value < 1, according as $z = e^{i\theta}$ with $\theta \in \Omega'$ or not. We may thus apply Lebesgue's bounded convergence theorem once more to obtain

$$0 = \int_C \lim_{n\to\infty} [\Phi((g(z))]^n dm(z) = \int_{\Omega'} ie^{i\theta} dF(\theta),$$

contardicting $\int_{\Omega'} e^{i\theta} dF(\theta) \neq 0$. The proof is complete.

References

[1] H. Helson, *On a theorem of F. and M. Riesz*, Coll. Math. 3 (1955), p. 113-117

[2] F. and M. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, IV Cong des math. scand. 1916, p. 27-44.

[3] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa 1937.

[4] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford 1939.

[5] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, Warszawa 1935.

Reçu par la Rédaction le 23. 1. 1958

STUDIA MATHEMATICA, T. XVII. (1958)

Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen I

von

G. GOES (Ludwigsburg)

1. Einleitung und Definitionen. Herr Karamata [7] bewies folgenden Satz:

Die reellen Multiplikatoren $\{\lambda_j\}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ *transformieren die Fourierreihe*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jt + b_j \sin jt)$$

jeder stetigen Funktion genau dann in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe

$$\frac{\lambda_0 a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (a_j \cos jt + b_j \sin jt),$$

wenn

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos jt \right| dt = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Die Absicht der hier vorliegenden Note ist es, verwandte Sätze für Multiplikatoren zwischen verschiedenen linearen und normierten Räumen zu beweisen. Der oben genannte Satz von Karamata ist als Spezialfall in unserem Satz 1 enthalten.

Unsere Sätze 1 bis 3 stellen eine Erweiterung beknanter Sätze über Multiplikatoren dar, die aus zahlreichen Arbeiten, vorwiegend polnischer Mathematiker, bekannt sind. Wir nennen W. H. Young (1912, 1913), H. Steinhaus (1916, 1919, 1926, 1929), S. Szidon (1921, 1939), M. Fekete (1923), A. Zygmund (1927, 1935), S. Bochner (1929), W. Orlicz (1929 bis 1954), S. Kaczmarz (1933, 1938), J. Marcinkiewicz (1938, 1939), S. Verblunsky (1932, 1935), L. B. Hedge (1943) und G. A. Alexits (1951). Die Erweiterung besteht darin, daß als Bildraum E_1 Funktionenräume genommen werden, in denen die erzeugten Fourierreihen stark, das heißt nach der Norm des jeweiligen Raumes, konvergieren.

Wir treffen folgende Vereinbarungen. Unter $f = f(t)$ sei im Folgenden stets eine im Lebesgueschen Sinn meßbare, mit 2π periodische und reellwertige Funktion verstaden, welche im Intervall $[0,2\pi]$ definiert ist und dann auf Grund der Periodizität erklärt wird für alle t im Intervall $(-\infty, \infty)$.

Der Einfachheit halber sei für alle in $[0,2\pi]$ Lebesgue-integrierbaren f

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$$

vorausgesetzt. Diese Festlegung bewirkt, wie leicht zu erkennen sein wird, keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit unserer Aussagen.

Es werden Transformationen zwischen folgenden Räumen betrcahtet: L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ, C, L_{pN} $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $L_{\Phi N}, C_N$, welche wie folgt definiert sind:

1. L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ ist der Raum der f, für die das Lebesgue-Integral

$$\int_0^{2\pi} |f|^p\,dt$$

existiert. Die Norm für $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ sei

$$\|f\|_p = \Big(\int_0^{2\pi} |f|^p\,dt\Big)^{1/p}.$$

Speziell sei $\|f\|_L = \|f\|_p$ für $p = 1$.

