ACTA ARITHMETICA
106.2 (2003)

Théorème de Pólya en caractéristique finie

par

Laurence Delamette (Lille)

G. Pólya a établi qu'une fonction entière sur $\mathbb{C}$ d'ordre exponentiel strictement inférieur à 1 ou d'ordre exponentiel égal à 1 et de type exponentiel inférieur à $\log 2$ prenant des valeurs entières relatives sur $\mathbb{N}$, est un polynôme. M. Car a démontré un analogue de ce théorème de Pólya sur l'anneau des polynômes $\mathbb{F}_q[T]$ où $\mathbb{F}_q$ est le corps fini à q éléments. Des exemples prouvent que le résultat obtenu est optimal pour l'ordre exponentiel, mais ne l'est pas pour le type. Dans cet article, en faisant appel aux déterminants d'interpolation qu'a introduits M. Waldschmidt [6] en caractéristique nulle, nous améliorons, dans le cas où q est assez grand, le résultat établi par M. Car.

1. Position du problème. En 1915, G. Pólya a montré qu'une fonction entière f sur $\mathbb{C}$ telle que

$$f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log(|f|_r)}{r} < \log(2) \quad \text{où} \quad |f|_r = \sup_{|z|<r} |f(z)|$$

est un polynôme. L'exemple de la fonction $f(z) = 2^z$ permet de démontrer que ce résultat est optimal.

Etudions un analogue en caractéristique finie.

On désigne par $\mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$, $k = \mathbb{F}_q(T)$ son corps des fractions, $k_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$ le complété de k pour la valuation $(1/T)$-adique v normalisée par $v(T) = -1$ que l'on prolonge à une clôture algébrique $\overline{k}$ (resp. $\overline{k}_\infty$) de k (resp. k_∞) ainsi qu'à C le complété de $\overline{k}_\infty$.

Posons, pour tout z dans C,

$$v(z) = -\deg(z)$$

et pour f fonction entière sur C, pour tout réel r,

$$M(f,r) = \sup_{\deg(z)\le r} (\deg(f(z)), z \in C).$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11R58.

Quand r est rationnel, cette quantité est égale à

$$M_r(f) = \sup\{rn + \deg(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{où} \quad f(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$$

([5], une démonstration de ce résultat est proposée en appendice).

Comme les fonctions $M_r(f)$ et $M(f,r)$ sont croissantes, le résultat démontré par M. Car [1] peut s'énoncer sous la forme :

Théorème 1. *Si f est une fonction entière sur C telle que*

$$f(\mathbb{F}_q[T]) \subset \mathbb{F}_q[T] \quad \textit{et} \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M(f,r)}{q^r} < \frac{1}{e\log(q)q^{q/(q-1)}},$$

alors f est un polynôme.

En outre M. Car a démontré le résultat suivant :

Théorème 2. *Si f est une fonction entière $\mathbb{F}_q$-linéaire sur C telle que*

$$f(\mathbb{F}_q[T]) \subset \mathbb{F}_q[T] \quad \textit{et} \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M(f,r)}{q^r} < \frac{1}{e\log(q)},$$

alors f est un polynôme.

Nous avons essayé de démontrer ce théorème pour toute fonction entière. Nous n'y sommes pas parvenus mais nous avons démontré :

Théorème 3. *Soit un nombre réel $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $q(\varepsilon)$ tel que pour tout corps $\mathbb{F}_q$ à $q > q(\varepsilon)$ éléments, la propriété suivante est vérifiée : si une fonction entière f sur C est telle que l'image de tout élément de $\mathbb{F}_q[T]$ est dans $\mathbb{F}_q[T]$ et que*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M(f,r)}{q^r} < \frac{1}{e\log(q)q^{\varepsilon}},$$

alors f est un polynôme.

Remarques. 1. Pour ε donné, il est possible d'estimer $q(\varepsilon)$. Le dernier paragraphe fournit un exemple d'une version effective de ce théorème.

