ACTA ARITHMETICA
104.3 (2002)

D'une mesure d'approximation simultanée à une mesure d'irrationalité : le cas de $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(1/3)$

par

SYLVAIN BRUILTET (Paris)

Nous donnons une mesure d'indépendance algébrique de quantités liées à un réseau de $\mathbb{C}$ et en déduisons des mesures d'irrationalité pour des valeurs particulières de la fonction Γ.

Introduction. Soit Ω un réseau de $\mathbb{C}$ d'invariants g_2 et g_3 algébriques et soit ω une période non nulle de quasi-période associée η. L'indépendance algébrique des nombres π/ω et η/ω a été démontrée en 1976 par G. V. Chudnovsky [2], puis des mesures d'indépendance algébrique de plus en plus fines furent données, par G. V. Chudnovsky lui-même et G. Philibert [9], [6]. Une idée de G. V. Chudnovsky [3] (consistant à voir la fonction $\wp$ de Weierstrass comme variable) permit récemment d'obtenir une mesure « du type H^{-c} » [12] ; malheureusement une erreur s'est glissée dans la démonstration et un facteur logarithme-carré en le degré doit être rajouté.

Dans ce texte nous prouvons, en appliquant la méthode de [11], la mesure d'approximation suivante :

THÉORÈME A. *Soit Ω un réseau de $\mathbb{C}$ d'invariants algébriques. Soit ω une période non nulle, de quasi-période associée η. Soient enfin $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ deux nombres algébriques. Notons $\underline{\theta} = (1, \pi/\omega, \eta/\omega)$ et $\underline{\alpha} = (1, \alpha_1, \alpha_2)$. On a alors*

$$\log \operatorname{Dist}(\underline{\theta}, \underline{\alpha}) > -A(h(\underline{\alpha}) + \log(1 + d(\underline{\alpha})))d(\underline{\alpha})^{3/2}\sqrt{\log(1 + d(\underline{\alpha}))},$$

où A est une constante ne dépendant que de ω et Ω que l'on peut effectivement calculer.

Cette mesure entraîne alors la mesure d'indépendance algébrique :

THÉORÈME B. *Sous les hypothèses du théorème* A, *si $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$ est un polynôme non constant à coefficients entiers relatifs de degré d et de*

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11J82, 11J89, 11J91.

hauteur H, alors

$$\log\left|P\left(\frac{\pi}{\omega},\frac{\eta}{\omega}\right)\right| > -B(\log H + d\log(1+d))d^2(\log(1+d))^2,$$

où B est une constante ne dépendant que de ω et Ω que l'on peut effectivement calculer.

L'effectivité de ces énoncés est réelle : une fois le réseau Ω et la période ω donnés, il est possible de donner une valeur numérique aux constantes A et B. Comme illustration de ce fait, en considérant les courbes elliptiques à multiplication complexe par $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(j)$, on démontre les mesures d'approximation simultanée et les mesures d'indépendance algébrique suivantes :

Théorème A′. *Si $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$ on a, en notant $d = d(\underline{\alpha})$ et $h = h(\underline{\alpha})$:*

$$\log(|\Gamma(1/4) - \alpha_1| + |\pi - \alpha_2|) > -10^{30}(h + \log(1+d))d^{3/2}\sqrt{\log(1+d)},$$
$$\log(|\Gamma(1/3) - \alpha_1| + |\pi - \alpha_2|) > -10^{32}(h + \log(1+d))d^{3/2}\sqrt{\log(1+d)}.$$

Théorème B′. *Soit $P \in \mathbb{Z}[X,Y]$ un polynôme non constant à coefficients entiers relatifs de degré d et de hauteur H. Alors*

$$\log|P(\pi,\Gamma(1/4))| > -10^{326}(\log H + d\log(1+d))d^2(\log(1+d))^2,$$
$$\log|P(\pi,\Gamma(1/3))| > -10^{330}(\log H + d\log(1+d))d^2(\log(1+d))^2.$$

Remarquons que ces mesures sont de la forme « H^{-c} », donc susceptibles de fournir des mesures d'irrationalité. Effectivement, appliquées à un polynôme de degré 1 en Y, les mesures de transcendance du théorème B′ permettent d'aboutir à des mesures d'irrationalité. Cependant nous utilisons ici une autre méthode, conduisant à de meilleurs résultats ; ainsi nous déduisons directement du théorème A′ le corollaire suivant :

Corollaire. *Soit $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $q > 0$. Alors*

$$h\left(\frac{p}{q}\right) \geq 10^{75} \;\Rightarrow\; \left|\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{p}{q}\right| > \left(\frac{1}{qe}\right)^{10^{143}},$$
$$h\left(\frac{p}{q}\right) \geq 10^{79} \;\Rightarrow\; \left|\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{p}{q}\right| > \left(\frac{1}{qe}\right)^{10^{151}}.$$

Dans une première partie nous commençons par quelques préliminaires : nous y donnons une majoration d'un PPCM (en utilisant les estimations de [15]), nous calculons ensuite le type de certaines fonctions « elliptiques » à l'aide d'un résultat de J. H. Silverman [17], puis nous réécrivons dans le cas particulier qui nous intéresse le théorème 1 de [11], et enfin nous énonçons une majoration (optimale) de la dérivée d'une fonction elliptique due à D. W. Masser [8].

La deuxième partie contient la démonstration du théorème A, s'appuyant sur le théorème 1 de [11]. Notons que la preuve de la proposition 2 (là où se situe l'erreur de [12]) est reportée à la partie suivante.

Dans la quatrième partie nous démontrons (grâce à un lemme de transfert, [13]) que le théorème A implique le théorème B, puis nous donnons un tableau des constantes intervenant, permettant ainsi un calcul effectif.

La dernière partie enfin consiste en le calcul effectif des constantes dans deux exemples intéressants conduisant aux théorèmes A′ et B′. Nous en déduisons alors les mesures d'irrationalité de $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ en construisant des approximations algébriques d'un nombre complexe grâce aux résultats de D. Roy, M. Waldschmidt et G. Diaz [16], [4].

La numérotation des constantes suit celle de [12], c'est pourquoi les constantes c_2 (croissance des fonctions) et c_3 (hauteur des γ_i) n'apparaissent pas dans ce texte (elles sont remplacées par $a(\Omega)$ et $b(\Omega)$).

1. Préliminaires

1.1. *Notations et rappels.* Nous donnons ici les notations utilisées dans ce texte. On notera $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques. Si K est un corps de nombres et v une place de K, $|\ |_v$ désignera la valeur absolue normalisée associée, *i.e.* celle qui prolonge à K une des valeurs absolues usuelles de $\mathbb{Q}$ (p-adique ou archimédienne) ; on dira que $v\,|\,p$ (respectivement $v\,|\,\infty$) si la restriction à $\mathbb{Q}$ de $|\ |_v$ est la valeur absolue p-adique (respectivement archimédienne), et on notera d_v le degré local de K en v, c'est-à-dire la dimension de K_v (complété de K pour v) sur $\mathbb{Q}_p$ si $v\,|\,p$ ou sur $\mathbb{R}$ si $v\,|\,\infty$. Rappelons qu'alors

$$\sum_{v|p} d_v = [K:\mathbb{Q}],$$

$$x \in K\setminus\{0\} \;\Rightarrow\; \prod_v |x|_v^{d_v} = 1 \quad \text{(formule du produit)}.$$

Pour $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_m) \in \overline{\mathbb{Q}}^m$ on désigne par $d(\underline{x})$ le degré du corps $\mathbb{Q}(\underline{x}) = \mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_m)$; pour une place v de $\mathbb{Q}(\underline{x})$, on note d_v le degré local sur $\mathbb{Q}_v$ et on définit

$$\|\underline{x}\|_v = \max(1, |x_1|_v,\ldots,|x_m|_v),$$

puis

$$H(\underline{x}) = \prod_v \|\underline{x}\|_v^{d_v} \quad \text{et} \quad h(\underline{x}) = \frac{\log H(\underline{x})}{d(\underline{x})}$$

les hauteurs relative et absolue de $\underline{x}$. La hauteur d'un polynôme à coefficients algébriques est la hauteur de la famille de ses coefficients.