2. L_∞ ist der Raum der f, welche im Intervall $[0,2\pi]$ wesentlich beschränkt sind. Die Norm für $f \in L_\infty$ sei

$$\|f\|_\infty = \underset{0\leqslant t\leqslant 2\pi}{\text{w. o. Gr.}} |f(t)| = \inf_e \sup_{t\in[0,2\pi]-e} |f(t)|,$$

wobei die untere Grenze genommen wird von allen Mengen e vom Maß Null, die im Intervall $[0,2\pi]$ gelegen sind.

3. L_Φ ist der Raum der f, welche dem von Zaanen modifizierten Orlicz-Raum angehören. Wegen der genauen Definition dieser Räume sei verwiesen auf [8] oder [10]. Die Norm für $f \in L_\Phi$ sei

$$\|f\|_\Phi = \sup_g \int_0^{2\pi} |fg|\,dt \quad \text{für} \quad \int_0^{2\pi} \Psi(|g|)\,dt \leqslant 1,$$

d. h. die obere Grenze wird genommen bezüglich aller Funktionen g, für die $\int_0^{2\pi} \Psi(|g|)\,dt \leqslant 1$ ist. Dabei wird mit Ψ, wie üblich, die zu Φ komplementäre Young-Funktion bezeichnet.

4. L_Φ^Δ ist der spezielle Raum L_Φ bei dem Φ die sogenannte *Δ_2-Bedingung* erfüllt. Diese besagt: *Es existiert eine Konstante $M > 0$ derart, daß für alle $u \geqslant u_0 > 0$ gilt: $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$.*

5. C ist der Raum der f, welche stetig sind in $[0,2\pi]$ und welche auch in $t = 0$ noch linksseitig und in $t = 2\pi$ noch rechtseitig stetig sind. Die Norm für $f \in C$ sei

$$\|f\|_C = \operatorname*{Max}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |f(t)|.$$

6. P ist der Raum der trigonometrischen Polynome. Die Norm sei dieselbe wie im Raum C.

7. Für $E = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ sei $E^* = L_{p'}$, mit $1/p + 1/p' = 1$ für $1 < p < \infty$ und $p' = 1$ für $p = \infty$, $p' = \infty$ für $p = 1$ und umgekehrt.

Für $E = L_\Phi$ sei $E^* = L_\Psi$, wobei wieder Ψ die zu Φ komplementäre Young-Funktion ist.

Für $E = C$ sei $E^* = L$.

8. Ist E einer der in 1 bis 5 erklärten Räume, so ist $E_N \subset E$ folgendermaßen definiert. E_N ist der Raum der $f \in E$, für die

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n(f) - f\|_E = 0$$

ist, wobei

$$f \sim \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jt + b_j \sin jt)$$

und

$$s_n(f) = \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jt + b_j \sin jt)$$

ist. E_N ist also der Unterraum der Funktionen $f \in E$, deren Fourierreihen stark gegen die erzeugende Funktion konvergieren. Speziell ist C_N der Raum der Funktionen, welche gleichmäßig konvergente Fourierreihen erzeugen.

Mit den angegebenen Normen sind die Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ und C Banachräume — für L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ und L_Φ siehe [10], S. 100 ff, und für C [3], S. 11. Die Räume E_N sind mit der gleichen Norm wie in E im allgemeinen keine vollständigen Räume. Offensichtlich ist $L_{\infty N} = C_N$ und bekanntlich $L_p = L_{pN}$ für $1 < p < \infty$ ([11], S. 153, 7.3 (i)).

Sind E und E_1 irgendwelche Unterräume des Raumes L, so bedeute $T \in (E, E_1)$: Die Multiplikatoren $\{\lambda_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ führen die Fourierreihe jeder Funktion $f \in E$ über in die Fourierreihe einer Funktion $Tf \in E_1$ und definieren damit eine Transformation T, welche der Klasse von Transformationen oder der Multiplikatorenklasse (E, E_1) angehört.

2. Funktionalanalytische Grundlagen. Die in § 1 definierten Räume E sind Unterräume des Raumes L. Für $E = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ und C ist das wohlbekannt und auch im Fall $E = L_\Phi$ läßt sich dies leicht zeigen ([9], S. 64, Lemma 1 oder [10], S. 82).

