ACTA ARITHMETICA
102.4 (2002)

Sur la conjecture $\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y)$

par

Pierre Dusart (Limoges)

1. Introduction. La fonction arithmétique $\pi(x)$, qui compte les nombres premiers inférieurs ou égaux à x, est une fonction importante en théorie des nombres :

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Dans cet article, nous étudions pour quels couples x, y la fonction π dispose de la propriété de sous-additivité, c'est-à-dire :

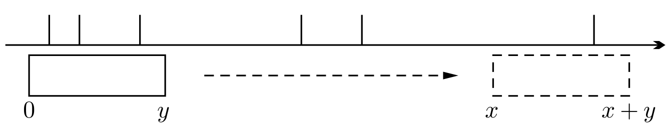
$$\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y). \tag{1}$$

On remarque que x ou $y = 1$ ne peuvent convenir puisque si on prend $y = 1$ et $x = p-1$ où p est un nombre premier différent de 3, on a $\pi(x+y) = \pi(p)$ et $\pi(x)+\pi(y) = \pi(p-1)+\pi(1) = \pi(p)-1$. L'inégalité (1), supposée valide pour x, y entiers plus grands que 2, est une conjecture bien connue émise par Hardy et Littlewood en 1923 appelée *seconde conjecture de Hardy–Littlewood* [10].

Conjecture 1. *Pour x, y entiers tels que $x \geq 2$ et $y \geq 2$, on a*

$$\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y).$$

En fait, la conjecture suppose qu'il n'y a pas d'intervalle $]x, x+y]$ de longueur y qui contienne plus de nombres premiers que l'intervalle $]0, y]$.



Cela est concevable car, en vertu du théorème des nombres premiers, la densité des nombres premiers décroît puisque $\pi(x)/x \sim 1/\ln x$.

Que connaissons-nous sur l'inégalité (1) ?

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11N05.

• Landau [7] a prouvé en 1901 que $\pi(2x) < 2\pi(x)$ pour x assez grand. En précisant cette idée, Rosser et Schoenfeld ont montré que $\pi(2x) \le 2\pi(x)$ pour x réel ≥ 3. Par suite, on trouve que l'inégalité (1) est vraie dans le cas particulier où $y = x$, en vérifiant aussi que $\pi(4) \le 2\pi(2)$.

• Schinzel et Sierpiński [15] ont montré en 1958 que (1) est vraie pour x ou $y \le 132$ et Schinzel [14] l'a étendu jusqu'à 146.

• Segal [16] a montré en 1962 que (1) est vraie pour $x + y \le 101081$.

• Karanikolov [6] a montré que

$$\pi((1+\varepsilon)x) < (1+\varepsilon)\pi(x) \quad \text{pour } \varepsilon \ge \sqrt{e} - 1 \text{ et } x \ge 347.$$

• Udrescu [17] a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tous $x, y \ge 17$ avec $x + y \ge 1 + \exp(4(1 + 1/\varepsilon))$,

$$\pi(x+y) < (1+\varepsilon)(\pi(x) + \pi(y)).$$

La conjecture est donc "ε-exacte" pour $x + y$ assez grand.

Nous nous proposons de montrer que 99% des couples (x, y) d'entiers vérifient (1) et mieux, qu'il en est de même pour presque tout couple (x, y).

Pour cela, nous nous proposons d'étudier une inégalité légèrement plus forte que celle utilisée par Udrescu : pour quelles valeurs de x et ε avons nous

$$\pi((1+\varepsilon)x) \le \pi(x) + \pi(\varepsilon x) \ ?$$

Théorème 1. *Pour tout x et tout y tels que $2 \le x \le y \le \frac{7}{5} x \ln x \ln_2 x$, on a*

$$\pi(x+y) \le \pi(x) + \pi(y).$$

Nous allons découper la démonstration en deux parties, d'une part pour $109 \le y/x \le \frac{7}{5} \ln x \ln_2 x$ (Proposition 1) et d'autre part pour $1 \le y/x \le 109$ (Proposition 3).

2. Utilisation des encadrements de $\pi(x)$. Posons $\ln_2 x := \ln\ln x$ et

$$\pi(x;\alpha) := \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{\alpha}{\ln^2 x}\right).$$

Dans toute cette partie, nous prendrons $y \ge x$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Prenons les formules d'encadrement de $\pi(x)$ à l'ordre 2 proposées dans [1] ou [3]. Avec $d = 1.8$ et $c = 2.51$ et pour $x \ge 355991$, nous avons

$$\pi(x;d) := \pi(x;1.8) \le \pi(x) \le \pi(x;c) := \pi(x;2.51).$$

Soit $y = xg(x)$ où $g(x) \ge 1$. Posons

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta_{c,d}(x, g(x)) &:= \pi(x;d) + \pi(y;d) - \pi(x+y;c) \\ &= \pi(x;d) + \pi(xg(x);d) - \pi(x + xg(x);c) \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \frac{dx}{\ln^3 x} + \frac{xg(x)}{\ln(xg(x))} + \frac{xg(x)}{\ln^2(xg(x))} + \frac{dxg(x)}{\ln^3(xg(x))}$$
$$-\left[\frac{x+xg(x)}{\ln(x+xg(x))} + \frac{x+xg(x)}{\ln^2(x+xg(x))} + \frac{c(x+xg(x))}{\ln^3(x+xg(x))}\right].$$