Soit $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbb{C}$ engendré par ω_1 et ω_2 tels que ω_2/ω_1 soit dans le demi-plan de Poincaré. On note $\wp(z)$, $\zeta(z)$ et $\sigma(z)$ les fonctions de Weierstrass associées. Si ω est une période non nulle, η désignera sa quasi-période associée, définie par $\eta = \zeta(z+\omega) - \zeta(z)$ pour $z \notin \Omega$. Ainsi η_1 et η_2 sont les quasi-périodes associées à ω_1 et ω_2. Rappelons la relation de Legendre : $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2i\pi$ et que la fonction $\wp$ vérifie :

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 \quad \text{(formule de duplication)},$$
$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3.$$

On définit alors

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \quad \text{et} \quad j = 1728\,\frac{g_2^3}{\Delta}.$$

(Pour ce qui concerne les fonctions elliptiques, on pourra se reporter à [7].) On désignera par $\mathrm{Vol}(\Omega)$ l'aire du parallélogramme fondamental. Si $z \in \mathbb{C}$, on notera $d(z,\Omega)$ la distance de z au réseau Ω :

$$d(z,\Omega) = \min_{\omega\in\Omega} |z-\omega|.$$

Si $\underline{\theta} = (1,\theta_1,\theta_2)$ et $\underline{\alpha} = (1,\alpha_1,\alpha_2)$ sont des éléments de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, on définit

$$\|\underline{\theta}\| = \sqrt{1+|\theta_1|^2+|\theta_2|^2}, \qquad \mathrm{Dist}(\underline{\theta},\underline{\alpha}) = \frac{\|\underline{\theta}\wedge\underline{\alpha}\|}{\|\underline{\theta}\|\cdot\|\underline{\alpha}\|}.$$

On a alors l'inégalité suivante ([13]) :

$$\mathrm{Dist}(\underline{\theta},\underline{\alpha}) \geq \frac{\|\underline{\theta}-\underline{\alpha}\|}{\|\underline{\theta}\|\cdot\|\underline{\alpha}\|}.$$

Si x est un nombre réel positif, on pose $\log^+ x = \max(0,\log x)$.

Enfin, on se donne un réseau Ω dont les invariants g_2 et g_3 sont supposés algébriques. On se donne $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \Omega$ tel que $\omega/3 \notin \Omega$ et on pose $c_1 = |a_1| + |a_2|$. Par ailleurs on pose

$$\mathcal{P} = (\wp(\omega/3), \wp'(\omega/3)).$$

1.2. *Majoration d'un PPCM.* Le but de ce paragraphe est de donner une majoration de

$$M_T(N) = \mathrm{PPCM}\{k_1\ldots k_n \mid 1\leq n\leq N,\ k_i\in\mathbb{N}^*,\ k_1+\ldots+k_n\leq T\},$$

qui nous servira dans la démonstration de la proposition 3.

PROPOSITION 1. *Soient* $1 \leq N \leq T$ *deux entiers. On a*

$$\log M_T(N) \leq T\log(4N).$$

Preuve. Notons pour simplifier $M = M_T(N)$ et soit p un nombre premier divisant M. Si $k \in \mathbb{N}^*$ on note $v_p(k)$ l'exposant de p dans la décomposition de k en facteurs premiers. Soient $k_1, \ldots, k_n$ des entiers vérifiant

$$1 \leq n \leq N, \quad k_i \geq 1, \quad k_1 + \ldots + k_n \leq T, \quad v_p(k_1 \ldots k_n) = v_p(M).$$

Il est clair que l'on peut prendre les k_i de la forme $k_i = p^{\alpha_i}$, $\alpha_i \geq 1$, et qu'alors $v_p(M) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Si $p > T/N$, des inégalités $p^{\alpha_i} \geq \alpha_i p$ et $p^{\alpha_1} + \ldots + p^{\alpha_n} \leq T$ on déduit

$$v_p(M) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq T/p.$$

Si $p \leq T/N$, soit $n \leq N$ maximal tel qu'il existe des $\alpha_i \geq 1$ satisfaisant

$$p^{\alpha_1} + \ldots + p^{\alpha_n} \leq T \quad \text{et} \quad v_p(M) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Dans le but de prouver $n = N$, supposons $n < N$. Dans ce cas tous les α_i valent 1. En effet, pour $\alpha \geq 2$ on a $p^\alpha \geq p + p^{\alpha-1}$, de sorte que si (par exemple) $\alpha_n \geq 2$ l'inégalité

$$p^{\alpha_1} + \ldots + p^{\alpha_n - 1} + p \leq T$$

contredit le caractère maximal de n (notons que le nombre de termes de cette somme est bien majoré par N car $n < N$). Par conséquent on obtient

$$N > n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = v_p(M).$$

Or $v_p(M) \geq N$, puisque $Np \leq T$ et Np correspond à une somme de N termes égaux à p. Cela fournit une contradiction et prouve que $n = N$. L'inégalité arithmético-géométrique laisse alors

$$\sqrt[N]{p^{\alpha_1} \ldots p^{\alpha_N}} \leq T/N,$$

et par suite

$$v_p(M) \leq N \log_p \frac{T}{N}.$$

Les seuls facteurs premiers de M étant les p tels que $p \leq T$, on a

$$\begin{aligned}\log M = \sum_{p \leq T} v_p(M) \log p &\leq \sum_{p \leq T/N} N \log \frac{T}{N} + \sum_{T/N < p \leq T} \frac{T}{p} \log p \\ &\leq N\pi\left(\frac{T}{N}\right) \log \frac{T}{N} + T \sum_{T/N < p \leq T} \frac{\log p}{p},\end{aligned}$$

où $\pi(x)$ désigne classiquement le nombre de nombres premiers plus petits que x.

Les théorèmes 2, 6 et 21 de [15] donnent (où E est une constante absolue) :

$$\pi(x) \leq 1.3 \frac{x}{\log x} \quad \text{pour } x > 1,$$

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} < \log x + E + \frac{1}{2\log x} \qquad \text{pour } x \ge 319,$$

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} > \log x + E - \frac{1}{2\log x} \qquad \text{pour } x > 1,$$

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} > \log x + E \qquad \text{pour } 0 < x \le 10^8.$$

On en déduit que pour $y \ge 5000$:

$$x \ge 10^8 \ \Rightarrow \ \sum_{x<p\le y}\frac{\log p}{p} < \log\frac{y}{x} + \frac{1}{2\log 5000} + \frac{1}{2\log 10^8},$$

$$x \le 10^8 \ \Rightarrow \ \sum_{x<p\le y}\frac{\log p}{p} < \log\frac{y}{x} + \frac{1}{2\log 5000}.$$

Ainsi dès que $0 < x \le y$, avec $y \ge 5000$, on a

$$\sum_{x<p\le y}\frac{\log p}{p} < \log\frac{y}{x} + \frac{1}{2\log 5000} + \frac{1}{2\log 10^8}.$$

Finalement, pour $T \ge 5000$,

$$\begin{aligned}\log M &\le 1.3\, N \log\frac{T}{N}\cdot\frac{T/N}{\log(T/N)} + T\log N + \left(\frac{1}{2\log 5000} + \frac{1}{2\log 10^8}\right)T\\ &\le T\log(4N).\end{aligned}$$

Un calcul sur machine permet de vérifier que cette inégalité reste valable pour $1 \le T \le 5000$.