Das trigonometrische Orthogonalsystem $\{\cos jt, \sin jt\}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ ist vollständig in L, also auch in allen definierten Räumen E. Sind E und E_1 irgendwelche der oben definierten Räume und ist E vollständig, $f \epsilon E$ und $T \epsilon (E, E_1)$, so folgt daraus mit dem bekannten closed graph theorem ([3], S. 41, théorème 7, oder [10], S. 165, theorem 8), wie Kaczmarz gezeigt hat [5] oder [6], S. 222, daß Tf eine lineare und stetige Operation ist. Speziell ist $T_n f$ mit

$$T_n f = T_n(f; t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (a_j \cos jt + b_j \sin jt)$$

für jedes $f \epsilon E$ eine lineare und stetige Operation $T_n \epsilon (E, P) \subset (E, E_1)$ für jeden Raum E_1, auch wenn $T \notin (E, E_1)$.

Die beiden folgenden Hilfssätze machen einfache Aussagen über die Norm der Operation $T_n f$, wenn T_n als Operation $T_n \epsilon (E, E_1)$ betrachtet wird. Dabei sei mit $K_n(t)$ der transformierende Kern

$$K_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos jt$$

bezeichnet.

Hilfssatz 1. *Ist E irgendeiner der Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ, C und wird T_n als Operation $T_n \epsilon (E, C)$ betrachtet, so ist die Norm der Operation $T_n f$ mit $f \epsilon E$*

$$\|T_n\| = \frac{M}{\pi} \|K_n(t)\|_{E^*}$$

mit $M = 1$ für $E = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, C und mit $\frac{1}{2} \leqslant M \leqslant 1$ für $E = L_\Phi$.

Beweis. Ist E einer der obigen Räume, so gibt es zu jedem $f \epsilon E$ einen t_f-Wert $\bar{t} = \bar{t}_f \epsilon [0, 2\pi]$ sodaß $\|T_n(f; t)\|_C = |T_n(f; \bar{t}_f)|$ ist. Also ist unter den angegebenen Voraussetzungen

$$\|T_n\| = \sup_{\|f\|_E = 1} \|T_n(f; t)\|_C = \sup_{\|f\|_E = 1} |T_n(f; \bar{t}_f)| = \| \sup_{\|f\|_E = 1} |T_n(f; t)| \|_C$$

(vgl. auch Gelfand [4], S. 267, Satz 1, wo die allgemeine Form linearer und stetiger Operationen ϵ (E, C) für beliebige lineare Räume E samt der Norm dieser Operationen angegeben ist).

Nun ist aber wegen der Periodizität der auftretenden Funktionen

$$\sup_{\|f\|_E \leqslant 1} |T_n f| = \sup_{\|f\|_E \leqslant 1} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x+t) K_n(x)\, dx \right| = \sup_{\|f\|_E \leqslant 1} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x) K_n(x)\, dx \right|$$
$$= \frac{M}{\pi} \|K_n(t)\|_{E^*}$$

mit $M = 1$ für $E = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ ([10], S. 71, 72 th. 2) und $E = C$ ([3], S. 60) und $\frac{1}{2} \leqslant M \leqslant 1$ für $E = L_\Phi$ ([10], S. 140 und 142, Remark 2) (beachte dabei, daß $K_n(t) \epsilon P \subset L_\Psi$).

Somit ist

$$\|T_n\| = \left\| \frac{M}{\pi} \|K_n(t)\|_{E^*} \right\|_C = \frac{M}{\pi} \|K_n(t)\|_{E^*}.$$

und damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Ist E_1 irgendeiner der Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_{Φ_1}, C und wird T_n als Operation $T_n \epsilon (L, E_1)$ betrachtet, so ist die Norm der Operation $T_n f$ mit $f \epsilon L$*

$$\|T_n\| = \frac{M}{\pi} \|K_n(t)\|_{E_1}$$

mit $M = 1$ für $E_1 = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, C und $\frac{1}{8} \leqslant M \leqslant 2$ für $E_1 = L_{\Phi_1}$.

