ACTA ARITHMETICA
155.2 (2012)

Groupes de Galois résolubles et séries formelles

par

FRANÇOIS LAUBIE et DELPHINE POINGT (Limoges)

Dédié à Andrzej Schinzel

1. Introduction. Dans cet article tous les plongements et tous les automorphismes de corps valués que l'on considérera seront supposés continus.

Rappelons qu'une extension galoisienne d'un corps local à corps résiduel fini est *arithmétiquement profinie* (*APF*) si et seulement si ses sous-groupes de ramification en numérotation supérieure sont d'indice fini dans le groupe de Galois (cela permet de définir aussi la numérotation inférieure de la filtration de ramification de son groupe de Galois). Un groupe compact G d'automorphismes d'un corps local est dit *APF* si ses sous-groupes de ramification en numérotation inférieure G_i ($i \in \mathbb{N}$) sont d'indice fini et si $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(G_0:G_t)} = +\infty$, avec $G_t = G_{\lfloor t \rfloor+1}$ si $t \in [0,+\infty[\setminus \mathbb{N}$ (ce qui permet de définir aussi leur numérotation supérieure).

La théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger [W1] conduit à considérer les deux catégories $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{C}$ suivantes :

La catégorie $\mathfrak{L}$. • Un objet de $\mathfrak{L}$ est la donnée d'un corps local K et d'une extension galoisienne, APF, infinie de K.

• Un morphisme $\tau \in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{L}}(L/K, L'/K')$ est un plongement de L dans L' tel que $L'/\tau(L)$ et $K'/\tau(K)$ soient des extensions séparables finies.

La catégorie $\mathfrak{C}$. • Un objet de $\mathfrak{C}$ est la donnée d'un corps local X de caractéristique p et d'un sous-groupe compact G du groupe des automorphismes (continus) de X.

• Un morphisme $\tau \in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{C}}((X,G),(X',G'))$ est un plongement de X dans X' tel que l'extension $X'/\tau(X)$ soit séparable finie, que la restriction $\mathrm{res}_{\tau(X)}$ de X' à $\tau(X)$ applique les éléments de G' sur des automorphismes de $\tau(X)$ et que $\tau^{-1}(\mathrm{res}_{\tau(X)}(G'))\tau$ soit un sous-groupe ouvert de G.

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11S15; Secondary 11S20.
Key words and phrases: local field, ramification, solvable extensions.

DOI: 10.4064/aa155-2-2

À un objet L/K de $\mathfrak{L}$, on associe son corps des normes $X_K(L)$. À un morphisme τ de L/K dans L'/K', on associe le plongement continu $X_K(\tau)$ de $X_K(L)$ dans $X_{K'}(L')$, qui, pour toute extension finie E'/K' telle que $E'\tau(L) = L'$, applique sur la projection $x'_{E'}$ de l'élément $x' = \tau(x) \in X_{K'}(L')$, la projection $x_{\tau^{-1}(E')}$ de $x \in X_K(L)$ sur $\tau^{-1}(E')$. Un élément du groupe de Galois de L/K est un automorphisme de l'objet L/K de $\mathfrak{L}$ et $X_K(\mathrm{Gal}(L/K))$ s'identifie à un sous-groupe compact de $\mathrm{Aut}(X_K(L))$. On pose $\mathfrak{X}(L/K) = (X_K(L), X_K(\mathrm{Gal}(L/K)))$ et $\mathfrak{X}(\tau) = X_K(\tau)$ pour tout morphisme τ de L/K dans L'/K'. Cela définit un foncteur $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{C}$ [W1].

On sait que le foncteur $\mathfrak{X}$ induit des équivalences de catégories entre certaines sous-catégories de $\mathfrak{L}$ et certaines sous-catégories de $\mathfrak{C}$ et chacune de ces équivalences de catégories fournit des théorèmes arithmétiques. C'est ainsi que l'on montre que les groupes compacts de $\mathbb{F}_q$-automorphismes des corps de séries formelles $\mathbb{F}_q((T))$ qui sont des groupes de Lie p-adiques résolubles, peuvent être réalisés comme des groupes de Galois d'extensions de corps locaux de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ en respectant leurs filtrations de ramification ([L, théorème 1.5.3]). Le but de cet article est de généraliser ce résultat aux groupes compacts de $\mathbb{F}_q$-automorphismes des corps de séries formelles $\mathbb{F}_q((T))$ qui sont résolubles et non nécéssairement topologiquement de type fini, c'est-à-dire n'admettant pas nécessairement de sous-groupe dense de type fini.