Comme $1/(1+u) \leq 1-u+u^2$, on a

$$\frac{x+xg(x)}{\ln(x+xg(x))} = \frac{x}{\ln x}\cdot\frac{1}{1+\frac{\ln(1+g(x))}{\ln x}} + \frac{xg(x)}{\ln(xg(x))\big(1+\frac{\ln(1+1/g(x))}{\ln(xg(x))}\big)}$$
$$\leq \frac{x}{\ln x}\left(1-\frac{\ln(1+g(x))}{\ln x}+\frac{\ln^2(1+g(x))}{\ln^2 x}\right)$$
$$+\frac{xg(x)}{\ln(xg(x))}\left(1-\frac{\ln(1+1/g(x))}{\ln(xg(x))}+\frac{\ln^2(1+1/g(x))}{\ln^2(xg(x))}\right).$$

De plus, comme $1/(1+u)^2 \leq 1-2u+3u^2$, il vient

$$\frac{x+xg(x)}{\ln^2(x+xg(x))} = \frac{x}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{\big(1+\frac{\ln(1+g(x))}{\ln x}\big)^2} + \frac{xg(x)}{\ln^2(xg(x))\big(1+\frac{\ln(1+1/g(x))}{\ln(xg(x))}\big)^2}$$
$$\leq \frac{x}{\ln^2 x}\left(1-2\frac{\ln(1+g(x))}{\ln x}+3\frac{\ln^2(1+g(x))}{\ln^2 x}\right)$$
$$+\frac{xg(x)}{\ln^2(xg(x))}\left(1-2\frac{\ln(1+1/g(x))}{\ln(xg(x))}+3\frac{\ln^2(1+1/g(x))}{\ln^2(xg(x))}\right),$$

donc

$$\varDelta \geq \frac{dx}{\ln^3 x} + \frac{dxg(x)}{\ln^3(xg(x))} - \frac{c(x+xg(x))}{\ln^3(x+xg(x))} + \frac{x}{\ln^2 x}\ln(1+g(x))$$
$$-\frac{x}{\ln^3 x}\ln^2(1+g(x)) + \frac{xg(x)}{\ln^2(xg(x))}\ln(1+1/g(x))$$
$$-\frac{xg(x)}{\ln^3(xg(x))}\ln^2(1+1/g(x)) + \frac{2x}{\ln^3 x}\ln(1+g(x))$$
$$-\frac{3x}{\ln^4 x}\ln^2(1+g(x)) + \frac{2x}{\ln^3(xg(x))}g(x)\ln(1+1/g(x))$$
$$-\frac{3x}{\ln^4(xg(x))}g(x)\ln^2(1+1/g(x)).$$

Le terme dominant est

$$D := x\left(\frac{dg(x)}{\ln^3(xg(x))} - \frac{c(1+g(x))}{\ln^3(x+xg(x))} + \frac{\ln(1+g(x))}{\ln^2 x}\right).$$

Prenons $g(x) = o(x)$ et $g(x)$ tendant vers l'infini avec x. Alors, lorsque x

tend vers l'infini,

$$D \sim (d-c)\frac{g(x)}{\ln x} + \ln(g(x)).$$

Pour que Δ soit positif, il faut choisir g telle que

$$(d-c)\frac{g(x)}{\ln x} + \ln(g(x)) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$1 \leq g(x) \leq \frac{1}{c-d} \ln x \ln_2 x.$$

Prenons maintenant $g(x) = \frac{1}{c-d} \ln x \ln_2 x$ et montrons que $\Delta_{c,d}(x,g) \geq 0$ pour tout g tel que $109 \leq g \leq g(x)$.

Soit g un nombre réel compris entre 109 et $\frac{1}{c-d} \ln x \ln_2 x$. Posons

$$\begin{aligned}
A &:= \frac{dg}{\ln^3(xg)} - \frac{cg}{\ln^3(x+xg)} + \frac{\ln(1+g)}{\ln^2 x}, \\
B &:= -\frac{c}{\ln^3(x+xg)} + \frac{g\ln(1+1/g)}{\ln^2(xg)} + \frac{d}{\ln^3 x} \\
&\quad -\frac{g\ln^2(1+1/g)}{\ln^3(xg)} + \frac{2g\ln(1+1/g)}{\ln^3(xg)} - \frac{3g\ln^2(1+1/g)}{\ln^4(xg)}, \\
C &:= -\frac{\ln^2(1+g)}{\ln^3 x} - \frac{3\ln^2(1+g)}{\ln^4 x} + \frac{2\ln(1+g)}{\ln^3 x}.
\end{aligned}$$

