$\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ *if and only if* $a > a_k''$. $\{a_k'\}$ *and* $\{a_k''\}$ *are the sequences of theorem* 3A.

We also easily obtain

THEOREM 4C. *Let* $W(z)$ *and* $W_1(z)$ *be the polynomials defined in theorem* 1A *and let* $p(x) = \sum_{\nu=0}^{l} \lambda_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x) + t(x)$, *where* $t(x)$ *satisfies* (18) *with* $\mu_n = W_1(n)/W(n)$. *The hypothesis* $\lim_{x\to\infty} p(x) = s$ *implies* $\lim_{x\to\infty} f(x) = s$ *if and only if*

$$W(z)\sum_{\nu=0}^{l} \lambda_\nu \binom{z}{\nu} + W_1(z) \in \mathfrak{R}.$$

From this the following Tauberian theorem results: *if* $\lim_{x\to\infty} C_k(x) = s$ *and* $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 0$ *then* $\lim_{x\to\infty} f(x) = s$.

References

[1] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949.

[2] F. Hausdorff, *Summationsmethoden und Momentfolgen I, II*, Math. Zeitschr. 9 (1921), p. 74-109 and 280-299.

[3] J. Karamata, *Sur quelques inversions d'une proposition de Cauchy et leurs généralisations*, Tôhoku Math. J. 36 (1933), p. 22-28.

[4] F. Lösch und F. Schoblik, *Die Fakultät*, Leipzig 1951.

[5] O. Perron, *Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr. 6 (1920), p. 161-166.

[6] H. R. Pitt, *Mercerian theorems*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 34 (1938), p. 510-520.

[7] A. Ostrowski, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Bd. II, Basel 1951.

[8] W. W. Rogosinski, *On Hausdorff's methods of summability I, II*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 38 (1942), p. 166-192 and 344-363.

[9] H. Späth, *Asymptotisches Verhalten der Lösungen linearer Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr. 30 (1929), p. 487-513.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 25. 4. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Estimation du domaine d'existence de l'intégrale d'un système en involution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dans le cas de variables complexes

par W. PAWELSKI (Gdańsk)

Comme le titre l'indique, la présente note a pour but de généraliser dans le cas de variables complexes le problème analogue déjà résolu dans le cas de variables réelles [1].

Les démonstrations des théorèmes seront indiquées à grands traits, vu leur analogie avec celles de mes travaux antérieurs [1] et [2].

Considérons le système d'équations

$$(1)\qquad \frac{\partial z}{\partial t_\alpha} + H_\alpha\left(t_\beta, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right) = 0, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

remplissant les conditions de compatibilité

$$(2)\qquad \frac{\partial H_\beta}{\partial t_\alpha} - H_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial z} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial t_\beta} + H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H_\beta}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial H_\beta}{\partial z}\right) - \frac{\partial H_\beta}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial H_\alpha}{\partial z}\right)\right\} \equiv 0.$$

Admettons que les fonctions H_α des variables complexes t_β, x_i, q_i, z soient analytiques dans l'ensemble défini par les conditions

$$(3)\qquad |t_\alpha - t_\alpha^0| \leqslant c, \quad |x_i - x_i^0| \leqslant c, \quad |z - z_0| \leqslant c, \quad |q_i - q_i^0| \leqslant c$$

et que la fonction $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ soit analytique dans l'ensemble

$$(4)\qquad |x_i - x_i^0| \leqslant c.$$

Soit M un nombre positif constant tel que

1° les valeurs absolues

$$(5)\qquad |H_\alpha|, \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x_i \partial x_j}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial z^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial q_i \partial q_j}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x_i \partial z}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial z \partial q_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x_i \partial q_j}\right|$$

sont inférieures à M;

2° $\left|\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right| < M$, $\left|\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\partial x_j}\right| < M$ dans l'ensemble (4);

3° $|q_i^0| < M$.

Supposons en outre que l'on ait

$$|\omega(x_i^0)-z_0| < \tfrac{1}{4}c, \quad |\omega_{x_i}(x_i^0)-q_i^0| < \tfrac{1}{4}c. \tag{6}$$

THÉORÈME. *Dans ces conditions le système d'équations* (1) *a exactement une seule intégrale* $z(t_a, x_i)$ *qui est analytique dans l'ensemble* R *défini par les relations*

$$|t_a-t_a^0| \leqslant \varrho_0, \quad |x_i-x_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)} - M\sum_{a=1}^{m}|t_a-t_a^0|,$$

où $\varrho_0 = \min(\delta_0, \varrho_1)$,

$$\delta_0 = \frac{c^2}{m[(2n+1)(n+1)^5(M+c+1)^5]}, \quad \varrho_1 = \frac{c}{4n(M+1)Mm}$$

et qui se réduit à la fonction $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ *dans l'ensemble*

$$r\left\{t_a = t_a^0,\ |x_i-x_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)}\right\}.$$

La démonstration de ce théorème se fera par étapes.