2. La majoration est donnée sous cette forme pour comparer plus aisément ce résultat avec celui de M. Car.

Pour cela, nous allons, d'une part, utiliser les déterminants d'interpolation dans un contexte analogue à l'article de M. Waldschmidt [6]. Une première idée était d'adapter des analogues des polynômes de Feldman mais les estimations que nous avions faites ne nous permettaient pas de conclure. C'est pourquoi nous avons eu recours à une suite extraite de ces polynômes. D'autre part, nous avons utilisé un résultat d'A. Thiery [2] :

THÉORÈME 4. *Soit a dans C. Si f est une fonction entière sur C telle que*

$$f(H) = a \quad \textit{pour tout } H \textit{ dans } \mathbb{F}_q[T] \quad \textit{et} \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M(f,r)}{q^r} < \frac{q^{q/(q-1)}}{e\log(q)}\,,$$

alors f est un polynôme.

Dans le second paragraphe, nous allons démontrer quelques résultats techniques préliminaires du théorème 3. Enfin, le dernier paragraphe sera consacré à la preuve en elle-même.

2. Quelques lemmes techniques. Dans un premier temps, nous allons démontrer un lemme de Schwarz pour les alternants analogue à celui établi par M. Waldschmidt [6].

Notons A_L l'anneau des fonctions entières dans C^L.

PROPOSITION 5. *Soient N et L deux entiers naturels tels que $N \geq L-1$ et $n_0, n_1, \ldots, n_L$ des entiers tels que $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_L = N$. Soient $\xi_0, \ldots, \xi_N \in \mathbb{F}_q[T]$ tous distincts tels que*

$$\deg(\xi_0) \leq \deg(\xi_1) \leq \ldots \leq \deg(\xi_N).$$

Soient $R_1, \ldots, R_L, E_1, \ldots, E_L$ des rationnels tels que, pour tout $1 \leq \mu \leq L$,

$$R_\mu > \deg(\xi_{n_\mu}) \quad \textit{et} \quad 0 \leq E_\mu \leq R_\mu - \deg(\xi_{n_\mu}).$$

Soient $Q_0, \ldots, Q_L$ les polynômes d'une variable définis par

$$Q_\nu(X) = \prod_{n=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} (X - \xi_n) \qquad (0 \leq \nu < L).$$

Soit ϕ une fonction entière dans C^L telle que pour $0 \leq \nu < L$, la fonction $\phi(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \ldots, z_L)$ soit divisible par $Q_\nu(z_\mu)$ dans $A_{L-\nu}$ pour tout $\nu < \mu \leq L$. Alors

$$\deg(\phi(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_L})) \leq M(\phi, R) - \sum_{\mu=1}^{L} n_\mu E_\mu$$

avec $M(\phi,R) = \sup\{\deg(\phi(z_1,\ldots,z_L));\, \deg(z_i) = R_i,\ 1 \leq i \leq L\}$.

Preuve. Soit, pour $1 \leq \mu \leq L$,

$$P_\mu(X) = \prod_{n=0}^{n_\mu - 1} (X - \xi_n) = \prod_{\nu=0}^{\mu-1} Q_\nu(X).$$

D'où

$$Q_\nu(X) = \frac{P_{\nu+1}(X)}{P_\nu(X)} \quad \text{pour } \nu \geq 1, \qquad Q_0(X) = P_1(X).$$

La fonction $\phi(z_1,\dots,z_L)$ est divisible dans A_L par $P_1(z_\mu)$ pour $1\le\mu\le L$, donc par $P_1(z_1)\dots P_1(z_L)$. Par conséquent, il existe une fonction entière $\phi_1\in A_L$ telle que

$$\phi(z_1,\dots,z_L)=\phi_1(z_1,\dots,z_L)\prod_{\mu=1}^{L}P_1(z_\mu). \tag{1}$$

Montrons par récurrence sur $\nu\ge 1$ qu'il existe $\phi_\nu(z_\nu,z_{\nu+1},\dots,z_L)\in A_{L-\nu+1}$ telle que

$$\phi(\xi_{n_1},\dots,\xi_{n_{\nu-1}},z_\nu,\dots,z_L)=\phi_\nu(z_\nu,\dots,z_L)\prod_{\mu=1}^{\nu-1}P_\mu(\xi_{n_\mu})\prod_{\mu=\nu}^{L}P_\nu(z_\mu). \tag{2}$$