Il en résultera que les groupes compacts de $\mathbb{F}_q$-automorphismes des corps de séries formelles $\mathbb{F}_q((T))$ qui sont résolubles (c'est-à-dire les sous-groupes fermés résolubles du groupe de Nottingham [C]) sont arithmétiquement profinis et peuvent être réalisés comme des groupes de Galois d'extensions de corps locaux de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ en respectant leurs filtrations de ramification. Autrement dit :

Proposition 1.1. *Si G est un sous-groupe fermé résoluble du groupe des $\mathbb{F}_q$-automorphismes continus du corps $\mathbb{F}_q((t))$, il est APF et il existe une extension galoisienne APF L d'un corps local K, à corps résiduel $\mathbb{F}_q$, et un isomorphisme de G sur* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *qui pour tout $i \in \mathbb{N}$ applique le sous-groupe de ramification G_i de G sur le sous-groupe de ramification* $\mathrm{Gal}(L/K)_i$ *de* $\mathrm{Gal}(L/K)$.

2. Une généralisation d'un théorème de Keating. Dorénavant k est le corps fini à $q = p^f$ éléments.

La sous-catégorie $\mathfrak{L}_k$ de $\mathfrak{L}$. • Un objet de $\mathfrak{L}_k$ est la donnée d'un corps local K de corps résiduel k et d'une extension galoisienne, APF, infinie et totalement ramifiée de K.

• Les morphismes $\in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{L}_k}(L/K, L'/K')$ sont parmi les morphismes $\in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{L}}(L/K, L'/K')$ ceux qui induisent l'identité sur le corps résiduel k.

La sous-catégorie $\mathfrak{C}_k$ *de* $\mathfrak{C}$. • Un objet de $\mathfrak{C}$ est la donnée d'un corps local X de caractéristique p et de corps résiduel k et d'un sous-groupe compact, infini G du groupe $\mathrm{Aut}_k(X)$ des k-automorphismes de X.

• Les morphismes $\in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{C}_k}((X,G),(X',G'))$ sont parmi les morphismes $\in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{C}}((X,G),(X',G'))$ ceux qui induisent l'identité sur le corps résiduel k.

Le foncteur $\mathfrak{X}$ induit par restriction un foncteur de $\mathfrak{L}_k$ dans $\mathfrak{C}_k$ encore noté $\mathfrak{X}$ [W1].

Théorème 2.1 (K. Keating [Ke]). *Soit* $\mathfrak{L}_{k,\mathrm{ab}}$ (*resp.* $\mathfrak{C}_{k,\mathrm{ab}}$) *la sous-catégorie pleine de* $\mathfrak{L}_k$ (*resp. de* $\mathfrak{C}_k$) *dont les objets sont les objets de* $\mathfrak{L}_k$ (*resp. les objets* (X,G) *de* $\mathfrak{C}_k$) *qui sont des extensions abéliennes* (*resp. avec* G *abélien*). *La restriction du foncteur* $\mathfrak{X}$ *à* $\mathfrak{L}_{k,\mathrm{ab}}$ *est une équivalence de catégories sur* $\mathfrak{C}_{k,\mathrm{ab}}$.

On note $\mathfrak{L}_k^{\sim}$ (resp. $\mathfrak{C}_k^{\sim}$) la sous-catégorie de $\mathfrak{L}_k$ (resp. $\mathfrak{C}_k$) dont les objets sont ceux de $\mathfrak{L}_k$ (resp. $\mathfrak{C}_k$) et dont les morphismes sont les isomorphismes de $\mathfrak{L}_k$ (resp. $\mathfrak{C}_k$).