Dans la première, le problème sera ramené à l'aide de la méthode de Mayer, à équation aux dérivées partielles du premier ordre et à l'estimation du domaine d'existence de sa solution.

Dans la seconde, on se basera sur les considerations de la III-ème partie de [1], qui seront dans ce cas tout à fait analogues; elles permettront d'obtenir la conclusion du théorème énoncé.

I. Comme dans le cas de variables réelles, la recherche de l'intégrale du système (1) se ramène ici, à l'aide de la transformation de Mayer, à la résolution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Or, dans le cas de variables complexes, la transformation de Mayer

$$T\{t_a = t_a^0 + t\cdot\mu_a\},$$

où t et μ_a satisfont, comme variables complexes, aux inégalités

$$|t| \leqslant c/\delta_0, \quad |\mu_a| \leqslant \delta_0$$

(avec $\delta_0 < c$ et par conséquent $c/\delta_0 > 1$) transformera le système (1) dans le système (7)

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{a=1}^{m} H_a\mu_a = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial\mu_a} + tH_a = 0. \tag{7}$$

Abordons la première de ces équations qui prend la forme

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{a=1}^{m} H_a\left(t_a^0+t\mu_a, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right)\mu_a = 0, \tag{8}$$

où μ_a est considéré comme paramètre.

Introduisons maintenant pour le second terme de l'équation (8) la notation

$$F\left(t, \mu_a, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right) \overset{\text{df}}{=} -\sum_{a=1}^{m} H_a\mu_a, \tag{9}$$

qui sera plus commode, car elle nous permettra d'énoncer un théorème auxiliaire concernant la solution de (8).

Prenons l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F\left(t, \mu_a, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right). \tag{10}$$

On déduit facilement des hypothèses relatives aux fonctions H_a et à la transformation T que la fonction F est analytique dans l'ensemble

$$|t| \leqslant \frac{c}{\delta_0}, \quad |\mu_a| \leqslant \delta_0, \quad |x_i-x_i^0| \leqslant c, \quad |z-z_0| \leqslant c, \quad |q_i-q_i^0| \leqslant c. \tag{11}$$

Soit ϱ un nombre positif tel que

$$\varrho \leqslant \delta_0 \quad (\text{ce qui entraîne } \varrho \leqslant c) \tag{12}$$

et supposons $|\mu_a| \leqslant \varrho$.

Alors il s'ensuit des conditions (5) que la valeur absolue de F ainsi que les valeurs absolues de ses dérivées partielles, jusqu'au second ordre inclusivement, sont inférieures à $M\sum_{a=1}^{m}|\mu_a|$ et, d'après (12), simultanément inférieures à M, puisque

$$M\sum_{a=1}^{m}|\mu_a| \leqslant Mm\varrho \leqslant M. \tag{13}$$

THÉORÈME AUXILIAIRE. *Les conditions énoncées étant toutes satisfaites, l'équation* (10) *aura exactement une seule intégrale* $z(t, x_i, \mu_a)$ *analytique dans l'ensemble* R' *défini par les relations*

$$|t| \leqslant 1, \quad |x_i-x_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)} - \left(M\sum_{a=1}^{m}|\mu_a|\right)|t|, \quad |\mu_a| \leqslant \varrho_0;$$

cette intégrale se réduit à la fonction $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ *dans le domaine* $r'\{t = 0,\ |x_i-x_i^0| \leqslant c/4n(M+1)\}$.

Pour la démonstration nous nous rapporterons à celle de [2] en y introduisant les modifications suivantes:

1° La fonction f sera désignée ici par F; cependant il faudra tenir compte du fait que F est aussi fonction du paramètre μ_a.

2° La variable x sera désignée ici par t, avec l'hypothèse $|t| \leqslant c/\delta_0$ au lieu de $|x-x_0| \leqslant k$, car $x_0 = t_0 = 0$.