Beweis. Wir verwenden die schon im letzten Beweis gebrauchte Beziehung

$$\|T_n(f; t)\|_{E_1} = \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ E_1^*}} M_1 \left| \int_0^{2\pi} g(t) T_n(f; t)\, dt \right|$$

mit $M_1 = 1$ für $E_1 = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ und C und mit $1 \leqslant M_1 \leqslant 2$ für $E_1 = L_{\Phi_1}$ und beachten, daß $\|T_n(f; t)\|_\infty = \|T_n(f; t)\|_C$ ist. Da für

$$g(t) \sim \sum_{j=1}^{\infty} (c_j \cos jt + d_j \sin jt),$$

$$\int_0^{2\pi} g(t) T_n(f; t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \int_0^{2\pi} f(x) K_n(x-t)\, dx\, dt = \pi \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (a_j c_j + b_j d_j)$$

ist, kann in dem Doppelintegral die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

Es ist so für $T_n \epsilon (L, E_1)$, wenn E_1 irgendeiner der Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_{Φ_1} oder C ist

$$\|T_n\| = \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ L}} \|T_n(f;t)\|_{E_1} = \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ L}} \sup_{\substack{\|g\| \leqslant 1 \\ E_1^*}} \frac{M_1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} g(t) \int_0^{2\pi} f(x) K_n(x-t)\, dx\, dt \right|$$

$$= \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ L}} \sup_{\substack{\|g\| \leqslant 1 \\ E_1^*}} \frac{M_1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x) \int_0^{2\pi} g(t) K_n(x-t)\, dt\, dx \right|$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ L}} \sup_{\substack{\|g\| \leqslant 1 \\ E_1^*}} \frac{M_1}{\pi} \|f\|_L \left\| \int_0^{2\pi} g(t) K_n(x-t)\, dt \right\|_C$$

$$= \sup_{\substack{\|g\| \leqslant 1 \\ E_1^*}} \frac{M_1}{\pi} \left\| \int_0^{2\pi} g(t) K_n(x-t)\, dt \right\|_C$$

$$= \frac{M_1 M_2}{\pi} \|K_n(t)\|_{E_1}$$

mit $M_2 = 1$ für $E_1 = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ und C, $\frac{1}{2} \leqslant M_2 \leqslant 1$ für $E_1 = L_{\Phi_1}$. Dabei folgt die letzte Gleichung aus Hilfssatz 1, denn

$$\sup_{\substack{\|g\| = 1 \\ E_1^*}} \frac{M_1}{\pi} \left\| \int_0^{2\pi} g(t) K_n(x-t)\, dt \right\|_C$$

ist die Norm der Operation $T_n \epsilon (E_1^*, C)$. Somit ist

$$\|T_n\| \leqslant \frac{M_3}{\pi} \|K_n(t)\|_{E_1}$$

mit $M_3 = 1$ für $E_1 = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ und C und mit $\frac{1}{2} \leqslant M_1 M_2 = M_3 \leqslant 2$ für $E_1 = L_{\Phi_1}$.

Umgekehrt ist wieder nach Hilfssatz 1.

$$\frac{M_3}{\pi} \|K_n(t)\|_{E_1} = \frac{M_3 M_4}{\pi} \sup_{\substack{\|g\| \leqslant 1 \\ E_1^*}} \left\| \int_0^{2\pi} g(t) K_n(x-t)\, dt \right\|_C$$

mit $M_3 M_4 = 1$ für $E_1 = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ und C und mit $\frac{1}{2} \leqslant M_3 M_4 = M_5 \leqslant 4$ für $E_1 = L_{\Phi_1}$. Also ist