Remarque. On peut démontrer le comportement asymptotique suivant :

$$\lim_{\log T/\log N\to\infty}\left(\frac{1}{T}\log M_T(N) - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right) = 0.$$

1.3. *Type de fonctions « elliptiques ».* On introduit les trois fonctions suivantes, qui sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ entier :

$$f_1(z) = \sigma(z)^2\wp(z), \qquad f_2(z) = \sigma(z)\left(\zeta(z) - \frac{\eta}{\omega}z\right), \qquad f_3(z) = \sigma(z).$$

Lemme 1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\log|\sigma(z)| \le A(\Omega) + B(\Omega)|z|^2,$$

avec

$$A(\Omega) = 0.973 + \frac{1}{8}\log^+|j| - \frac{1}{12}\log|\Delta|, \qquad B(\Omega) = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\eta_1}{\omega_1}\right| + \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(\Omega)}\right).$$

Preuve. Pour $z = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \mathbb{C}$, avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ on définit $\eta_z = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$; on note alors

$$\lambda(z) = \tfrac{1}{2}\Re(z\eta_z) - \log|\sigma(z)| - \tfrac{1}{12}\log|\Delta|,$$

et on a l'estimation suivante qui se déduit de la proposition 5.4 de [17] :

$$-0.973 - \tfrac{1}{8}\log^+|j| \le \lambda(z),$$

ce qui nous laisse $\log|\sigma(z)| \le A(\Omega) + \frac{1}{2}\Re(z\eta_z)$, où

$$A(\Omega) = 0.973 + \tfrac{1}{8}\log^+|j| - \tfrac{1}{12}\log|\Delta|.$$

Remarquons que par la formule de Legendre

$$\eta_1 z - \eta_z\omega_1 = a_2(\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1) = 2i\pi a_2,$$

ce qui donne

$$z\eta_z = \frac{\eta_1}{\omega_1}z^2 - \frac{2i\pi a_2}{\omega_1}z.$$

Par ailleurs $\Re\big(\frac{2i\pi a_2}{\omega_1}z\big) = -2\pi a_2^2\Im\big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\big)$, et $a_2^2\Im\big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\big)^2 \le \big|\frac{z}{\omega_1}\big|^2$, de sorte que

$$a_2^2\Im\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \le \frac{|z|^2}{|\omega_1|^2\Im(\omega_2/\omega_1)} = \frac{|z|^2}{\mathrm{Vol}(\Omega)}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\Re(z\eta_z) \le \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\eta_1}{\omega_1}\right| + \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(\Omega)}\right)|z|^2 = B(\Omega)|z|^2,$$

puis

$$\log|\sigma(z)| \le A(\Omega) + B(\Omega)|z|^2.$$

Proposition 2. *Pour $i = 1, 2, 3$ et $z \in \mathbb{C}$ on a*

$$\log|f_i(z)| \le A_i(\Omega) + B_i(\Omega)|z|^2,$$

où

$$A_1(\Omega) = 2A(\Omega) + 2B(\Omega)\left|\frac{\omega}{3}\right|^2 + \log\left(\left|\wp\left(\frac{\omega}{3}\right)\right| + \frac{1}{|\sigma(\omega/3)|^2}\right),\ B_1(\Omega) = 2B(\Omega),$$

$$A_2(\Omega) = A(\Omega) + \log\left(\left|\frac{\eta}{\omega}\right| + 1\right) + 2B(\Omega), \qquad B_2(\Omega) = 2B(\Omega) + \frac{1}{2},$$

$$A_3(\Omega) = A(\Omega), \qquad B_3(\Omega) = B(\Omega).$$

Preuve. La relation ([7, Theorem 2, p. 243])

$$\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega}{3}\right) = -\frac{\sigma(z+\omega/3)\sigma(z-\omega/3)}{\sigma(\omega/3)^2\sigma(z)^2},$$

laisse

$$f_1(z) = \sigma(z)^2 \wp\left(\frac{\omega}{3}\right) - \frac{\sigma(z+\omega/3)\sigma(z-\omega/3)}{\sigma(\omega/3)^2},$$

ce qui donne l'estimation voulue pour $i = 1$ via le lemme 1.

La formule de Cauchy nous donne $\log|\sigma'(z)| \le A(\Omega) + B(\Omega)(|z|+1)^2$, et puisque ζ est la dérivée logarithmique de σ, on trouve

$$\begin{aligned} |f_2(z)| &\le |\sigma'(z)| + \left|\frac{\eta}{\omega}\right| |z| \exp(A(\Omega) + B(\Omega)|z|^2) \\ &\le \left(1 + \left|\frac{\eta}{\omega}\right|\right) \exp\left(A(\Omega) + B(\Omega)(|z|+1)^2 + \frac{1}{2}|z|^2\right) \\ &\le \left(1 + \left|\frac{\eta}{\omega}\right|\right) \exp\left(A(\Omega) + 2B(\Omega) + \left(2B(\Omega) + \frac{1}{2}\right)|z|^2\right), \end{aligned}$$

en remarquant que $(|z|+1)^2 \le 2(|z|^2+1)$ et $\log|z| \le \frac{1}{2}|z|^2$. D'où le résultat pour $i = 2$.

Le cas $i = 3$ est traité dans le lemme 1.

1.4. *Un théorème de P. Philippon.* Dans ce paragraphe on réécrit le théorème 1 de [11] dans un cadre simplifié. Commençons par quelques notations : Si $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{C}$ on note $|S| = \sup_{(k,z)\in S} |z|$ et

$$H_R(S) = \max_{(k,z)\in S} (1, (R-|z|)^{-k}), \quad \text{avec } R > |S|, \quad G_R(S) = \left(66\,\frac{R}{\delta M^{1/2}}\right)^{N-1},$$

où

$$N = \operatorname{Card} S, \quad M = \operatorname{Card}\{z \in \mathbb{C} \mid \exists k : (k,z) \in S\},$$
$$\delta = \min_{(k,z),(k',z')\in S,\, z\neq z'} (1, |z-z'|).$$

Soient $f_1, \ldots, f_d$ $(d \ge 2)$ des fonctions entières telles que

$$|z| \le r \;\Rightarrow\; \log|f_i(z)| \le \varpi(r),$$

où ϖ est une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}^d$, de cardinal $\operatorname{Card}\mathcal{D} = L$. On pose

$$\mathcal{D}\varpi = \max_{\underline{h}\in\mathcal{D}} (h_1 + \ldots + h_d)\varpi,$$

et pour $(k,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$ on note

$$\underline{f}^{\mathcal{D}}((k,z)) = \left(\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}(f_1^{h_1} \ldots f_d^{h_d})(z)\right)_{(h_1,\ldots,h_d)\in\mathcal{D}}.$$

On se donne de plus un corps de nombres $K \subset \mathbb{C}$ de degré a, des nombres réels R, N, E, ϱ, Φ positifs et $\widetilde{U} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; on suppose qu'il existe des ensembles $\emptyset = S_0, S_1, \ldots \subset \mathbb{N} \times \mathbb{C}$, $S'_1, S'_2, \ldots \subset \mathbb{N} \times \mathbb{C}$ tels que

$$(k,z) \in S'_i \;\Rightarrow\; \{0, \ldots, k\} \times \{z\} \subset S'_i,$$

les composantes complexes des points de S'_i n'étant pas alignées, vérifiant les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_R : \quad |S_{i+1}| < R, \\ &\mathrm{C}_{N,R} : \quad \operatorname{Card} S'_i \le N, \quad |S'_i| \le R, \\ &\mathrm{C}_E : \quad E \ge H_R(S_{i+1}) e^{-\operatorname{Card} S'_i}. \end{aligned}$$

Pour tout $i \ge 0$ et $x \in S_{i+1}$ on suppose qu'il existe $m_{i+1,x} \in K^L$ et $\lambda_{i+1,x} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathrm{C}_{\widetilde{U}} : \quad \begin{cases} \log \Big| \underline{f}^{\mathcal{D}}(x) - \lambda_{i+1,x} m_{i+1,x} - \displaystyle\sum_{\substack{j \le i \\ y \in S_j}} \widetilde{\mu}_{j,y} m_{j,y} \Big| \le -\widetilde{U}, \\ \forall x' \in S'_i \\ \log \Big| \underline{f}^{\mathcal{D}}(x') - \displaystyle\sum_{\substack{j \le i \\ y \in S_j}} \widetilde{\mu}'_{j,y} m_{j,y} \Big| \le -\widetilde{U} - \log(G_R(S'_i) H_R(S_{i+1})), \end{cases}$$

où $\widetilde{\mu}_{j,y} \in \mathbb{C}$ (respectivement $\widetilde{\mu}'_{j,y} \in \mathbb{C}$) dépend de (i,x) (respectivement de (i,x')).

