Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres. Chaque volume paraît en 3 fascicules.

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Un système d'axiomes communs à quelques géométries*

par L. Dubikajtis (Toruń)

Introduction. La tendance à généraliser qui caractérise les sciences mathématiques contemporaines se manifeste, entre autres, par la création de nombreuses théories non-catégoriques, telles que la théorie des groupes, l'algèbre de Boole, la théorie des treillis et beaucoup d'autres.

Chacune de ces théories générales, dont la plupart sont connues depuis longtemps, possède de nombreux modèles.

Étant donné un système d'axiomes d'une telle théorie générale, non-catégorique $\mathcal{T}_0$, pour en obtenir le système d'axiomes d'une théorie particulière $\mathcal{T}_1$ (qui sera son modèle), il faut ajouter à ce système quelques axiomes nouveaux.

Ce sont les axiomes supplémentaires qui nous obligeront de rejeter les autres modèles de la théorie générale $\mathcal{T}_0$ (c'est-à-dire ceux qui ne sont pas les modèles de la théorie $\mathcal{T}_1$).

Dans ce travail je vais considérer le problème suivant:

Problème 1. *Trouver une théorie générale $\mathcal{G}_0$ ayant pour modèles: $\mathcal{G}_1$ — la géométrie projective, $\mathcal{G}_2$ — la géométrie affine, $\mathcal{G}_3$ — la géométrie de Möbius, $\mathcal{G}_4$ — la géométrie de Laguerre et $\mathcal{G}_5$ — la géométrie de Lie* (1).

Evidemment on peut trouver de nombreuses et diverses solutions de ce problème. J'en donne ici une, celle qui me semble la plus simple et la plus naturelle.

Il est clair que tous les théorèmes de la théorie $\mathcal{G}_0$ sont vérifiés dans toutes les géométries $\mathcal{G}_i$. En outre, la théorie $\mathcal{G}_0$ permet de comparer toutes ces géométries et de trouver des rapports entre elles.

Après avoir résolu le problème 1, on peut considérer

Problème 2. *Quels sont les axiomes qu'il faut ajouter au système d'axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0$ pour obtenir celui de la géométrie $\mathcal{G}_i$ (où $i = 1, 2, 3, 4, 5$)?*

Je ne donne ici la solution du problème 2 que pour $i = 1$ et $i = 2$, c'est-à-dire pour la géométrie projective et la géométrie affine.

---

* Les thèses de ce travail ont été publiées dans [11].

(1) Toutes ces géométries sont étudiées dans [2].

La question de décider si l'une des deux solutions du problème 1 est meilleure que l'autre est absolument relative, et on peut, dans ce but, choisir différents critères. J'essaye ici de construire une théorie $\mathcal{G}_0$ qui serait la plus petite théorie contenant les géométries $\mathcal{G}_1$-$\mathcal{G}_5$, en ce sens que les axiomes supplémentaires, distinguant les géométries particulières, soient les moins nombreux.

Il me semble que l'une des plus belles solutions du problème sera une théorie $\mathcal{G}_0$ — pareille sous quelque rapport à la géométrie affine à n dimensions. Il s'agit d'un trait caractéristique de celle-ci, à savoir:

La géométrie affine à n dimensions est une théorie non-catégorique $\mathcal{T}_0$ dont les modèles particuliers sont: $\mathcal{T}_1$ — la géométrie affine à une dimension, $\mathcal{T}_2$ — la géométrie affine à deux dimensions, etc. Pour déduire du système d'axiomes de la théorie $\mathcal{T}_0$ (géométrie affine à n dimensions) celui de la théorie $\mathcal{T}_1$ (géométrie affine à une dimension) il est nécessaire et suffisant d'ajouter un seul axiome disant que $n = 1$. Le système d'axiomes de la théorie $\mathcal{T}_0$ complété par cet axiome est déjà catégorique, c'est-à-dire qu'il n'a qu'un seul modèle: la géométrie affine à une dimension. Ce mode de procéder ne change pas dans le cas de la géométrie à deux dimensions, à trois dimensions, et dans toutes les autres. Il suffit de remplacer l'axiome supplémentaire „$n = 1$" par l'axiome „$n = 2$", „$n = 3$" etc. Donc, on peut dire que la géométrie affine à n dimensions est une théorie générale avec un paramètre n, théorie qui, pour chaque valeur du paramètre, possède un seul modèle.

J'ai essayé de construire une théorie $\mathcal{G}_0$ ayant des propriétés pareilles, c'est-à-dire une théorie avec des paramètres numériques, qu'il suffit de fixer pour qu'elle devienne catégorique([2]).

Dans ce cas tous les axiomes supplémentaires (dont on a parlé dans le problème 2) auront la forme suivante: $m = 3$, $p = 2$ etc.

Je n'y ai pas réussi complètement. La théorie $\mathcal{G}_0$ exposée dans ce travail est une théorie à trois paramètres m, p, q. Pour en déduire la théorie $\mathcal{G}_i$ (où $i = 1, 2, 3, 4, 5$) il est nécessaire de fixer les paramètres, mais ceci ne suffit pas et il faut ajouter encore d'autres axiomes. Par exemple, si aux axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0$ on ajoute les axiomes: $m = 4$, $p = 1$, $q = 0$, on ne peut démontrer que tous les axiomes d'incidence de la géométrie affine à trois dimensions. Cependant pour obtenir tout le système d'axiomes (catégorique) de cette géométrie il faut encore ajouter les axiomes d'ordre, de continuité et de parallélisme.

([2]) Chacune des théories obtenues en fixant les paramètres ne doit être catégorique que dans un certain sens du mot, notamment: deux modèles quelconques ne doivent être isomorphes que par rapport à certaines notions géométriques. Par rapport auxquelles, on l'expliquera dans la suite de ce travail.

Or, on peut encore poser une question:

PROBLÈME 3. *Peut-on rétrécir la théorie $\mathcal{G}_0$ (étudiée dans ce travail) en ajoutant de nouveaux axiomes communs à toutes les géométries $\mathcal{G}_i$, de manière qu'il soit possible, en fixant respectivement les paramètres, de démontrer tous les axiomes de la géométrie $\mathcal{G}_i$ (pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$)?*

La solution de ce dernier problème ne me semble point facile, mais je crois qu'elle est possible.

Ainsi modifiée, la théorie $\mathcal{G}_0$ sera une géométrie universelle et elle permettra non seulement de comparer toutes les géométries $\mathcal{G}_i$, mais aussi de créer de nouvelles géométries (pour différentes valeurs des paramètres).

La comparaison des géométries particulières, en s'appuyant sur la théorie $\mathcal{G}_0$, est possible même sans la modification proposée dans le problème 3. On peut, par exemple, aisément expliquer le fait qu'une gerbe de plans en géométrie affine à trois dimensions satisfait à tous les axiomes d'incidence de la géométrie projective à deux dimensions.

Dans le § 6 nous établirons des théorèmes concernant ce rapport et beaucoup d'autres.

La théorie $\mathcal{G}_0$ exposée dans ce travail est caractérisée par un petit nombre d'axiomes et de notions primitives. Notamment: les notions primitives sont les deux ensembles X et Y et la relation $\sim$, dont le domaine est l'ensemble X et l'antidomaine — l'ensemble Y. Le système d'axiomes ne contient que trois axiomes et les définitions nécessaires pour définir les notions secondaires (employées dans l'énoncé de ces axiomes).

Dans le § 1 de ce travail j'expose le système d'axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(m, p, q)$, c'est-à-dire la théorie $\mathcal{G}_0$ avec les paramètres m, p, q. Ensuite, dans le § 2 j'indique les modèles géométriques de la théorie $\mathcal{G}_0$ correspondant aux valeurs particulières des paramètres m, p, q. Dans les §§ 3 et 4 je développe la théorie $\mathcal{G}_0(m, p, q)$ en m'appuyant sur les axiomes admis dans le § 1 et j'y construis un treillis.

Dans le § 5, je déduis des axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 0, 0)$ presque([3]) tous les axiomes d'incidence de la géométrie projective à n dimensions, et je montre que mes axiomes forment un système ipso-dual. C'est d'ailleurs, un système pareil à celui de M. Esser([4]).

On vérifie aussi aisément que tous les axiomes d'incidence de la géométrie affine à n dimensions résultent de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 1, 0)$.

([3]) Cf. le renvoi ([25]).

([4]) Cf. [6]. Il est à remarquer que le système d'axiomes donné ici résulte de celui de M. Esser. Un de mes axiomes ($A_1(n+1, 0, 0)$) est même démontré dans le travail cité de M. Esser [6], comme théorème V.

Dans le § 6 je m'occupe des rapports entre les modèles particuliers de la théorie $\mathcal{G}_0$. Enfin, dans le § 7 je démontre l'indépendance des axiomes de cette théorie.

§ 1. Le système d'axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0$. Soient deux ensembles X et Y. Pour simplifier l'écriture nous emploierons toujours la lettre x pour désigner un élément de l'ensemble X, et y pour désigner un élément de l'ensemble Y (avec différents indices pour les distinguer). C'est pourquoi nous n'aurons pas besoin de signaler chaque fois l'appartenance de l'élément consideré à l'un des ensembles X, Y.

Les ensembles X et Y ne doivent pas être disjoints, ils peuvent même être coïncidents (par exemple dans la géométrie de Lie).

La troisième notion primitive est une relation binaire dont le domaine est l'ensemble X et l'antidomaine — Y. Nous désignerons cette relation par le signe $\sim$ et nous l'appellerons *relation d'incidence*. L'expression $x\sim y$ signifie: „x est incident avec y" ou „x et y sont incidents" [5].

Pour simplifier les notations, nous écrivons $x\sim(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, au lieu d'écrire $x\sim y_1, x\sim y_2, \ldots, x\sim y_k$. D'une façon analogue au lieu de $x_1\sim y, x_2\sim y, \ldots, x_k\sim y$, nous écrivons $(x_1, x_2, \ldots, x_k)\sim y$. Enfin, au lieu de $x_1\sim(y_1, \ldots, y_l), x_2\sim(y_1, \ldots, y_l), \ldots, x_k\sim(y_1, \ldots, y_l)$, nous écrivons $(x_1, \ldots, x_k)\sim(y_1, \ldots, y_l)$. Si la condition $x\sim y$ n'est pas remplie, on écrit $x\not\sim y$.

DÉFINITION 1.1a. Les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont dits *indépendants* lorsque pour chaque $i = 1, 2, \ldots, k$ il existe un y_i tel que les conditions

(1) $x_i\not\sim y_i$, (2) $x_j\sim y_i$ pour $j \neq i$

sont remplies. Nous écrivons dans ce cas $I(x_1, \ldots, x_k)$.

Nous définissons d'une façon analogue l'indépendance des éléments $y_1, \ldots, y_k$:

DÉFINITION 1.1b. $I(y_1, \ldots, y_k)$ signifie que pour chaque $i = 1, 2, \ldots, k$ il existe un élément x_i tel que les conditions

(1) $x_i\not\sim y_i$, (2) $x_i\sim y_j$ pour $j \neq i$

sont remplies.

On peut admettre que l'ensemble vide 0 satisfait aux conditions de ces deux définitions, c'est-à-dire qu'on a $I(0)$.

Si la condition $I(x_1, \ldots, x_k)$ n'est pas remplie, nous disons que les éléments $x_1, \ldots, x_k$ sont *dépendants* et nous écrivons $D(x_1, \ldots, x_k)$. D'une manière analogue, $D(y_1, \ldots, y_k)$ signifie que les éléments $y_1, \ldots, y_k$ sont dépendants, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas indépendants.