Étudions le terme A. Comme $c \geq 0$ et $g \geq 1$,

$$A \geq \frac{1}{\ln^2(xg)}\left(\frac{(d-c)g}{\ln x} + \ln(1+g)\right).$$

Étudions la fonction $g \to \frac{(d-c)g}{\ln x} + \ln(1+g)$. La dérivée s'annule pour $g = \frac{\ln x}{c-d} - 1$. Cette fonction est donc croissante pour $g \in \left[109, \frac{\ln x}{c-d} - 1\right]$ et décroissante ensuite, donc le minimum de cette fonction dans l'intervalle $[109, g(x)]$ est égal au minimum de

$$\ln 110 + \frac{d-c}{\ln x} \quad \text{et de} \quad \ln\left(\frac{\ln_2 x}{c-d} + \frac{1}{\ln x}\right).$$

Étudions le terme B. Comme, pour $g > 0$,

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{2g^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{g},$$

on a

$$g\ln\left(1+\frac{1}{g}\right) \geq 1 - \frac{1}{2g} \quad \text{et} \quad g\ln^2\left(1+\frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{g}.$$

En utilisant les inégalités précédentes, on obtient

$$B\ln^3(xg) \ge -c + \left(1-\frac{1}{2g}\right)\ln(xg) + 2\left(1-\frac{1}{g}\right) - \frac{3}{g\ln(xg)},$$
$$B\ln^2(xg) \ge 1 - \frac{1}{2g} - \frac{c}{\ln x} - \frac{3}{\ln^2 x}.$$

Soit x_0 tel que $109 = \frac{7}{5}\ln x_0 \ln\ln x_0$ ($x_0 \simeq 0.4\cdot 10^{11}$). Prenons $x \ge x_0$. Comme $2 - \frac{3}{\ln x}\ln(1+g) > 0$,

$$C \ge -\frac{\ln^2(1+g)}{\ln^3 x}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{x} &\ge A+B+C\\ &\ge \frac{1}{\ln^2(xg)}\ln\left(\frac{\ln_2 x_0}{c-d}+\frac{1}{\ln x_0}\right) + \frac{-\ln^2(1+g)}{\ln^3 x}\\ &\quad + \frac{1}{\ln^2(xg)}\left(1-\frac{1}{2g}-\frac{c}{\ln x}-\frac{3}{\ln^2 x}\right)\\ &\ge 0 \quad \text{pour } x \ge x_0.\end{aligned}$$

Pour cette vérification, on choisit $g = \frac{1}{c-d}\ln x \ln_2 x$, puisque la dernière minoration est fonction décroissante en g.

Puisque $1/(c-d) \ge 7/5$, nous avons démontré :

Proposition 1. *Soit $x \ge 0.4\cdot 10^{11}$ et y tel que $109 \le \frac{y}{x} \le \frac{7}{5}\ln x \ln_2 x$. Alors on a*

$$\pi(x+y) \le \pi(x)+\pi(y).$$

3. Formulation équivalente de la conjecture avec les nombres premiers. Désignons par p_k le k-ième nombre premier.

3.1. *Nouvelle forme de la conjecture.* Segal [16] a montré que l'on pouvait écrire la seconde conjecture de Hardy–Littlewood sous la forme :

Conjecture 2. *Pour tous $k, l \ge 2$, on a*

$$p_k + p_l - 1 \le p_{k+l-1}.$$

Reprenons l'idée de Segal [16] en donnant un résultat qui agit "localement" et qui sera utilisable pour le découpage de zones considéré. Cette méthode a l'avantage de disposer d'un test direct sur les nombres premiers plus facile à mettre en œuvre que le calcul de $\pi(x)$.

Lemme 1. *Soient k et l deux entiers. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $p_k + p_l \le p_{k+l-1}$.

(ii) *Pour tout* x *appartenant à l'intervalle* $[p_{k-1}, p_k[$ *et pour tout* y *appartenant à* $[p_{l-1}, p_l[$,

$$\pi(x+y) \le \pi(x) + \pi(y).$$

Preuve. (i)⇒(ii). Nous avons $p_{k-1} \le x < p_k$ et $p_{l-1} \le y < p_l$. L'inégalité

(2) $$x + y < p_k + p_l$$

nous donne

(3) $$\pi(x+y) \le \pi(p_k + p_l - 1).$$

D'autre part,

$$\text{de} \quad p_{k-1} \le x, \quad \text{il vient} \quad \pi(p_{k-1}) \le \pi(x)\,;$$
$$\text{de} \quad p_{l-1} \le y, \quad \text{il vient} \quad \pi(p_{l-1}) \le \pi(y).$$