On suppose enfin que pour tout $i \ge 0$ et $x \in S_{i+1}$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_{\varPhi} : \quad h(m_{i+1,x}) \le \varPhi, \\ &\mathrm{C}_{\varrho} : \quad \log \max(|m_{i+1,x}|, |\lambda_{i+1,x}|^{-1}) \le \varrho. \end{aligned}$$

Enfin, on note $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $m_{i,x}$ quand (i,x) parcourt $\bigcup_{k \ge 1} \{k\} \times S_k$.

Sous ces hypothèses on a :

Théorème 1 (P. Philippon). *Si* $L > \operatorname{Card} S_1$ *et si*

$$\mathrm{C}_1 : \quad \min(-\log E - \mathcal{D}\omega(2eR), \widetilde{U}) > (a\varPhi + \varrho + \varDelta) \frac{L}{L - \operatorname{Card} S_1},$$

où $\varDelta = (a+2)\log(2L) + \log^+(2N)$, *alors*

$$\operatorname{rang} \mathcal{M}_{\mathcal{D}} < L.$$

Cet énoncé est la retranscription du théorème 1 de [11] où l'on a pris (avec les notations de [11]) $A_i = A = K_i = K$, $C = \mathbb{C}$, $\eta_0 = 1$ (cas archimédien), $n = 1$ (une variable), $\eta = 1$ ($H(2) = 2$), et un rayon d'analycité infini. Les fonctions $U, \varPhi, \delta, \varrho, r', E, N$ de [11] sont ici supposées constantes, avec de plus $\delta = 1$ ($K_i = K$), $r' = R$, $r = 2eR$.

Puisque $n = 1$ le terme $\overline{E}_R$ n'apparaît pas dans la contrainte C_E, et $\delta = 1$ nous permet d'éliminer la contrainte C_δ qui est automatiquement vérifiée. Par ailleurs $K_i = K$ laisse $\operatorname{Plg}(K_i/K_0) = \{\mathrm{id}\}$ et dans ce cas la contrainte C_U se réduit à celle énoncée. De plus, la taille $\overline{T}$ de [11] coïncide avec h. Enfin, l'estimation G_R de la « gravitation » utilisée ici est due à Reyssat [14], et est valable dans le cas $\eta_0 = 1$, $C = \mathbb{C}$ qui nous intéresse.

Notons que les logarithmes utilisés ici sont en base e, contrairement à [11] où ils sont en base 2.

1.5. *Une estimation de D. Masser.* Nous énonçons à présent une estimation due à D. Masser [8] :

THÉORÈME 2 (D. Masser). *Soit Ω un réseau de $\mathbb{C}$, et $\wp$ sa fonction de Weierstrass associée. On a alors*

$$|\wp'(z,\Omega)| \le \frac{M}{d(z,\Omega)^3},$$

où $d(z,\Omega)$ désigne la distance de z au réseau Ω et M est la constante absolue

$$M = \frac{\Gamma(1/3)^9}{(2\pi\sqrt{3})^3} \approx 5.51 < 6.$$

De plus il y a égalité si et seulement si

$$\Omega = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}e^{2i\pi/3}, \qquad z = \pm\tfrac{1}{3}(2 + e^{2i\pi/3}) \textit{ modulo } \Omega.$$

2. Démonstration du théorème A. On se donne $\underline{\alpha} = (1, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{P}_2(\overline{\mathbb{Q}})$ et on note

$$\underline{\theta} = (1, \pi/\omega, \eta/\omega) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}).$$

On se place dans le corps de nombres

$$K = \mathbb{Q}(i, \alpha_1, \alpha_2, g_2, \wp(\omega/3), \wp'(\omega/3)).$$

La parité, la périodicité de la fonction $\wp$ et la formule de duplication laissent

$$\wp(\omega/3) = \wp(2\omega/3) = -2\wp(\omega/3) + \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(6\wp(\omega/3)^2 - \frac{1}{2}g_2\right)^2}{4\wp(\omega/3)^3 - g_2\wp(\omega/3) - g_3},$$

ce qui implique que $\wp(\omega/3)$ est racine du polynôme

$$X^4 - \tfrac{1}{2}g_2X^2 - g_3X - \tfrac{1}{48}g_2^2.$$

La relation $\wp'(\omega/3)^2 = 4\wp(\omega/3)^3 - g_2\wp(\omega/3) - g_3$ montre alors que $g_3 \in K$ et que

$$a = [K:\mathbb{Q}] \le 2\cdot 2\cdot 4\cdot d(\underline{\alpha})d(\underline{g}),$$

où $d(\underline{g}) = [\mathbb{Q}(g_2, g_3) : \mathbb{Q}]$.

L'idée (due à Chudnovsky) est de considérer $\wp$ comme variable au voisinage de $\omega/3$ au lieu de z. Pour cela on définit u par

$$\wp = \wp(\omega/3) + u\wp'(\omega/3),$$

et on a alors

$$\frac{dz}{d\wp} = \frac{1}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}, \qquad \frac{d\zeta}{d\wp} = \frac{-\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}},$$

où la racine carrée est choisie de sorte que

$$\sqrt{4\wp(\omega/3)^3 - g_2\wp(\omega/3) - g_3} = \wp'(\omega/3).$$

Or en utilisant $\wp'(\omega/3)^2 = 4\wp(\omega/3)^3 - g_2\wp(\omega/3) - g_3$ et $\wp''(\omega/3) = 6\wp(\omega/3)^2 - \frac{1}{2}g_2$, on calcule aisément que

$$\begin{aligned}
&4\wp^3 - g_2\wp - g_3\\
&\qquad = 4(\wp(\omega/3) + \wp'(\omega/3)u)^3 - g_2(\wp(\omega/3) + \wp'(\omega/3)u) - g_3\\
&\qquad = \wp'(\omega/3)^2\left(1 + 2\,\frac{\wp''(\omega/3)}{\wp'(\omega/3)}\,u + 12\wp(\omega/3)u^2 + 4\wp'(\omega/3)u^3\right).
\end{aligned}$$

Définissons

$$\lambda_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

de sorte que $1/\sqrt{1+z} = \sum_n \lambda_n z^n$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
&\frac{\wp'(\omega/3)}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}\\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left(2\,\frac{\wp''(\omega/3)}{\wp'(\omega/3)}\,u + 12\wp\left(\frac{\omega}{3}\right)u^2 + 4\wp'\left(\frac{\omega}{3}\right)u^3\right)^n\\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j+k+l=n} \lambda_n \frac{n!}{j!k!l!}\left(2\,\frac{\wp''(\omega/3)}{\wp'(\omega/3)}\right)^j \left(12\wp\left(\frac{\omega}{3}\right)\right)^k \left(4\wp'\left(\frac{\omega}{3}\right)\right)^l u^{j+2k+3l}\\
&\quad = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{i+1}u^i,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma_{i+1} = &\sum_{j+2k+3l=i} \lambda_{j+k+l}\,\frac{(j+k+l)!}{j!k!l!}\,2^{j+2k+2l}3^k\\
&\times \left(\frac{\wp''(\omega/3)}{\wp'(\omega/3)}\right)^j \wp\left(\frac{\omega}{3}\right)^k \wp'\left(\frac{\omega}{3}\right)^l,
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\left(\zeta - \frac{\eta}{\omega}z\right) &= \wp'\left(\frac{\omega}{3}\right)\frac{d}{d\wp}\left(\zeta - \frac{\eta}{\omega}z\right)\\
&= -\left(\wp\left(\frac{\omega}{3}\right) + \frac{\eta}{\omega} + \wp'\left(\frac{\omega}{3}\right)u\right)\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i u^{i-1}\\
&= -\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(\wp\left(\frac{\omega}{3}\right) + \frac{\eta}{\omega}\right)\gamma_i + \wp'\left(\frac{\omega}{3}\right)\gamma_{i-1}\right]u^{i-1},
\end{aligned}$$

avec la convention $\gamma_0 = 0$. En intégrant on trouve donc

$$\zeta - \frac{\eta}{\omega} z = \gamma_{-1} - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\wp\left(\frac{\omega}{3}\right) + \frac{\eta}{\omega} \right) \gamma_i + \wp'\left(\frac{\omega}{3}\right) \gamma_{i-1} \right] \frac{u^i}{i},$$

où $\gamma_{-1} = \zeta(\omega/3) - \eta/3$.

