that for each t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, q_t is a homeomorphism of the plane onto itself, q_0 is the identity mapping, and q_1 carries B onto the circumference $C = \{z: |z| = 1\}$. Because the mapping $z \to fr(z) - z = q_0 fr(z) - q_0(z)$ is an inessential map of X, so is $z \to q_1 fr(z) - q_1(z)$, and hence the map $w \to q_1 fr q_1^{-1}(w) - w$ is an inessential map of $q_1[X]$. Letting s denote the mapping $q_1 fr q_1^{-1}$ restricted to the circumference C, we see that s is continuous and fixed point free, carrying C into $\{z: |z| \leqslant 1\}$, and that $w \to s(w) - w$ is inessential on C. But since $s(w)$ belongs to the disk $\{z: |z| \leqslant 1\}$, the argument of $[s(w) - w]/[-w]$ is in absolute value less than $\pi/2$. It follows that $w \to [s(w) - w]/[-w]$ is inessential, and hence $w \to -w$ is inessential. But this is a contradiction, since it is known that the latter mapping is essential.

REFERENCES

[1] S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fundamenta Mathematicae 26 (1936), p. 60-112.

[2] C. Kuratowski, *Théorèmes sur l'homotopie des fonctions continues de variable complexe et leurs rapports à la théorie des fonctions analytiques*, ibidem 33 (1945), p. 316-367.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, CAMBRIDGE UNIVERSITY

Reçu par la Rédaction le 4. 12. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LES SUITES CONVERGENTES DES SOMMES PARTIELLES DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

PAR

D. MENCHOFF (MOSCOU)

Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{1}$$

une série dont les termes sont des fonctions mesurables, finies presque partout dans un segment $[a, b]$. Posons

$$Q_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

et introduisons la définition suivante:

Définition 1. Nous dirons qu'une fonction $\varphi(x) \equiv \varphi(x, E)$, définie presque partout dans un ensemble $E \subset [a, b]$ [1] de mesure positive, est une *fonction limite de la série* (1) *sur l'ensemble* E s'il existe une suite croissante de nombres entiers et positifs ϱ_k, $k = 1, 2, \ldots$, telle que

$$\lim_{k\to\infty} Q_{\varrho_k}(x) = \varphi(x) \tag{3}$$

presque partout dans E.

Considérons un ensemble $M = \{\varphi(x)\}$ de fonctions mesurables $\varphi(x)$ dont chacune est définie dans un ensemble $E \subset [a, b]$ de mesure positive. On peut obtenir la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble M soit celui de toutes les fonctions limites d'une série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4}$$

sur l'ensemble E.

[1] En disant qu'une fonction $\varphi(x)$ est définie presque partout dans un ensemble E, nous admettons la possibilité que $\varphi(x) = +\infty$ ou $\varphi(x) = -\infty$ sur un ensemble de mesure positive.

Pour énoncer cette condition, nous aurons besoin des définitions suivantes:

Définition 2. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ définie presque partout dans l'ensemble E est *un élément limite de l'ensemble* $M = \{\varphi(x)\}$ *au sens de la convergence presque partout sur l'ensemble* E s'il existe une suite de fonctions $\varphi_n(x) \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, qui converge vers $f(x)$ presque partout dans E.

Définition 3. Nous dirons que l'ensemble $M = \{\varphi(x)\}$ de fonctions $\varphi(x)$, définies presque partout dans un ensemble E de mesure positive est *fermé au sens de la convergence presque partout sur* E si toutes les fonctions qui sont des éléments limites de l'ensemble M au sens de la convergence presque partout sur E appartiennent à cet ensemble M [2].

On peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit* $M = \{\varphi(x)\}$ *un ensemble de fonctions mesurables* $\varphi(x)$ *définies presque partout dans un ensemble* $E \subset [-\pi, \pi]$ *de mesure positive. Pour que l'ensemble* M *soit celui de toutes les fonctions limites sur* E *d'une série trigonométrique* (4), *il faut et il suffit que* M *soit fermé au sens de la convergence presque partout sur* E (cf. [2], p. 778).