En sommant de chaque côté des inégalités, on obtient

$$\pi(p_{k-1}) + \pi(p_{l-1}) \le \pi(x) + \pi(y).$$

Or $\pi(p_{k-1}) + \pi(p_{l-1}) = k + l - 2 = \pi(p_{k+l-2})$ et ainsi

(4) $$\pi(p_{k+l-2}) \le \pi(x) + \pi(y).$$

Comme, par hypothèse, $p_k + p_l \le p_{k+l-1}$ alors $p_k + p_l - 1 \le p_{k+l-1} - 1$ et

$$\pi(p_k + p_l - 1) \le \pi(p_{k+l-1} - 1) = \pi(p_{k+l-2}).$$

En reprenant (3) et (4), il s'ensuit que

$$\pi(x+y) \le \pi(x) + \pi(y).$$

(ii)⇒(i). Prenons $x = p_k - 1/2$ et $y = p_l - 1/2$. Ainsi,

$$\pi(x) + \pi(y) = k + l - 2 \quad \text{et} \quad \pi(x+y) = \pi(p_k + p_l - 1).$$

Par hypothèse, $\pi(x+y) \le \pi(x) + \pi(y)$ et il vient $\pi(p_k + p_l - 1) \le k + l - 2$, c'est-à-dire $p_k + p_l - 1 \le p_{k+l-1} - 1$. ■

Enonçons un résultat voisin dans lequel x et y sont entiers.

LEMME 2. *Soient* k *et* l *deux entiers. Les deux assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) $p_k + p_l - 1 \le p_{k+l-1}$.

(ii) *Pour tout* x *entier appartenant à l'intervalle* $[p_{k-1}, p_k[$ *et pour tout* y *entier appartenant à* $[p_{l-1}, p_l[$,

$$\pi(x+y) \le \pi(x) + \pi(y).$$

3.2. *Utilisation des nombres premiers.* Nous utilisons trois inégalités sur les p_k : d'après [2],

$$p_k \ge k(\ln k + \ln_2 k - 1) \quad \text{pour } k \ge 2\,;$$

d'après [1] ou [3],

$$p_k \le k(\ln k + \ln_2 k - 0.9484) \quad \text{pour } k \ge 39017,$$

et nous déduisons de [11] que

$$p_k \leq k(\ln k + \ln_2 k - 0.935) \quad \text{pour } k \geq 7014.$$

D'autres encadrements des p_k peuvent être trouvés dans [12, 11, 8, 2, 1].

Nous allons considérer l'inégalité (i) du lemme 1 :

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1}, \tag{5}$$

qui implique celle du lemme 2.

Proposition 2. *Pour* $k, l \geq 3$ *tels que* $1/109 \leq l/k \leq 109$, *l'inégalité* (5) *est vraie.*

Nous allons démontrer cette proposition en deux temps à l'aide des deux lemmes suivants.

Lemme 3. *Pour* $k, l \geq 39017$ *tels que* $1/109 \leq l/k \leq 109$, *l'inégalité* (5) *est vraie.*

Preuve. Posons $\gamma = l/k$ que nous supposerons plus petit que 1 sans restreindre la généralité. Utilisons les encadrements

$$k(\ln k + \ln_2 k - \alpha) \leq p_k \leq k(\ln k + \ln_2 k - \beta) \tag{6}$$

de façon formelle pour l'instant. On prendra $\alpha = 1$ pour $k \geq 2$ et $\beta = 0.9484$ pour $k \geq 39017$. On a

$$\begin{aligned}
p_{k+\gamma k-1} &- p_k - p_{\gamma k} \\
&\geq ((\gamma+1)k-1)(\ln((\gamma+1)k-1) + \ln_2((\gamma+1)k-1) - \alpha) \\
&\quad - k(\ln k + \ln_2 k - \beta) - \gamma k(\ln(\gamma k) + \ln_2(\gamma k) - \beta) \\
&= k((\gamma+1)\ln(\gamma+1) - \alpha(\gamma+1) + \beta(1+\gamma) - \gamma \ln \gamma) \\
&\quad + (\gamma+1)k \ln\left(1 - \frac{1}{(1+\gamma)k}\right) + \gamma k \ln\left(\frac{\ln(k+\gamma k-1)}{\ln k}\right) \\
&\quad + k \ln\left(\frac{\ln(k+\gamma k-1)}{\ln \gamma k}\right) \\
&\quad - (\ln((1+\gamma)k-1) + \ln_2(k+\gamma k-1) - \alpha).
\end{aligned}$$

On pose cette dernière expression égale à $f(k,\gamma)$:

$$f(k,\gamma) = k((\gamma+1)(\ln(\gamma+1) - \alpha + \beta) - \gamma \ln \gamma) + o(k).$$

Pour que la différence $p_{k+\gamma k-1} - p_k - p_{\gamma k}$ soit positive à partir d'un certain rang, il est suffisant que $\lim_{k\to\infty} f(k,\gamma) \geq 0$ ou plus simplement que $(\gamma+1)(\ln(\gamma+1) - \alpha + \beta) - \gamma \ln \gamma > 0$. Ainsi nous choisissons $1/109 \leq \gamma \leq 1$. Nous prendrons $k \geq 39017$ et $\gamma k = l \geq 39017$ pour que les inégalités (6) soient vraies.