Pour $\underline{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{N}^2$, $t \in \mathbb{N}$, et $\underline{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$q_{\underline{h},(t,\underline{s})} = \frac{1}{t!} \frac{d^t}{du^t} \left(\wp^{h_1} \left(\zeta - \frac{\eta}{\omega} z + \frac{2i\pi(a_1 s_2 - a_2 s_1)}{\omega} \right)^{h_2} \right) \bigg|_{u=0}.$$

Proposition 3. *Soient $D_1, D_2, M, T \in \mathbb{N}^*$, avec $M, D_2 \geq 3$. Si $h_1 \leq D_1$, $h_2 \leq D_2$, $0 \leq s_1, s_2 < M$ et $0 \leq t \leq T$, alors*

$$q_{\underline{h},(t,\underline{s})} = Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}(\pi/\omega, \eta/\omega),$$

avec

$$Q_{\underline{h},(t,\underline{s})} \in K[X,Y], \qquad \deg Q_{\underline{h},(t,\underline{s})} \leq D_2,$$
$$\log L(Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}) \leq (3 + \log(32 c_1 \|\mathcal{P}\|_\infty))(D_1 + T + D_2 \log(TM)).$$

De plus, notant $h(Q_{\mathcal{D},(t,\underline{s})})$ la hauteur absolue de la famille des coefficients de tous les polynômes $Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}$, $h_1 \leq D_1$, $h_2 \leq D_2$, on a

$$h(Q_{\mathcal{D},(t,\underline{s})}) \leq c_4(D_1 + T \log D_2 + D_2 \log(TM)),$$

où $c_4 = 6 + \log c_1 + h(\mathcal{P})$.

Preuve. La démonstration de la proposition est reportée à la section suivante.

La quasi-périodicité de ζ et la relation de Legendre montrent alors que pour $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
&\zeta(z + s_1\omega_1 + s_2\omega_2) - \frac{\eta}{\omega}(z + s_1\omega_1 + s_2\omega_2) \\
&\qquad = \zeta(z) - \frac{\eta}{\omega} z + s_1\eta_1 + s_2\eta_2 - \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2}{a_1\omega_1 + a_2\omega_2}(s_1\omega_1 + s_2\omega_2) \\
&\qquad = \zeta(z) - \frac{\eta}{\omega} z + \frac{s_1\eta_1 a_2\omega_2 + s_2\eta_2 a_1\omega_1 - s_2\eta_1 a_1\omega_2 - s_1\eta_2 a_2\omega_1}{a_1\omega_1 + a_2\omega_2} \\
&\qquad = \zeta(z) - \frac{\eta}{\omega} z + \frac{2i\pi(a_2 s_1 - a_1 s_2)}{\omega},
\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire, à l'aide de la formule de Faà-de-Bruno ([1, chap. I, §3, exercice 7]),

$$\frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \left(\wp^{h_1} \left(\zeta - \frac{\eta}{\omega} z \right)^{h_2} \right) \bigg|_{z = \omega/3 + s_1\omega_1 + s_2\omega_2}$$

$$= \frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}\left(\wp^{h_1}\left(\zeta - \frac{\eta}{\omega}z + \frac{2i\pi}{\omega}(a_2s_1 - a_1s_2)\right)^{h_2}\right)\Big|_{z=\omega/3}$$

$$= \sum_{t'=0}^{j}\left(\frac{1}{t'!}\frac{d^{t'}}{du^{t'}}\left(\wp^{h_1}\left(\zeta - \frac{\eta}{\omega}z + \frac{2i\pi}{\omega}(a_2s_1 - a_1s_2)\right)^{h_2}\right)\Big|_{u=0}\right.$$

$$\left.\times \sum_{\substack{\tau_1+\ldots+\tau_{t'}=j\\ \tau_i\ge 1}}\prod_{i=1}^{t'}\frac{1}{\tau_i!}\frac{d^{\tau_i}u}{dz^{\tau_i}}\Big|_{z=\omega/3}\right)$$

$$= \sum_{t'=0}^{j} Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}\left(\frac{\pi}{\omega},\frac{\eta}{\omega}\right)\sum_{\substack{\tau_1+\ldots+\tau_{t'}=j\\ \tau_i\ge 1}}\prod_{i=1}^{t'}\frac{1}{\tau_i!}\frac{d^{\tau_i}(\wp/\wp'(\omega/3))}{dz^{\tau_i}}\Big|_{z=\omega/3},$$

et la règle de Leibniz laisse alors

$$\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}\left(\sigma^{2D_1+D_2}\wp^{h_1}\left(\zeta - \frac{\eta}{\omega}z\right)^{h_2}\right)\Big|_{z=\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2} = \sum_{t'=0}^{t}\mu_{t',t,\underline{s}}Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}\left(\frac{\pi}{\omega},\frac{\eta}{\omega}\right),$$

où

$$\mu_{t',t,\underline{s}} = \sum_{j=t'}^{t}\left(\frac{1}{(t-j)!}\frac{d^{t-j}(\sigma^{2D_1+D_2})}{dz^{t-j}}\Big|_{z=\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2}\right.$$

$$\left.\times \sum_{\substack{\tau_1+\ldots+\tau_{t'}=j\\ \tau_i\ge 1}}\prod_{i=1}^{t'}\frac{1}{\tau_i!}\frac{d^{\tau_i}(\wp/\wp'(\omega/3))}{dz^{\tau_i}}\Big|_{z=\omega/3}\right).$$

PROPOSITION 4. *On a*

$$\log\sum_{t'=0}^{t}|\mu_{t',t,\underline{s}}| \le c_7(t + (D_1 + D_2)M^2)$$

avec $c_7 = \max(c_5, c_6 + \log 2)$, *où*

$$c_6 = \log\left(\frac{2}{d(\omega/3,\Omega)}\max\left(\frac{24}{|\wp'(\omega/3)|d(\omega/3,\Omega)^2},1\right)\right),$$
$$c_5 = 2(A(\Omega) + B(\Omega)(|\omega|/3 + |\omega_1| + |\omega_2| + 1)^2).$$

Preuve. Le théorème de Masser [8, §1.5, théorème 2] et la formule de Cauchy appliquée à $\wp'$ sur le cercle de centre $\omega/3$ et de rayon $\frac{1}{2}d(\omega/3,\Omega)$

donnent

$$\left|\frac{1}{\tau_i!}\cdot\frac{1}{\wp'(\omega/3)}\frac{d^{\tau_i}\wp}{dz^{\tau_i}}\left(\frac{\omega}{3}\right)\right| \le \frac{6\left(\frac{1}{2}d(\omega/3,\Omega)\right)^{-3}}{|\wp'(\omega/3)|\left(\frac{1}{2}d(\omega/3,\Omega)\right)^{\tau_i-1}} \le e^{c_6\tau_i}$$

avec

$$c_6 = \log\left(\frac{2}{d(\omega/3,\Omega)}\max\left(\frac{24}{|\wp'(\omega/3)|d(\omega/3,\Omega)^2},1\right)\right).$$

La formule de Cauchy appliquée à $\sigma^{2D_1+D_2}$ sur le cercle de rayon 1 et de centre $\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2$ donne, en utilisant le lemme 1,

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{1}{k!}\frac{d^k\sigma^{2D_1+D_2}}{dz^k}\Big|_{z=\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2}\right| &\le (2D_1+D_2)(A(\Omega)+B(\Omega)(|\omega|/3+M(|\omega_1|+|\omega_2|)+1)^2)\\ &\le c_5(D_1+D_2)M^2,\end{aligned}$$

avec $c_5 = 2(A(\Omega)+B(\Omega)(|\omega|/3+|\omega_1|+|\omega_2|+1)^2)$.