La première partie du théorème 1, c'est-à-dire la démonstration que la condition énoncée dans ce théorème est nécessaire, peut être déduite du théorème suivant:

Théorème 2. *Supposons que les termes de la série* (1) *soient des fonctions mesurables, finies presque partout dans un segment* $[a, b]$, *et soit* E *un ensemble vérifiant les conditions*

$$E \subset [a, b], \qquad \operatorname{mes} E > 0.$$

Dans ces conditions, l'ensemble de toutes les fonctions limites sur E *de la série* (1) *est fermé au sens de la convergence presque partout sur* E (voir [2], p. 778).

Pour démontrer la seconde partie du théorème 1, c'est-à-dire que la condition de ce théorème est suffisante, on peut se servir d'un théorème dont l'énoncé exigera quelques définitions.

Définition 4. Soit

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{5}$$

une suite de fonctions mesurables définies presque partout dans un segment $[a, b]$. Nous dirons qu'une fonction mesurable $F(x)$ définie presque partout dans $[a, b]$ est une *limite supérieure en mesure sur* $[a, b]$ *de la suite* (5) si elle vérifie les conditions suivantes:

a. pour toutes les fonctions mesurables $\varphi(x)$ définies presque partout dans $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) > \varphi(x)]\cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0 \text{ [3]}; \tag{6}$$

b. pour toutes les fonctions mesurables $\psi(x)$ définies presque partout dans $[a, b]$ et telles que $\operatorname{mes} E[F(x) > \psi(x)] > 0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) > \psi(x)]\cdot E[F(x) > \psi(x)]\} > 0. \tag{7}$$

Définition 5. Nous dirons qu'une fonction mesurable $G(x)$ définie presque partout dans un segment $[a, b]$ est *une limite inférieure en mesure sur* $[a, b]$ *de la suite* (5) lorsque $-G(x)$ est la limite supérieure en mesure sur $[a, b]$ de la suite de fonctions $-f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ [4].

On peut démontrer que les limites supérieure et inférieure en mesure de la suite (5) sont définies d'une façon univoque presque partout dans le segment $[a, b]$ et possèdent la plupart des propriétés des limites supérieures et inférieures ordinaires (cf. [1], §2, p. 6-15, théorèmes A, B, C, D et E).

Définition 6. Nous dirons que les fonctions mesurables $F(x)$ et $G(x)$, définies presque partout dans $[a, b]$, sont *des limites supérieure et inférieure en mesure sur* $[a, b]$ *de la série* (1) lorsque $F(x)$ et $G(x)$ sont égales respectivement aux limites supérieure et inférieure en mesure des sommes partielles de cette série.

On peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *Soient* $F(x)$ *et* $G(x)$ *des fonctions mesurables définies presque partout dans le segment* $[-\pi, \pi]$ *et vérifiant l'inégalité*

$$G(x) \leqslant F(x) \tag{8}$$

presque partout dans ce segment. Désignons par E *un ensemble de mesure positive, appartenant à* $[-\pi, \pi]$, *et soit* $M = \{\varphi(x)\}$ *un ensemble de fonctions mesurables* $\varphi(x)$ *définies presque partout dans* E *et vérifiant la condition*

$$G(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant F(x) \tag{9}$$

presque partout dans cet ensemble. Supposons que M *soit fermé au sens de la convergence presque partout dans* E.

Alors, on peut déterminer une série trigonométrique (4) *qui possède les propriétés suivantes:*

[2] L'ensemble vide et l'ensemble contenant un nombre fini d'éléments sont fermés au sens de cette définition.

[3] $E[\ldots]$ désigne, comme d'habitude, l'ensemble de tous les points x de l'intervalle $[a, b]$ satisfaisant à la condition entre parenthèses.