[5] Pour mieux comprendre nos considérations il sera très utile de se servir du modèle suivant: X = ensemble des points de l'espace à trois dimensions, Y = ensemble des plans, la relation $x \sim y$ désigne l'appartenance du point x au plan y.

DÉFINITION 1.2. $(x_1, \ldots, x_k)\,\mathrm{s}\,(y_1, \ldots, y_l)$ veut dire que les quatre conditions suivantes sont remplies:

(1) $I(x_1, \ldots, x_k)$, (2) $I(y_1, \ldots, y_l)$, (3) $(x_1, \ldots, x_k)\sim(y_1, \ldots, y_l)$, (4) pour $i \neq j$, on a $x_i\not\sim x_j$ et $y_i\not\sim y_j$ [6].

Nous disons dans ce cas que les ensembles $(x_1, \ldots, x_k)$ et $(y_1, \ldots, y_l)$ *sont en relation* s.

Avant de donner le système d'axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0$ il faut rappeler que cette théorie dépend des trois paramètres m, p, q. Les valeurs qu'ils peuvent admettre sont toutes des nombres entiers remplissant les conditions

(1) $p \geqslant 0$, (2) $q \geqslant 0$, (3) $p+q < m$.

Les axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(m, p, q)$. Nous désignerons ces axiomes par $\mathrm{A}_0(m, p, q)$, $\mathrm{A}_1(m)$ et $\mathrm{A}_2(m, p, q)$, ou simplement: $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$.

AXIOME $\mathrm{A}_0(m, p, q)$. *Il existe des $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ tels que*

$$(x_1, \ldots, x_p)\,\mathrm{s}\,(y_1, \ldots, y_q).$$

AXIOME $\mathrm{A}_1(m)$. *Soient k et l deux nombres entiers remplissant les conditions*

(1) $k \geqslant 0$, (2) $l \geqslant 0$, (3) $k+l = m$.

Admettons que

(4) $(x_1, \ldots, x_k)\,\mathrm{s}\,(y_1, \ldots, y_l)$, (5) $x_0\sim(y_1, \ldots, y_l)$, (6) $(x_1, \ldots, x_k)\sim y_0$.

Alors $x_0\sim y_0$.

AXIOME $\mathrm{A}_2(m, p, q)$. *Soient k et l deux nombres entiers remplissant les conditions*

(1) $k \geqslant p$, (2) $l \geqslant q$, (3) $k+l < m$.

Admettons que

(4) $$(x_1, \ldots, x_k)\,\mathrm{s}\,(y_1, \ldots, y_l).$$

Alors

1. *il existe un x_{k+1} tel que* $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})\,\mathrm{s}\,(y_1, \ldots, y_l)$,
2. *il existe un y_{l+1} tel que* $(x_1, \ldots, x_k)\,\mathrm{s}\,(y_1, \ldots, y_l, y_{l+1})$.

[6] La condition (4) n'est nécessaire que dans le cas où les ensembles X et Y ont des éléments communs, c'est-à-dire où il existe $x_i \in Y$ (ou $y_i \in X$), car les relations $x_i\sim x_j$ et $y_i\sim y_j$ n'ont de sens que dans ce cas.

Ayant convenablement choisi les valeurs des paramètres m, p, q on peut, en s'appuyant sur les axiomes A_0, A_1, A_2, construire des fragments assez considérables des géométries à n dimensions: projective, affine, de Möbius, de Laguerre et de Lie.

§ 2. Les modèles de la théorie $\mathcal{G}_0(m, p, q)$. Nous allons maintenant donner les vocabulaires d'interprétation pour les modèles particuliers de la théorie $\mathcal{G}_0(m, p, q)$.

$\mathcal{G}_1$ — la géométrie projective à n dimensions satisfait aux axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 0, 0)$ où

X = ensemble des points projectifs,

Y = ensemble des hyperplans (c'est-à-dire des plans à $n-1$ dimensions) projectifs,

$x \sim y$ signifie que le point x est situé sur l'hyperplan y.

$\mathcal{G}_2$ — la géométrie affine à n dimensions satisfait aux axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 1, 0)$ où

X = ensemble des points,

Y = ensemble des hyperplans,

$x \sim y$ signifie que le point x est situé sur l'hyperplan y.

$\mathcal{G}_3$ — la géométrie de Möbius à n dimensions satisfait aux axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(n+2, 2, 0)$ où

X = ensemble des points (dans l'espace de Möbius il existe outre les points à distance finie, un point à l'infini appartenant à toutes les droites).

Y = ensemble contenant les hyperplans et les surfaces sphériques à $n-1$ dimensions.

$x \sim y$ signifie que le point x est situé sur y.

$\mathcal{G}_4$ — la géométrie de Laguerre à n dimensions satisfait aux axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(n+2, 1, 2)$ où

X = ensemble contenant les points et les surfaces sphériques orientées(7) à $n-1$ dimensions,

Y = ensemble des hyperplans orientés(7),

$x \sim y$ signifie: (1) que x est un point situé sur l'hyperplan y, ou bien: (2) que x est une surface sphérique tangente à l'hyperplan y et les sens de x et y sont les mêmes.

$\mathcal{G}_5$ — la géométrie de Lie à n dimensions satisfait aux axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(n+3, 2, 2)$ où

$X = Y$ = ensemble contenant les points, les hyperplans orientés et les surfaces sphériques orientées à $n-1$ dimensions (dans l'espace de Möbius).

$x \sim y$ signifie: (1) que x est un point situé sur y, ou bien: (2) que x et y sont tangentes et ont même sens, ou enfin: (3) que x et y sont des hyperplans parallèles ayant même sens.

Nous laissons au lecteur la vérification du fait que les axiomes A_0, A_1 et A_2 sont vérifiés dans toutes ces géométries.

(7) La notion de surface sphérique orientée et celle d'hyperplan orienté sont les notions fondamentales de la géométrie de Laguerre; elles ont été définies par W. Blaschke [2], p. 9-10.

§ 3. Les théorèmes généraux de la théorie $\mathcal{G}_0(m, p, q)$. Dans ce paragraphe nous développons la théorie $\mathcal{G}_0$ en y introduisant la notion d'ensembles à m éléments satisfaisant à certaines conditions, ensembles appelés simplexes, et une relation du type d'une équivalence ayant lieu entre les simplexes.

Ensuite nous allons considérer les classes d'abstraction des simplexes par rapport à cette relation et dans le paragraphe suivant nous allons démontrer qu'elles forment un treillis(8) à propriétés spécifiques.

DÉFINITION 3.1a. Nous disons que x_0 *dépend* de $(x_1, \ldots, x_k)$, si pour chaque y la condition $(x_1, \ldots, x_k) \sim y$ implique $x_0 \sim y$.

Nous définissons d'une manière analogue la dépendance d'un élément y_0 de l'ensemble $(y_1, \ldots, y_k)$:

DÉFINITION 3.1b. Nous disons que y_0 *dépend* de $(y_1, \ldots, y_k)$, si pour chaque x l condition $x \sim (y_1, \ldots, y_k)$ implique $x \sim y_0$(9).

THÉORÈME 3.1a. *Si* $D(x_1, \ldots, x_k)$, *il existe une suite* $i_1, i_2, \ldots, i_l$ *extraite de la suite* $1, 2, \ldots, k$, *telle que*

(1) $I(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l})$, (2) *tout* x_j *dépend de* $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$.

Démonstration. Des hypothèses du théorème il résulte (d'après les définitions 1.1 et 3.1) qu'il existe parmi $x_1, \ldots, x_k$ un élément x_{i_0} dépendant des autres. Après avoir rejeté cet élément nous aurons une suite extraite $x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_k$, qui vérifie ou bien la conclusion de notre théorème, ou bien ses hypothèses. Dans le premier cas le théorème se trouve démontré, dans le second nous répétons le procédé précédent. Chaque fois le nombre des éléments de cet ensemble diminue de un. Nous devons obtenir ainsi un ensemble satisfaisant à la conclusion du théorème (cet ensemble peut même être le $(k+1)$-ième, c'est-à-dire l'ensemble vide).

(8) Dans cette note nous utiliserons la définition de treillis donnée par G. Birkhoff [1], p. 16.

(9) En employant ces notions on pourrait simplifier la définition 1.1. En particulier, $I(x_1, \ldots, x_k)$ signifie qu'aucun des éléments x_i ne dépend des autres.

Il est clair qu'un théorème analogue sur les éléments de l'ensemble Y est aussi vrai:

THÉORÈME 3.1b. *Si* $D(y_1, \ldots, y_k)$, *il existe une suite* $i_1, i_2, \ldots, i_l$ *extraite de la suite* $1, 2, \ldots, k$, *telle que*

(1) $I(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_l})$, (2) *tout* y_j *dépend de* $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_l})$.

DÉFINITION 3.2. Nous appellerons *simplexe* tout ensemble à m éléments $S_{kl} = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ assujetti aux conditions suivantes:

(1) $k \geqslant p$, (2) $l \geqslant q$, (3) $k+l = m$, (4) $(x_1, \ldots, x_k) \mathrm{s} (y_1, \ldots, y_l)$.

Pour désigner les simplexes nous réserverons la lettre S avec différents indices suscrits (pour distinguer différents simplexes) et l'indice double kl souscrit, désignant le nombre des éléments de l'ensemble X et ceux de l'ensemble Y contenus dans ce simplexe.

DÉFINITION 3.3[10]. Si $S_{kl} = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ et si $S'_{k'l'} = (x'_1, \ldots, x'_{k'}, y'_1, \ldots, y'_{l'})$, nous disons que

$$S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$$

quand ils sont assujettis à la condition

$$(*) \qquad (x_1, \ldots, x_k) \sim (y'_1, \ldots, y'_{l'}).$$

De cette définition résulte, en tenant compte de la définition 3.2, le théorème suivant:

THÉORÈME 3.2. *Pour deux simplexes quelconques* $S_{kl} = (x_1, \ldots, y_l)$ *et* $S'_{k'l'} = (x'_1, \ldots, y'_{l'})$ *la condition* $S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$ *implique non seulement la condition* $(*)$, *mais aussi la condition*

$$(**) \qquad (x_1, \ldots, x_k) \mathrm{s} (y'_1, \ldots, y'_{l'}).$$

DÉFINITION 3.4. Etant donnés deux simplexes S_{kl} et $S'_{k'l'}$ nous disons que

$$S_{kl} \simeq S'_{k'l'}$$

quand ils remplissent en même temps les deux conditions

$$S_{kl} \leqslant S'_{k'l'} \quad \text{et} \quad S'_{k'l'} \leqslant S_{kl}.$$

DÉFINITION 3.5. Pour indiquer que les deux simplexes S_{kl} et $S'_{k'l'}$ remplissent la condition $S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$ mais ne remplissent pas la condition $S'_{k'l'} \leqslant S_{kl}$, nous employons le symbole

$$S_{kl} < S'_{k'l'}.$$

---

[10] Pour mieux comprendre, il faut se rapporter à l'interprétation donnée dans le renvoi [5].

Maintenant, nous allons établir des propriétés des notions introduites par les définitions 3.3-3.5.