- Si $\nu=1$, (2) est vrai par (1).
- Supposons maintenant les $\phi_1,\dots,\phi_\nu$ connus avec $\nu<L$. On remplace z_ν par ξ_{n_ν} dans (2) et on obtient

$$\begin{aligned}\phi(\xi_{n_1},\dots,\xi_{n_\nu},z_{\nu+1},\dots,z_L)&\\ =\phi_\nu(\xi_{n_\nu},z_{\nu+1},\dots,z_L)&\prod_{\mu=1}^{\nu}P_\mu(\xi_{n_\mu})\prod_{\mu=\nu+1}^{L}P_\nu(z_\mu).\end{aligned} \tag{3}$$

On sait par hypothèse que $\phi(\xi_{n_1},\dots,\xi_{n_\nu},z_{\nu+1},\dots,z_L)$ est divisible par $\prod_{\mu=\nu+1}^{L}Q_\nu(z_\mu)$. Par construction, le produit $P_1(\xi_{n_1})\dots P_\nu(\xi_{n_\nu})$ est non nul et les polynômes P_ν et Q_ν sont premiers entre eux. Donc, d'après (3), $\phi_\nu(\xi_{n_\nu},z_{\nu+1},\dots,z_L)$ est divisible par $\prod_{\mu=\nu+1}^{L}Q_\nu(z_\mu)$. Il existe une fonction $\phi_{\nu+1}(z_{\nu+1},\dots,z_L)\in A_{L-\nu}$ telle que

$$\phi_\nu(\xi_{n_\nu},z_{\nu+1},\dots,z_L)=\phi_{\nu+1}(z_{\nu+1},\dots,z_L)\prod_{\mu=\nu+1}^{L}Q_\nu(z_\mu). \tag{4}$$

En associant (3) et (4), on obtient

$$\begin{aligned}&\phi(\xi_{n_1},\dots,\xi_{n_\nu},z_{\nu+1},\dots,z_L)\\ &\qquad=\phi_{\nu+1}(z_{\nu+1},\dots,z_L)\prod_{\mu=\nu+1}^{L}Q_\nu(z_\mu)P_\nu(z_\mu)\prod_{\mu=1}^{\nu}P_\mu(\xi_{n_\mu})\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}&\phi(\xi_{n_1},\dots,\xi_{n_\nu},z_{\nu+1},\dots,z_L)\\ &\qquad=\phi_{\nu+1}(z_{\nu+1},\dots,z_L)\prod_{\mu=\nu+1}^{L}P_{\nu+1}(z_\mu)\prod_{\mu=1}^{\nu}P_\mu(\xi_{n_\mu}).\end{aligned}$$

On a bien montré (2) au rang $\nu+1$.

On modifie maintenant les ϕ_ν de la manière suivante (c'est ici que le caractère ultramétrique fait différer la preuve de celle de M. Waldschmidt) :

chacun des z_μ est remplacé par $(z_\mu - \xi_n)/\alpha_\mu$ et chaque ξ_{n_μ} par $(\xi_{n_\mu} - \xi_n)/\alpha_\mu$ avec $\alpha_\mu \in C$ tel que $\deg(\alpha_\mu) = R_\mu$ (car le groupe des valeurs pour le degré est $\mathbb{Q}$). On obtient alors l'existence des fonctions ψ_ν telles que

$$\begin{aligned}(5)\qquad &\phi(\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_{\nu-1}}, z_\nu, \dots, z_L)\\ &= \psi_\nu(z_\nu, \dots, z_L)\Bigg(\prod_{\mu=1}^{\nu-1}\prod_{n=0}^{n_\mu-1}\frac{\xi_{n_\mu}-\xi_n}{\alpha_\mu}\Bigg)\Bigg(\prod_{\mu=\nu}^{L}\prod_{n=0}^{n_\nu-1}\frac{z_\mu-\xi_n}{\alpha_\mu}\Bigg).\end{aligned}$$

On va maintenant établir une relation de récurrence entre ψ_ν et $\psi_{\nu+1}$. En remplaçant z_ν par ξ_{n_ν} dans (5), on obtient

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\phi(\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \dots, z_L)\\ &= \psi_\nu(\xi_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \dots, z_L)\Bigg(\prod_{\mu=1}^{\nu}\prod_{n=0}^{n_\mu-1}\frac{\xi_{n_\mu}-\xi_n}{\alpha_\mu}\Bigg)\Bigg(\prod_{\mu=\nu+1}^{L}\prod_{n=0}^{n_\nu-1}\frac{z_\mu-\xi_n}{\alpha_\mu}\Bigg).\end{aligned}$$

