The set K is ordered by the relation $\prec$ in the order type η (cf. [2], 80). Let $y = (A_m, A_n)$ be an open interval of K which contains no element of A. It is obvious that $y \in \mathfrak{W}^+$, $y \subset x$ $(= K)$ and that there are at least two elements in y. According to 2° there is a z such that $\langle z, y\rangle \in f$, $A_0 \neq z, z \subset y$, and $z \neq y$. Let $A_p \in z$, $A_q \in y - z$. Now y can be treated as an open interval of the set of rationals and A_p, A_q as two rational numbers of this interval. Hence there is an increasing mapping of y onto itself which transforms A_p in A_q. This mapping can be extended to a mapping φ_0 of the whole K onto itself by putting $\varphi_0(A_r) = A_r$ for A_r lying outside y. We have thus obtained a $\varphi_0 \in \mathfrak{G}^+(A)$ such that $|\varphi_0, z| \neq z$ since $|\varphi_0, z|$ contains A_q. According to $2^\circ \langle |\varphi_0, z|, |\varphi_0, y|\rangle \in f$ and hence $\langle |\varphi_0, z|, y\rangle \in f$, which in view of the formula $\langle z, y\rangle \in f$ shows that condition 3° is not satisfied.

This concludes the proof that axiom (K) is false in the model.

Kinna and Wagner have also raised the question of the independence of the axiom of choice from the axiom (K). This problem is incomparably more difficult than the problem dealt with in this paper. It seems to me that the solution of the second problem of Kinna and Wagner is beyond the scope of the methods known at present.

REFERENCES

[1] W. Kinna und K. Wagner, *Über eine Abschwächung des Auswahlpostulates*, Fundamenta Mathematicae 42 (1955), p. 75-82.

[2] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, ibidem 32 (1939), p. 201-252.

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR UNE QUESTION CONCERNANT LE NOMBRE DE DIVISEURS PREMIERS D'UN NOMBRE NATUREL

PAR

W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

Désignons par $\nu(n)$ le nombre de diviseurs premiers du nombre naturel n. Combien connaît-on actuellement de nombres naturels n tels que $\nu(n) = \nu(n+1) = 1$?

Je prouverai qu'on connaît actuellement 24 tels nombres naturels n et qu'on connaîtra un nouvel chaque fois que l'on trouvera un nouveau nombre premier de Mersenne ou de Fermat. L'hypothèse que le nombre des nombres naturels n tels que $\nu(n) = \nu(n+1) = 1$ est fini équivaut à l'hypothèse que le nombre des nombres premiers de Mersenne, ainsi que celui des nombres premiers de Fermat sont finis.

Voici la démonstration. Si n est un nombre naturel tel que $\nu(n) = \nu(n+1) = 1$, on a évidemment $n = p^\alpha$, $n+1 = q^\beta$, où p et q sont des nombres premiers, α et β des nombres naturels; d'où $q^\beta - p^\alpha = 1$, et on en conclut qu'un des nombres p et q est égal à 2. Si $q = 2$, $p^\alpha = 2^\beta - 1 > 1$ est un nombre de Mersenne, d'où il résulte comme on sait (voir par exemple [2]; cf. aussi [1]) que $\alpha = 1$ et n est un nombre de Mersenne premier.

Si $p = 2$, on a $q^\beta = 2^\alpha + 1$. Si $\beta = 1$, $n+1 = q = 2^\alpha+1$ est un nombre premier de Fermat. Si $\beta > 1$, $q-1 > 1$ est un diviseur de $q^\beta - 1 = 2^\alpha$ plus petit que $q^\beta - 1$, puisque $q < q^\beta$. Or q est impair. On a donc $q-1 = 2^\gamma$ où γ est un nombre naturel, et comme $2^\alpha = (q-1)(q^{\beta-1}+q^{\beta-2}+ +\ldots+q+1)$, on a $q^{\beta-1}+q^{\beta-2}+\ldots+q+1 = 2^{\alpha-\lambda}$. Le côté gauche de cette égalité est donc un nombre pair et, comme il est une somme de β nombres impairs, on conclut que β est un nombre pair, donc $\beta = 2\mu$, où μ est un nombre naturel. Donc $2^\alpha = q^\beta - 1 = q^{2\mu} - 1 = (q^\mu - 1)(q^\mu + 1)$, d'où $q^\mu - 1 = 2^\delta$, $q^\mu + 1 = 2^{\alpha-\delta}$, où $\delta < \alpha$ est un nombre naturel, ce qui donne $2 = 2^{\alpha-\delta} - 2^\delta$, et comme évidemment $\alpha - \delta \geqslant \delta$, le nombre 2 est divisible par 2^δ, d'où (δ étant un nombre naturel) on trouve $\delta = 1$, donc $q^\mu = 2^\delta + 1 = 3$, d'où $q = 3$, $\mu = 1$, $\beta = 2\mu = 2$, ce qui donne $n = p^\alpha = q^\beta - 1 = 3^2 - 1 = 8$. Ainsi, nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si l'on a $\nu(n) = \nu(n+1) = 1$, ou bien on a $n = 8$, ou bien n est un nombre premier de Mersenne, ou bien $n+1$ est un nombre premier de Fermat.*

