ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIX (1974)

Sur un Théorème de Schwerdtfeger

par J. DIEUDONNÉ (Nice)

Résumé. H. Schwerdtfeger a prouvé le théorème suivant: soit $\mathfrak{X}(t)$ une matrice carrée d'ordre n dont les éléments sont fonctions analytiques d'une variable réelle t dans un intervalle I. On suppose que pour tout $t \in I$ les valeurs propres de $\mathfrak{X}(t)$ sont distinctes et que $\mathfrak{X}(t)\mathfrak{X}'(t) = \mathfrak{X}'(t)\mathfrak{X}(t)$ pour tout t; alors pour deux valeurs quelconques t_1, t_2 dans I, $\mathfrak{X}(t_1)$ et $\mathfrak{X}(t_2)$ sont permutables. Il est prouvé que ce théorème est encore valable lorsqu'on suppose seulement que les éléments de $\mathfrak{X}(t)$ sont continûment différentiables.

1. Soit $t \to \mathfrak{X}(t)$ une application d'un intervalle I de $\boldsymbol{R}$ dans l'espace des matrices carrées complexes d'ordre n. Supposons cette application dérivable, et telle que l'on ait

$$\mathfrak{X}(t)\mathfrak{X}'(t) = \mathfrak{X}'(t)\mathfrak{X}(t) \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{1}$$

H. Schwerdtfeger a prouvé[1] que si, pour $t \in I$, $\mathfrak{X}(t)$ a toutes ses valeurs propres distinctes, il existe une matrice inversible *constante* $\mathfrak{P}_0$ telle que $\mathfrak{X}(t) = \mathfrak{P}_0\mathfrak{D}(t)\mathfrak{P}_0^{-1}$, où $\mathfrak{D}(t)$ est une matrice diagonale; cela entraîne en particulier que $\mathfrak{X}(t_1)$ et $\mathfrak{X}(t_2)$ sont permutables pour deux valeurs quelconques t_1, t_2 de $t \in I$; il a aussi donné des exemples montrant que la conclusion est en défaut si les valeurs propres de $\mathfrak{X}(t)$ ne sont pas toutes distinctes. Toutefois, sa démonstration suppose la fonction $t \to \mathfrak{X}(t)$ *analytique* dans I; je me propose de faire voir, par une autre méthode, que cette restriction est superflue, et qu'il suffit de supposer $\mathfrak{X}$ *continûment différentiable.*

2. Soient $\lambda_1(t_1), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)$ les valeurs propres de $\mathfrak{X}(t)$. Comme elles sont toujours distinctes par hypothèse pour $t \in I$ et que I est simplement connexe, le théorème des fonctions implicites montre qu'il y a effectivement n fonctions continûment différentiables $t \to \lambda_k(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ dans I dont les valeurs, pour chaque t, sont les valeurs propres de $\mathfrak{X}(t)$: il suffit de remarquer que si $z^n + f_1(t)z^{n-1} + \ldots + f_n(t) = 0$ est l'équation caractéristique de $\mathfrak{X}(t)$, les points $(t, z) \in I \times C$ vérifiant cette relation forment

[1] H. Schwerdtfeger, *Sur les matrices permutables avec leur dérivée*, Univ. e Politecnico Turin, Rend. Sem. Mat. 11 (1952), p. 329.

un revêtement de I. Posons $\mathfrak{D}(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\big)$; les formules de Cramer montrent que pour tout $t_0 \in I$, il y a un voisinage V de t_0 et une matrice inversible $\mathfrak{P}(t)$, fonction continûment dérivable dans V, tels que dans V, on ait

$$\mathfrak{X}(t) = \mathfrak{P}(t)\mathfrak{D}(t)\mathfrak{P}(t)^{-1}. \tag{2}$$

3. Ecrivons alors la relation (1) en substituant à $\mathfrak{X}$ sa valeur tirée de (2). Comme $\mathfrak{X}' = \mathfrak{P}'\mathfrak{D}\mathfrak{P}^{-1} + \mathfrak{P}\mathfrak{D}'\mathfrak{P}^{-1} - \mathfrak{P}\mathfrak{D}\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$, on obtient, après multiplication à droite par $\mathfrak{P}$ et à gauche par $\mathfrak{P}^{-1}$, et en remarquant que $\mathfrak{D}'\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\mathfrak{D}'$,

$$\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}'\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{D}^2\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}' = 2\mathfrak{D}\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}'\mathfrak{D}$$

ou, en posant $\mathfrak{U} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}'$,

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{D}\mathfrak{U})\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{D}\mathfrak{U}).$$

Mais une matrice ne peut permuter avec $\mathfrak{D}$ que si elle est elle-même diagonale; et si l'on écrit que $\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{D}\mathfrak{U}$ est diagonale, on trouve aussitôt que $\mathfrak{U}$ elle-même doit être diagonale, en vertu du fait que les $\lambda_k(t)$ sont toutes distinctes (l'algèbre de Lie des matrices diagonales est sa propre normalisatrice dans l'algèbre de Lie des matrices d'ordre n). On en conclut que dans V, il y a n fonctions continûment dérivables $g_k(t)$ telles que, si l'on pose $\mathfrak{P}(t) = \big(p_{jk}(t)\big)$, on ait

$$p'_{jk}(t) = p_{jk}(t)g_k(t) \qquad \text{pour } 1 \leqslant j,\ k \leqslant n \tag{3}$$

et par suite, en posant $G_k(t) = \exp\big(\int g_k(t)\,dt\big)$,

$$p_{jk}(t) = c_{jk}G_k(t) \tag{4}$$

où c_{jk} est une constante, ce qui s'écrit aussi $\mathfrak{P}(t) = \mathfrak{C}\mathfrak{G}(t)$, où $\mathfrak{C} = (c_{jk})$ et $\mathfrak{G}(t) = \mathrm{diag}\big(G_1(t), \ldots, G_n(t)\big)$; mais alors on a $\mathfrak{X}(t) = \mathfrak{C}\mathfrak{D}(t)\mathfrak{C}^{-1}$ ($\mathfrak{C}$ étant nécessairement inversible puisque $\mathfrak{P}(t)$ l'est).

Il reste à remarquer que si V_1, V_2 sont deux intervalles ouverts de I d'intersection non vide, et si $\mathfrak{X} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{D}\mathfrak{P}_1^{-1}$ dans V_1, et $\mathfrak{X} = \mathfrak{P}_2\mathfrak{D}\mathfrak{P}_2^{-1}$ dans V_2, où $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ sont des matrices constantes, on a aussi $\mathfrak{X} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{D}\mathfrak{P}_1^{-1}$ dans V_2: en effet, si $t_0 \in V_1 \cap V_2$, $\mathfrak{P}_2^{-1}\mathfrak{P}_1$ doit permuter avec $\mathfrak{D}(t_0)$, donc est une matrice diagonale $\mathfrak{L}$; mais comme $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{D}(t)$ permutent pour tout t, cela établit notre assertion. On conclut en recouvrant I par des voisinages où une expression (2) de $\mathfrak{X}$ est valable.

Reçu par la Rédaction le 15. 3. 1973