Or (5) au rang $\nu+1$ nous donne

$$\begin{aligned}(7)\qquad &\phi(\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \dots, z_L)\\ &= \psi_{\nu+1}(z_{\nu+1}, \dots, z_L)\Bigg(\prod_{\mu=1}^{\nu}\prod_{n=0}^{n_\mu-1}\frac{\xi_{n_\mu}-\xi_n}{\alpha_\mu}\Bigg)\Bigg(\prod_{\mu=\nu+1}^{L}\prod_{n=0}^{n_{\nu+1}-1}\frac{z_\mu-\xi_n}{\alpha_\mu}\Bigg).\end{aligned}$$

En comparant (6) et (7), on obtient

$$(8)\qquad \psi_{\nu+1}(z_{\nu+1}, \dots, z_L) = \psi_\nu(\xi_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \dots, z_L)\Bigg(\prod_{\mu=\nu+1}^{L}\prod_{n=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1}\frac{\alpha_\mu}{z_\mu-\xi_n}\Bigg).$$

De (8), on déduit

$$\begin{aligned}(9)\qquad &\sup\{\deg(\psi_{\nu+1}(z_{\nu+1}, \dots, z_L));\ \deg(z_i) = R_i,\ \nu+1 \le i \le L\}\\ &\le \sup\{\deg(\psi_\nu(z_\nu, \dots, z_L));\ \deg(z_i) = R_i,\ \nu \le i \le L\}.\end{aligned}$$

Par (5), au rang $\nu = L$ et en remplaçant z_L par ξ_{n_L}, on a

$$\begin{aligned}(10)\qquad \phi(\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_L}) &= \psi_L(\xi_{n_L})\Bigg(\prod_{\mu=1}^{L-1}\prod_{n=0}^{n_\mu-1}\frac{\xi_{n_\mu}-\xi_n}{\alpha_\mu}\Bigg)\Bigg(\prod_{n=0}^{n_L-1}\frac{\xi_{n_L}-\xi_n}{\alpha_\mu}\Bigg)\\ &= \psi_L(\xi_{n_L})\Bigg(\prod_{\mu=1}^{L}\prod_{n=0}^{n_\mu-1}\frac{\xi_{n_\mu}-\xi_n}{\alpha_\mu}\Bigg).\end{aligned}$$

De (9) et (10), il s'ensuit

$$\deg(\phi(\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_L})) \le M(\phi, R) - \sum_{\mu=1}^{L} n_\mu E_\mu.$$

Corollaire 6. *Soient N et L deux entiers positifs avec $N \ge L$ et $n_0, n_1, \dots, n_L$ des entiers tels que $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_L = N$. Soient*

$\xi_0, \ldots, \xi_N \in \mathbb{F}_q[T]$ *tous distincts tels que*

$$\deg(\xi_0) \leq \deg(\xi_1) \leq \ldots \leq \deg(\xi_N).$$

Soient $R_1, \ldots, R_L, E_1, \ldots, E_L$ *des rationnels tels que, pour tout* $1 \leq \mu \leq L$,

$$R_\mu > \deg(\xi_{n_\mu}) \quad \textit{et} \quad 0 \leq E_\mu \leq R_\mu - \deg(\xi_{n_\mu}).$$

Soit $F = (f_1, \ldots, f_L)$ *une application entière de* C *dans* C^L *(toutes les coordonnées sont des fonctions entières). On suppose aussi que, pour* $0 \leq \nu < L$ *et* $n_\nu \leq n < n_{\nu+1}$, *la matrice* $L \times (\nu + 1)$ *suivante :*

$$(F(\xi_{n_1}), \ldots, F(\xi_{n_\nu}), F(\xi_n))$$

a un rang $\leq \nu$. *Alors*

$$\deg(\det(f_\lambda(\xi_{n_\mu}))_{1\leq\lambda,\mu\leq L}) \leq \sum_{\mu=1}^{L} \max_{1\leq\lambda\leq L}\{M(f_\lambda, R_\mu)\} - \sum_{\mu=1}^{L} n_\mu E_\mu.$$

