_0^{(j+1)}] = 0,$$

d'où, en tenant compte de l'égalité $x_0^{(n)} = -a_{n-1} x_0^{(n-1)} - \ldots - a_0 x_0$,

(8) $$[W_0'(\lambda) - a_0 W_{n-1}(\lambda)] x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} [W_j'(\lambda) + W_{j-1}(\lambda) - a_j W_{n-1}(\lambda)] x^{(j)} = 0.$$

Le premier membre de (8) est une combinaison linéaire des éléments (5), de même que (6). Les coefficients de ces deux combinaisons sont proportionnels, car, s'il en était autrement, on pourrait trouver une autre combinaison linéaire égale à 0 et ne contenant pas tous les éléments (7). Désignons par k le coefficient de proportionnalité.

Si p est le plus grand des nombres $p_0, \ldots, p_{n-1}$ et b_j désigne le coefficient de λ^p dans le polynôme $W_j(\lambda)$ ($b_j = 0$ lorsque le degré de $W_j(\lambda)$ est $< p$), on parvient, en comparant dans (6) et (8) les coefficients de $\lambda^p x_0^{(j)}$, aux égalités suivantes:

(9) $$\begin{aligned} kb_0 &= -a_0 b_{n-1}, \\ kb_1 &= b_0 - a_1 b_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ kb_{n-1} &= b_{n-2} - a_{n-1} b_{n-1}. \end{aligned}$$

De ces égalités on tire sans peine $(k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_0) b_{n-1} = 0$, d'où $b_{n-1} = 0$, car le polynôme $\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \ldots + a_0$ est irréductible. Cela étant, on trouve successivement de (9) que $b_{n-2} = 0, \ldots, b_0 = 0$. Il s'ensuit que le degré de tous les polynômes $W_j(\lambda)$ est inférieur à p. Cette contradiction prouve la proposition.

6. Les propositions des sections précédentes permettent de réduire la résolution de toute équation $Lx = 0$ à des équations irréductibles. En effet, il suffit de décomposer Lx en facteurs irréductibles:

$$Lx = L_1^{k_1} \ldots L_m^{k_m} x;$$

si l'equation $L_p x = 0$ n'a aucune solution non nulle, il en est de même de $L_p^{k_p} x = 0$; si l'équation $L_p x = 0$ a une solution non nulle x_p et est d'ordre n_p, l'équation $L_p^{k_p} x = 0$ a exactement $k_p n_p$ solutions linéairement indépendantes $\lambda^i x_p^{(j)}$ $(i = 0, \ldots, k_p - 1;\ j = 0, \ldots, n_p - 1)$.

En rassemblant toutes ces solutions, on aura $\sum k_p n_p$ solutions linéairement indépendantes de $Lx = 0$, où n_p est égal à 0 ou à l'ordre de L_p, suivant que $L_p x = 0$ ne possède pas ou possède des solutions non nulles. Ce sont toutes les solutions linéairement indépendantes de $Lx = 0$.

Cette méthode peut aussi être adaptée aux systèmes d'équations, grâce à la proposition 3 [3]).

7. En appliquant la théorie précédente aux équations opérationnelles

$$x^{(n)}(\lambda) + a_{n-1} x^{(n-1)}(\lambda) + \ldots + a_0 x(\lambda) = 0,$$

où $a_{n-1}, \ldots, a_0$ sont des opérateurs, on parvient à des résultats plus généraux que dans mes travaux antérieurs ([1], p. 229-232, et [4]); de plus, on évite ainsi de pénibles calculs de déterminants.

Publications citées

[1] S. Drobot et J. Mikusiński, *Sur l'unicité de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits (II)*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 38-40.

[2] J. Mikusiński, *Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles*, ibidem 12 (1951), p. 227-270.

[3] — *Un théorème d'unicité pour quelques systèmes d'équations différentielles considérées dans les espaces abstraits*, ibidem 12 (1951), p. 80-83.

[4] — *Sur un déterminant*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 27-29.

[3]) Il faut remarquer que le résultat publié dans ma note [3], concernant des systèmes d'équations, devient, grâce à la proposition 3, une conséquence directe d'un résultat antérieur [1].

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 16. 1. 1956