[4] Les définitions 4 et 5 ont été données dans [1], § 1, p. 4.

1° *M est l'ensemble de toutes les fonctions limites sur E de la série* (4).

2° *Lorsque, pour une suite croissante de nombres entiers et positifs* n_k, $k = 1, 2, \ldots$, *la suite correspondante des sommes partielles* $S_{n_k}(x)$ *de la série* (4) *converge vers une fonction* $f(x)$ *presque partout dans un ensemble* $e \subset E$, $\operatorname{mes} e > 0$, *on peut trouver une suite de fonctions* $\varphi_n(x) \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, *telles que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{10}$$

presque partout dans e.

3° $F(x)$ et $G(x)$ *sont respectivement les limites supérieure et inférieure en mesure sur* $[-\pi, \pi]$ *de la série* (4).

4° *On a*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{11}$$

5° *Lorsque l'ensemble*

$$H = ([-\pi, \pi] - E) \cdot E[F(x) > G(x)] \tag{12}$$

possède une mesure positive, la suite des sommes partielles $S_{n_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *de la série* (4) *ne tend presque partout dans H vers aucune limite déterminée (finie ou non), quelle que soit la suite croissante de nombres entiers et positifs* n_k, $k = 1, 2, \ldots$ ([5]).

Il est clair que le théorème 1 est une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 3.

Nous allons énoncer quelques conséquences du théorème 3. Tout d'abord, nous introduirons la définition suivante:

Définition 7. Soit K un ensemble de points (x, y) dans le plan. (Nous considérons aussi les couples $(x, +\infty)$ et $(x, -\infty)$ comme des points du plan).

Nous dirons que l'ensemble K est *fermé dans le sens vertical* lorsque, pour chaque nombre réel x, l'ensemble K_x de toutes les valeurs y vérifiant la condition $(x, y) \in K$ est un ensemble linéaire fermé ([6]).

On peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 4. *Soit K un ensemble plan, fermé dans le sens vertical, dont la projection sur l'axe de x coïncide avec le segment* $[-\pi, \pi]$. *Supposons*

([5]) Le théorème 3 est une généralisation de l'un des théorèmes énoncés dans [2].

([6]) L'ensemble K_x peut contenir les valeurs $y = +\infty$ et $y = -\infty$; il peut aussi être vide.

que les fonctions mesurables $F(x)$ *et* $G(x)$ *définies presque partout dans* $[-\pi, \pi]$ *soient telles que pour chaque* $x \in [-\pi, \pi]$, *sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle, l'inégalité*

$$G(x) \leqslant y \leqslant F(x) \tag{13}$$

est vérifiée, quelles que soient les valeurs de y pour lequelles $(x, y) \in K$.

Supposons ensuite que $M = \{\varphi(x)\}$ *soit l'ensemble de toutes les fonctions mesurables* $\varphi(x)$, *définies presque partout dans* $[-\pi, \pi]$, *pour chacune desquelles on a*

$$[x, \varphi(x)] \in K, \tag{14}$$

quel que soit $x \in [-\pi, \pi]$, *sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle*([7]).

Dans ces conditions, il existe une série trigonométrique (4) *qui possède les propriétés suivantes:*

A. *M est l'ensemble de toutes les fonctions limites sur* $[-\pi, \pi]$ *de la série* (4).

B. *Lorsque, pour une suite croissante de nombres entiers et positifs* n_k, $k = 1, 2, \ldots$, *la suite correspondante des sommes partielles* $S_{n_k}(x)$ *de la série* (4) *converge vers une fonction* $f(x)$ *presque partout dans un ensemble* $e \subset [-\pi, \pi]$, $\operatorname{mes} e > 0$, *on peut trouver une suite de fonctions* $\varphi_n(x) \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{15}$$

presque partout dans e.