On dit qu'un groupe profini G est *résoluble de classe* $n \geq 1$ si $G_n \neq (1)$ et $[G_n, G_n] = (1)$ où, pour tout $m \geq 1$, $G_m = [G_{m-1}, G_{m-1}]$ est le sous-groupe fermé de G_{m-1} engendré par les commutateurs et où $G_0 = G$. Il faut faire la distinction entre les extensions galoisiennes résolubles, c'est-à-dire dont le groupe de Galois est résoluble, et les extensions galoisiennes pro-résolubles, c'est-à-dire dont toutes les sous-extensions galoisiennes finies sont résolubles (c'est le cas des extensions galoisiennes des corps locaux à corps résiduels finis).

Soit $\mathfrak{L}_{k,\mathrm{res}}^{\sim}$ (resp. $\mathfrak{C}_{k,\mathrm{res}}^{\sim}$) la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{L}_k^{\sim}$ (resp. de $\mathfrak{C}_k^{\sim}$) dont les objets sont les objets de $\mathfrak{L}_k$ (resp. les objets (X,G) de $\mathfrak{C}_k$) qui sont des extensions résolubles (resp. avec G résoluble). Il est clair que le foncteur $\mathfrak{X}$ induit par restriction un foncteur de $\mathfrak{L}_{k,\mathrm{res}}^{\sim}$ dans $\mathfrak{C}_{k,\mathrm{res}}^{\sim}$.

On se propose d'établir le résultat suivant :

Théorème 2.2. *La restriction du foncteur* $\mathfrak{X}$ *à* $\mathfrak{L}_{k,\mathrm{res}}^{\sim}$ *est une équivalence de catégories sur* $\mathfrak{C}_{k,\mathrm{res}}^{\sim}$.

3. Extensions des corps de normes. L'outil principal dans la démonstration du théorème 2.2 est la propriété de transitivité des corps de normes que nous rappelons ci-dessous.

Soit L/K un objet de $\mathfrak{L}$ et soit M une extension finie de L galoisienne sur K. Alors M/K est un objet de $\mathfrak{L}$ et l'inclusion de L dans M induit un morphisme canonique de $X_K(L)$ dans $X_K(M)$.

Soit N une extension de L galoisienne sur K et soit $X_{L/K}(N)$ la limite inductive des $X_K(M)$, M parcourant l'ensemble des extensions finies de L galoisiennes sur K et contenues dans N.

Alors $X_{L/K}$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des extensions séparables de L pour les L-plongements et la catégorie des extensions séparables de $X_K(L)$ pour les $X_K(L)$-plongements ([W1, théorème 3.2.2]).

Soit K_{sep} une clôture séparable de L. Alors $X_{L/K}(K_{\text{sep}})$ est une clôture séparable de $X_K(L)$ et $\mathrm{Gal}(K_{\text{sep}}/K)$ s'identifie au groupe des automorphismes de $X_{L/K}(K_{\text{sep}})$ qui laissent stable $X_K(L)$ et qui induisent sur $X_K(L)$ un automorphisme qui est dans l'image de $\mathrm{Gal}(L/K)$ ([W1, section 3.2]).

Soit $N \subset K_{\text{sep}}$ une extension galoisienne de K contenant L. L'extension N/K est APF si et seulement si $X_{L/K}(N)/X_K(L)$ l'est et, dans ce cas, $X_K(N)$ s'identifie à $X_{X_K(L)}(X_{L/K}(N))$ ([W1, proposition 3.4.1]). En particulier, les extensions galoisiennes, résolubles, totalement ramifiées des corps locaux à corps résiduel fini sont APF.

Le lemme suivant en résulte aussi clairement :

Lemme 3.1. *Soit (X, G) un objet de $\mathfrak{C}$, soit H un sous-groupe fini distingué de G (de sorte que G/H s'identifie à un groupe d'automorphismes de X^H). Supposons qu'il existe un objet L/K de $\mathfrak{L}$ tel que $\mathfrak{X}(L/K) = (X^H, G/H)$. Alors, dans une clôture séparable fixée de L, il existe une et une seule extension M/L telle que l'extension M/K soit galoisienne et que l'objet $\mathfrak{X}(M/K)$ de $\mathfrak{C}$ soit isomorphe à (X, G).*