THÉORÈME 3.3. *Si* $S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$, *on a* $k \leqslant k'$ *(et par suite* $l \geqslant l'$*).*

Démonstration. Supposons que le théorème ne soit pas vrai, c'est-à-dire que $S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$ et en même temps $k > k'$. Dans ce cas nous pouvons écrire la condition $(*)$ de la définition 3.3 sous la forme $(x_1, \ldots, x_{k'}, \ldots, x_k) \sim (y'_1, \ldots, y'_{l'})$. Il est facile de voir que pour tout y_0 incident avec $(x_1, \ldots, x_{k'})$ les conditions de l'axiome A_1 sont remplies:

(1) $k' \geqslant 0$, (2) $l' \geqslant 0$, (3) $k'+l' = m$,
(4) $(x_1, \ldots, x_{k'}) \mathrm{s} (y'_1, \ldots, y'_{l'})$, (5) $x_k \sim (y'_1, \ldots, y'_{l'})$, (6) $(x_1, \ldots, x_{k'}) \sim y_0$.

Donc la condition $(x_1, \ldots, x_{k'}) \sim y_0$ implique $x_k \sim y_0$ c'est-à-dire x_k dépend de $(x_1, \ldots, x_{k'})$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de l'indépendance des éléments $(x_1, \ldots, x_{k'}, \ldots, x_k)$.

De ce théorème on conclut immédiatement

THÉORÈME 3.4. *Si* $S_{kl} \simeq S'_{k'l'}$ *on a* $k = k'$ *(donc aussi* $l = l'$*).*

THÉORÈME 3.5. k *étant égal à* k', *la condition* $S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$ *implique* $S_{kl} \simeq S'_{k'l'}$.

Démonstration. Ayant posé $S_{kl} = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ et $S'_{k'l'} = (x'_1, \ldots, x'_{k'}, y'_1, \ldots, y'_{l'})$ on voit aisément que les conditions de l'axiome A_1 sont remplies par chacun des éléments $x'_1, \ldots, x'_{k'}$ et par chacun des $y_1, \ldots, y_l$:

(1) $k \geqslant 0$, (2) $l' \geqslant 0$, (3) $k+l' = k'+l' = m$,
(4) $(x_1, \ldots, x_k) \mathrm{s} (y'_1, \ldots, y'_{l'})$ (d'après le théorème 3.2),
(5) $x'_i \sim (y'_1, \ldots, y'_{l'})$, (6) $(x_1, \ldots, x_k) \sim y_j$.

Alors, pour chaque x'_i et y_j nous avons $x'_i \sim y_j$, d'où $(x'_1, \ldots, x'_{k'}) \sim (y_1, \ldots, y_l)$ c'est-à-dire $S'_{k'l'} \leqslant S_{kl}$. Donc $S_{kl} \simeq S'_{k'l'}$.

THÉORÈME 3.6. *Si* $S_{kl} < S'_{k'l'}$, *on a* $k < k'$.

Démonstration. Supposons que le théorème ne soit pas vrai, c'est-à-dire que $S_{kl} < S'_{k'l'}$ et en même temps $k \geqslant k'$. Ceci implique, en vertu du théorème 3.3 que $k = k'$, donc d'après le théorème 3.5 on a $S_{kl} \simeq S'_{k'l'}$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de notre théorème.

La relation $\leqslant$ est transitive:

THÉORÈME 3.7. *Si* $S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$ *et si* $S'_{k'l'} \leqslant S''_{k''l''}$, *on a* $S_{kl} \leqslant S''_{k''l''}$.

Démonstration. Nous avons par hypothèse

$$(x_1, \ldots, x_k) \sim (y'_1, \ldots, y'_{l'}) \quad \text{et} \quad (x'_1, \ldots, x'_{k'}) \sim (y''_1, \ldots, y''_{l''}).$$

On voit que pour tout x_i et pour tout y_j'' les conditions de l'axiome A_1 sont remplies:

(1) $k' \geqslant 0$, (2) $l' \geqslant 0$, (3) $k'+l' = m$,

(4) $(x_1', \ldots, x_{k'}')\,\mathrm{s}\,(y_1', \ldots, y_{l'}')$, (5) $x_i \sim (y_1', \ldots, y_{l'}')$, (6) $(x_1', \ldots, x'_{k'}) \sim y_j''$.

Alors pour tout x_i et pour tout y_j'' nous avons $x_i \sim y_j''$, donc $(x_1, \ldots, x_k) \sim (y_1'', \ldots, y_{l''}'')$, d'où $S_{kl} \leqslant S''_{k''l''}$.

Théorème 3.8. *La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Il s'agit de démontrer que $\simeq$ est une relation symétrique, réflexive et transitive. En effet, la symétrie et la réflexivité résultent des définitions 3.4 et 3.3 et la transitivité est une conséquence directe de la transitivité de la relation $\leqslant$.

En nous appuyant sur le théorème 3.8, nous pouvons former des classes d'abstraction de la relation $\simeq$. On les désignera par la lettre grecque α:

Définition 3.6. Pour un simplexe S_{kl} nous désignerons par $\alpha(S_{kl})$ la classe de tous les simplexes $S'_{k'l'}$ remplissant la condition $S_{kl} \simeq S'_{k'l'}$. Si $S_{kl} = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, x_l)$, nous pouvons écrire $\alpha\big((x_1, \ldots, y_l)\big)$ au lieu de $\alpha(S_{kl})$.

Pour abréger, nous écrivons, parfois α_{kl} ou même α, avec différents indices suscrits, au lieu d'écrire $\alpha(S_{kl})$.

On vérifie aisément que les relations $\leqslant$ et $<$ peuvent être définies pour classes d'abstraction, car on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.9. *Si $\bar{S}_{kl} \in \alpha(S_{kl})$ et $\bar{S}'_{k'l'} \in \alpha(S'_{k'l'})$, la condition $S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$ implique $\bar{S}_{kl} \leqslant \bar{S}'_{k'l'}$ et la condition $S_{kl} < S'_{k'l'}$ implique $\bar{S}_{kl} < \bar{S}'_{k'l'}$.*

Nous pouvons donc donner les définitions suivantes:

Définition 3.7. $\alpha(S_{kl}) \leqslant \alpha(S'_{k'l'})$ signifie que $S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$.

Définition 3.8. $\alpha(S_{kl}) < \alpha(S'_{k'l'})$ signifie que $S_{kl} < S'_{k'l'}$.

En s'appuyant sur ces définitions, on peut aisément étendre les théorèmes 3.2, 3.3 et 3.4 aux classes d'abstraction:

Théorème 3.10.

1° *La condition $\alpha_{kl} = \alpha'_{k'l'}$ implique $k = k'$ et $l = l'$.*
2° *La condition $\alpha_{kl} \leqslant \alpha'_{k'l'}$ implique $k \leqslant k'$ et $l \geqslant l'$.*
3° *La condition $\alpha_{kl} < \alpha'_{k'l'}$ implique $k < k'$ et $l > l'$.*

Théorème 3.11. *Les conditions $\alpha_{kl} \leqslant \alpha'_{k'l'}$ et $k = k'$ impliquent $\alpha_{kl} = \alpha'_{k'l'}$.*

Théorème 3.12. *Si $\alpha \leqslant \alpha'$ et $\alpha' \leqslant \alpha''$, on a $\alpha \leqslant \alpha''$.*

Maintenant, nous allons prouver

Théorème 3.13. *L'ensemble de toutes les classes d'abstraction α est partiellement ordonné*([11]) *par la relation $\leqslant$.*

Démonstration. Il s'agit de démontrer que $\leqslant$ est une relation réflexive, transitive et antisymétrique([12]). En effet:

1. La relation est réflexive, car pour chaque $\alpha(S_{kl})$ on a (en vertu des définitions 3.3 et 3.2) $S_{kl} \leqslant S_{kl}$, d'où suit $\alpha \leqslant \alpha$.

2. La relation $\alpha \leqslant \alpha'$ est transitive en vertu du théorème 3.12.

3. Les conditions $\alpha(S_{kl}) \leqslant \alpha(S'_{k'l'})$ et $\alpha(S'_{k'l'}) \leqslant \alpha(S_{kl})$ impliquent $S_{kl} \leqslant S'_{k'l'}$ et $S'_{k'l'} \leqslant S_{kl}$. On en conclut que $S_{kl} \simeq S'_{k'l'}$, donc $\alpha(S_{kl}) = \alpha(S'_{k'l'})$. Par conséquent la relation est antisymétrique.

Afin d'illustrer les considérations précédentes nous examinerons le rôle des classes d'abstraction α_{kl} dans le modèle de la géométrie projective $\mathcal{G}_0(n+1, 0, 0)$. Il est facile de voir qu'à chaque classe d'abstraction $\alpha_{kl} = \alpha\big((x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)\big)$ correspond ici un plan à $k-1$ dimensions, celui qui est déterminé par k points indépendants $x_1, \ldots, x_k$ situés sur ce plan. Ce plan peut aussi être considéré comme déterminé par l hyperplans indépendants $y_1, \ldots, y_l$ passant par ce plan. En particulier, à la classe d'abstraction $\alpha_{1n} = \alpha\big((x_1, y_1, \ldots, y_n)\big)$ correspond un point (x_1) et à la classe d'abstraction $\alpha_{n1} = \alpha\big((x_1, \ldots, x_n, y_1)\big)$ un plan à $n-1$ dimensions (y_1). La relation $\alpha_{kl} \leqslant \alpha'_{k'l'}$ signifie ici que le plan α_{kl} est situé sur le plan $\alpha'_{k'l'}$.

Dans les autres modèles géométriques de la théorie $\mathcal{G}_0$ nous aurons une interprétation des classes d'abstraction et de la relation $\leqslant$ pareille à celle qui a été donnée plus haut. C'est la raison pour laquelle nous introduirons la notion de variété (définition 3.9) et celle d'inclusion des variétés (définition 3.10).

Définition 3.9. 1. Si $p = q = 0$, nous appelons *variété* toute classe d'abstraction α_{kl}, en particulier la classe d'abstraction α_{0m} est appelée *variété nulle*, et α_{m0} — *variété universelle*.

2. Si $p \neq 0$, il n'y a pas de classe d'abstraction α_{0m}; dans ce cas nous ajoutons à l'ensemble des variétés, outre les classes d'abstraction, un objet supplémentaire unique, désigné par α_{0m} qui est supposé satisfaire à la relation $\alpha_{0m} \leqslant \alpha_{kl}$ pour tous les α_{kl}.

3. Si $q \neq 0$, il n'y a pas de classe d'abstraction α_{m0}; dans ce cas nous ajoutons à l'ensemble des variétés, outre les classes d'abstraction, un

([11]) Nous avons adopté ici la notion d'ensemble partiellement ordonné d'après [8], p. 171, et aussi d'après [1], p. 1 (*partially ordered set*). Dans [4] (p. 2-3) on emploie dans ce sens le terme *ensemble ordonné*.

([12]) Le terme *antisymétrique* est employé ici au même sens que dans [4], p. 2, c'est-à-dire la relation $\leqslant$ est antisymétrique si et seulement si les conditions $\alpha \leqslant \alpha'$ et $\alpha' \leqslant \alpha$ impliquent l'égalité $\alpha = \alpha'$.

objet supplémentaire unique, désigné par a_{m0}, qui est supposé satisfaire à la relation $a_{kl} \leqslant a_{m0}$ pour tous les a_{kl}.

4. Dans tous ces cas nous désignerons l'ensemble de toutes les variétés par $V(m, p, q)$ ou simplement par V.

Remarque. Il est facile de vérifier que, dans le cas où les classes d'abstraction a_{0m} ou a_{m0} existent, elles satisfont aussi aux conditions $a_{0m} \leqslant a_{kl}$ et $a_{kl} \leqslant a_{m0}$ pour toute variété a_{kl}.