3° Les variables y_i seront désignées par x_i $(i = 1, \ldots, n)$, la fonction φ par ω et nous poserons $k = c$, tout en nous rappelant que $|\mu_a| \leqslant \varrho$.

4° Ces modifications admises, toutes les autres hypothèses se rapportant maintenant aux fonctions F et ω seront maintenues.

Nous tâcherons maintenant d'estimer ϱ de telle manière que la conclusion du théorème ainsi modifié soit vérifiée dans l'ensemble R'.

Nous nous abstenons de donner in extenso la démonstration qui nous amènerait à de nombreuses répétitions du travail [2].

Nous nous bornerons uniquement à traiter les points délicats de la démonstration qui permettront d'estimer ϱ de manière à garantir la validité du la théorème dans l'ensemble R'; il s'agira surtout d'assurer celle-ci pour $|t| \leqslant 1$.

Nous obtiendrons, comme dans [2], le système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} = -Q_i, \qquad \frac{dz}{dt} = F - \sum_{j=1}^{n} Q_j q_j, \qquad \frac{dq_i}{dt} = X_i + Zq_i, \tag{14}$$

où $X_i = \partial F/\partial x_i$, $Z = \partial F/\partial z$, $Q_i = \partial F/\partial q_i$ et nous tâcherons de limiter ϱ de telle manière que l'intégrale du système (14), à savoir

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t, x_1^*, \ldots, x_n^*, z^*, q_1^*, \ldots, q_n^*, \mu_1, \ldots, \mu_m), \\ z &= z(t, x_1^*, \ldots, x_n^*, z^*, q_1^*, \ldots, q_n^*, \mu_1, \ldots, \mu_m), \\ q_i &= q_i(t, x_1^*, \ldots, x_n^*, z^*, q_1^*, \ldots, q_n^*, \mu_1, \ldots, \mu_m), \end{aligned} \tag{14'}$$

où x_i^*, z^*, q_i^* satisfont aux inégalités

$$|x_i^* - x_i^0| \leqslant \tfrac{1}{2}c, \qquad |z^* - z_0| \leqslant \tfrac{1}{2}c, \qquad |q_i^* - q_i^0| \leqslant \tfrac{1}{2}c$$

existe dans le cercle $|t| \leqslant 1$ et remplisse les conditions

$$|x_i(t, x_1^*, \ldots, \mu_m) - x_i^0| \leqslant \tfrac{3}{4}c, \qquad |z(t, x_1^*, \ldots, \mu_m) - z_0| \leqslant \tfrac{3}{4}c,$$
$$|q_i(t, x_1^*, \ldots, \mu_m) - q_i^0| \leqslant \tfrac{3}{4}c.$$

A cette fin on pourra s'appuyer sur un théorème de T. Ważewski [3], après y avoir modifié convenablement les notations. L'hypothèse H et la propriété B du théorème nous permettront d'estimer ϱ de sorte que propriété B ait lieu pour $|t| \leqslant 1$.

Des considérations analogues à celles des pages 41-43 du travail [2] nous conduiront à une estimation de ϱ.

Signalons toutefois brièvement quelques différences qui s'y manifesteront.

Au lieu de l'inégalité (22) figurant dans la note [2] on aura, en tenant compte de (13),

$$\left.\begin{array}{r} |-Q_i| \\ \left|F - \sum_{j=1}^{n} Q_j q_j\right| \\ |X_i + Zq_i| \end{array}\right\} \leqslant Mm\varrho\Big(1 + nM + \sum_{j=1}^{n} |q_j - q_j^0|\Big). \tag{15}$$

Ainsi faudra-t-il poser dans ce cas

$$\sigma_i(t, u_1, \ldots, u_{2n+1}) = Mm\varrho\Big(1 + nM + \sum_{j=1}^{n} u_{j+n+1}\Big), \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n+1.$$

Les autres raisonnements du travail cité subsistent; ils auront évidemment rapport à l'équation

$$u' - nMm\varrho u - Mm\varrho(1+nM) = 0.$$

On obtiendra une intégrale, une seule, satisfaisant aux mêmes conditions initiales que celles de [2]. L'intégrale sera de la forme

$$u = \exp\Big(\int_0^t nMm\varrho\, dt\Big)\Big\{\frac{c}{2} + \int_0^t Mm\varrho(1+nM)\exp\Big(-\int_0^t nMm\varrho\, dt\Big)dt\Big\},$$

qui devient, après transformation,

$$u = \frac{c}{2} + \Big(\frac{1}{n} + M + \frac{c}{2}\Big)(\exp nMm\varrho t - 1). \tag{16}$$

Si nous remplaçons la fonction (16) par la fonction

$$u(t) = \frac{c}{2} + \Big(\frac{1}{n} + M + \frac{c}{2}\Big)(\exp n(M+1)m\varrho t - 1),$$

la racine de l'équation

$$u(t) = \tfrac{3}{4}c \tag{17}$$

sera inférieure à celle de l'équation $u = \frac{3}{4}c$ (u de (16)).