$$\frac{M_3}{\pi} \|K_n(t)\|_{E_1} = \frac{M_5}{\pi} \sup_{\substack{\|g\| \leqslant 1 \\ E_1^*}} \left\| \int_0^{2\pi} g(t) K_n(x-t)\, dt \right\|_C$$

$$= \frac{M_5}{\pi} \sup_{\substack{\|g\| \leqslant 1 \\ E_1^*}} \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ L}} \left| \int_0^{2\pi} f(x) \int_0^{2\pi} g(t) K_n(x-t)\, dt\, dx \right|$$

$$\leqslant \frac{M_5}{\pi} \sup_{\substack{\|g\| \leqslant 1 \\ E_1^*}} \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ L}} \|g\|_{E_1^*} \left\| \int_0^{2\pi} f(x) K_n(x-t)\, dx \right\|_{E_1}$$

$$= \frac{M_5}{\pi} \sup_{\substack{\|f\| \leqslant 1 \\ L}} \left\| \int_0^{2\pi} f(x) K_n(x-t)\, dx \right\|_{E_1}$$

$$= M_5 \|T_n\|$$

und

$$\frac{M_3}{M_5 \pi} \|K_n(t)\|_{E_1} \leqslant \|T_n\| \leqslant \frac{M_3}{\pi} \|K_n(t)\|_{E_1},$$

also

$$\|T_n\| = \frac{M}{\pi} \|K_n(t)\|_{E_1}$$

mit $M = 1$ für $E_1 = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ und C und mit $\frac{1}{8} \leqslant M \leqslant 4$ für $E_1 = L_{\Phi_1}$.

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

3. Hinreichende und notwendige Bedingungen für $T \epsilon (E, E_{1N})$. Mit dem Satz von Banach und Steinhaus ([3], S. 80, th. 5), dem Grundmengenprinzip ([3], S. 79, th. 3) und den Hilfssätzen von § 2 ergeben sich nun leicht die beiden folgenden Sätze:

Satz 1. *Ist E irgendeiner der Räume L_p $(1 \leqslant p < \infty)$, L_Φ^A oder C, so ist dann und nur dann $T \epsilon (E, C_N)$, wenn*

$$\|K_n(t)\|_{E^*} = O(1) \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

Satz 2. *Ist E_1 irgendeiner der Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ, oder C, so ist dann und nur dann $T \epsilon (L, E_{1N})$, wenn*

$$\|K_n(t)\|_{E_1} = O(1) \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

Beweise. 1. Sei E einer der Räume L_p $(1 \leqslant p < \infty)$, L^4_Φ, C und $T \in (E, C_N)$. Dann folgt für jedes $f \in E$ aus $\lim_{n\to\infty} \|T_n f - f\|_C = 0$,

$$\|T_n f\|_C = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und daraus mit dem Satz von Banach und Steinhaus die Beschränktheit der Normen der Folge $\{T_n f\}$, d. h. es ist mit Hilfssatz 1

$$\|T_n\| = \frac{M}{\pi} \|K_n(t)\|_{E^*} = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

mit $\frac{1}{2} \leqslant M \leqslant 1$, also $\|K_n(t)\|_{E^*} = O(1)$ für $n \to \infty$.

Umgekehrt folgt aus $\|K_n(t)\|_{E^*} = O(1)$ für $n \to \infty$, also $\|T_n\| = O(1)$ für $n \to \infty$, wegen $T \in (P, C_N)$ mit dem Grundmengenprinzip ([3], S. 79, th. 3) auch $T \in (E, C_N)$, denn P bildet in den vorausgesetzten Räumen E eine Grundmenge (= dichte Menge). Für $E = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ siehe ([1], S. 37), für $E = C$ ([1], S. 32) und für $E = L^4_\Phi$ ([10], S. 128,8), denn P ist dicht in C und C ist nach Zaanen dicht in L^4_Φ.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

2. Die Schlußweise beim Beweis des Satzes 2 ist genau so, wie bei Satz 1, nur hat man jetzt die in Hilfssatz 2 angegebene Normdarstellung zu verwenden.