Calculons à présent le nombre de termes dans la somme définissant $\mu_{t',t,\underline{s}}$, c'est-à-dire

$$N = \sum_{j=t'}^{t}\sum_{\substack{\tau_1+\ldots+\tau_{t'}=j\\ \tau_i\ge 1}} 1.$$

Il est clair que

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{t'} = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\tau_1+\ldots+\tau_{t'}=j\\ \tau_i\ge 1}} 1\Big)x^j,$$

et puisque par ailleurs

$$x^{t'}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{t'} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+t'-1)!}{(t'-1)!n!}\,x^{n+t'},$$

on obtient

$$\sum_{\substack{\tau_1+\ldots+\tau_{t'}=j\\ \tau_i\ge 1}} 1 = \frac{(j-1)!}{(t'-1)!(j-t')!} = \binom{j-1}{t'-1}.$$

De plus, grâce à la formule de Pascal,

$$\begin{aligned}\sum_{j=t'}^{t}\binom{j}{t'} &= \sum_{j=t'}^{t}\left(\binom{j-1}{t'-1}+\binom{j-1}{t'}\right)\\ &= \sum_{j=t'}^{t}\binom{j-1}{t'-1}+\sum_{j=t'}^{t}\binom{j}{t'}-\binom{t}{t'},\end{aligned}$$

ce qui laisse

$$N = \sum_{j=t'}^{t} \binom{j-1}{t'-1} = \binom{t}{t'}.$$

Par conséquent on a $|\mu_{t',t,\underline{s}}| \le e^{c_5(D_1+D_2)M^2+c_6 t}\binom{t}{t'}$, et ainsi $\sum_{t'=0}^{t} |\mu_{t',t,\underline{s}}| \le e^{c_5(D_1+D_2)M^2+c_6 t+t\log 2}$, ce qui termine la preuve.

À présent on va appliquer le théorème 1. On prend les trois fonctions f_1, f_2, f_3 du §1.3, qui sont du type (proposition 2)

$$\varpi(r) = a(\Omega) + b(\Omega)r^2, \qquad a(\Omega) = \max_{i=1,2,3} A_i(\Omega), \qquad b(\Omega) = \max_{i=1,2,3} B_i(\Omega).$$

On se donne $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ et on pose $U = -\log \mathrm{Dist}(\underline{\theta}, \underline{\alpha})$, ainsi que $(1, \theta_1, \theta_2) = (1, \pi/\omega, \eta/\omega)$. On suppose que

$$\mathrm{Dist}(\underline{\theta}, \underline{\alpha}) \le \frac{1}{2\|\underline{\theta}\|},$$

ce qui donne $\|\underline{\alpha}\| \le 2\|\underline{\theta}\|$ puisque

$$\frac{\|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\|}{\|\underline{\theta}\| \cdot \|\underline{\alpha}\|} \le \mathrm{Dist}(\underline{\theta}, \underline{\alpha}).$$

Remarquons qu'alors $\|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\| \le 2\|\underline{\theta}\|^2 e^{-U}$.

On se donne $M,\ D_2,\ D_1$ et $T > T_0$, des entiers non nuls tels que

$$M \ge 3, \qquad D_2 \ge 4. \tag{1}$$

On prend comme monômes :

$$\mathcal{D} = \{\underline{h} \in \mathbb{N}^3 \mid h_1 \le D_1,\ h_2 \le D_2,\ h_3 = 2(D_1 - h_1) + D_2 - h_2\},$$

ainsi $L = \mathrm{Card}\,\mathcal{D} = (D_1+1)(D_2+1)$ et

$$\mathcal{D}\varpi(r) = (2D_1 + D_2)(a(\Omega) + b(\Omega)r^2).$$

Rappelons que $K = \mathbb{Q}(i, \alpha_1, \alpha_2, g_2, \wp(\omega/3), \wp'(\omega/3))$. On pose de plus

$$\Omega(M) = \{s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \mid 0 \le s_1, s_2 < M\},$$

et $(\Omega(M) + \mathbb{Z}\omega)/(\mathbb{Z}\omega)$ est identifié à un système de représentants pris dans $\Omega(M)$, dont le cardinal est alors majoré par $c_1 M$. En effet, tout élément $s_1\omega_1 + s_2\omega_2$ de $\Omega(M)$ est égal modulo $\mathbb{Z}\omega$ à un point du réseau de la forme $r\omega_1 + t\omega_2$ avec $t = s_2 \pm q a_2$, où q et r sont le quotient et le reste de la division de s_1 par $|a_1|$. Ainsi $0 \le r < |a_1|$ et t est dans un intervalle semi-ouvert de longueur inférieure à $M(1 + |a_2/a_1|)$, ce qui laisse au plus

$$|a_1| M \left(1 + \left|\frac{a_2}{a_1}\right|\right) = c_1 M$$

possibilités pour $r\omega_1 + t\omega_2$.

On définit les ensembles S_i et S_i' ainsi :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{0,\dots,T_0-1\} \times \left\{\frac{\omega}{3} + \frac{\Omega(M)+\mathbb{Z}\omega}{\mathbb{Z}\omega}\right\},\\
S_i &= \{T_0+i-2\} \times \{\omega/3+\Omega(M)\} \qquad \text{si } 2 \le i \le T-T_0+1,\\
S_i' &= \{0,\dots,T_0-1\} \times \{\omega/3+\Omega(M)\} \quad\ \ \text{si } i \ge 1.
\end{aligned}$$

Soit $c_0 \geq 2$ une constante à déterminer ultérieurement. D_1 et M étant fixés, on prend

$$D_2 = [2c_0c_1M]+1, \qquad T_0 = [c_0D_1], \qquad T = 2^8c_1(T_0+1),$$

de sorte que $2\operatorname{Card} S_1 \le 2c_1T_0M \le 2c_1c_0D_1M < D_1D_2 < \operatorname{Card}\mathcal{D} = L$, ce qui laisse

$$\frac{\operatorname{Card} S_1}{L-\operatorname{Card} S_1} \le 1 \quad \text{et} \quad \frac{L}{L-\operatorname{Card} S_1} \le 2.$$

Contrainte C_R*.* Puisque

$$|S_{i+1}| \le |\omega|/3 + |s_1|\cdot|\omega_1| + |s_2|\cdot|\omega_2| \le \max(|\omega_1|,|\omega_2|)(2M+c_1/3),$$

on prend

$$R = \max(|\omega_1|,|\omega_2|)(2M+c_1/3)+1,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}\varpi(2eR)\\
&\qquad\le (a(\Omega)+b(\Omega)(2e\max(|\omega_1|,|\omega_2|)2(1+c_1/3)M+2e)^2)(2D_1+D_2)\\
&\qquad\le (a(\Omega)+b(\Omega)4e^2(2\max(|\omega_1|,|\omega_2|)(1+c_1/3)+1)^2M^2)(2D_1+D_2)\\
&\qquad\le c_{10}(D_1+D_2)M^2,
\end{aligned}$$

avec $c_{10} = 2(a(\Omega)+b(\Omega)4e^2(2\max(|\omega_1|,|\omega_2|)(1+c_1/3)+1)^2)$.