Preuve. Posons

$$\phi(z_1, \ldots, z_L) = \det(f_\lambda(z_\mu))_{1\leq\lambda,\mu\leq L}.$$

L'hypothèse du corollaire nous permet de dire que pour tout $0 \leq \nu < L$, la fonction $\phi(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \ldots, z_L)$ est, pour tout $\nu < \mu \leq L$, divisible par $Q_\nu(z_\mu) = \prod_{n=n_\nu}^{n_\nu+1} (z_\mu - \xi_n)$. En appliquant la proposition, on obtient

$$\deg(\det(f_\lambda(\xi_{n_\mu}))_{1\leq\lambda,\mu\leq L}) \leq M(\phi, R) - \sum_{\mu=1}^{L} n_\mu E_\mu.$$

D'où

$$\deg(\det(f_\lambda(\xi_{n_\mu}))_{1\leq\lambda,\mu\leq L}) \leq \sum_{\mu=1}^{L} \max_{1\leq\lambda\leq L}\{M(f_\lambda, R_\mu)\} - \sum_{\mu=1}^{L} n_\mu E_\mu.$$

Pour utiliser ce corollaire comme le fait M. Waldschmidt, nous allons considérer une sous-suite d'un analogue des polynômes de Feldman définis par Carlitz et que nous allons maintenant préciser.

Rappelons que D_h se définit de la manière suivante :

$$D_h = [h]D_{h-1}^q, \quad h \geq 1, \ [h] = T^{q^h} - T, \quad D_0 = 1$$

et que $\deg(D_h) = hq^h$.

Soit n un entier dont la décomposition en base q est la suivante :

$$n = n_0 + n_1 q + \ldots + n_s q^s \quad \text{avec} \quad 0 \leq n_i < q, \ i = 0, \ldots, s \ \text{ et } \ n_s \neq 0.$$

On a

$$\Psi_n(X) = \prod_{\substack{H\in\mathbb{F}_q[T] \\ \deg(H)<n}} (X - H).$$

Pour tout H dans $\mathbb{F}_q[T]$ et tout entier naturel j, $\Psi_j(H)/D_j$ est dans $\mathbb{F}_q[T]$ (voir [3, 4]). Dans les lemmes 7 et 8, nous contrôlons la grandeur des valeurs prises par les $\Psi_j(X)/D_j$, $j \in \mathbb{N}$.

LEMME 7. *Soit un entier $r > 0$. Alors, pour tout entier j, on a*

$$M\left(\frac{\Psi_j(X)}{D_j}, r\right) \leq M\left(\frac{\Psi_{r-1}(X)}{D_{r-1}}, r\right).$$

Preuve. Soit x tel que $\deg(x) = r$. Pour tout j, on a

$$\frac{\Psi_{j+1}(x)/D_{j+1}}{\Psi_j(x)/D_j} = \frac{D_j}{D_{j+1}} \prod_{\deg(H)=j} (x - H).$$

1er cas : $j \geq r - 1$. On obtient

$$\deg\left(\frac{\Psi_{j+1}(x)/D_{j+1}}{\Psi_j(x)/D_j}\right) \leq jq^j - (j+1)q^{j+1} + (j+1)(q^{j+1} - q^j) \leq -q^j.$$

La suite $(\deg(\Psi_j(x)/D_j))_{j \geq r-1}$ est décroissante.

2nd cas : $j < r - 1$. On a

$$\begin{aligned}\deg\left(\frac{\Psi_{j+1}(x)/D_{j+1}}{\Psi_j(x)/D_j}\right) &= jq^j - (j+1)q^{j+1} + r(q^{j+1} - q^j) \\ &= q^j((q-1)r - (q-1)j - q) \\ &\geq q^j((q-1)(j+2) - (q-1)j - q) \geq 0.\end{aligned}$$

La suite $(\deg(\Psi_j(x)/D_j))_{j < r-1}$ est croissante.