Donc, en nous appuyant sur la définition 3.9 nous avons

THÉORÈME 3.14. *Pour toute variété a_{kl} on a $a_{0m} \leqslant a_{kl} \leqslant a_{m0}$.*

DÉFINITION 3.10. Si les variétés a et a' sont en relation $a \leqslant a'$, nous disons que a' *contient* a ou que *la variété a est contenue dans a'*.

THÉORÈME 3.15. *Dans l'ensemble de toutes les variétés V il y a une et une seule variété nulle ainsi qu'une et une seule variété universelle.*

Démonstration. Nous n'établirons le théorème que pour la variété nulle, car la démonstration dans le second cas est analogue.

L'existence de la variété nulle est assurée par la définition 3.9. Si deux variétés nulles distinctes a_{0m} et a'_{0m} existaient, elles devraient (d'après le théorème 3.14) remplir la condition $a_{0m} \leqslant a'_{0m}$ et en même temps la condition $a'_{0m} \leqslant a_{0m}$. Donc nous aurions $a_{0m} = a'_{0m}$.

On peut aisément vérifier que tous les théorèmes: 3.10-3.13, concernant les classes d'abstraction se rapportent à toutes les variétés (même à la variété nulle et universelle).

On peut donc conclure des théorèmes 3.10 et 3.14:

THÉORÈME 3.16. *Toute suite ascendante de variétés $\ldots < a' < a'' < a''' < \ldots$ est une suite finie qui ne contient pas plus de $m+1$ éléments* [13].

§ 4. Le treillis des variétés. Dans ce paragraphe nous démontrerons que l'ensemble de toutes les variétés avec la variété nulle et la variété universelle forment un treillis; c'est pourquoi nous avons adjoint ces deux variétés dans le cas où elles n'existaient pas comme classes d'abstraction.

Dans toutes les considérations de ce paragraphe nous nous bornerons à étudier la théorie $\mathcal{G}_0$ assujettie aux conditions supplémentaires:

CONDITION C_1. *$p \leqslant 2$ et $q \leqslant 2$.*

CONDITION C_2. *Les ensembles X et Y sont disjoints* [14].

---

[13] Le nombre d'éléments de cette suite dans $V(m, p, q)$ ne surpasse pas non plus le nombre $m-(p+q)+3$, car d'après les définitions 3.2, 3.6 et 3.9, les variétés n'ont pour indices que les couples $\langle 0, m\rangle$, $\langle p, m-p\rangle$, $\langle p+1, m-p-1\rangle, \ldots, \langle m-q, q\rangle$, $\langle m, 0\rangle$.

[14] C_2 permet de rejeter la condition (4) dans la définition 1.2.

Ces deux conditions nous permettront de démontrer les théorèmes de ce paragraphe, mais d'autre part elles réduisent le nombre des modèles de cette théorie, de sorte que le modèle $\mathcal{G}_5$ (géométrie de Lie) est exclu.

Pour prouver que l'ensemble V forme bien un treillis il faut démontrer

1° que l'ensemble V est partiellement ordonné par la relation $\leqslant$,

2° que pour deux variétés quelconques ils existent dans V leur union et leur intersection et sont assujetties aux définitions suivantes:

DÉFINITION 4.1. Nous appelons *union* de a' et a'' la plus petite variété contenant les variétés a' et a'' et nous la désignons par $a' \cup a''$.

Plus précisément, $a = a' \cup a''$ signifie que les trois conditions suivantes sont remplies:

(1) $a' \leqslant a$, (2) $a'' \leqslant a$,

(3) si $a' \leqslant a'''$ et $a'' \leqslant a'''$, on a $a \leqslant a'''$.

DÉFINITION 4.2. Nous appelons *intersection* de a' et a'' la plus grande variété contenue dans les variétés a' et a'', et nous la désignons par $a' \cap a''$.

Plus précisément, $a = a' \cap a''$ signifie que les trois conditions suivantes sont remplies:

(1) $a \leqslant a'$, (2) $a \leqslant a''$,

(3) si $a''' \leqslant a'$ et $a''' \leqslant a''$, on a $a''' \leqslant a$.

La première condition pour que V forme un treillis est remplie en vertu du théorème 3.13. Pour prouver la deuxième — l'existence de l'union et de l'intersection — nous prouverons d'abord un théorème auxiliaire:

THÉORÈME 4.1a. *$(x'_1, \ldots, x'_{k'}, y'_1, \ldots, y'_{l'})$ et $(x''_1, \ldots, x''_{k''}, y''_1, \ldots, y''_{l''})$ étant deux simplexes, tout ensemble $(x_1, \ldots, x_k)$ extrait en vertu du théorème 3.1 de l'ensemble $(x'_1, \ldots, x'_{k'}, x''_1, \ldots, x''_{k''})$ a au moins p éléments (c'est-à-dire $k \geqslant p$).*

Démonstration. D'après C_1 il suffit d'étudier les cas $p = 0$, $p = 1$ et $p = 2$.

1. $p = 0$. Le théorème est vrai en vertu du théorème 3.1.

2. $p = 1$. Si le théorème était faux, les éléments $(x'_1, \ldots, x'_{k'})$ comme dépendant de l'ensemble vide $(k = 0)$ seraient incidents avec tous les éléments y, ce qui est en contradiction avec leur indépendance.

3. $p = 2$. Supposons que le théorème ne soit pas vrai. Dans ce cas ou bien $k = 0$ (ce cas a été considéré au point 2), ou bien $k = 1$. Mais, dans ce dernier cas, x_1 — l'unique x_i, est l'un des x'_i ou des x''_i et tous les

autres dépendent de lui, ce qui est en contradiction avec l'indépendance des $(x_1', \dots, x_{k'}')$ et des $(x_1'', \dots, x_{k''}'')$.

Le théorème dual est évidemment aussi vrai:

THÉORÈME 4.1b. $(x_1', \dots, x_{k'}', y_1', \dots, y_{l'}')$ *et* $(x_1'', \dots, x_{k''}'', y_1'', \dots, y_{l''}'')$ *étant deux simplexes, tout ensemble* $(y_1, \dots, y_l)$ *extrait en vertu du théorème 3.1 de l'ensemble* $(y_1', \dots, y_{l'}', y_1'', \dots, y_{l''}'')$ *a au moins* q *éléments (c'est-à--dire* $l \geqslant q$*).*

Maintenant nous prouverons l'existence de l'union et de l'intersection de deux variétés quelconques, en indiquant en même temps la méthode qui permet de les obtenir.

THÉORÈME 4.2. *L'union des deux variétés* α' *et* α'' *existe toujours. En particulier:*

1) *Dans le cas où* $\alpha' = \alpha_{0m}$, *on a* $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha''$. *(Si* $\alpha'' = \alpha_{0m}$, *on a* $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha'$.*)*

2) *Dans le cas où* $\alpha' = \alpha_{m0}$, *on a* $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha_{m0}$. *(Si* $\alpha'' = \alpha_{m0}$ *on a aussi* $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha_{m0}$.*)*

3) *Dans le cas où* k', k'', l', l'' *sont différents de zéro c'est-à-dire* $\alpha' = \alpha\big((x_1', \dots, x_{k'}', y_1', \dots, y_{l'}')\big)$ *et* $\alpha'' = \alpha\big((x_1'', \dots, x_{k''}'', y_1'', \dots, y_{l''}'')\big)$ *nous formerons l'ensemble* $(x_1, \dots, x_k)$ *extrait en vertu du théorème 3.1 de l'ensemble* $(x_1', \dots, x_{k'}', x_1'', \dots, x_{k''}'')$ *et nous distinguerons deux cas possibles:*

3.1) *il existe un ensemble* $(y_1, \dots, y_l)$ *tel que* $(x_1, \dots, x_k)\ \mathrm{s}\ (y_1, \dots, y_l)$ *et* $l = m-k \geqslant q$; *alors nous poserons* $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha\big((x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)\big)$ [15], *ou*

3.2) *il n'existe pas, alors* $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha_{m0}$.

Démonstration. Dans notre théorème nous avons donné la règle permettant de former l'union de deux variétés. L'existence de l'union est assurée ici par la règle même, mais il faut encore démontrer que l'union ainsi déterminée remplit bien les conditions de la définition 4.1. La vérification de ce fait ne présente aucune difficulté dans les deux premiers cas.

Dans le cas 3.1) on voit aussitôt que $\alpha' \leqslant \alpha$ et $\alpha'' \leqslant \alpha$, car on a $(x_1, \dots, x_k) \sim (y_1, \dots, y_l)$ et tout x_i' et tout x_j'' dépend de $(x_1, \dots, x_k)$, d'où $(x_1', \dots, x_{k'}') \sim (y_1, \dots, y_l)$ et $(x_1'', \dots, x_{k''}'') \sim (y_1, \dots, y_l)$. D'autre part les conditions $\alpha' \leqslant \alpha''' = \alpha\big((x_1''', \dots, x_{k'''}''', y_1''', \dots, y_{l'''}''')\big)$ et $\alpha'' \leqslant \alpha'''$ impliquent $(x_1', \dots, x_{k'}', x_1'', \dots, x_{k''}'') \sim (y_1''', \dots, y_{l'''}''')$ d'où $(x_1, \dots, x_k) \sim (y_1''', \dots, y_{l'''}''')$ c'est-à-dire $\alpha \leqslant \alpha'''$.

[15] L'existence du simplexe $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ est assurée par les conditions admises dans le cas 3.1) et par le théorème 4.1, en vertu duquel $k \geqslant p$.

Enfin, dans le cas 3.2) la seule difficulté consiste à démontrer que toute variété contenant α' et α'' est égale à α_{m0}. En effet, si α''' remplit les conditions $\alpha' \leqslant \alpha'''$ et $\alpha'' \leqslant \alpha'''$ et diffère de α_{m0}, c'est-à-dire $\alpha''' = \alpha\big((x_1''', \dots, x_{k'''}''', y_1''', \dots, y_{l'''}''')\big)$ où $l''' \geqslant q$, on a $(x_1', \dots, x_{k'}', x_1'', \dots, x_{k''}'') \sim (y_1''', \dots, y_{l'''}''')$ d'où $(x_1, \dots, x_k) \sim (y_1''', \dots, y_{l'''}''')$ et d'après C_2 $(x_1, \dots, x_k)\ \mathrm{s}\ (y_1''', \dots, y_{l'''}''')$. Donc d'après l'axiome A_1, on a $k+l''' \leqslant m$. En tenant compte des propriétés des ensembles $(x_1, \dots, x_k)$ et $(y_1''', \dots, y_{l'''}''')$ on voit qu'ils satisfont aux conditions de l'axiome A_2:

(1) $k \geqslant p$ (d'après le théorème 4.1),
(2) $l''' \geqslant q$, (3) $k+l''' \leqslant m$ [16], (4) $(x_1, \dots, x_k)\ \mathrm{s}\ (y_1''', \dots, y_{l'''}''')$.

On peut donc compléter l'ensemble $(y_1''', \dots, y_{l'''}''')$ pour obtenir l'ensemble $(y_1''', \dots, y_{l'''}''', y_{l'''+1}''', \dots, y_l''')$ tel que $(x_1, \dots, x_k)\ \mathrm{s}\ (y_1''', \dots, y_l''')$ et $l = m-k \geqslant q$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse 3.2).