Lemme 3.2. *Soit $\mathfrak{L}_1$ une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{L}_k^{\sim}$. On suppose que $\mathfrak{X}$ induise un foncteur pleinement fidèle de $\mathfrak{L}_1$ dans $\mathfrak{C}_k^{\sim}$. Soit (X, G) un objet de $\mathfrak{C}_k$, soit H un sous-groupe ouvert distingué de G. Supposons qu'il existe un objet L/K de $\mathfrak{L}_1$ tel que $\mathfrak{X}(L/K) = (X, H)$. Alors G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{Aut}_{\mathfrak{L}}(L/K)$ et $\mathfrak{X}(L/L^G) = (X, G)$.*

Démonstration. Comme H est distingué dans G, G est un sous-groupe de $\mathfrak{Aut}_{\mathfrak{C}_k}((X, H))$ et, à cause de la pleine fidélité de $\mathfrak{X}$, il s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{Aut}_{\mathfrak{L}_k}(L/K)$ et $L^G = K^{G/H}$ est un sous-corps de K tel que $[K : L^G] < \infty$; enfin $\mathfrak{X}(L/L^G) = (X, G)$ parce que $X_{L^G}(L) = X_K(L) = X$. ∎

4. Le foncteur $\mathfrak{X}$ est fidèle. Il s'agit d'un résultat probablement connu, démontré par J.-P. Wintenberger dans plusieurs situations dans lesquelles il est possible d'exhiber un foncteur quasi-inverse (voir [W1], [W2], [W3]). La démonstration de la fidélité de la restriction du foncteur $\mathfrak{X}$ à la catégorie $\mathfrak{L}_{k,ab}$ a été récemment donnée par K. Keating dans [Ke]. Mais n'ayant pas trouvé de démonstration de la fidélité de $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{C}$ en toute généralité, nous proposons la suivante.

Soient L/K et L'/K' deux objets de $\mathfrak{L}$; soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{L}}(L/K, L'/K')$ tels que $\mathfrak{X}(\sigma) = \mathfrak{X}(\tau)$. Rappelons que $\mathfrak{X}(\tau)$ associe à $(x_E)_{E \in \mathcal{E}(L/K)} \in X_K(L)$ un morphisme $(x'_{E'})_{E' \in \mathcal{E}(L'/K')} \in X_{K'}(L')$ tel que $x'_{E'} = \tau(x_{\tau^{-1}E'})$ pour tout $E' \in \mathcal{E}(L'/K')$ tel que $E'\tau(L) = L'$; bien sûr, $\tau^{-1}E'$ désigne $\tau^{-1}(E' \cap \tau(L))$.

Soit M' le sous-corps de K' engendré par $(K' \cap \tau(L)) \cup (K' \cap \sigma(L))$; c'est aussi un sous-corps de $\tau(L)\sigma(L)$. Soit N une extension galoisienne finie de K contenant à la fois la sous-extension maximale totalement ramifiée de $L/\tau^{-1}(M')$ et la sous-extension maximale totalement ramifiée de $L/\sigma^{-1}(M')$. Soit $(x_E)_{E\in\mathcal{E}(L/N)} \in X_N(L) = X_K(L)$. Comme $\mathfrak{X}(\sigma) = \mathfrak{X}(\tau)$, pour tout $E \in \mathcal{E}(L/N)$, on a $\tau(x_E) = \sigma(x_E)$. Si $(x_E)_{E\in\mathcal{E}(L/N)}$ est une uniformisante de $X_K(L)$, alors pour tout $E \in \mathcal{E}(L/N)$, x_E est une uniformisante de E, $\tau(x_E)$ est une uniformisante de $\tau(E)$, et $\sigma(x_E)$ de $\sigma(E)$. De même, si $(x_E)_{E\in\mathcal{E}(L/N)}$ engendre un système de représentants multiplicatifs de X, il en est de même de x_E dans E, de $\tau(x_E)$ dans $\tau(E)$ et de $\sigma(x_E)$ dans $\sigma(E)$, pour tout $E \in \mathcal{E}(L/N)$. Les sous-corps $\sigma(E)$ et $\tau(E)$ de L' sont des corps locaux admettant une uniformisante et un système de représentants multiplicatifs commun, donc ils coïncident et τ et σ coïncident sur E, pour tout $E \in \mathcal{E}(L/N)$, donc sur L. ∎

5. Démonstration du théorème 2.2. Dans la suite, $\mathfrak{L}_1$ désigne une sous-catégorie de $\mathfrak{L}_k$ admettant les mêmes isomorphismes que $\mathfrak{L}_k$.