Par conséquent,

$$M\left(\frac{\Psi_j(X)}{D_j}, r\right) \leq M\left(\frac{\Psi_{r-1}(X)}{D_{r-1}}, r\right).$$

LEMME 8. *Soit un entier $r > 0$. Alors, pour tout entier j, on a*

$$M\left(\frac{\Psi_j(X)}{D_j}, r\right) \leq q^{r-1}.$$

Preuve. Soit un entier $r > 0$. Alors, pour tout entier j, on a

$$M\left(\frac{\Psi_{r-1}(X)}{D_{r-1}}, r\right) \leq rq^{r-1} - (r-1)q^{r-1} \leq q^{r-1}.$$

3. Théorème de Pólya. Commençons maintenant la preuve du théorème 3.

Soit b un réel strictement positif. Soit f une fonction entière sur C telle que l'image de tout élément de $\mathbb{F}_q[T]$ est dans $\mathbb{F}_q[T]$ et que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M(f, r)}{q^r} < b.$$

Notons d'abord :

Lemme 9. *Il existe une constante K (dépendant de f) telle que, pour tout $r > 0$,*

$$M(f, r) \leq bq^r + K.$$

Adaptons les idées mises en œuvre par M. Waldschmidt dans [6].

Soient J et U deux entiers naturels non nuls qui seront choisis ultérieurement. Considérons l'application $F_L : C \to C^L$ avec $L = JU$ définie par

$$z \mapsto (\varphi_1(z), \ldots, \varphi_L(z)) = \left(\frac{\Psi_j(z)}{D_j} f(z)^t \right)_{\substack{1 \leq j \leq J \\ 1 \leq t \leq U}}.$$

L'ordre des φ_λ, $1 \leq \lambda \leq L$, est indifférent. On pose

$$\phi(z_1, \ldots, z_L) = \det(\varphi_\lambda(z_\mu))_{1 \leq \lambda, \mu \leq L}.$$

Supposons que $F_L(\mathbb{F}_q[T])$ n'est pas contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension sur C strictement inférieure à L ; alors il existe un L-uplet dans $(\mathbb{F}_q[T])^L$ sur lequel ϕ ne s'annule pas.

On définit un ordre $\prec$ dans $\mathbb{F}_q[T]$ comme suit, déduit d'un ordre $<$ fixé initialement sur $\mathbb{F}_q$: Soient $P = \sum_{i=0}^n a_i T^i$ et $Q = \sum_{i=0}^m b_i T^i$ dans $\mathbb{F}_q[T]$:

- si $\deg(P)$ est strictement inférieur à $\deg(Q)$ alors $P \prec Q$,
- si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $a_n < b_n$ alors $P \prec Q$,
- si $\deg(P) = \deg(Q)$, $a_n = b_n$ et $a_{n-1} < b_{n-1}$ alors $P \prec Q$, et ainsi de suite.

(Notons que le j-ème polynôme de $\mathbb{F}_q$[T] est de degré strictement inférieur à $\log_q(j+1)$.)

On choisit $(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_L})$ le plus petit élément pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{F}_q[T]^L$ déduit de l'ordre $\prec$ sur $\mathbb{F}_q[T]$ pour lequel $\phi(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_L})$ ne soit pas nul. On notera Δ cet élément.

Montrons que $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$ s'annulent toutes en 0 et en les $n_1 - 1$ premiers polynômes non nuls de $\mathbb{F}_q[T]$ et ne s'annulent pas en le n_1-ième : $(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_L})$ est le plus petit L-uplet tel que $(\varphi_\lambda(\xi_{n_1}), \ldots, \varphi_\lambda(\xi_{n_L}))_{1 \leq \lambda \leq L}$ soit une base de $F_L(\mathbb{F}_q[T])$.

Soit $n \in \{0, \ldots, n_1 - 1\}$. Le vecteur $(\varphi_\lambda(\xi_n))_{1 \leq \lambda \leq L}$ ne peut pas être complété en une base de $F_L(\mathbb{F}_q[T])$. C'est donc le vecteur nul.

Par le même raisonnement, pour $n = n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2 - 1$, le vecteur $(\varphi_\lambda(\xi_n))_{1 \leq \lambda \leq L}$ appartient à la droite engendrée par $(\varphi_\lambda(\xi_{n_1}))_{1 \leq \lambda \leq L}$ et, plus généralement, pour $1 \leq \mu < L$ et pour $n_\mu \leq n < n_{\mu+1}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\xi_{n_1}) & \ldots & \varphi_1(\xi_{n_\mu}) & \varphi_1(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_L(\xi_{n_1}) & \ldots & \varphi_L(\xi_{n_\mu}) & \varphi_L(\xi_n) \end{pmatrix}$$

a pour rang μ.