De façon analogue on peut démontrer

THÉORÈME 4.3. *L'intersection de deux variétés* α' *et* α'' *existe toujours. En particulier:*

1) *Dans le cas où* $\alpha' = \alpha_{m0}$, *on a* $\alpha' \cap \alpha'' = \alpha''$. *(Si* $\alpha'' = \alpha_{m0}$, *on a* $\alpha' \cap \alpha'' = \alpha'$.*)*

2) *Dans le cas où* $\alpha' = \alpha_{0m}$, *on a* $\alpha' \cap \alpha'' = \alpha_{0m}$. *(Si* $\alpha'' = \alpha_{0m}$, *on a aussi* $\alpha' \cap \alpha'' = \alpha_{0m}$.*)*

3) *Dans le cas où* k', k'', l', l'' *sont différents de zéro, c'est-à-dire* $\alpha' = \alpha\big((x_1', \dots, x_{k'}', y_1', \dots, y_{l'}')\big)$ *et* $\alpha'' = \alpha\big((x_1'', \dots, x_{k''}'', y_1'', \dots, y_{l''}'')\big)$, *nous formerons l'ensemble* $(y_1, \dots, y_l)$ *extrait en vertu du théorème 3.1 de l'ensemble* $(y_1', \dots, y_{l'}', y_1'', \dots, y_{l''}'')$ *et nous distinguerons deux cas possibles:*

3.1) *il existe un ensemble* $(x_1, \dots, x_k)$ *tel que* $(x_1, \dots, x_k)\ \mathrm{s}\ (y_1, \dots, y_l)$ *et* $k = m-l \geqslant p$; *alors nous poserons* $\alpha' \cap \alpha'' = \alpha\big((x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)\big)$.

3.2) *il n'existe pas; alors* $\alpha' \cap \alpha'' = \alpha_{0m}$.

Nous avons donc démontré

THÉORÈME 4.4. *Les variétés forment un treillis.*

Étudions maintenant les propriétés de ce treillis.

DÉFINITION 4.3. On appelle *module* de la variété α_{kl} le nombre k. Le module est désigné par $\mathrm{mod}\,\alpha_{kl}$.

Au moyen de cette notion on peut formuler le théorème 3.10 de la manière suivante:

[16] Plus strictement: la condition (3) de l'axiome A_2 dit que $k+l''' < m$, mais puisque nous voulons obtenir ici un ensemble $(x_1, \dots, x_k, y_1''', \dots, y_{l'''}''', \dots, y_l''')$ remplissant les conditions $(x_1, \dots, x_k)\ \mathrm{s}\ (y_1''', \dots, y_l''')$ et $k+l = m$, nous l'obtiendrons même dans le cas où $k+l''' = m$ (évidemment sans qu'il soit nécessaire d'utiliser l'axiome A_2).

THÉORÈME 4.5.

1° *La condition* $\alpha = \alpha'$ *implique* $\mathrm{mod}\,\alpha = \mathrm{mod}\,\alpha'$.

2° *La condition* $\alpha \leqslant \alpha'$ *implique* $\mathrm{mod}\,\alpha \leqslant \mathrm{mod}\,\alpha'$.

3° *La condition* $\alpha < \alpha'$ *implique* $\mathrm{mod}\,\alpha < \mathrm{mod}\,\alpha'$.

Nous démontrerons un théorème important qui se rapporte aux modules des variétés.

THÉORÈME 4.6. *Si* $\mathrm{mod}(\alpha' \frown \alpha'') \geqslant p$ *et* $m - \mathrm{mod}(\alpha' \smile \alpha'') \geqslant q$, *on a*

$$(*) \qquad \mathrm{mod}(\alpha' \frown \alpha'') + \mathrm{mod}(\alpha' \smile \alpha'') = \mathrm{mod}\,\alpha' + \mathrm{mod}\,\alpha''.$$

Démonstration. En vertu des hypothèses du théorème, on peut admettre que $\alpha = \alpha' \frown \alpha''$ et $\alpha''' = \alpha' \smile \alpha''$ où

$$\alpha = a\big((x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)\big), \qquad \alpha' = a\big((x_1', \ldots, x_{k'}', y_1', \ldots, y_{l'}')\big),$$
$$\alpha'' = a\big((x_1'', \ldots, x_{k''}'', y_1'', \ldots, y_{l''}'')\big), \qquad \alpha''' = a\big((x_1''', \ldots, x_{k'''}''', y_1''', \ldots, y_{l'''}''')\big).$$

En s'appuyant sur les propriétés des treillis, on voit que $\alpha \leqslant \alpha' \leqslant \alpha'''$ et $\alpha \leqslant \alpha'' \leqslant \alpha'''$. Or, d'après le théorème 3.10 et la définition 3.9, on a les inégalités $p \leqslant k \leqslant k' \leqslant k'''$, $p \leqslant k \leqslant k'' \leqslant k'''$, $q \leqslant l''' \leqslant l' \leqslant l$ et $q \leqslant l''' \leqslant l'' \leqslant l$. Il est évident que les ensembles $(x_1, \ldots, x_k)$ et $(y_1', \ldots, y_{l'}')$ remplissent les conditions de l'axiome A_2, c'est-à-dire qu'on a

(1) $k \geqslant p$, (2) $l' \geqslant q$,

(3) $k + l' \leqslant k' + l' = m$[17], (4) $(x_1, \ldots, x_k)\, \mathrm{s}\, (y_1', \ldots, y_{l'}')$.

Nous pouvons donc compléter l'ensemble $(x_1, \ldots, x_k)$ de façon à obtenir $(x_1, \ldots, x_k, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_{k'})\, \mathrm{s}\, (y_1', \ldots, y_{l'}')$ (où $k' + l' = m$). On peut facilement vérifier que $a\big((x_1, \ldots, x_k, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_{k'}, y_1', \ldots, y_{l'}')\big) = \alpha'$. De la même façon on peut obtenir $a\big((x_1, \ldots, x_k, \bar{\bar{x}}_{k+1}, \ldots, \bar{\bar{x}}_{k''}, y_1'', \ldots, y_{l''}'')\big) = \alpha''$.

Afin de construire $a_{k'''l'''}$ — l'union des variétés α' et α'' — nous devrons former en vertu du théorème 4.2 un ensemble extrait de l'ensemble $(x_1, \ldots, x_k, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_{k'}, \bar{\bar{x}}_{k+1}, \ldots, \bar{\bar{x}}_{k''})$. Le nombre d'éléments de cet ensemble est égal à k''' (car $\alpha' \smile \alpha'' = a_{k'''l'''}$). Nous aurons donc l'inégalité $k''' \leqslant k + (k'-k) + (k''-k)$, c'est-à-dire

$$(1) \qquad k + k''' \leqslant k' + k''.$$

De façon analogue nous complétons l'ensemble $(y_1''', \ldots, y_{l'''}''')$ de manière à obtenir la variété $a\big((x_1', \ldots, x_{k'}', y_1''', \ldots, y_{l'''}''', \bar{y}_{l'''+1}, \ldots, \bar{y}_{l'})\big) = \alpha'$ et la variété $a\big((x_1'', \ldots, x_{k''}'', y_1''', \ldots, y_{l'''}''', \bar{\bar{y}}_{l'''+1}, \ldots, \bar{\bar{y}}_{l''})\big) = \alpha''$. En extrayant de $(y_1''', \ldots, y_{l'''}''', \bar{y}_{l'''+1}, \ldots, \bar{y}_{l'}, \bar{\bar{y}}_{l'''+1}, \ldots, \bar{\bar{y}}_{l''})$ l'ensemble des

[17] Cf. le renvoi [16].

éléments indépendants pour obtenir la variété $a_{kl} = \alpha' \frown \alpha''$, nous aurons l'inégalité $l \leqslant l''' + (l'-l''') + (l''-l''')$, c'est-à-dire $l + l''' \leqslant l' + l''$. On peut écrire cette inégalité sous la forme $(m-k) + (m-k''') \leqslant (m-k') + (m-k'')$ d'où

$$(2) \qquad k + k''' \geqslant k' + k''.$$

L'égalité (*) résulte directement des inégalités (1) et (2).

Ayant supposé que $p = 0$ et $q = 0$, le treillis V est (en vertu des théorèmes 4.6 et 4.5, 3°) un treillis métrique[18], c'est-à-dire un treillis tel qu'il existe une fonction numérique $v(\alpha)$ déterminée pour tout le treillis V et vérifiant les conditions suivantes:

$$(1) \qquad v(\alpha) + v(\alpha') = v(\alpha \smile \alpha') + v(\alpha \frown \alpha'),$$

$$(2) \qquad \alpha < \alpha' \quad \text{implique} \quad v(\alpha) < v(\alpha').$$

Dans le cas général le treillis V n'est pas métrique, mais on pourrait l'appeler par analogie *treillis métrique affaibli*.

Les théorèmes de la théorie $\mathcal{G}_0(m, p, q)$ considérés dans ce paragraphe sont des théorèmes vérifiés dans tous les modèles de cette théorie assujettis aux conditions C_1 et C_2; ce sont donc des théorèmes communs à toutes les géométries: projective, affine, de Möbius et de Laguerre[19]. Les notions auxquelles se rapportent ces théorèmes sont, outre les notions primitives (dont l'interprétation dans les géométries particulières est donnée au § 2), celles de variété, d'inclusion des variétés et de leur module. Toutes ces notions ont de simples interprétations dans tous les modèles décrits au § 2.

Nous ne nous occuperons pas ici du rôle de ces théorèmes dans les géométries particulières, mais il est à remarquer que dans toutes ces géométries les treillis d'une certaine nature — ceux que nous avons appelés *treillis métriques affaiblis* — jouent un rôle important.

Le rôle des treillis dans les géométries projective et affine est connu depuis longtemps[20]. Les treillis formés par des sphères (telles que $V(n+2, 2, 0)$ — treillis dans la géométrie de Möbius) sont décrits dans [7] et [3].

Il est intéressant de noter que la géométrie de Lie satisfait aussi à tous les théorèmes de ce paragraphe. Cela suggère un nouveau problème:

[18] Cf. [1] p. 74-76 et [4] p. 68-69.

[19] Le modèle $\mathcal{G}_5$ — la géométrie de Lie — satisfait aussi à ces théorèmes, mais nous avons exclu ce cas de nos considérations. (Pour rendre possibles les démonstrations, nous avons admis les hypothèses supplémentaires C_1 et C_2, et C_2 n'est pas vérifiée pour la géométrie de Lie).

[20] Cf. [1] et [4].

Problème 4. *Peut-on démontrer les théorèmes de ce paragraphe sans admettre les conditions supplémentaires* C_1 *et* C_2 *obligeant à rejeter le modèle* $\mathcal{G}_5$ *(et bornant les paramètres p et q)? Si c'est impossible, quels changements faut-il introduire dans la théorie* $\mathcal{G}_0$ *pour que les théorèmes de ce paragraphe puissent être démontrés même dans le cas où* $X = Y$ *et dans le cas où p et q surpassent 2?*

§ 5. Les géométries projective et affine. La dualité et sa généralisation. Dans les considérations relatives aux géométries projective et affine nous pouvons nous appuyer sur tous les théorèmes du paragraphe précédent, car ces géométries (c'est-à-dire les modèles $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$) remplissent les conditions C_1 et C_2 qui y ont été admises.

Nous considérerons maintenant la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 0, 0)$. D'abord, il convient de remarquer que cette théorie n'a que deux axiomes (au lieu de trois), car l'axiome A_0, dans le cas où $p = q = 0$, résulte des définitions 1.1 et 1.2. (Il affirme que l'ensemble vide 0 remplit la condition $0 \mathrm{s} 0$).

Comme nous l'avons déjà remarqué, les variétés forment dans le cas $p = q = 0$ un treillis métrique et (d'après le théorème 3.16) de longueur finie — c'est-à-dire tel que chaque suite ascendante de variétés est une suite finie dont le nombre d'éléments ne surpasse pas un nombre fixe. Nous introduisons ici pour des variétés particulières une terminologie conforme à leur sens géométrique dans le modèle $\mathcal{G}_1$, c'est-à-dire dans la géométrie projective.