Bemerkungen. 1. Zu jedem p mit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ gibt es eine Young-funktion Φ sodaß $L_p = L_\Phi$ ist ([10], S. 78 und 82); speziell ist für diese Young-funktion $L_\Phi = L^4_\Phi = L_p$ im Fall $1 \leqslant p < \infty$. Es genügt also Satz 1 für $E = L^4_\Phi$ anstelle von $E = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ auszusprechen. Entsprechend genügt in Satz 2 die Betrachtung von $E_1 = L_\Phi$ anstelle von $E_1 = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

2. Da nach den beiden letzten Sätzen die Beschränktheit der Normenfolge $\{\|T_n\|\}$ notwendig und hinreichend ist für $T \in (E, E_{1N})$ bei den jeweils betrachteten Raumkombinationen E und E_1, und da für $\lambda_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$ und $E = E_1$

$$\|T_n\| = \sup_{\|f\|_E \leqslant 1} \|s_n(f)\|_E$$

ist, so ist nur derjenige der Räume $E = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, L^4_Φ, C ein Raum vom Typus E_N, bei dem

$$\sup_{\|f\|_E \leqslant 1} \|s_n(f)\|_E = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Speziell ergeben sich so die bekannten Tatsachen, daß $L \neq L_N$ und $C \neq C_N$ wegen $\|\sum_{j=1}^{n} \cos jt\|_L \neq O(1)$ für $n \to \infty$.

4. Identische Multiplikatorenklassen. Faßt man die Gesamtheit aller Multiplikatoren $\{\lambda_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ mit $T \in (E, E_1)$ zu der Multiplikatorenklasse (E, E_1) zusammen, so läßt sich aus den Aussagen des § 3 leicht die Identität gewisser Multiplikatorenklassen folgern.

Satz 3. 1. *Für* $E = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, L^4_Φ, C *ist* $(E, C_N) = (L, E^*_N)$.

2. *Für* $1 < p < \infty$ *ist* $(L_p, C_N) = (L_p, C) = (L_p, L_\infty)$.

Beweis. 1. Diese Aussage folgt aus $\|K_n(t)\|_{E^*} = \|K_n(t)\|_{E_1}$ für $E_1 = E^*$ und aus den Sätzen 1 und 2.

2. Diese Aussage folgt daraus, daß die für $T \in (L_p, C_N)$ $(1 < p < \infty)$ nach Satz 1 hinreichende und notwendige Bedingung

$$\|K_n(t)\|_{p'} = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

bekanntlich auch notwendig ist für $T \in (L_p, L_\infty)$ $(1 < p < \infty)$. Die Notwendigkeit dieser Bedingung für $T \in (L_p, L_\infty)$ ergibt sich so: Ist $T \in (L_p, L_\infty)$ $(1 < p < \infty)$, also $Tf \in L_\infty$ für jedes $f \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, so ist

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} \frac{n+1-j}{n+1} \lambda_j (a_j \cos jt + b_j \sin jt) \Big\|_\infty = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

([11], S. 79) für jedes $f \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, also ist nach dem Satz von Banach und Steinhaus die Folge der Normen dieser Operationenfolge $\sigma_n(Tf; t)$ mit

$$\sigma_n(Tf; t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{n+1-j}{n+1} \lambda_j (a_j \cos jt + b_j \sin jt)$$

beschränkt, und nach Hilfsatz 1, der offensichtlich auch für $E_1 = L_\infty$ anstelle von $E_1 = C$, also auch im Fall $T_n \in (E, L_\infty)$ gilt, ist

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n+1-j}{n+1} \lambda_j \cos jt \Big\|_{p'} = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Also ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cos jt \sim g \in L_{p'} \quad (1 < p' < \infty) \quad ([11], \text{S. } 84).$$

Wegen $L^*_p = L_{p_N}$ $(1 < p < \infty)$ ([11], S. 153, 7.3 (i)) folgt daraus auf Grund der Bemerkung 2 nach Satz 2, auch

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos jt \Big\|_{p'} = \|K_n(t)\|_{p'} = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Somit ist die für $T\epsilon(L_p, C_N)$ $(1 < p < \infty)$ hinreichende Bedingung sogar notwendig für $T\epsilon(L_p, L_\infty)$ $(1 < p < \infty)$. Hieraus folgt die Behauptung.