Nous allons maintenant appliquer le corollaire 6 avec R_μ rationnel tel que

$$\max_{0\le n\le n_\mu}(\deg(\xi_n)) < R_\mu \le \log_q(n_\mu+1)+A$$

où $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de tous les polynômes rangés par ordre croissant, et

$$E_\mu = A \le R_\mu - \deg(\xi_{n_\mu}),$$

A étant un rationnel > 0 à choisir. Alors, on a

$$\deg(\Delta) \le \sum_{\mu=1}^{L} \max_{1\le\lambda\le L}(M(\varphi_\lambda, R_\mu)) - \sum_{\mu=1}^{L} A n_\mu.$$

Par conséquent, d'après les lemmes 8 et 9, on a

$$\deg(\Delta) \le \sum_{\mu=1}^{L}\{q^{R_\mu-1} + Ubq^{R_\mu} + KU - An_\mu\},$$

d'où

$$\deg(\Delta) \le \sum_{\mu=1}^{L}\{(n_\mu+1)q^{A-1} + Ubq^{A}(n_\mu+1) + KU - An_\mu\}.$$

On a alors

$$\deg(\Delta) \le Lq^{A-1} + LUbq^{A} + LKU + (q^{A-1}+Ubq^{A}-A)\sum_{\mu=1}^{L} n_\mu.$$

On suppose que U et A vérifient la condition suivante :

$$q^{A-1}+Ubq^{A}-A<0. \tag{11}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\deg(\Delta) &\le Lq^{A-1} + LUbq^{A} + LKU + \sum_{\mu=1}^{L}\mu(q^{A-1}+Ubq^{A}-A)\\
&\le Lq^{A-1} + LUbq^{A} + LKU + \frac{L(L+1)}{2}(q^{A-1}+Ubq^{A}-A)\\
&\le L^2\biggl(\frac{q^{A-1}}{L} + \frac{bq^{A}+K}{J} + \frac{q^{A-1}+Ubq^{A}-A}{2} + \frac{q^{A-1}+Ubq^{A}-A}{2L}\biggr).
\end{aligned}$$

On choisit J assez grand pour que $\deg(\Delta)<0$. Δ est alors nul.

Pour tout tel J, l'hypothèse de départ n'est pas satisfaite : $F_L(\mathbb{F}_q[T])$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension sur C strictement inférieure à L et est donc dans un hyperplan de C^L. Par conséquent, il existe des polynômes $\alpha_{j,t} \in C$ non tous nuls tels que la fonction

$$\chi(z) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{U} \alpha_{j,t} \, \frac{\Psi_j(z)}{D_j} \, f(z)^t$$

s'annule sur $\mathbb{F}_q[T]$.

Il existe $C_1 > 0$ tel que, pour $r > J$,

$$M(\chi, r) \le C_1 + M\left(\frac{\Psi_J(X)}{D_J}, r\right) + Ubq^r.$$

Il existe $C_2 > 0$ tel que, pour $r > J$,

$$M(\chi, r) \le C_2 + rq^J + Ubq^r.$$

Le type de χ est inférieur à Ub. D'après A.Thiery [théorème 4 de ce texte], si $b < q^{q/(q-1)}/(Ue\log(q))$, χ est un polynôme. Puisque les Ψ_j sont de degré deux à deux différents, f est une fonction algébrique ; comme elle est entière, c'est un polynôme.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $U = 1$, $A = 1 - \varepsilon'$, $b = 1/(\log(q)eq^{\varepsilon})$, avec ε' rationnel, $0 < \varepsilon' < 1$ et $1 < \varepsilon + \varepsilon'$. Pour q assez grand, on a

$$\frac{1}{q^{\varepsilon'}} + \frac{1}{\log(q)eq^{\varepsilon+\varepsilon'-1}} < 1 - \varepsilon'.$$

La condition (11) est ainsi vérifiée. On peut choisir par exemple $\varepsilon' = 1 - \varepsilon/2$. D'où le résultat annoncé.