Définition 5.1.

1° Toute variété a_{1n} est dite *point*.

2° Toute variété $a_{2,n-1}$ est dite *droite* ou *plan à une dimension*.

3° Toute variété $a_{k+1,n-k}$ où $1 < k < n-1$ est dite *plan à k dimensions*.

4° Toute variété a_{n1} est dite *hyperplan* ou *plan à* $n-1$ *dimensions*.

5° La variété universelle $(a_{n+1,0})$ est dite *espace*.

Dans ce paragraphe nous omettrons souvent le deuxième indice des variétés, c'est-à-dire nous écrirons a_k au lieu de $a_{k,n+1-k}$.

Conformément à la terminologie admise dans la définition 5.1 nous pouvons introduire la notion de dimension:

Définition 5.2. Nous appelons *dimension* de la variété a_{kl} le nombre $k-1$, c'est-à-dire $\mathrm{mod}\, a-1$, et nous le désignons par $\dim a_{kl}$.

Définition 5.3. Si $a \leqslant a'$, on peut dire non seulement *a' contient a*, ou *a est contenu dans a'*, mais aussi, conformément à la définition 5.1 *a est situé sur a'* ou *a' passe par a*, ou enfin *a est situé dans a'*.

En s'appuyant sur la théorie des treillis, on peut facilement démontrer

Théorème 5.1. *Le treillis* $V(n+1, 0, 0)$ *est un treillis projectif, ou la géométrie projective au sens employé dans* [4][21].

Démonstration. Nous nous appuyerons sur quelques théorèmes de la théorie des treillis, que nous admettons ici sans démonstrations:

1) *Un treillis est une géométrie projective si et seulement s'il est un treillis de longueur finie, modulaire et complémenté*[22].

2) *Un treillis métrique est modulaire et a fortiori semi-modulaire*[23].

3) *Si dans un treillis semi-modulaire de longueur finie l'élément universel est l'union d'un nombre fini de points, ce treillis est complémenté*[24].

Tenant compte de ce que le treillis $V(n+1, 0, 0)$ est métrique et de longueur finie, il suffit de démontrer que $a_{n+1,0}$ est l'union des points. Il en est ainsi, car d'après le théorème 4.2

$$a_{n+1,0} = a\big((x_1, \ldots, x_{n+1})\big) = a_{1n}^{(1)} \cup a_{1n}^{(2)} \cup \ldots \cup a_{1n}^{(n+1)}$$
$$\text{où} \quad a_{1n}^{(i)} = a\big((x_i, y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})\big).$$

En s'appuyant sur la théorie des treillis géométriques, développée dans [4], on peut facilement démontrer que le treillis appelé „géométrie projective irréductible" satisfait à tous les axiomes d'incidence de la géométrie projective comprise au sens classique de ce mot. Le treillis appelé „géométrie projective" les vérifie presque tous, sauf une partie de l'axiome disant que sur chaque droite il y a au moins trois points (dite *condition de Fano*).

En ne développant pas la théorie des treillis géométriques, nous démontrerons ici que le treillis $V(n+1, 0, 0)$ vérifie bien tous les axiomes d'incidence (excepté la condition de Fano) de la géométrie projective classique[25].

Il sera d'abord commode de démontrer le théorème suivant:

Théorème 5.2. *Pour tout nombre naturel k qui ne surpasse pas n, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *On ne peut mener aucun plan à* $k-1$ *dimensions par* $k+1$ *points* $a_1^{(i)} = a\big((x_i, y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})\big)$ *(où* $i = 1, 2, \ldots, k, k+1$*).*

(2) $I(x_1, \ldots, x_{k+1})$. (3) $\dim(a_1^{(1)} \cup a_1^{(2)} \cup \ldots \cup a_1^{(k+1)}) = k$.

(21) La définition de la géométrie projective donnée dans [4], p. 282, diffère de celle donnée par G. Birkhoff [1], p. 116. Dans [4] on rejette une condition imposée par Birkhoff, dite *condition de Fano*. Un treillis remplissant de plus cette condition est appelé dans [4] *géométrie projective irréductible* (p. 296).

(22) Cf. [4], p. 283 (corollaire 1).

(23) Cf. [4], p. 69 (théorème 2) et p. 84 (définition de treillis semi-modulaire).

(24) Cf. [1], p. 105 (théorème 6).

(25) Nous omettons la deuxième partie de l'axiome classique: „Dans chaque plan à k dimensions il existe $k+1$ points distincts. Pour $k = 1$ il en existe même trois (au lieu de deux)."

Démonstration. a) La condition (1) implique (2). Supposons que la condition (1) soit remplie, mais que la condition (2) ne le soit pas, c'est-à-dire $D(x_1, \ldots, x_{k+1})$. D'après le théorème 3.1, il existe un ensemble $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ extrait de $(x_1, \ldots, x_{k+1})$, tel que $s \leqslant k$, $I(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ et que chaque x_j dépend de $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$. En le complétant en vertu de l'axiome A_2, nous obtiendrons le simplexe $S_{kl} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, x'_{s+1}, \ldots, x'_k, y_1, \ldots, y_{n+1-k})$. On voit immédiatement que l'existence de la variété $a_{kl} = a(S_{kl})$ est en contradiction avec la condition (1).

b) La condition (2) implique (3). Pour le démontrer, il suffit de s'appuyer plusieurs fois sur le théorème 4.2.

c) La condition (3) implique (1). Dans le cas contraire, la condition (3) impliquerait l'existence de la variété $a_{k+1} = a_1^{(1)} \cup a_1^{(2)} \cup \ldots \cup a_1^{(k+1)}$, et la négation de la condition (1) entraînerait l'existence d'une variété a'_k telle que $a_{k+1} \leqslant a'_k$, ce qui est en contradiction avec le théorème 3.10.

Nous prouverons maintenant les théorèmes 5.3-5.8. Ces théorèmes forment le système d'axiomes d'incidence de la géométrie projective où la condition de Fano a été rejetée (dans le théorème 5.4).

Théorème 5.3. *Pour tout nombre naturel k satisfaisant à l'inégalité $1 \leqslant k \leqslant n-1$, il existe $k+2$ points qui ne sont pas situés dans un plan à k dimensions.*

Démonstration. De l'axiome A_2 résulte l'existence d'un ensemble $(x_1, \ldots, x_{k+2})$ tel que $(x_1, \ldots, x_{k+2})$ s 0, donc (puisque dans le théorème 5.2 la condition (2) implique la condition (1)) on voit que par les points $a_1^{(i)} = a\big((x_i, y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})\big)$ (où $i = 1, 2, \ldots, k+1$) il ne passe aucun plan à k dimensions. (L'existence de ces points est assurée par l'axiome A_2).

Théorème 5.4. *Le nombre naturel k satisfaisant à l'inégalité $1 \leqslant k \leqslant n-1$, il existe $k+1$ points distincts sur chaque plan à k dimensions.*

Démonstration. On voit aussitôt que dans chaque plan $a_{k+1} = a\big((x_1, \ldots, x_{k+1}, y_1, \ldots, y_{n-k})\big)$ il y a $k+1$ points distincts $a_1^{(i)} = a\big((x_i, y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})\big)$, dont l'existence est assurée par l'axiome A_2.

Théorème 5.5. *Si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on peut mener un plan à k dimensions par $k+1$ points quelconques $a_1^{(i)} = a\big((x_i, y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})\big)$.*

Démonstration. Considérons les points $a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(k+1)}$ et le point $a_1^{(1)}$. Évidemment la condition $I(x_1, \ldots, x_{k+1}, x_1)$ n'est pas remplie, car x_1 dépend de $(x_1, \ldots, x_{k+1})$. Or, d'après le théorème 5.2, il existe un plan à k dimensions passant par les points $a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(k+1)}, a_1^{(1)}$.

Théorème 5.6. a) *Par deux points distincts il ne passe qu'une droite.*

b) *Le nombre k satisfaisant à l'inégalité $2 \leqslant k \leqslant n-1$, par $k+1$ points quelconques qui ne sont pas situés dans un plan à $k-1$ dimensions on ne peut mener qu'un plan à k dimensions.*

Démonstration. a) Supposons, au contraire, qu'il y ait deux droites distinctes a'_2 et a''_2 passant par les deux points distincts a'_1 et a''_1. L'intersection $a'_2 \cap a''_2 = a_k$ vérifie évidemment l'inclusion $a'_1 \leqslant a_k \leqslant a'_2$ d'où $1 \leqslant k \leqslant 2$. La première des deux possibilités: $k = 1$, implique, en vertu du théorème 3.11 et en tenant compte des inclusions $a'_1 \leqslant a_1$ et $a''_1 \leqslant a_1$, que $a'_1 = a_1 = a''_1$, ce qui est en contradiction avec l'inégalité $a'_1 \neq a''_1$. La deuxième possibilité: $k = 2$, implique, en vertu des inclusions $a_2 \leqslant a'_2$ et $a_2 \leqslant a''_2$ (d'après le théorème 3.11), que $a'_2 = a_2 = a''_2$, ce qui est en contradiction avec l'inégalité $a'_2 \neq a''_2$.

b) On conclut de l'hypothèse (d'après le théorème 5.2) que $a_1^{(1)} \cup a_1^{(2)} \cup \cup \ldots \cup a_1^{(k+1)} = a_{k+1}$. Il en résulte que chaque plan a'_{k+1} contenant $a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(k+1)}$ contient aussi a_{k+1}, d'où, en vertu du théorème 3.11, on a $a'_{k+1} = a_{k+1}$.

Théorème 5.7. *Pour que $a_{k+1} \leqslant a_l$ il suffit qu'il existe $k+1$ points $a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(k+1)}$, situés en même temps dans a_{k+1} et dans a_l, qui ne soient contenus dans aucun plan à $k-1$ dimensions.*

Démonstration. Le théorème est vrai puisque, comme on peut facilement le vérifier, on a $a_{k+1} = a_1^{(1)} \cup \ldots \cup a_1^{(k+1)} \leqslant a_l$.

Théorème 5.8. *Si $k' + k'' - n = k > 0$, quels que soient $a'_{k'+1}$ et $a''_{k''+1}$, il existe un plan a_{k+1} tel que $a_{k+1} \leqslant a'_{k'+1}$ et $a_{k+1} \leqslant a''_{k''+1}$.*

Démonstration. Du théorème 3.14 résulte que $a'_{k'+1} \cup a''_{k''+1} \leqslant a_{n+1}$, donc $\operatorname{mod}(a' \cup a'') \leqslant n+1$. On en conclut, en vertu du théorème 4.6, que $\operatorname{mod}(a' \cap a'') = (k'+1) + (k''+1) - \operatorname{mod}(a' \cup a'') \geqslant k' + k'' + 1 - n$, c'est-à-dire $\operatorname{mod}(a' \cap a'') \geqslant k+1$. Or, on peut aisément démontrer l'existence d'un plan a_{k+1} situé dans le plan $a' \cap a''$.

En démontrant les théorèmes 5.3-5.8, nous avons prouvé que les axiomes d'incidence de la géométrie projective (sauf la condition de Fano [26]) résultent des axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 0, 0)$.

Nous pouvons donc considérer les axiomes $A_1(n+1)$ et $A_2(n+1, 0, 0)$ comme le système d'axiomes d'incidence de la géométrie projective (la condition de Fano en étant écartée).