Contrainte $\mathrm{C}_{N,R}$*.* L'inégalité $|S_i'| \le R$ est vérifiée, et de plus $\operatorname{Card} S_i' = T_0M^2$. On prend donc $N = T_0M^2$.

Contrainte C_E*.* Si $(k,z) \in S_i$, on a $|z| \le R-1$, par conséquent $H_R(S_{i+1}) = 1$. Ainsi la contrainte C_E est satisfaite en prenant $-\log E = N = T_0M^2$.

Contrainte $\mathrm{C}_{\widetilde{U}}$*.* Afin de simplifier les notations on notera provisoirement $\delta = \min_{\omega'\in\Omega\setminus\{0\}}(1,|\omega'|)$. La gravitation $G_R(S_i')$ devient alors

$$\begin{aligned}
G_R(S_i') &= \left(66\,\frac{R}{\delta}\cdot\frac{1}{M}\right)^{T_0M^2-1}\\
&= \left(\frac{\max(|\omega_1|,|\omega_2|)}{\delta}\left(132+\frac{66c_1}{3M}+\frac{66}{\max(|\omega_1|,|\omega_2|)M}\right)\right)^{T_0M^2-1}\\
&\le \left(133\,\frac{\max(|\omega_1|,|\omega_2|)}{\delta}\right)^{T_0M^2-1} \le e^{c_{12}T_0M^2},
\end{aligned}$$

en supposant

$$M \geq 22c_1 + \frac{66}{\max(|\omega_1|, |\omega_2|)}, \tag{2}$$

$$c_{12} = \log^+\left(133\,\frac{\max(|\omega_1|, |\omega_2|)}{\min_{\omega' \in \Omega\setminus\{0\}}(1, |\omega'|)}\right).$$

Soit $i \geq 0$ et $x \in S_{i+1}$, on peut écrire

$$x = (t, \omega/3 + s_1\omega_1 + s_2\omega_2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq T_0 - 1 & \text{si } i = 0, \\ t = T_0 + i - 1 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

On pose alors

$$m_{i+1,x} = (Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}(\alpha_1, \alpha_2))_{\underline{h}\in\mathcal{D}}, \qquad \lambda_{i+1,x} = \mu_{t,t,\underline{s}}.$$

D'après la définition des $\mu_{t',t,\underline{s}}$, on a

$$\underline{f}^{\mathcal{D}}(x) = \Big(\sum_{t'=0}^{t} \mu_{t',t,\underline{s}} Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\pi/\omega, \eta/\omega)\Big)_{\underline{h}\in\mathcal{D}}.$$

Or $(\sum_{t'=0}^{t} \mu_{t',t,\underline{s}} Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\alpha_1, \alpha_2))_{\underline{h}\in\mathcal{D}}$ est de la forme

$$\lambda_{i+1,x} m_{i+1,x} + \sum_{\substack{j\leq i \\ y\in S_j}} \widetilde{\mu}_{j,y} m_{j,y},$$

où certains $\widetilde{\mu}_{j,y}$ sont des $\mu_{t',t,\underline{s}}$ tandis que les autres sont nuls. Remarquons que si $x' \in S'_i$, alors $x' = (t, \omega/3 + s_1\omega_1 + s_2\omega_2)$ avec $0 \leq t \leq T_0 - 1$, et ainsi

$$\underline{f}^{\mathcal{D}}(x') = \Big(\sum_{t'=0}^{t} \mu_{t',t,\underline{s}} Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\pi/\omega, \eta/\omega)\Big)_{\underline{h}\in\mathcal{D}};$$

de plus $(\sum_{t'=0}^{t} \mu_{t',t,\underline{s}} Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\alpha_1, \alpha_2))_{\underline{h}\in\mathcal{D}}$ est de la forme

$$\sum_{\substack{j\leq i \\ y\in S_j}} \widetilde{\mu}'_{j,y} m_{j,y},$$

où certains $\widetilde{\mu}'_{j,y}$ sont des $\mu_{t',t,\underline{s}}$ tandis que les autres sont nuls (en particulier ceux pour $j \geq 2$). Par conséquent, avec ce choix des $\widetilde{\mu}_{j,y}$ et $\widetilde{\mu}'_{j,y}$, les deux quantités à majorer dans la contrainte $\mathrm{C}_{\widetilde{U}}$ peuvent s'écrire

$$\log\Big|\sum_{t'=0}^{t} \mu_{t',t,\underline{s}}(Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\pi/\omega, \eta/\omega) - Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\alpha_1, \alpha_2))\Big|$$

avec $0 \leq s_1, s_2 < M$ et $0 \leq t \leq T_0 + i - 1$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |\theta_1^i - \alpha_1^i| &\leq |\theta_1 - \alpha_1| \sum_{k=0}^{i-1} |\theta_1|^{i-1-k}|\alpha_1|^k \\ &\leq |\theta_1 - \alpha_1| \sum_{k=0}^{i-1} \|\underline{\theta}\|^{i-1} 2^k \leq \|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\| \cdot \|\underline{\theta}\|^i 2^i, \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned}|\theta_1^i\theta_2^j-\alpha_1^i\alpha_2^j| &\le |\theta_2|^j|\theta_1^i-\alpha_1^i|+|\alpha_1|^i|\theta_2^j-\alpha_2^j|\\ &\le 2^i\|\underline{\theta}\|^{i+j}\|\underline{\theta}-\underline{\alpha}\|+2^{i+j}\|\underline{\theta}\|^{i+j}\|\underline{\theta}-\underline{\alpha}\|\\ &\le 2^{D_2+1}\|\underline{\theta}\|^{D_2}\|\underline{\theta}-\underline{\alpha}\|\\ &\le (3\|\underline{\theta}\|)^{D_2}\|\underline{\theta}-\underline{\alpha}\|.\end{aligned}$$

Ainsi, écrivant $Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}=\sum c_{i,j}X^iY^j$, on obtient

$$|Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\theta_1,\theta_2)-Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\alpha_1,\alpha_2)|\le(3\|\underline{\theta}\|)^{D_2}\|\underline{\theta}-\underline{\alpha}\|\sum_{i,j}|c_{i,j}|.$$

L'estimation de la longueur de $Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}$ donnée dans la proposition 3 permet de majorer $\log\sum|c_{i,j}|$ par

$$(3+\log(32c_1)+\log\|\mathcal{P}\|_\infty)(D_1+T+D_2\log(TM)),$$

ce qui laisse

$$\log|Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\theta_1,\theta_2)-Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\alpha_1,\alpha_2)|\le c_{13}(D_1+T+D_2\log(TM))-U,$$

avec $c_{13}=3+\log(32c_1)+\log(6\|\underline{\theta}\|^2)+\log\|\mathcal{P}\|_\infty$. Les quantités de la contrainte $\mathrm{C}_{\widetilde{U}}$ sont donc majorées par (proposition 4)

$$\begin{aligned}&\log\Big(\sum_{t'=0}^{t}|\mu_{t',t,\underline{s}}|e^{c_{13}(D_1+T+D_2\log(TM))-U}\Big)\\ &\qquad\le c_7(T+(D_1+D_2)M^2)+c_{13}(D_1+T+D_2\log(TM))-U\\ &\qquad\le(c_7+c_{13})(T+D_2\log T+(D_1+D_2)M^2)-U.\end{aligned}$$

Pour que la contrainte $\mathrm{C}_{\widetilde{U}}$ soit satisfaite, il suffit donc de prendre

$$\widetilde{U}=U-c_{11}(T+D_2\log T+(D_1+D_2+T_0)M^2)$$

avec $c_{11}=\max(c_{12},c_7+c_{13})$.