D'autre part, dans chacun de ces trois cas, on a évidemment $\nu(n) = \nu(n+1) = 1$. On ne connaît actuellement que cinq nombres premiers de Fermat: 3, 5, 17, 257 et 65537, qui donnent les valeurs $n = 2, 4, 16$, 256 et 65536, et on sait qu'il n'existe aucun autre nombre premier de Fermat $< 2^{2^{13}}+1$. D'autre part, on connaît les nombres premiers de Mersenne consécutifs jusqu'au 17-ème, qui est égal à $2^{2281}-1 < 2^{2^{13}}+1$. Ainsi, nous pouvons affirmer que nous connaissons tous les nombres naturels $n < 2^{2281}$ tels que $\nu(n) = \nu(n+1) = 1$ et qu'il y en a 23. Le 24-ème, qu'on connaît encore en ce moment est le nombre premier de Mersenne $2^{3217}-1$.

On pourrait démontrer sans peine qu'il n'existe que trois nombres naturels n, à savoir 2, 3 et 7, tels que $\nu(n) = \nu(n+1) = \nu(n+2) = 1$, qu'il existe un seul nombre $n = 2$ tel que $\nu(n) = \nu(n+1) = \nu(n+2) = \nu(n+3) = 1$ et, par conséquent, qu'il n'existe aucun nombre naturel n tel que $\nu(n) = \nu(n+1) = \nu(n+2) = \nu(n+3) = \nu(n+4) = 1$.

La question reste ouverte (**P 252**) s'il existe une infinité de nombres naturels n tels que $\nu(n) = \nu(n+1)$. Or il résulte d'une hypothèse de A. Schinzel sur les nombers premiers (voir [3] ou [4]) l'existence d'une infinité de nombres naturels n tels que $\nu(n) = \nu(n+1) = \nu(n+2) = 2$, et aussi l'existence, pour tout nombre naturel k, d'une infinité de nombres naturels n tels que $\nu(n) = \nu(n+1) = \ldots = \nu(n+k)$.

TRAVAUX CITÉS

[1] B. A. Hausmann, American Mathematical Monthly 48 (1941), Problems and solutions, p. 482.

[2] D. C. B. Marsh, Americal Mathematical Monthly 64 (1957), Elementary problems and solutions, p. 110.

[3] A. Schinzel, *Sur un problème concernant le nombre de diviseurs d'un nombre naturel*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques 6 (1958), p. 165-167.

[4] A. Schinzel et W. Sierpiński, *Sur quelques hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arithmetica 4, p. 197, C_7.

Reçu par la Rédaction le 16. 1. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

ON THE NUMBER OF LATTICE POINTS INSIDE A CLOSED CURVE

BY

H. FAST AND S. ŚWIERCZKOWSKI (WROCŁAW)

1. Results. We establish a rectangular system of coordinates axes XY on the plane. Each set isometric with

$$S = \{(x, y): x, y \text{ are integers}\}$$

will be called an *integral lattice*. The plane Lebesgue measure of a set E will be denoted by $|E|$. Let G be an open and bounded set. We suppose that the boundary L of G is a (simple) closed curve and that $|L| = 0$. In this paper we shall prove the following

THEOREM. *If $|G|$ is an integer, then there exists such an integral lattice S_0 that the set $S_0 \cap G$ counts $|G|$ elements.*

Let O be the origin of our coordinates system. For any set E and for each point p let us denote by E_p (by E_{-p}) the translation of E defined by the vector $\overrightarrow{Op}$ ($\overrightarrow{pO}$). Let $f(p)$ be the number of elements of the set $S_p \cap G$. Let us denote by m, M the lowest and the greatest values of $f(p)$ which are attained on sets of positive measures. In the second section we shall prove

LEMMA 1. *It is $m \leqslant |G| \leqslant M$ and if*

(*) $\bigcup_S (L_p \cap L_q)$, *where the summation runs over all different $p, q \in S$, contains no subcontinua,*

then $f(p)$ attains all integral values between m and M.

In the third section we shall prove

LEMMA 2. *There exists an integral lattice S_0 for which (*) holds.*

It is evident that these lemmas imply the theorem.

Remark. The above theorem as well as these lemmas remain true if L is a finite sum of closed curves.

2. Proof of Lemma 1. Let p be a point. We shall denote the set $\{p\}$ also by p. The sets

$$\{q: q \in S, p_q \in G\}, \quad \{q: q \in S, p \in G_{-q}\}$$