Or, la racine de l'équation (17) est de la forme $t_1 = \alpha/m\varrho$ où

$$\alpha = \frac{1}{n(M+1)} \ln\Big(1 + \frac{c}{4(1/n + M + c/2)}\Big) < \frac{c}{4}.$$

Il en résulte que, si $\varrho < \alpha/m$, on a $t_1 > 1$.

Par conséquent, si l'on choisit $\varrho < a/m$, on aura les résultats suivants analogues à ceux du travail [2], p. 43:

1° Si $\varrho < a/m$, les fonctions $x_i(t), z(t), q_i(t)$ sont définies dans le cercle $|t| \leqslant 1$ et elles satisfont aux relations

$$|x_i(t) - x_i^0| \leqslant \varphi(|t|) \leqslant \tfrac{3}{4}c,$$
$$|z(t) - z_0| \leqslant \varphi(|t|) \leqslant \tfrac{3}{4}c,$$
$$|q_i(t) - q_i^0| \leqslant \varphi(|t|) \leqslant \tfrac{3}{4}c.$$

2° Les fonctions (14') sont analytiques dans le cercle $|t| \leqslant 1$. Elles sont aussi analytiques par rapport à toutes les valeurs x_i^*, z^*, q_i^* dans l'ensemble

$$|x_i^* - x_i^0| \leqslant \tfrac{1}{2}c, \quad |z^* - z_0| \leqslant \tfrac{1}{2}c, \quad |q_i^* - q_i^0| \leqslant \tfrac{1}{2}c.$$

Si, dans le cas considéré, on choisit

$$\delta_0 = \frac{c^2}{m\left[(2n+1)(n+1)^5(M+c+1)^5\right]}$$

(où $\delta_0 = \delta/m$ et δ a la signification donnée dans [2]), on aura, comme dans ce travail, $\delta_0 < a/m$.

La démonstration du théorème auxiliaire se poursuit ensuite sans apporter au travail cité de modifications essentielles. Il va de soi que x y sera remplacé par t et x_0 par $t_0 = 0$.

Reste encore à résoudre la question de l'estimation du déterminant fonctionnel.

Le théorème correspondant à celui de la p. 46 de [2] sera énoncé comme il suit:

Si t appartient au cercle D: $|t| \leqslant 1$ et ϱ satisfait à l'inégalité $\varrho \leqslant \delta_0$, le déterminant fonctionnel

$$J(t, v_1, \ldots, v_n) = \frac{D(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{D(v_1, \ldots, v_n)}$$

est non nul dans l'ensemble P

$$|t| \leqslant 1 \quad (\varrho \leqslant \delta_0), \quad |v_i - x_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)}.$$

La démonstration ne subira de modification qu'au point où il s'agit d'estimer ϱ de telle manière qu'on ait $|t| \leqslant 1$.

Les inégalités (48) de [2] seront à présent de la forme

$$\left.\begin{array}{l}|\lambda_i(k_j, \eta_j, \zeta)| \\ |\mu(k_j, \eta_j, \zeta)| \\ |\varrho_i(k_j, \eta_j, \zeta)|\end{array}\right\} \leqslant nMm\varrho(2+c+M)\Big(\sum_{j=1}^{n}|k_j| + \sum_{j=1}^{n}|\eta_j| + |\zeta|\Big) + \\ + nMm\varrho(2+c+M)(2n+1)[1+(n+1)M].$$

Les constantes A_1 et B du théorème auxiliaire de la page 49 de [2] seront ici égales à

$$\bar{A}_1 = nMm(2+c+M), \quad \bar{B} = nMm(2+c+M)(2n+1)[1+(n+1)M]$$

et en posant $\bar{A} = \bar{A}_1(2n+1)$ on obtiendra la solution de l'équation

$$\frac{du}{dt} = \bar{A}\varrho u + \bar{B}\varrho$$

sous la forme

$$u = \frac{\bar{B}}{\bar{A}}(\exp \bar{A}\varrho t - 1),$$

qui est une fonction croissante.