LEMME 5.1. *On suppose que $\mathfrak{X}$ induise un foncteur pleinement fidèle de $\mathfrak{L}_1$ dans $\mathfrak{C}_k$. Soit (X, G) un objet de $\mathfrak{C}_k$, soit H un sous-groupe fermé, non ouvert, distingué de G tel que (X, H) soit un objet de $\mathfrak{C}_k$ et qu'il existe un objet F/E de $\mathfrak{L}_1$ tel que $\mathfrak{X}(F/E) = (X, H)$. On suppose que, pour tout sous-groupe fermé J de* $\mathrm{Aut}_k(X)$ *isomorphe à G/H, (X, J) soit dans l'image essentielle de $\mathfrak{X}$. Alors (X, G) est dans l'image essentielle de $\mathfrak{X}$.*

Démonstration. Soit F/E un objet de $\mathfrak{L}_1$ tel que $\mathfrak{X}(F/E) = (X, H)$. Comme H est distingué dans G, G est un sous-groupe de $\mathfrak{Aut}_{\mathfrak{C}_k}((X, H))$ et, à cause de la pleine fidélité de $\mathfrak{X}$, il s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{Aut}_{\mathfrak{L}_1}(F/E)$, de sorte que G/H s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{Aut}(E)$; G/H étant infini, E est un corps local de caractéristique p. L'extension F/E est totalement ramifiée et $(E, G/H)$ s'identifie à un objet (X, J) où J est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}_0(X)$. Soit alors M/K un objet de $\mathfrak{L}$ tel que $\mathfrak{X}(M/K) = (E, G/H)$. Il existe une extension galoisienne L de M et un E-isomorphisme de corps de $X_{M/K}(L)$ sur F ([W1, théorème 3.2.2]). Montrons que L/K est galoisienne. Soit $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-groupes ouverts, normaux de G telle que $\bigcap_i G_i = (1)$; on note $H_i = H \cap G_i$. Pour tout i, G/H_i s'identifie à un groupe d'automorphismes de $X_K(L^{H_i})$, H/H_i à un sous-groupe fini normal de G/H_i de corps des invariants E, donc, d'après le lemme 3.1, L^{H_i} est galoisienne sur K de groupe de Galois isomorphe à G/H_i, L/K est galoisienne de groupe de Galois isomorphe à G et $X_K(L)$ s'identifie à $X_{X_K(M)}(X_{M/K}(L)) \simeq X_E(F) \simeq X$ ([W1, proposition 3.4.1]). Donc $\mathfrak{X}(L/K) \approx (X, G)$. ∎

Soit $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$ (resp. $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$) la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}}$ (resp. de $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}}$) dont les objets sont les extensions résolubles de classe $\leq d$ (resp. dont les objets sont les couples (X, G) où G est un groupe résoluble de classe $\leq d$). Il s'agit de démontrer que $\mathfrak{X}$ induit une équivalence de catégories entre $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$ et $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$ pour tout entier $d \geq 1$. Raisonnons par récurrence sur d.

Pour $d = 1$ c'est le théorème de Keating [Ke].

Soit $d \geq 2$ et supposons que $\mathfrak{X}$ induise une équivalence de catégories entre $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^{d-1}}$ et $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^{d-1}}$. Le foncteur $\mathfrak{X}$ étant fidèle de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{C}$, il induit par restriction un foncteur fidèle de $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$ dans $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$. Montrons qu'il est essentiellement surjectif.

Soit (X, G) un objet de $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$ et soit $G' = [G, G]$ le sous-groupe fermé de G engendré par ses commutateurs. Alors (X, G') est un objet de $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^{d-1}}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un objet F/E de $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^{d-1}}$ tel que $\mathfrak{X}(F/E) = (X, G')$. D'après le lemme 3.2 si G' est ouvert dans G, et d'après le lemme 5.1 sinon, il existe un objet L/K de $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$ tel que $\mathfrak{X}(L/K) = (X, G)$.