À ce niveau de la démonstration, nous avons trouvé les valeurs de γ pour lesquelles on peut espérer que $f(k,\gamma)$ soit positive à partir d'un certain rang.

Montrons que $f(k,\gamma)$ est une fonction croissante de γ pour k fixé :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(k,\gamma)}{\partial\gamma} &= k\biggl[\ln\left(\frac{1}{\gamma}+1-\frac{1}{\gamma k}\right)-\alpha+\beta+\ln\left(1+\frac{\ln(\gamma+1-1/k)-\ln\gamma}{\ln(\gamma k)}\right)\\
&\quad+\frac{1}{\ln(k+\gamma k-1)}-\frac{1}{\ln(\gamma k)}\biggr]\\
&\geq k\left[\ln\left(\frac{1}{\gamma}+1-\frac{1}{\gamma k}\right)-\alpha+\beta-\frac{1}{\ln(\gamma k)}\right]\quad \text{pour } \gamma\leq 1, k\geq 2\\
&\geq k\left[\ln\left(2-\frac{109}{k}\right)-\alpha+\beta-\frac{1}{\ln(k/109)}\right]\quad \text{pour } \frac{1}{109}\leq\gamma\leq 1\\
&\geq 0\quad \text{dès que } k\geq 660.
\end{aligned}$$

Montrons que $f(k,\gamma)$ est croissante par rapport à k pour γ fixé :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(k,\gamma)}{\partial k} &= \ln\left(1+\gamma-\frac{1}{k}\right)+\ln\left(1+\frac{\ln(1+\gamma-1/k)}{\ln k}\right)+(\beta-\alpha)(\gamma+1)\\
&\quad+\gamma\left[\ln\left(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma k}\right)+\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/\gamma-1/(\gamma k))}{\ln(\gamma k)}\right)\right]\\
&\quad+\frac{\gamma+1}{\ln(k+\gamma k-1)}-\frac{1}{\ln k}-\frac{\gamma}{\ln(\gamma k)}\\
&\geq \ln\left(1+\gamma-\frac{1}{k}\right)+(\beta-\alpha)(1+\gamma)+\gamma\ln\left(1+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma k}\right)\\
&\quad+\ln\left(1+\frac{\ln(1+\gamma-1/k)}{\ln k}\right)-\frac{\ln(1+\gamma-1/k)}{\ln k\ln(k+\gamma k-1)}\\
&\quad+\gamma\left(\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/\gamma-1/(\gamma k))}{\ln(\gamma k)}\right)-\frac{\ln(1+1/\gamma-1/(\gamma k))}{\ln(\gamma k)\ln(k+\gamma k-1)}\right)\\
&\geq \ln(1+\gamma)+(\beta-\alpha)(1+\gamma)+\gamma\ln(1+1/\gamma)\geq 0.
\end{aligned}$$

La fonction minorante est clairement croissante par rapport à k et est positive pour $k\geq 180$ pour $\gamma=1/109$. En conséquence, $f(k,1/109)$ est croissante au moins pour $k\geq 180$.

Maintenant en utilisant les propriétés précédentes, on a : pour $\gamma\in[1/109,1]$ et $k\geq 39017$,

$$f(k,\gamma)\geq f(k,1/109)\geq f(39017,1/109)>0. \blacksquare$$

Lemme 4. *Pour* $2\leq l\leq 39017$ *et* $l\leq k\leq 109l$, *l'inégalité* (5) *est vraie.*

Preuve. On teste à l'aide d'un ordinateur un domaine de validité de l'inégalité (5) : $p_k+p_l\leq p_{k+l-1}$. On trouve qu'elle est vraie pour $2\leq l\leq 39017$ et $l\leq k\leq 109l$; ceci peut se faire en utilisant un fichier contenant les nombres premiers jusqu'à $8\cdot 10^7$ et d'un peu de temps ou en utilisant la démonstration suivante : soit

$$p(k;c) := k(\ln k + \ln\ln k - c).$$

Pour l fixé ($l \in [415, 39017]$), posons, pour k variant de 39017 à $109l$,

$$h_1(k) := h_1(k,l) = p(k+l-1;1) - p(k;0.9484) - p_l$$

et pour k variant de $\max(7014, l)$ à 39017,

$$h_2(k) := h_2(k,l) = p(k+l-1;1) - p(k;0.935) - p_l.$$

Montrons que ces fonctions ont les propriétés suivantes :

- h_1 est concave pour l fixé et pour $k \in [7014, 109l]$.
- h_2 est concave pour l fixé et pour $k \in [\max(7014, l), 39017]$.
- Pour l variant de 415 et 39017, $h_1(39017, l)$ et $h_1(109l, l)$ sont positifs.
- Pour l variant de 415 et 39017, $h_2(415, l)$ et $h_2(39017, l)$ sont positifs.