Exemple. Soit $q \ge e^{165662}$. Si f est une fonction entière telle que l'image de tout élément de $\mathbb{F}_q[T]$ est dans $\mathbb{F}_q[T]$ et que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M(f, r)}{q^r} < \frac{1}{e\log(q)q^{10^{-5}}},$$

alors f est un polynôme.

Prenons $\varepsilon = 10^{-5}$, $\varepsilon' = 1 - 10^{-6}$.

Pour des petites valeurs de q, le résultat de M. Car reste meilleur que le nôtre.

De même, comme M. Car [1, proposition VII.1], la méthode donne aussi le résultat suivant :

Proposition 10. *Soit L une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$. Soit B l'ensemble des entiers de L sur $\mathbb{F}_q[T]$. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Alors il existe un entier $q(\varepsilon)$ tel que pour $q > q(\varepsilon)$, la propriété suivante est vérifiée :*

Si f est une fonction entière telle que l'image de tout élément de $\mathbb{F}_q[T]$ est dans B et que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{M(f, r)}{q^r} < \frac{1}{e\log(q)q^{\varepsilon}},$$

alors f est un polynôme.

Preuve. Si $\alpha \in B$ et $\deg(\alpha) < 0$, alors $\alpha = 0$.

Remerciements. C'est avec plaisir que nous tenons à remercier M. Car, M. Waldschmidt ainsi que le rapporteur pour leurs nombreuses et utiles remarques sur une version antérieure de ce texte.

Appendice

Proposition. *Soit f une fonction entière sur C telle que $f(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$. Pour tout rationnel r,*

$$M(f,r) = M_r(f).$$

Preuve. Comme r est rationnel, il existe z_0 dans C tel que $\deg(z_0) = M_r(f)$. En considérant la fonction entière $g(z) = f(z/z_0)$, on se ramène au cas $r = 0$.

Si tous les coefficients de f sont des éléments de $\mathbb{F}_q$, alors le résultat est trivial. Sinon il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(a_n) = M_0(f)$. En considérant la série $g = f/a_n$, on se ramène à $M_0(f) = 0$. Il est clair que $M(f,0) \le M_0(f)$.

Pour démontrer la proposition, il suffit de trouver un z tel que

$$\deg(f(z)) = M_0(f) = 0.$$

Notons $B(0) = \{z \in C \mid \deg(z) \le 0\}$ et $\widetilde{k} = C/\{z \in C \mid \deg(z) < 0\}$. Soit $\phi : B(0) \to \widetilde{k}$ la projection canonique. Comme $\lim_{n\to\infty} \deg(a_n) = -\infty$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(a_n)X^n \in \widetilde{k}\,[X]$. De plus, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(a_n)X^n$ est non nul ; sinon on aurait $M_0(f) < 0$. Il existe donc $\phi(z) \in \widetilde{k}$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(a_n)\phi(z)^n \neq 0$. Or, pour tout N assez grand,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(a_n)\phi(z)^n = \sum_{n=0}^{N} \phi(a_n)\phi(z)^n = \phi\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\Big).$$

Cela entraîne que $\deg(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n) = 0$. Comme le degré est continu, on a $\deg(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n) = 0$. ∎

Références

[1] M. Car, *Pólya's theorem for* $\mathbb{F}_q[T]$, J. Number Theory 66 (1997), 148–171.

[2] —, *Gelfond–Gramain's theorems for function fields*, in: Finite Fields and Applications (Augsburg, 1999), Springer, 2001, 70–80.

[3] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. 1 (1935), 137–168.

[4] —, *A set of polynomials*, ibid. 6 (1940), 486–504.

[5] L. Schnirelmann, *On functions in algebraically closed normed fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1938, 487–498 (in Russian).

[6] M. Waldschmidt, *Extrapolation et alternants*, *groupe d'études sur les problèmes diophantiens*, Publ. Math. Univ. P. et M. Curie 108 (1994), no. 11, 15 pp.

Laboratoire de Mathématiques AGAT
Université des Sciences et Techniques de Lille
59650 Villeneuve d'Ascq, France
E-mail: delamett@gat.univ-lille1.fr

Reçu le 16.7.2001
et révisé le 27.3.2002 (4075)