C. $F(x)$ *et* $G(x)$ *sont respectivement les limites supérieure et inférieure en mesure sur* $[-\pi, \pi]$ *de la série* (4).

D. *On a* (cf. [4], § 1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{16}$$

Considérons deux cas particuliers du théorème 4.

Théorème 5. *Quelles que soient les fonctions mesurables* $F(x)$, $G(x)$ *et* $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, *définies presque partout dans* $[-\pi, \pi]$ *et vérifiant la condition*

$$G(x) \leqslant \psi_i(x) \leqslant F(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{17}$$

presque partout dans ce segment, on peut déterminer une série trigonométrique (4) *qui possède les propriétés suivantes:*

([7]) Nous désignerons par $[x, \varphi(x)]$ un point dans le plan dont les coordonnées sont x et $y = \varphi(x)$.

1° $F(x)$ *et* $G(x)$ *sont respectivement les limites supérieure et inférieure en mesure sur* $[-\pi, \pi]$ *de la série* (4).

2° *Chaque fonction* $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, *est une fonction limite sur* $[-\pi, \pi]$ *de la série* (4).

3° *Lorsque, pour une suite croissante de nombres entiers et positifs* n_k, $k = 1, 2, \ldots$, *la suite correspondante des sommes partielles* $S_{n_k}(x)$ *de la série* (4) *converge vers une fonction* $f(x)$ *presque partout dans un ensemble* $e \subset [-\pi, \pi]$, $\operatorname{mes} e > 0$, *on peut trouver une valeur de* $i = 1, 2, \ldots, p$, *pour laquelle* $f(x) = \psi_i(x)$ *presque partout dans* e.

4° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ (voir [1], § 1, p. 5).

THÉORÈME 6. *Soient* $F(x)$ *et* $G(x)$ *deux fonctions mesurables définies presque partout dans* $[-\pi, \pi]$ *et vérifiant l'inégalité* $G(x) \leqslant F(x)$ *presque partout dans ce segment. Désignons par* $M = \{\varphi(x)\}$ *l'ensemble de toutes les fonctions mesurables* $\varphi(x)$ *définies presque partout dans* $[-\pi, \pi]$ *et vérifiant la condition*

$$G(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant F(x) \tag{18}$$

presque partout dans ce segment.

Alors on peut déterminer une série trigonométrique (4) *qui possède les propriétés suivantes:*

1° M *est l'ensemble de toutes les fonctions limites sur* $[-\pi, \pi]$ *de la série* (4).

2° $F(x)$ *et* $G(x)$ *sont respectivement les limites supérieure et inférieure en mesure sur* $[-\pi, \pi]$ *de la série* (4).

3° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ (voir [1], § 1, p. 5, 6).

Nous avons déjà donné la définition de la fonction limite $\varphi(x, E)$ sur un ensemble E d'une série (1) dont les termes sont des fonctions mesurables, finies presque partout dans un segment $[a, b]$ (définition 1). Dans cette définition, nous avons supposé que $E \subset [a, b]$, $\operatorname{mes} E > 0$.

Soit $Q_{n_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, une suite de sommes partielles de la série (1) qui converge, d'après la définition 1, vers $\varphi(x, E)$ presque partout dans E. En général, nous admettons la possibilité que cette suite converge aussi vers une limite déterminée dans un ensemble qui se trouve en dehors de E. Il en résulte que, pour chaque fonction limite $\varphi(x, E)$ de la série (1) sur un ensemble E et pour chaque ensemble $E' \subset E$, $\operatorname{mes} E' > 0$, la fonction $\psi(x, E')$, égale à $\varphi(x, E)$ presque partout dans E' est une fonction limite de la même série sur E'.