Nous avons dit dans l'introduction que les axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 0, 0)$ forment un système *ipso-dual*. Nous préciserons maintenant le sens de ce terme.

Un théorème de la théorie $\mathcal{G}_0$ étant énoncé sans faire usage des notions définies, on peut y remplacer partout l'ensemble X par Y et inversement Y par X, en y remplaçant en même temps la relation $\sim$ par la

---

[26] Pour prouver que la condition de Fano ne résulte pas de nos axiomes, il suffit de considérer le modèle $\mathfrak{M}_{n+1}$ décrit dans le § 7. Ce modèle satisfait aux axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 0, 0)$, mais il ne satisfait pas à la condition de Fano.

relation inverse ($\sim^{-1}$). On obtiendra ainsi un nouveau théorème — appelé théorème *dual* du précédent.

On dit qu'une théorie est *ipso-duale* par rapport aux couples de notions $\langle X, Y\rangle$ et $\langle \sim, \sim^{-1}\rangle$, si pour chaque théorème de cette théorie, le théorème dual est aussi vrai. Le système d'axiomes d'une théorie est dit *ipso-dual* si et seulement si tous les théorèmes duals aux axiomes appartiennent aussi à ce système d'axiomes.

Il est évident que si le système d'axiomes d'une théorie est ipso-dual, la théorie même est aussi ipso-duale, mais non inversement. On en conclut que la théorie $\mathcal{G}_0(m, s, s)$ est ipso-duale (car dans ce cas son système d'axiomes est ipso-dual).

Étant donné une théorie ipso-duale, on peut toujours former son système d'axiomes ipso-dual, en ajoutant au système d'axiomes les théorèmes duals; toutefois les axiomes ajoutés seront dépendants.

K. Menger a cherché un système ipso-dual d'axiomes indépendants d'incidence pour la géométrie projective. Il a trouvé deux solutions différentes de ce problème: l'une pour la géométrie plane et la seconde pour la géométrie à trois dimensions. M. Esser a généralisé ces résultats aux géométries projectives de toutes dimensions[27].

Il est évident que les axiomes $A_1(n+1)$ et $A_2(n+1, 0, 0)$ forment un système ipso-dual d'axiomes d'incidence (excepté la condition de Fano) commun aux géométries projectives de toutes dimensions.

Il est à remarquer que la condition de Fano résulte des axiomes de Menger, mais elle ne résulte pas des systèmes d'Esser ainsi que du nôtre.

La théorie $\mathcal{G}_0(m, s, s)$ est ipso-duale même par rapport à chaque couple de variétés $\langle \alpha_{kl}, \alpha_{lk}\rangle$ et au couple de relations $\langle \leqslant, \geqslant\rangle$. En particulier, la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 0, 0)$ est ipso-duale par rapport aux couples de notions $\langle$point, hyperplan$\rangle$, $\langle$plan à k dimensions, plan à $n-k-1$ dimensions$\rangle$ pour $k = 1, \ldots, n-2$ et $\langle \alpha$ est situé sur α', α' passe par $\alpha\rangle$.

Considérons maintenant la géométrie affine à n dimensions, qui est un modèle de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 1, 0)$. On peut vérifier que tous les axiomes d'incidence[28] de cette géométrie résultent des axiomes $A_0(n+1, 1, 0)$, $A_1(n+1)$ et $A_2(n+1, 1, 0)$. On peut donc considérer $A_0(n+1, 1, 0)$, $A_1(n+1)$ et $A_2(n+1, 1, 0)$ comme le système d'axiomes d'incidence de la géométrie affine à n dimensions.

Evidemment ce système n'est pas ipso-dual par rapport aux couples $\langle X, Y\rangle$ et $\langle \sim, \sim^{-1}\rangle$, car $p \neq q$. D'ailleurs ceci est impossible, car la géométrie affine n'est pas ipso-duale.

[27] On trouvera ces solutions dans [9], [10] et [6].

[28] Cf. [5], p. 281-282.

On voit pourtant que toute théorie $\mathcal{G}_0$ est ipso-duale par rapport aux couples $\langle X, Y\rangle$, $\langle \sim, \sim^{-1}\rangle$ et $\langle p, q\rangle$. Dans ce sens, on peut dire que notre système d'axiomes d'incidence de la géométrie affine (A_0, A_1, A_2) est ipso-dual. Pour obtenir le théorème dual à un théorème de cette théorie il faut non seulement remplacer X par Y, $\sim$ par $\sim^{-1}$ et vice versa, mais aussi le nombre $p = 1$ par $q = 0$ et $q = 0$ par $p = 1$.

§ 6. Les rapports entre différents modèles de la théorie $\mathcal{G}_0$. Dans ce paragraphe nous établirons quelques théorèmes généraux relatifs aux correspondances entre les différents modèles de la théorie $\mathcal{G}_0$. Le plus intéressant de ces théorèmes (6.1) ne se laisse démontrer qu'après avoir admis la condition supplémentaire C_2 — la même qu'au § 4:

CONDITION C_2. *X et Y sont disjoints.*

DÉFINITION 6.1.a On dit que la théorie $\mathcal{G}_0$ est *régulière*[29] *par rapport à l'ensemble X*, si elle remplit l'axiome[30] supplémentaire:

AXIOME A_{3a}. *La condition $D(x_1, \ldots, x_k)$ implique l'existence de deux nombres j parmi $1, 2, \ldots, k$, tels que pour chacun d'eux x_j dépend de $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$.*

DÉFINITION 6.1b. On dit que la théorie $\mathcal{G}_0$ est *régulière par rapport à l'ensemble Y*, si elle vérifie l'axiome supplémentaire:

AXIOME A_{3b}. *La condition $D(y_1, \ldots, y_k)$ implique l'existence de deux nombres j parmi $1, 2, \ldots, k$, tels que pour chacun d'eux y_j dépend de $(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_k)$.*

DÉFINITION 6.2. Si la théorie $\mathcal{G}_0$ est régulière en même temps par rapport à X et à Y, on dit brièvement qu'elle est *régulière*.

Parmi les géométries considérées au § 2, les seules régulières sont les géométries projective, affine et de Möbius. Les géométries de Laguerre et de Lie ne sont régulières ni par rapport à X, ni par rapport à Y.

Nous prouverons maintenant un théorème relatif aux modèles des théories régulières par rapport à X.

THÉORÈME 6.1a. *Soit $\mathfrak{M} = \langle X, Y, \sim\rangle$ un modèle de la théorie $\mathcal{G}_0$ (m, p, q) régulière par rapport à l'ensemble X, vérifiant C_2[31] et telle que*

[29] Le terme *régulière* est introduit pour indiquer que dans ce cas l'ensemble X est homogène dans un certain sens de ce mot. Au contraire, si un modèle n'est pas régulier (ne satisfait pas à l'axiome A_{3a}), comme par exemple le modèle $\mathfrak{M}_k^X$ décrit dans le paragraphe suivant, il y a dans ce modèle des éléments x ayant différentes propriétés.

[30] L'indépendance de cet axiome sera démontrée au § 7.

[31] La condition C_2 ne restreint pas beaucoup d'utilité de ce théorème, car l'unique exemple géométrique ne vérifiant pas cette condition — la géométrie de Lie — n'est pas une théorie régulière par rapport à X.

$p>0$. *Nous distinguerons dans ce modèle, parmi les éléments satisfaisant à l'axiome* A_0, *un élément* x_0 *et nous désignerons par* Y' *l'ensemble de tous les éléments* (y) *assujettis à la condition* $x_0 \sim y$. *Alors le nouveau modèle* $\mathfrak{M}' = \langle X, Y', \sim \rangle$ *est un modèle de la théorie* $\mathcal{G}_0(m-1, p-1, q)$.

Démonstration. La démonstration consiste à prouver que les ensembles X et Y' satisfont à tous les axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(m-1, p-1, q)$. Un coup d'oeil sur la forme de ces axiomes laisse voir qu'il suffit dans ce but de prouver que la condition $(x_0, x_1, \ldots, x_k)\,\mathrm{s}\,(y_1, \ldots, y_l)$, vérifiée par les éléments $x_0, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ dans le modèle $\mathfrak{M}$, est équivalente à la condition $(x_1, \ldots, x_k)\,\mathrm{s}\,(y_1, \ldots, y_l)$ vérifiée par les éléments $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ dans le modèle $\mathfrak{M}'$. Considérant les conditions particulières de la définition 1.2, on voit que les conditions (2) et (3) sont équivalentes dans tous les deux modèles — en vertu de la définition de $\mathfrak{M}'$ et la condition (4) — en vertu de C_2.

Il suffit donc de prouver l'équivalence de la condition (1) dans ces deux modèles, c'est-à-dire de démontrer que la condition $I(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ remplie dans $\mathfrak{M}$ est équivalente à la condition $I(x_1, \ldots, x_k)$ remplie dans $\mathfrak{M}'$.

En effet: 1) La condition $I(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ implique que pour chaque x_i (où $i = 1, \ldots, k$) il existe un y_i tel que $x_0 \sim y_i$ et $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) \sim y_i$ mais $x_i \nsim y_i$. Donc, nous avons $I(x_1, \ldots, x_k)$ dans le modèle $\mathfrak{M}'$.

2) Au contraire, la condition $D(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ implique en vertu de l'axiome A_{3a} l'existence de x_i (où $i \neq 0$), dépendant de $(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)$. Donc, pour chaque $y \in Y'$ la condition $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) \sim y$ implique $x_i \sim y$ et $(x_1, \ldots, x_k)$ sont alors dépendants dans le modèle $\mathfrak{M}'$.

Évidemment le théorème dual à 6.1a est aussi vrai et sa démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

Théorème 6.1b. *Soit* $\mathfrak{M} = \langle X, Y, \sim \rangle$ *un modèle de la théorie* $\mathcal{G}_0(m, p, q)$ *régulière par rapport à l'ensemble* Y, *vérifiant* C_2 *et telle que* $q > 0$. *Nous distinguerons dans ce modèle, parmi les éléments vérifiant l'axiome* A_0, *un élément* y_0 *et nous désignerons par* X' *l'ensemble de tous les éléments* (x) *assujettis à la condition* $x \sim y_0$. *Alors le nouveau modèle* $\mathfrak{M}' = \langle X', Y, \sim \rangle$ *est un modèle de la théorie* $\mathcal{G}_0(m-1, p, q-1)$.

Nous considérerons quelques conséquences du théorème 6.1a, en tenant compte du fait que les géométries $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_3$ (du § 2) sont des modèles de la théorie $\mathcal{G}_0$ régulière par rapport à l'ensemble X.

Exemple 1. Si nous prenons pour $\mathfrak{M}$ la géométrie affine à n dimensions (qui est un modèle de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 1, 0)$ régulière par rapport à l'ensemble X), en prenant pour Y' l'ensemble des hyperplans passant par un point fixé x_0, nous obtiendrons un modèle $\mathfrak{M}'$ de la théorie $\mathcal{G}_0(n, 0, 0)$.

Remarque 1. On peut facilement vérifier que le modèle $\mathfrak{M}'$ satisfait non seulement aux axiomes d'incidence de la géométrie projective à $n-1$ dimensions (ce qui résulte du théorème 6.1a), mais aussi à tous les autres axiomes de cette géométrie[32].

Exemple 2. Si nous prenons pour $\mathfrak{M}$ la géométrie de Möbius à n dimensions (un des modèles de $\mathcal{G}_0(n+2, 2, 0)$), en prenant pour Y' l'ensemble des hyperplans et des surfaces sphériques passant par un point fixé x_0, nous obtiendrons un modèle $\mathfrak{M}'$ de la théorie $\mathcal{G}_0(n+1, 1, 0)$.