Schlußbemerkung. Unsere Aussage in Satz 1 im Fall $E = C$ ist äquivalent der eingangs genannten Aussage von Herrn Karamata.

Herr Aljančić ([2], Satz 1) bewies einen entsprechenden Satz wie Herr Karamata für ein allgemeines orthonormiertes System, das in Bezug auf den Raum C abgeschlossen ist.

Unsere Sätze wurden für das trigonometrische Orthogonalsystem ausgesprochen und bewiesen, doch lassen sie sich leicht auf allgemeinere Orthogonalsysteme mit gewissen Eigenschaften, wie Abgeschlossenheit und Vollständigkeit übertragen.

Literaturnachweis

[1] N. I. Achieser, *Vorlesungen über Approximationstheorie*, Berlin 1953.

[2] S. Aljančić, *Über Summierbarkeit von Orthogonalentwicklungen stetiger Funktionen*, Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 10 (1956), p. 121-130.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, New York 1955.

[4] I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Mat. Sbornik 4 (46) (1938), p. 235-284.

[5] S. Kaczmarz, *Sur les multiplicateurs des séries orthogonales*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 21-26.

[6] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, New York 1951.

[7] J. Karamata, *Suite de fonctionnelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier*, Journal de Math. P. et Appl. 35 (1956), p. 87-95.

[8] A. C. Zaanen, *Note on a certain class of Banach spaces*, Koninklijke Nederl. Akad. Wetenschappen, Proc. 52 (1949), p. 488-498.

[9] — *Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces*, Compositio Mathematica 10 (1952), p. 56-94.

[10] — *Linear Analysis*, Amsterdam-Groningen 1953

[11] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, New York 1952.

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1958

STUDIA MATHEMATICA, T. XVII. (1958)

Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen II

von

G. GOES (Ludwigsburg)

Nach Abschluß meiner Note [1] wurde ich durch eine Arbeit von Herrn Karamata [3] darauf aufmerksam gemacht, daß schon M. Katayama [4] die in [1] angegebene Bedingung für $T\epsilon(L_p, C_N)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ gefunden hat — wir verwenden die in [1] eingeführten Bezeichnungen. M. Katayama verwendet in Ihren Beweisen jedoch nicht wie wir das Grundmengenprinzip (vgl. [1]), sondern im wesentlichen die gleichen Beweisgedanken wie J. Karamata [2].

Note [4] enthält eine genaue Bedingung für $T\epsilon(S, C_N)$, wobei S der Raum der Fourier-Stieltjes-Reihen sei. Der folgende Satz enthält diese Aussage von Katayama ([4], S. 122, Satz 4) als Spezialfall und im Beweis wird die in [1], Hilfssatz 2, angegebene Norm der Operation $T_n\epsilon(L, E_1)$ verwendet:

Satz. *Ist E_1 irgendeiner der Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ, C, so ist dann und nur dann $T\epsilon(S, E_{1N})$, wenn*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos kt \sim K(t) \epsilon E_{1N}. \tag{1}$$

Beweis. E_1 sei irgendeiner der Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ oder C.

Ist $T\epsilon(S, E_{1N})$, so ist (1) erfüllt wegen $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt \,\epsilon S$.

Ist umgekehrt (1) erfüllt, so gilt für jede mit 2π periodische und schwankungsbeschränkte Funktion $f(t)$ mit

$$\|f\|_V = \int_0^{2\pi} |df|$$

und

$$h = df \sim \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jt + b_j \sin jt)\,\epsilon S$$