Soit à présent $M = \{\varphi(x, E)\}$ un ensemble de fonctions mesurables $\varphi(x, E)$ dont chacune est définie presque partout dans l'ensemble correspondant E (8). La question se pose de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble M soit l'ensemble de toutes les fonctions limites d'une série trigonométrique (4). A cet effet, nous introduirons les trois définitions suivantes:

Définition 8. Soit

$$\varphi_n(x, E_n) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

une suite de fonctions dont chacune est définie presque partout dans l'ensemble correspondant E_n. Posons

$$E = \varliminf_{n\to\infty} E_n \tag{20}$$

et supposons que l'ensemble E et un autre ensemble E' vérifient les conditions

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad \operatorname{mes} E' > 0, \quad \operatorname{mes}(E' - E) = 0. \tag{21}$$

Nous dirons qu'une fonction $\varphi(x, E')$ définie presque partout dans l'ensemble E' est *un élément limite au sens large de la suite* (19) lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, E_n) = \varphi(x, E') \tag{22}$$

presque partout dans E' (9).

Définition 9. Soit $M = \{\varphi(x, E)\}$ un ensemble de fonctions $\varphi(x, E)$ dont chacune est définie presque partout dans un ensemble correspondant E, $\operatorname{mes} E > 0$. Nous dirons qu'une fonction $f(x, E')$ définie presque partout dans un ensemble E' de mesure positive est *un élément limite au sens large de l'ensemble* M lorsqu'il existe une suite de fonctions $\varphi_n(x, E_n)$, appartenant à M pour laquelle $f(x, E')$ est un élément limite au sens large.

Définition 10. Supposons que l'ensemble $M = \{\varphi(x, E)\}$ vérifie les mêmes conditions que dans la définition 9. Nous dirons que M est *un ensemble fermé au sens étroit* lorsqu'il contient tous ses éléments limites au sens large.

On peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 7. *Soit* $M = \{\varphi(x, E)\}$ *un ensemble de fonctions mesurables* $\varphi(x, E)$ *dont chacune est définie presque partout dans un ensemble*

(8) Les ensembles E peuvent être différents pour des fonctions différentes $\varphi(x, E)$.

(9) Il est légitime de parler de la limite de la suite (19) pour $n \to \infty$ presque partout dans E' puisque, en vertu de (20) et (21), en chaque point $x \in E'$, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle, les fonctions $\varphi_n(x, E_n)$ sont définies à partir d'un certain nombre n.

$E \subset [-\pi, \pi]$ *de mesure positive. Pour que* M *soit l'ensemble de toutes les fonctions limites d'une série trigonométrique* (4), *il faut et il suffit que* M *soit fermé au sens étroit* (voir [3], p. 477).

La première partie du théorème 7, c'est-à-dire la démonstration que la condition énoncée dans ce théorème est nécessaire, peut être déduite du théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Supposons que les termes de la série* (1) *soient des fonctions mesurables finies presque partout dans un segment* $[a, b]$. *Désignons respectivement par* $F(x)$ *et* $G(x)$ *les limites supérieure et inférieure en mesure sur* $[a, b]$ *de la série* (1). *Alors l'ensemble* $M = \{\varphi(x, E)\}$ *de toutes les fonctions limites* $\varphi(x, E)$ *de cette série vérifie les conditions suivantes:*

α. M *est fermé au sens étroit.*

β. *Si* $\varphi(x, E) \in M$, *cette fonction est mesurable et vérifie l'inégalité*

$$G(x) \leqslant \varphi(x, E) \leqslant F(x) \tag{23}$$

presque partout dans E.

γ. *Si* $\varphi(x, E) \in M$ *et si l'ensemble* E_0 *et la fonction* $\varphi_0(x, E_0)$ *sont définis par les relations*

$$E_0 = E + E[F(x) = G(x)], \quad \varphi_0(x, E_0) = \varphi(x, E)$$

presque partout dans E *et*

$$\varphi_0(x, E_0) = F(x)$$

presque partout dans $E_0 - E$, *la fonction* $\varphi_0(x, E_0)$, *définie presque partout dans* E_0, *appartient à l'ensemble* M (voir [3], p. 477 et 478).