Remarque 2. On peut facilement vérifier que le modèle $\mathfrak{M}'$ satisfait non seulement aux axiomes d'incidence de la géométrie affine à n dimensions (comme modèle de $\mathcal{G}_0(n+1, 1, 0)$), mais aussi à tous les autres axiomes de cette géométrie.

Les théories $\mathcal{G}_0(n+1, 1, 0)$, ainsi que $\mathcal{G}_0(n+2, 2, 0)$ — ont (comme théories non-catégoriques) de nombreux modèles dont un seul est la géométrie convenable ($\mathcal{G}_2$ ou $\mathcal{G}_3$). Il convient donc d'étudier de plus près le fait, signalé dans les remarques 1 et 2, que si nous prenons pour modèle $\mathfrak{M}$ une géométrie, nous obtenons un nouveau modèle $\mathfrak{M}'$ — qui est aussi une géométrie (et non pas un autre modèle de la théorie $\mathcal{G}_0(m-1, p-1, q)$). Ce fait suggère que les modèles géométriques diffèrent par un trait caractéristique de tous les autres modèles de la théorie $\mathcal{G}_0$.

Cela laisse supposer qu'il existe d'autres axiomes (outre A_0, A_1 et A_2) communs à toutes les géométries considérées, et respectés dans le modèle $\mathfrak{M}'$ s'il sont vérifiés dans le modèle $\mathfrak{M}$. Cette observation nous a encouragé à poser dans l'introduction le problème 3.

Le deuxième fait indiquant l'existence de propriétés communes aux modèles géométriques, est celui que les théorèmes 6.1a et 6.1b, appliqués aux modèles $\mathcal{G}_4$ et $\mathcal{G}_5$, donnent les résultats prévus bien que les axiomes de régularité ne soient pas vérifiés[33].

Les modèles obtenus $\mathfrak{M}'$ sont aussi des géométries. Par exemple:

Appliquant deux fois le théorème 6.1b à la géométrie de Laguerre à n dimensions (modèle de $\mathcal{G}_0(n+2, 1, 2)$), nous obtiendrons la géométrie affine à $n-1$ dimensions (modèle de $\mathcal{G}_0(n, 1, 0)$).

Appliquant le théorème 6.1a à la géométrie de Lie à n dimensions (modèle de $\mathcal{G}_0(n+3, 2, 2)$) nous obtiendrons la géométrie de Laguerre à n dimensions (modèle de $\mathcal{G}_0(n+2, 1, 2)$).

On peut poser la question suivante:

Problème 5. *Comment faut-il changer les axiomes de la théorie* $\mathcal{G}_0$ *pour qu'il soit possible de démontrer un théorème pareil à 6.1 et valable pour tous les modèles géométriques?*

[32] Il ne faut pas oublier que ce sont les variétés qui jouent ici le rôle des points, des droites et des plans de différentes dimensions.

[33] Le modèle $\mathcal{G}_5$ (géométrie de Lie) ne satisfait pas à la condition C_2 non plus.

On peut formuler d'autres théorèmes pour comparer les modèles de la théorie $\mathcal{G}_0(m, p, q)$ pour différentes valeurs des paramètres. Par exemple, les théorèmes suivants sont évidents:

THÉORÈME 6.2. *Si* $\mathfrak{M} = \langle X, Y, \sim\rangle$ *est un modèle de la théorie* $\mathcal{G}_0(m, p, q)$, $\mathfrak{M}' = \langle Y, X, \sim^{-1}\rangle$ *est un modèle de la théorie* $\mathcal{G}_0(m, q, p)$.

THÉORÈME 6.3. *Chaque modèle de la théorie* $\mathcal{G}_0(m, p, q)$ *est aussi un modèle de la théorie* $\mathcal{G}_0(m, p', q')$, *où* $p' \geqslant p$ *et* $q' \geqslant q$.

Dans le cas où $p = q$, le principe de dualité est une conséquence directe du théorème 6.2.

Il nous semble que la recherche d'autres théorèmes analogues sera plus utile quand on aura résolu le problème 3.

§ 7. L'indépendance des axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0$. Nous démontrerons maintenant que pour toutes les valeurs possibles des paramètres m, p, q, sauf pour $p = q = 0$, les axiomes de la théorie $\mathcal{G}_0(m, p, q)$ — même si elle est régulière — sont indépendants. Dans ce but nous introduisons une suite de modèles: $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ Tous ces modèles sont finis et ils sont déterminés dans le tableau 1 par l'énumération des éléments des ensembles X et Y et des incidences entre les éléments particuliers.

TABLEAU 1

modèle	X	Y [34]	incidence
$\mathfrak{M}_0$	vide	vide	
$\mathfrak{M}_1$	(x_1)	(y_1)	$x_1 \nsim y_1$
$\mathfrak{M}_2$	(x_1, x_2)	(y_1, y_2)	$x_i \sim y_j$ pour $i \neq j$ et $x_i \nsim y_j$ pour $i = j$
$\mathfrak{M}_3$	(x_1, x_2, x_3)	(y_1, y_2, y_3)	,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,
. . . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$\mathfrak{M}_k$	$(x_1, \ldots, x_k)$	$(y_1, \ldots, y_k)$	,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,
. . . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Ces modèles satisfont aux axiomes $A_0(m, p, q)$-$A_3(m, p, q)$ pour différentes valeurs des paramètres m, p, q. Nous indiquons dans le tableau 2 les conditions que doivent vérifier les paramètres des axiomes particuliers pour que ces axiomes soient vérifiés dans les différents modèles $\mathfrak{M}_k$.

[34] Pour X et Y nous prenons des ensembles disjoints.

Nous indiquerons maintenant les modèles démontrant l'indépendance des axiomes particuliers:

$A_0(m, p, q)$ (où $p+q > 0$) — modèle $\mathfrak{M}_0$ [35].

$A_1(m)$ — modèle $\mathfrak{M}_{m+1}$.

$A_2(m, p, q)$ — modèle $\mathfrak{M}_{m-1}$.

TABLEAU 2

modèle	A_0	A_1	A_2	A_{3a} et A_{3b}
$\mathfrak{M}_0$	$p+q \leqslant 0$	$m \geqslant 0$	$m \leqslant 0$ ou $p+q > 0$	toujours
$\mathfrak{M}_1$	$p+q \leqslant 1$	$m \geqslant 1$	$m \leqslant 1$ ou $p+q > 1$	,,
$\mathfrak{M}_2$	$p+q \leqslant 2$	$m \geqslant 2$	$m \leqslant 2$ ou $p+q > 2$	,,
. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .
$\mathfrak{M}_k$	$p+q \leqslant k$	$m \geqslant k$	$m \leqslant k$ ou $p+q > k$	,,
. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .

Nous désignerons par $\mathfrak{M}_k^X$ le nouveau modèle, obtenu de $\mathfrak{M}_k$ par l'addition d'un élément $x_0 \in X$, tel que pour chaque y on a $x_0 \sim y$. On voit immédiatement que x_0 dépend de chaque ensemble, même si celui-ci est vide.

De façon analogue nous formerons le modèle $\mathfrak{M}_k^Y$ à partir du modèle $\mathfrak{M}_k$, en ajoutant l'élément $y_0 \in Y$, assujetti à la condition $x \sim y_0$ pour tous les éléments $x \in X$.

Pour prouver l'indépendance des axiomes de régularité, nous emploierons les modèles suivants:

$A_{3a}(m, p, q)$ — modèle $\mathfrak{M}_m^X$.

$A_{3b}(m, p, q)$ — modèle $\mathfrak{M}_m^Y$.

Travaux cités

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York 1948.

[2] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie III (Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln)*, Berlin 1929.

[3] L. Dubikajtis, *La géométrie de Lie*, Rozprawy Matematyczne 15 (1958).

[4] M. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Paris 1953.

[5] Н. В. Ефимов, *Высшая геометрия*, Москва-Ленинград 1945.

[35] Dans le cas $p+q = 0$ cet axiome est dépendant, car il résulte des définitions.

[6] M. Esser, *Self-dual postulates for n-dimensional geometry*, Duke Math. Journ. 18 (1951), p. 475-479.

[7] Schin-ichi Izumi, *Lattice theoretic fundation of circle geometry*, Proc. Imp. Acad., Tokyo, 16 (1940), p. 515-517.

[8] K. Kuratowski i A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Warszawa 1952.

[9] K. Menger, *Independent self-dual postulates in projective geometry*, Reports of a Mathematical Colloquium, II series, 8 (1948), p. 81-87.

[10] — *The projective space*, Duke Mathematical Journal 17 (1950), p. 1-14.

[11] L. Dubikajtis, *On the incidence axioms of various geometries*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série sci. math., astr. et phys. 6 (1958), p. 423-427.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 24. 10. 1956

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
V. (1958)

Limitation of solutions of parabolic equations

by W. Mlak (Kraków)

We discuss some estimations concerning the solutions of parabolic equations. The epidermic theorems are used. In the second paragraph are given certain limitations for the increase of solutions with respect to the independent variables. As a rule we investigate non-linear equations.

§ 1. Suppose that G is an open and bounded set of points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ of the n-dimensional space E^n. Denote by Z the Cartesian product of G and of the interval $\Delta = (a, b\rangle$: $Z = G \times (a, b\rangle$; the boundary of G is denoted by $\mathrm{F}G$. Suppose that we are given the functions $F_s(x_1, \ldots, x_n, t, u_1, \ldots, u_m, p_1, \ldots, q_{nn})$ shortly written as $F_s(x, t, u, p_i, q_{ik})$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ and the functions $\sigma_s(t, u_1, \ldots, u_m)$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$. F_s is defined for $x \in G$, $t \in \Delta$ and arbitrary $u_1, \ldots, u_m, p_i, q_{ik}$; σ_s is defined for $t \in \langle a, b+\varepsilon)$ and arbitrary $u_1, \ldots, u_m$.

We say that the sequence of functions $u_1(x, t), \ldots, u_m(x, t)$ defined in $\bar{Z}$ is a *regular solution* of the system of equations

$$(1) \qquad \frac{\partial z_s}{\partial t} = F_s\left(x, t, z_1, \ldots, z_m, \frac{\partial z_s}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 z_s}{\partial x_i \partial x_k}\right) \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

if u_s are continuous in $\bar{Z}$, possess continuous derivatives $\partial u_s/\partial x_i, \partial^2 u_s/\partial x_i \partial x_k$ in the interior of Z and for (x, b), $x \in G$, and satisfy the system (1) for $(x, t) \in \mathrm{int}\, Z$.

Let us introduce the following conditions:

(2) if $\sum_{i,k=1}^{n} q_{ik}\lambda_i\lambda_k \leqslant 0$ for arbitrary $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, then

$$F_s(x, t, u_1, \ldots, u_m, 0, q_{ik}) \leqslant \sigma_s(t, u_1, \ldots, u_m) \qquad (s = 1, \ldots, m);$$

(3) the functions σ_s are continuous and satisfy the following condition:

(W) if $\bar{u}_i \leqslant \bar{\bar{u}}_i$ $(i \neq s)$, $\bar{u}_s = \bar{\bar{u}}_s$ then $\sigma_s(t, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m) \leqslant \sigma_s(t, \bar{\bar{u}}_1, \ldots, u_m)$; we assume that the right maximal integral $\omega_s(t; h_1, \ldots, h_m)$ of the system of ordinary differential equations

$$y_s' = \sigma_s(t, y_1, \ldots, y_m) \qquad (s = 1, \ldots, m)$$