Montrons la concavité des fonctions h_1 et h_2. Pour $n = 1$ ou 2,

$$\begin{aligned}
h_n''(k) &= \frac{1}{k+l-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+l-1)\ln(k+l-1)} - \frac{1}{k\ln k} \\
&\quad - \frac{1}{(k+l-1)\ln^2(k+l-1)} + \frac{1}{k\ln^2 k} \\
&= \frac{1}{k(k+l-1)}\Bigg[-l+1+\frac{-(l-1)\ln(k+l-1) - k\ln\left(1+\frac{l-1}{k}\right)}{\ln k \ln(k+l-1)} \\
&\quad + \frac{2k\ln\left(1+\frac{l-1}{k}\right)}{\ln k \ln^2(k+l-1)} + \frac{l-1}{\ln^2 k} + \frac{k\ln^2\left(1+\frac{l-1}{k}\right)}{(\ln k \ln(k+l-1))^2}\Bigg] \\
&\le \frac{1}{2k^2}\Bigg[-l_1+1+\frac{-(l_1-1)\ln(k+l_1-1) - k\ln\left(1+\frac{l_1-1}{k}\right)}{\ln k \ln(k+l_2-1)} \\
&\quad + \frac{2k\ln\left(1+\frac{l_2-1}{k}\right)}{\ln k \ln^2(k+l_1-1)} + \frac{l_2-1}{\ln^2 k} + \frac{k\ln^2\left(1+\frac{l_2-1}{k}\right)}{(\ln k \ln(k+l_1-1))^2}\Bigg]
\end{aligned}$$

pour $l \in [l_1, l_2]$. On choisit $l_1 = 414$ et $l_2 = 39017$ et on montre que h_1 est concave pour $k \ge 39017$. On choisit $l_1 = 414$ et $l_2 = k$ et on montre que h_2 est concave pour $k \ge 7014$.

Un court programme en `Maple` permet de vérifier que, pour chaque $l \in [415, 39017]$, on a

$$h_1(39017, l),\ h_1(109l, l),\ h_2(415, l) \text{ et } h_2(39017, l) \text{ positifs.}$$

Par concavité, il vient que, pour $l \in [415, 39017]$,

$$\begin{aligned}
h_1(k,l) &\ge 0 \quad \text{pour } k \in [39017, 109l], \\
h_2(k,l) &\ge 0 \quad \text{pour } k \in [\max(l, 7014), 39017].
\end{aligned}$$

Et ainsi, pour $l \in [415, 39017]$ et $k \in [39017, 109l]$,

$$p_{k+l-1} - p_k - p_l \ge h_1(k,l) \ge 0.$$

De même, pour $l \in [415, 39017]$ et $k \in [\max(l, 7014), 39017]$,

$$p_{k+l-1} - p_k - p_l \geq h_2(k, l) \geq 0.$$

Une vérification directe, dans les intervalles restants, achève la preuve. ∎

Proposition 3. *Pour x et y réels ≥ 3 vérifiant $1/109 \leq y/x \leq 109$, l'inégalité* (1) : $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$, *est vraie.*

Preuve. Fixons $l \geq 3$. D'après la proposition 2,

$$p_k + p_l \leq p_{k+l-1}$$

est vraie pour $1/109 \leq l/k \leq 1$, ou encore pour $l \leq k \leq 109l$. En appliquant le lemme 1 à ce résultat, il vient que $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$ est vraie pour $y \in [p_{l-1}, p_l[$ et $x \in [p_{k-1}, p_k[$ pour $k \in [l, 109l]$, c'est-à-dire pour $y \in [p_{l-1}, p_l[$ et $x \in [p_{l-1}, p_{109l}[$ ou encore, sous une autre forme : l'inégalité est vraie pour

$$\frac{p_{l-1}}{p_{109l}} < \frac{y}{x} < \frac{p_l}{p_{l-1}}. \tag{7}$$

Montrons que

$$\frac{p_{l-1}}{p_{109l}} < \frac{1}{109}.$$

En effet,

$$\frac{1}{109}p_{109l} - p_{l-1} \geq D = l(\ln(109l) + \ln_2(109l) - \alpha) - (l-1)(\ln(l-1) + \ln_2(l-1) - \beta).$$

En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ (voir [2, 12]), les inégalités sont vérifiées et $D > 0$ pour $l \geq 6$. Comme $p_k/p_{k-1} > 1$ et $p_{l-1}/p_{109l} < 1/109$, on a la preuve du théorème à l'aide de (7). La même vérification que dans la preuve du lemme 4 permet de conclure pour les petites valeurs. ∎

Avec cette méthode, nous avons montré que (1) est vraie entre les droites $y = x/109$, et par symétrie $y = 109x$, ce qui représente 99% du plan.

4. Conclusion

4.1. *Zone de validité de la conjecture.* En rassemblant les cas étudiés dans la proposition 1 et ceux de la proposition 3, on obtient le théorème 1.