La seconde partie du théorème 7, c'est-à-dire la démonstration que la condition est suffisante, peut être déduite du théorème suivant:

THÉORÈME 9. *Soit* $M = \{\varphi(x, E)\}$ *un ensemble non vide de fonctions* $\varphi(x, E)$ *dont chacune est définie presque partout dans un ensemble* $E \subset [-\pi, \pi]$ *de mesure positive. Supposons que* M *vérifie les conditions* α, β *et* γ *du théorème* 8.

Alors il existe une série trigonométrique (4) *qui possède les propriétés suivantes:*

a. M *est l'ensemble de toutes les fonctions limites de la série* (4).

b. $F(x)$ *et* $G(x)$ *sont respectivement les limites supérieure et inférieure en mesure sur* $[-\pi, \pi]$ *de la série* (4).

c. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ (voir [3], p. 478).

Introduisons encore deux définitions suivantes:

Définition 11. Supposons, comme précédemment, que les termes de la série (1) soient des fonctions mesurables, finies presque partout dans un segment $[a, b]$. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ définie presque partout dans un ensemble $E \subset [a, b]$, $\operatorname{mes} E > 0$, est *une fonction limite au sens étroit de la série* (1) *sur l'ensemble* E s'il existe une suite croissante de nombres entiers et positifs n_k, $k = 1, 2, \ldots$, qui possède les propriétés suivantes:

a. La suite des sommes partielles $Q_{n_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de la série (1) converge vers $f(x)$ presque partout dans E.

b. Pour toute suite croissante de nombres entiers et positifs n'_k, $k = 1, 2, \ldots$, contenue dans la suite n_k, $k = 1, 2, \ldots$, les sommes partielles $Q_{n'_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de la série (1) ne convergent presque partout vers aucune limite déterminée (finie ou non) dans l'ensemble $[a, b] - E$.

Définition 12. Supposons que la série (1) possède les mêmes propriétés que dans la définition 11. Nous dirons qu'une fonction limite $\varphi(x, E)$ de la série (1) sur un ensemble E est *maximale* s'il n'existe aucune autre fonction limite $f(x, E')$ de la même série sur un ensemble E' qui vérifie les conditions suivantes:

a. $E \subset E'$, $\operatorname{mes}(E' - E) > 0$;

b. $f(x, E') = \varphi(x, E)$

presque partout dans l'ensemble E.

Il est facile de démontrer que toute fonction limite maximale de la série (1) est une fonction limite au sens étroit de la même série, mais la réciproque n'est pas vraie (voir [4], § 1).

On peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 10. *Lorsque* $\varphi(x, E)$ *est une fonction limite de la série* (1) *sur un ensemble* E, *il existe une fonction limite maximale* $\chi(x, H)$ *de la même série sur un ensemble* H *qui possède les propriétés suivantes:*

$$E \subset H, \quad \chi(x, H) = \varphi(x, E)$$

presque partout dans E (voir [4], § 1).

En rapprochant la définition 12 des théorèmes 7 et 10 on peut encore obtenir immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME 11. *Soit* $M_0 = \{(\psi(x, e)\}$ *un ensemble de fonctions mesurables dont chacune est définie presque partout dans un ensemble* $e \subset [-\pi, \pi]$, $\operatorname{mes} e > 0$.

Pour que l'ensemble M_0 *soit celui de toutes les fonctions limites maximales d'une série trigonométrique* (4), *il faut et il suffit qu'il existe un* *autre ensemble,* $M = \{\varphi(x, E)\}$, *de fonctions* $\varphi(x, E)$, *tel que les deux ensembles* M *et* M_0 *possèdent les propriétés suivantes*:

1° *Chacune des fonctions* $\varphi(x, E)$ *de l'ensemble* M *est mesurable et définie presque partout dans l'ensemble correspondant* $E \subset [-\pi, \pi]$, $\operatorname{mes} E > 0$.