Il ne reste plus qu'à montrer que le foncteur $\mathfrak{X}$ est pleinement fidèle de $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$ dans $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$. Soient (X_1, G_1) et (X_2, G_2) deux objets de $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$. Il existe des objets L_1/K_1 et L_2/K_2 de $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^d}$ tels que $\mathfrak{X}(L_1/K_1) = (X_1, G_1)$ et $\mathfrak{X}(L_2/K_2) = (X_2, G_2)$. Soit $\tau \in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{C}^{\sim}_k}((X_1, G_1), (X_2, G_2))$. Il faut montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{L}^{\sim}_k}(L_1/K_1, L_2/K_2)$ tel que $\mathfrak{X}(\sigma) = \tau$. En voici une démonstration dans le cas où l'indice de G'_1 dans G_1 (et donc aussi de G'_2 dans G_2) n'est pas fini ; le cas contraire se traite pareil.

Soient, pour $\iota = 1$ ou 2, $G'_\iota = [G_\iota, G_\iota]$, $M_\iota = L_\iota^{G'_\iota}$, $E_\iota = X_{K_\iota}(M_\iota)$ et $F_\iota = X_{M_\iota/K_\iota}(L_\iota)$. Alors $\mathfrak{X}(F_\iota/E_\iota)$ s' identifie à l'objet (X_ι, G'_ι) de $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^{d-1}}$. L'isomorphisme τ induit par conjugaison un isomorphisme de groupes τ^* de G_2 sur G_1 dont la restriction à G'_2 est un isomorphisme sur G'_1. Donc $(X_1, G'_1) \approx (X_2, G'_2)$ et, par l'hypothèse de récurrence, il existe un morphisme ρ de la catégorie $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^{d-1}}$ de l'objet F_1/E_1 dans l'objet F_2/E_2 tel que $\mathfrak{X}(\rho) = \tau$; c'est un isomorphisme de corps de F_1 sur F_2 tel que $\rho(E_1) = E_2$.

Comme G'_ι est un sous-groupe normal de G_ι, G_ι s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{Aut}_{\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^{d-1}}}((X_\iota, G'_\iota))$. Comme τ^* induit naturellement un isomorphisme de groupes de G_2/G'_2 sur G_1/G'_1, ρ induit un isomorphisme entre les objets $(E_1, G_1/G'_1)$ et $(E_2, G_2/G'_2)$ de la catégorie $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^1} = \mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{ab}}$.

Comme $\mathfrak{X}(M_\iota/K_\iota) \approx (E_\iota, G_\iota/G'_\iota)$, il existe $\bar{\sigma} \in \mathfrak{Mor}_{\mathfrak{L}^{\sim}_k}(M_1/K_1, M_2/K_2)$ tel que $\mathfrak{X}(\bar{\sigma}) = \rho|_{E_1}$ (théorème 2.1). Il existe une extension galoisienne L_ι de M_ι et un E_ι-isomorphisme de corps de $X_{M_\iota/K_\iota}(L_\iota)$ sur F ([W1, théorème 3.2.2]). Comme dans la démonstration du lemme 5.1, on voit que L_ι est une extension galoisienne de K_ι. Donc $\bar{\sigma}$ se prolonge en des isomorphismes de corps de L_1 sur L_2 qui induisent des isomorphismes de $\mathfrak{L}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^{d-1}}$ de L_1/M_1 sur L_2/M_2. Par l'hypothèse de récurrence, l'un d'eux σ est tel que $\mathfrak{X}(\sigma)$ coïncide avec τ en tant qu'isomorphisme de (X_1, G'_1) sur (X_2, G'_2) dans $\mathfrak{C}^{\sim}_{k,\mathrm{res}^{d-1}}$, donc $\mathfrak{X}(\sigma) = \tau$. ∎

6. Ramification. Soit G un sous-groupe fermé résoluble de classe d du groupe des $\mathbb{F}_q$-automor-phismes continus du corps $\mathbb{F}_q((t))$. D'après la proposition 1.1 qui est une conséquence évidente du théorème 2.2, il est APF et il existe une extension galoisienne APF L d'un corps local K, à corps résiduel $\mathbb{F}_q$, et un isomorphisme de G sur $\mathrm{Gal}(L/K)$ qui, pour tout $i \in \mathbb{N}$, applique le sous-groupe de ramification G_i de G sur le sous-groupe de ramification $\mathrm{Gal}(L/K)_i$ de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

On peut donc définir sa fonction de Herbrand ψ_G comme la bijection réciproque de $\phi_G(x) = \int_0^x \frac{dt}{(G:G_t)}$ sur $[0, +\infty[$, puis sa filtration de ramification en numérotation supérieure : $G^u = G_{\psi_G(u)}$ de sorte que $\psi_G(x) = \int_0^x (G^0 : G^t)\, dt$.