Calculons la proportion de plan pour laquelle

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$$

est vraie. Pour $x = x_0$ fixé, regardons le rapport de l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine limité par les inéquations $y \geq x$, $y \leq \frac{7}{5}x \ln x \ln_2 x$ et $y \leq x_0$, à l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine limité par les inéquations $x \leq x_0$, $y \geq x$ et $y \leq x_0$.

Posons $g(t) = \frac{7}{5} t \ln t \ln_2 t$. Ainsi

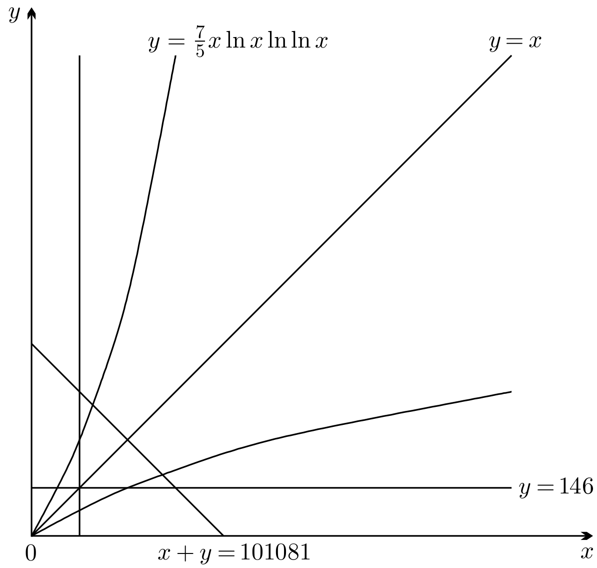
$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{g^{-1}(x_0)} (g(t) - t)\, dt + \int_{g^{-1}(x_0)}^{x_0} (x_0 - t)\, dt \sim \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} g^{-1}(x_0)/x_0$$

et

$$\mathcal{A}_2 = x_0^2/2.$$

Par symétrie en (x, y), on a démontré que $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$ est vraie pour $1 - 5/(7 \ln x_0 \ln_2 x_0)$ des couples (x, y) tels que $x \leq x_0$ et $y \leq x_0$.

Proposition 4. *La proportion des couples* (x, y) *tels que* $x \leq X$ *et* $y \leq X$ *pour lesquels* (1) *n'est pas vérifiée est au plus* $5/(7 \ln X \ln_2 X)$.



4.2. *Applications*

Corollaire 1. $\pi(2x) \leq 2\pi(x)$ *pour* x *réel* ≥ 3 *ou pour* $x \in [0; 1[\cup \left[2; \frac{5}{2}\right[$.

Preuve. C'est une application directe de la proposition 3 avec $y = x$. Une étude de cas permet d'achever la démonstration :

• Pour $2 \leq x < 3$, $\pi(x) = \pi(2) = 1$. Pour que $\pi(2x) \leq 2\pi(x)$, il faut que $\pi(2x) \leq 2$, c'est-à-dire $2x < 5$.

• Pour $0 \leq x < 2$, $\pi(x) = 0$. Pour que $\pi(2x) \leq 2\pi(x)$, il faut que $\pi(2x) = 0$, c'est-à-dire $2x < 2$. ∎

Remarque. Le corollaire 1 est annoncé comme démontré par Rosser et Schoenfeld en 1975. Pour une preuve directe de ce résultat, il faudrait vérifier que

$$p_{2k-1} \geq 2p_k.$$

Les estimations sur les p_k dans leur article [12] de 1962 ne permettaient pas aux auteurs de démontrer ce résultat alors que celles que l'on peut déduire de leur article [13] de 1975 convenaient.

COROLLAIRE 2. *Pour tout n entier supérieur ou égal à* 2,

$$\pi(2n) \leq 2\pi(n).$$

COROLLAIRE 3. 1. *Pour x réel ≥ 3 et $x = 2$,*

$$\frac{\pi(x)+\pi(2x)}{2} \leq \pi(3x) \leq \pi(x)+\pi(2x).$$

2. *Pour $x \geq 3$ et k entier*, $\pi(kx) \leq k\pi(x)$.

Preuve. $\pi(x) \leq \pi(x+y)$ et $\pi(y) \leq \pi(x+y)$ ainsi $\pi(x)+\pi(y) \leq 2\pi(x+y)$. Ceci montre la première inégalité. La seconde inégalité vient de l'application de la proposition 3 pour $y = 2x$.

Montrons la deuxième proposition par récurrence.

Pour les cas $k = 0$ et $k = 1$, c'est trivial. Le cas $k = 2$ est montré dans le corollaire 1. Supposons l'inégalité vraie jusqu'au rang k. Si $k+1$ est pair,

$$\pi((k+1)x) \underset{\text{cor. 1}}{\leq} 2\pi\left(\frac{k+1}{2}x\right) \underset{\text{réc.}}{\leq} 2\left(\frac{k+1}{2}\right)\pi(x) = (k+1)\pi(x).$$

Si $k+1$ est impair,

$$\begin{aligned}\pi((k+1)x) &\underset{\text{prop. 3}}{\leq} \pi\left(\frac{k}{2}x\right) + \pi\left(\left(\frac{k}{2}+1\right)x\right) \underset{\text{réc.}}{\leq} \frac{k}{2}\pi(x) + \left(\frac{k}{2}+1\right)\pi(x) \\ &= (k+1)\pi(x). \ \blacksquare\end{aligned}$$

REMARQUE. On peut consulter l'article [4] pour une démonstration plus directe de la deuxième partie du corollaire.