2° $M_0 \subset M$.

3° *L'ensemble* M *est fermé au sens étroit.*

4° *Quelle que soit la fonction* $\psi(x, e) \epsilon M_0$, *il n'existe aucune fonction* $\varphi(x, E) \epsilon M$ *pour laquelle* $e \subset E$, $\operatorname{mes}(E-e) > 0$ *et* $\psi(x, e) = \varphi(x, E)$ *presque partout dans* e.

5° *Quelle que soit la fonction* $\varphi(x, E) \epsilon M$, *il existe une fonction* $\psi(x, e) \epsilon M_0$ *pour laquelle* $E \subset e$ *et* $\psi(x, e) = \varphi(x, E)$ *presque partout dans* E.

6° *Lorsque* $\psi(x, e) \epsilon M_0$ *et* $e' \subset e$, $\operatorname{mes}(e-e') = 0$, *la fonction* $g(x, e')$, *égale à* $\psi(x, e)$ *presque partout dans* e', *appartient aussi à l'ensemble* M_0.

La question se pose de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble $M = \{\varphi(x, E)\}$ soit celui de toutes les fonctions limites au sens étroit d'une série trigonométrique (4) (**P 249**).

TRAVAUX CITÉS

[1] Д. Е. Меньшов, *О сходимости по мере тригонометрических рядов*, Труды Математического Института им. В. А. Стеклова 32 (1950), p. 3-97.

[2] — *О пределах последовательностей частных сумм тригонометрических рядов*, Доклады Академии Наук СССР 106 (1956), p. 777-780.

[3] — *О передельных функциях тригонометрического ряда*, ibidem 114 (1957), p. 476-478.

[4] — *О сходящихся последовательностях частных сумм тригонометрических рядов*, Математический Сборник (sous presse).

Reçu par la Rédaction le 20. 12. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI — DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI — 1958

THE SENTENTIAL CALCULUS WITH INFINITELY LONG EXPRESSIONS

BY

D. SCOTT (PRINCETON, N. J.) AND A. TARSKI (BERKELEY, CALIF.)

The results given in this note are essentially the observations previously made by the authors concerning the equational identities in Boolean algebras with infinitary operations and in particular the relation between the identities holding in the two-element algebras and those holding in arbitrary Boolean algebras. These remarks, however, are reformulated here in terms of the syntax of the sentential calculus with infinitely long formulas. It is to be noted that the discussion of the sentential calculus is part of a comprehensive study concerning the syntax of the predicate logic with infinitely long expressions which has been undertaken and carried out by Mrs. Carol Karp. The results of Mrs. Karp have not yet been published, but they were presented in the seminar in the foundations of mathematics conducted by L. Henkin and A. Tarski at the University of California at Berkeley in the fall semester of 1956 (1).

Let α and β be cardinal numbers. (We shall identify the cardinals with the initial ordinals of their respective number classes). The sentential calculi considered will have β different sentential variables and will permit the formation of well-ordered conjunctions and disjunctions in all lengths less than α. The case where $\alpha = \beta = \omega$ is simply the ordinary calculus. The case where $\alpha = \omega_1$ retains much analogy with the ordinary case and is examined in detail. The cases where $\alpha > \omega_1$ and $\beta \geqslant \omega$ present some peculiarites which require the reformulation of the definition of

(1) This note is a summary of a lecture given by the authors at the Summer Institute of Symbolic Logic at Cornell University in July 1957; it appeared under the same title, though in a somewhat shorter version, in *Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University*, vol. 1, p. 83-89 (mimeographed). The results of this note were obtained and the note was prepared for publication while Tarski was working on a research project in the foundations of mathematics sponsored by the National Science Foundation. For a Boolean algebraic formulation of the results see the abstracts Scott [7] and Tarski [10]. Some remarks concerning the predicate logic with infinitely long expressions (which is not discussed in this note) can be found in Tarski [11].