Ainsi l'équation

$$\frac{\bar{B}}{\bar{A}}(\exp \bar{A}\varrho t - 1) = \frac{1}{n}$$

a une racine qui est

$$\varrho t = \frac{1}{\bar{A}}\ln\left(1 + \frac{\bar{A}}{n\bar{B}}\right) = \frac{1}{mA}\ln\left(1 + \frac{A}{nB}\right)$$

(où A et B sont donnés à la page 49 de [2]).

Par conséquent, pour que $t > 1$, il faut choisir ϱ de sorte que l'inégalité

$$\varrho < \frac{1}{m}\left[\frac{1}{A}\ln\left(1 + \frac{A}{nB}\right)\right]$$

soit satisfaite.

Mais, les résultats de la page 50 de [2] donnant

$$\delta < \frac{1}{A}\ln\left(1 + \frac{A}{nB}\right)\Big],$$

on a dans le cas en question

$$\delta_0 < \frac{1}{mA}\ln\left(1 + \frac{A}{nB}\right).$$

Il s'ensuit que les inégalités (40) de [2] ont lieu dans ce cas pour $|t| \leqslant 1$.

II. Si dans les parties II et III de la note [1] on tient compte du fait que les fonctions H_a qui y figurent sont analytiques même par rapport au paramètre μ_β, on parviendra au moyen de considérations analogues, basées sur le théorème auxiliaire du présent mémoire, au résultat qu'on s'était proposé d'établir.

En effet, si dans l'intégrale $z(t, x_i, \mu_a)$ de l'équation (10) nous posons $t=1$, la fonction $z(1, x_i, t_a-t_a^0)$ sera intégrale du système d'équations

$$\frac{\partial z}{\partial t_a}+H_a\left(t_\beta, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right)=0$$

définie dans R.

Cette intégrale sera l'unique solution du système dans l'ensemble R; ceci résulte de l'énoncé qui termine la note [1] (voir p. 36).

Travaux cités

[1] W. Pawelski, *Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'un système involutif d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Annales Polonici Mathematici 2 (1955), p. 29-36.

[2] — *Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans le cas de variables complexes*, Annales Polonici Mathematici 2 (1955), p. 37-55.

[3] T. Ważewski, *Sur l'appréciation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires et de leur domaine d'existence dans le cas des variables complexes*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 16 (1937), p. 97-106.

Reçu par la Rédaction le 5. 5. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

L'ordre du contact d'une courbe régulière avec la sphère osculatrice

par T. Rachwał (Kraków)

Introduction. Dans la littérature qui traite de la théorie des courbes dans l'espace euclidien R_3 il existe un théorème sur l'ordre de la distance d'un point d'une courbe régulière à la sphère osculatrice. D'après ce théorème, sous certaines conditions imposées à la courbe, cet ordre n'est pas inférieur à 4. En rapport avec ce théorème M. S. Gołąb a posé le problème de la détermination plus précise de cet ordre dans le cas où les dérivées successives des deux courbures au point donné s'annulent. Sur la courbe C, donnée par une équation vectorielle $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ nous faisons les hypothèses suivantes:

(Z)
- I. La fonction $\boldsymbol{r}(s)$ est régulière(1) dans l'intervalle (s_1, s_2) qui contient dans son intérieur le point s_0.
- II. Le produit vectoriel $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$ est différent de zéro dans l'intervalle (s_1, s_2).

D'après la théorie du contact, la détermination de l'ordre du contact entre la courbe et la sphère tangente à cette courbe se ramène à une étude des valeurs des dérivées successives de la fonction

$$F(s)=\tfrac{1}{2}\left((\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{v})^2-(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{v})^2\right), \tag{1}$$

où le vecteur $\boldsymbol{v}$ détermine le centre de la sphère tangente à la courbe au point $M(s_0)$. Le vecteur $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s_0)$ détermine le point M_0 sur la courbe C et le vecteur $\boldsymbol{r}(s)$ — le point M de la courbe C voisin du point M_0.

L'ordre infinitésimal q de la distance d'un point M de la courbe à la sphère tangente à cette courbe au point en question est égal à l'ordre de la dérivée de la fonction $F(s)$ qui, la première, ne s'annule pas au point considéré.

Dans ce travail je démontre quelques théorèmes sur cet ordre. Les démonstrations de ces théorèmes sont basées sur des lemmes relatifs à la

(1) Admettant des dérivées de tous les ordres.