4.3. *Zones non couvertes.* Dans les zones non couvertes par le théorème 1, l'inégalité $\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y)$ reste probablement vraie lorsque y n'est pas suffisamment petit ou grand comparé à x.

Néanmoins Hensley et Richards [5, 9] ont montré que la seconde conjecture de Hardy–Littlewood est incompatible avec une autre conjecture bien connue, celle des k-uples premiers. Ils ont prouvé qu'il peut exister des k-uples admissibles ([1]) qui sont plus denses que le début de la série des nombres premiers.

Vehka [18] a exhibé un de ces k-uples admissibles "super-denses" pour la valeur $y = 11763$ de longueur $k = 1412$, c'est-à-dire que pour $y = 11763$, il existerait x (très grand) vérifiant ce k-uple et donc tel que $\pi(x+y) > \pi(x)+\pi(y)$. La possibilité que l'inégalité (1) ne soit pas vérifiée dans un grand nombre de cas n'est donc pas exclue.

([1]) Tout k-uple admissible apparaît infiniment souvent avec tous ces composants premiers, et le nombre asymptotique d'apparitions jusqu'à x est $\Omega(x/(\ln x)^k)$.

Note ajoutée pendant la correction des épreuves. Complétant le travail de Segal, de récents travaux s'intéressent à la fonction $\varrho^*(x)$ définie comme le nombre maximal d'éléments dans une séquence admissible de longueur x.

Un article de D. M. Gordon et G. Rodemich, *Dense admissible sets*, Lecture Notes in Comput. Sci. 1423, Springer, 1998, 216–225, s'intéresse au comportement de cette fonction pour les petites valeurs et montre en particulier que $\varrho^*(x) \leq \pi(x)$ pour $x \leq 1631$. Un deuxième article de D. A. Clark et N. C. Jarvis, *Dense admissible sequences*, Math. Comp. 70 (2001), 1713–1718, montre que $\varrho^*(4916) \geq 657$ alors que $\pi(4916) = 656$. Il est intéressant de trouver le premier point x pour lequel $\varrho^*(x) > \pi(x)$ car il faudra ensuite trouver effectivement un nombre premier vérifiant ce k-uple. Cela étant probablement d'autant plus facile plus la longueur est courte en vertu du théorème estimant le nombre asymptotique d'apparition du k-uple.

Références

[1] P. Dusart, *Sharper bounds for* ψ, θ, π, p_k, prépublication.

[2] —, *The* k^{th} *prime number is greater than* $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ *for* $k \geq 2$, Math. Comp. 68 (1999), 411–415.

[3] —, *Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers*, thèse de doctorat, Université de Limoges, 1998.

[4] E. Ehrhart, *On prime numbers*, Fibonacci Quart. 26 (1988), 271–274.

[5] D. Hensley and I. Richards, *Primes in intervals*, Acta Arith. 25 (1974), 375–391.

[6] C. Karanikolov, *On some properties of function* $\pi(x)$, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 29–30 (1971), 357–380.

[7] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Chelsea, New York, 1953, reprint.

[8] J. P. Massias and G. Robin, *Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers*, J. Théor. Nombres Bordeaux 8 (1996), 213–238.

[9] I. Richards, *On the incompatibility of two conjectures concerning primes*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 419–438.

[10] H. Riesel, *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*, Birkhäuser, 1985.

[11] G. Robin, *Estimation de la fonction de Tchebychef* θ *sur le* k*-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction* $\omega(n)$, *nombre de diviseurs premiers de* n, Acta Arith. 42 (1983), 367–389.

[12] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. 6 (1962), 64–94.

[13] —, —, *Sharper bounds for the Chebyshev functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$, Math. Comp. 29 (1975), 243–269.

[14] A. Schinzel, *Remarks on the paper*: *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arith. 7 (1961), 1–8.

[15] A. Schinzel and W. Sierpiński, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, ibid. 4 (1958), 185–208.

[16] S. L. Segal, *On* $\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y)$, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 523–527.

[17] V. Şt. Udrescu, *Some remarks concerning the conjecture* $\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y)$, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 20 (1975), 1201–1209.

[18] T. Vehka and I. Richards, *Explicit construction of an admissible set for the conjecture that sometimes* $\pi(x+y) > \pi(x)+\pi(y)$, Notices Amer. Math. Soc. 26 (1979), A-453.

LACO
123 avenue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex, France
E-mail: dusart@unilim.fr

Reçu le 7.5.1999
et révisé le 18.4.2001 (3596)