Un *saut* de ramification supérieur de G est un saut de la filtration (G^u) ; c'est un nombre rationnel u tel que $\forall \varepsilon > 0, G^{u+\varepsilon} \subsetneq G^u$. Il est bien connu que si G est abélien ($d = 1$) alors les sauts sont entiers (théorème de Hasse–Arf).

Proposition 6.1. *Soit b un saut de ramification supérieur du groupe des $\mathbb{F}_q$-automorphismes (ou du groupe de Galois totalement ramifié) G résoluble de classe d. Pour tout nombre premier $l \neq p$, on a*

$$v_l(b) + (d-1)v_l(q-1) \geq 0$$

où v_l désigne la valuation l-adique.

Démonstration. Rappelons que la fonction de Herbrand $\psi_{E/K}$ d'une extension APF non nécessairement galoisienne (voir par exemple [W1]) E/K est définie par $\psi_{E/K}(x) = \int_0^x (\mathcal{G}^0 : H^0\mathcal{G}^u)\, du$ où $\mathcal{G}$ est le groupe de Galois sur K de n'importe quelle extension galoisienne N de K qui contient E et où $H = \mathrm{Gal}(N/E)$; on a les formules de transitivité $\psi_{E/K} = \psi_{E/F} \circ \psi_{F/K}$ pour $K \subset F \subset E$; comme $\psi_{F/K}$ est strictement croissante, la formule des dérivées à droite $\psi'_{E/K} = \psi'_{E/F} \circ \psi_{F/K} \cdot \psi'_{F/K}$ montre que si $\psi_{F/K}$ n'est pas dérivable en x alors $\psi_{E/K}$ non plus.

Soit U le groupe des unités de K. Soit

$$\psi(x) = \int_0^x (U : U^t)\, dt = q - 1 + q(q-1) + \cdots + q^{\lfloor x \rfloor}(q-1)(x - \lfloor x \rfloor)$$

la fonction de Herbrand d'une extension abélienne totalement ramifiée maximale de K. C'est une bijection croissante, convexe, linéaire par morceaux de $[0, +\infty[$ sur lui-même.

Soit

$$\phi(x) = m + \frac{1}{q^m(q-1)}(x - (q^m - 1))$$

pour $q^m - 1 \leq x < q^{m+1} - 1$ sa bijection réciproque, soit $\psi_d = \psi \circ \cdots \circ \psi$ sa d-ième itérée et soit ϕ_d la bijection réciproque de ψ_d. Si a et b sont des entiers naturels premiers entre eux alors le dénominateur du nombre rationnel $\phi(a/b)$ divise $q^m(q-1)b$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des points singuliers de ψ (resp. de ϕ) c'est-à-dire l'ensemble des points de discontinuité de la dérivée ψ' (resp. ϕ'), est $\mathbb{N}^*$ (resp. $\psi(\mathbb{N}^*) = \{q^n - 1\}_{n \in \mathbb{N}^*}$). Par récurrence sur d, l'ensemble des points singuliers de ψ_d est $\phi_{d-1}(\mathbb{N}^*)$ car $\psi'_d = \psi' \circ \psi_{d-1} \cdot \psi'_{d-1}$ avec $\phi_{d-2}(\mathbb{N}^*) \subset \phi_{d-1}(\mathbb{N}^*)$. Donc, encore par récurrence sur d, les dénominateurs des $x \in \mathbb{Q}$ en lesquels ψ_d n'est pas dérivable divisent $q^m(q-1)^{d-1}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit : les dénominateurs δ des points singuliers de ψ_d vérifient $v_l(\delta) \leq (d-1)v_l(q-1)$ pour tout nombre premier $l \neq p$, où v_l désigne la valuation l-adique.

Il reste à montrer que toute extension résoluble de classe d et totalement ramifiée L/K est contenue dans une extension totalement ramifiée APF de K dont la fonction de Herbrand est ψ_d. Soit $K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{d-1} \subset K_d = L$ la tour des sous-extensions abéliennes maximales de L/K, c'est-à-dire K_{i+1} est l'extension abélienne maximale de K_i contenue dans L. Soit K_{sep} (resp. L_{nr}) une clôture séparable de K contenant L (resp. l'extension non ramifiée maximale de L contenue dans K_{sep}) et soit φ un relèvement dans $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{sep}}/K)$ d'un générateur du groupe de Galois de L_{nr}/L. Pour tout sous-corps E de K_{sep}, on note E^{ab} la clôture abélienne de E contenue dans K_{sep}. On construit par récurrence une tour d'extensions abéliennes totalement ramifiée : M_1 est le sous-corps maximal de K^{ab} fixé par φ et, pour $i = 1, \ldots, d-1$, M_{i+1} est le sous-corps maximal de M_i^{ab} fixé par φ ; il est clair que $M_i \supset K_i$.

Par récurrence sur $i = 1, \ldots, d$, les extensions M_i/K sont APF ; en effet, si M_{i-1}/K est APF, alors comme l'extension $X_{M_{i-1}/K}(M_i)/X_K(M_{i-1})$ l'est aussi, il en est de même de M_i/K ([W1, proposition 3.4.1]). Soit $\psi_{(1)} = \psi$ la fonction de Herbrand de M_1/K et soit, pour $i \geq 2$, $\psi_{(i)}$ la fonction de Herbrand de l'extension $X_{M_{i-1}/K}(M_i)/X_K(M_{i-1})$; comme le foncteur corps de normes respecte la ramification, on a $\psi_{(i)} = \phi_{M_{i-1}/K} \circ \psi_{M_i/K}$ et comme $X_{M_{i-1}/K}(M_i)$ est une extension abélienne maximale totalement ramifiée de $X_K(M_{i-1}) \simeq \mathbb{F}_q((t))$, on a $\psi_{(i)} = \psi$ et donc $\psi_{M_d/K}$ est la d-ième itérée ψ_d de ψ. Il en résulte que les sauts de ramification supérieurs de L/K sont des points singuliers de ψ_d. ∎

Remarque 6.2. Il serait intéressant de savoir si l'équivalence de catégories du théorème 2.2 s'étend à des catégories ayant davantage de morphismes.

Remarque 6.3. Cette remarque est une réponse du rapporteur anonyme à une question posée par les auteurs. Le théorème 2.2 implique que tout sous-groupe fermé G, résoluble de classe d de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q((t)))$ et maximal pour ces propriétés, est isomorphe, en tant que groupe filtré par sa ramification, au groupe de Galois d'une extension E maximale, totalement ramifiée, résoluble de classe d d'un corps local F de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. Comme l'a remarqué le référé, il résulte de travaux bien connus de Shafarevich [S] et de Kawada [Ka] que la caractéristique de F est nulle si et seulement si le groupe G est topologiquement de type fini.

Références

[C] C. Camina, *Subgroups of the Nottingham group*, J. Algebra 196 (1997), 101–113.

[Ka] Y. Kawada, *On the structure of the Galois group of some infinite extensions I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 7 (1954), 1–18.

[Ke] K. Keating, *Wintenberger's functor for abelian extensions*, J. Théor. Nombres Bordeaux 21 (2009) 665–678.

[L] F. Laubie, *Extensions de Lie et groupes d'automorphismes de corps locaux*, Compos. Math. 67 (1988), 165–189.

[S] I. R. Shafarevich, *On p-extensions*, Mat. Sbornik (N.S.) 20 (62) (1947), 351–363.

[W1] J.-P. Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 59–89.

[W2] J.-P. Wintenberger, *Extensions de Lie et groupes d'automorphismes des corps locaux de caractéristique p*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), 477–479.

[W3] J.-P. Wintenberger, *Extensions abéliennes et groupes d'automorphismes de corps locaux*, ibid. 290 (1980), 201–203.

François Laubie, Delphine Poingt
DMI, XLIM, UMR 6172
123, avenue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex, France
E-mail: laubie@unilim.fr
delphine.savary@etu.unilim.fr

Reçu le 7.7.2011
et révisé le 12.10.2011 (6757)