Contrainte C_Φ. Notons $Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}=\sum c_{i,j}X^iY^j$ pour $\underline{h}\in\mathcal{D}$. Si $v\nmid\infty$ on a

$$|Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}(\alpha_1,\alpha_2)|_v\le\max_{i,j}|c_{i,j}|_v\|\underline{\alpha}\|_v^{D_2},$$

ce qui laisse

$$\|m_{i+1,x}\|_v\le\|Q_{\mathcal{D},(t,\underline{s})}\|_v\|\underline{\alpha}\|_v^{D_2}\,;$$

et si $v\,|\,\infty$ il vient

$$\|m_{i+1,x}\|_v\le\frac{D_2(D_2+1)}{2}\|Q_{\mathcal{D},(t,\underline{s})}\|_v\|\underline{\alpha}\|_v^{D_2}.$$

Ainsi on obtient, par la proposition 3,

$$\begin{aligned}
h(m_{i+1,x}) &\le h(Q_{\mathcal{D},(t,\underline{s})}) + D_2 h(\underline{\alpha}) + \log \frac{D_2(D_2+1)}{2} \\
&\le c_4(D_1 + T\log D_2 + D_2 \log(TM)) + D_2 h(\underline{\alpha}) + \log \frac{D_2(D_2+1)}{2} \\
&\le \varPhi,
\end{aligned}$$

où $\varPhi = c_8(D_1 + T\log D_2 + D_2 h(\underline{\alpha}) + D_2 \log(TM))$ avec $c_8 = c_4 + 1$.

Contrainte C_ϱ. L'équation fonctionnelle de la fonction σ donne ([7, Theorem 1, p. 241])

$$\begin{aligned}
|\sigma(\omega/3 + s_1\omega_1 + s_2\omega_2)| &= |e^{(s_1\eta_1+s_2\eta_2)(\omega/3+s_1\omega_1/2+s_2\omega_2/2)}| \cdot |\sigma(\omega/3)| \\
&\ge e^{-|s_1\eta_1+s_2\eta_2|\cdot|\omega/3+s_1\omega_1/2+s_2\omega_2/2|}|\sigma(\omega/3)|,
\end{aligned}$$

ce qui laisse

$$\begin{aligned}
&\log\left|\sigma\left(\frac{\omega}{3} + s_1\omega_1 + s_2\omega_2\right)\right| \\
&\qquad\ge -M(|\eta_1|+|\eta_2|)\left(\frac{|\omega|}{3} + \frac{M}{2}(|\omega_1|+|\omega_2|)\right) + \log\left|\sigma\left(\frac{\omega}{3}\right)\right| \\
&\qquad\ge -(|\eta_1|+|\eta_2|)\left(\frac{|\omega|}{3} + \frac{|\omega_1|+|\omega_2|}{2}\right)M^2 + \log\left|\sigma\left(\frac{\omega}{3}\right)\right| \\
&\qquad\ge -c_{14}M^2
\end{aligned}$$

avec $c_{14} = (|\eta_1|+|\eta_2|)(|\omega|/3 + (|\omega_1|+|\omega_2|)/2) - \log\min(|\sigma(\omega/3)|, 1)$. Ainsi, puisque $\lambda_{i+1,x} = \sigma(\omega/3 + s_1\omega_1 + s_2\omega_2)^{2D_1+D_2}$, on trouve

$$-\log|\lambda_{i+1,x}| \le c_{14}(2D_1 + D_2)M^2.$$

Par ailleurs en utilisant l'estimation de la longueur de $Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}$ donnée par la proposition 3, on trouve

$$\begin{aligned}
\log|Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}(\alpha_1,\alpha_2)| &\le \log\sum|c_{i,j}|\cdot\|\underline{\alpha}\|^{i+j} \\
&\le D_2\log(2\|\underline{\theta}\|) + \log\sum|c_{i,j}| \\
&\le (3 + \log(64c_1\|\underline{\theta}\|\cdot\|\mathcal{P}\|_\infty))(D_1 + T + D_2\log(TM)) \\
&\le (3 + \log(64c_1\|\underline{\theta}\|\cdot\|\mathcal{P}\|_\infty))((D_1+D_2)M^2 + T + D_2\log T).
\end{aligned}$$

On prend donc

$$\varrho = c_9((D_1+D_2)M^2 + T + D_2\log T),$$

avec $c_9 = \max(3 + \log(64c_1\|\underline{\theta}\|\cdot\|\mathcal{P}\|_\infty), 2c_{14})$.

Rang de $\mathcal{M}_\mathcal{D}$. En utilisant un lemme de zéros dans les groupes algébriques [10], on peut démontrer que [12]

$$\operatorname{rang}\mathcal{M}_\mathcal{D} = \operatorname{Card}\mathcal{D} = L.$$

Pour cela il suffit que les inégalités

$$T > 48D_1, \qquad TM > 96D_1D_2$$

soient satisfaites, ce qui est le cas avec nos choix de paramètres :

$$T = 2^8c_1(T_0+1) > 2^8c_0c_1D_1 > 48D_1,$$

$$TM > 2^8c_0c_1D_1M \geq 2^8c_0c_1D_1\frac{D_2-1}{2c_0c_1} \geq 2^7D_1(D_2-1) \geq 96D_1D_2,$$

puisque $c_0, c_1 \geq 1$ et $D_2 \geq 4$.

Condition C$_1$. Rappelons que

$$a = [K:\mathbb{Q}] \leq 16d(\underline{\alpha})d(\underline{g}).$$

On notera pour simplifier $d = d(\underline{\alpha})$ et $h = h(\underline{\alpha})$. On a alors

$$\Delta \leq (16d(\underline{g})d + 2)\log(2(D_1+1)(D_2+1)) + \log(2T_0M^2),$$

ce qui donne

$$2(a\Phi + \varrho + \Delta) \leq \mathcal{A}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = {} & 4(8d(\underline{g})d+1)\log(2(D_1+1)(D_2+1)) + 2\log(2T_0M^2)\\ & + 2c_9(D_1+D_2)M^2 + 2c_9(T + D_2\log T)\\ & + 32d(\underline{g})dc_8(D_1 + T\log D_2 + D_2h + D_2\log(TM)).\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$-\log E - \mathcal{D}\varpi(2eR) \geq T_0M^2 - c_{10}(D_1+D_2)M^2 = T_0M^2 - \mathcal{B},$$

avec $\mathcal{B} = c_{10}(D_1+D_2)M^2$. On va choisir c_0 tel que $T_0M^2 - \mathcal{B} > \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} + \mathcal{B} \leq {} & (c_{10}+2c_9)(D_1+D_2)M^2 + 2c_9(T + D_2\log T)\\ & + 32d(\underline{g})dc_8(D_1 + T\log D_2 + D_2h + D_2\log(TM))\\ & + 64d(\underline{g})d(\log 2 + D_1 + D_2) + 2\log 2 + 2\log T_0 + 4\log M\\ \leq {} & (c_{10}+2c_9)(D_1+D_2)M^2 + 2c_9(T + D_2\log T)\\ & + 32d(\underline{g})dc_8(D_1 + T\log D_2 + D_2h + D_2\log(TM))\\ & + 64d(\underline{g})d(2\log 2 + D_1 + D_2 + \log(TM))\\ \leq {} & (c_{10}+2c_9)(D_1+D_2)M^2 + 2c_9(T + D_2\log T)\\ & + 32d(\underline{g})d(c_8+2)(D_1 + T\log D_2 + D_2h + D_2\log(TM)).\end{aligned}$$

Prenons pour M et D_1 les valeurs suivantes :

$$M = [c_0\sqrt{d\log(1+d)}], \qquad D_1 = \left[2c_0^2\sqrt{\frac{d}{\log(1+d)}}(h + \log(1+d))\right].$$

Ainsi

$$T_0 M^2 > c_0^3 \sqrt{\frac{d}{\log(1+d)}}(h+\log(1+d))\frac{1}{4}c_0^2 d\log(1+d) \geq \frac{1}{4}c_0^5 t,$$

avec

$$\begin{aligned} t &= d^{3/2}\sqrt{\log(1+d)}(h+\log(1+d)) \\ &= d^{3/2}\sqrt{\log(1+d)}\, h + d^{3/2}(\log(1+d))^{3/2}. \end{aligned}$$

Des inégalités

$$M \leq c_0\sqrt{d\log(1+d)}, \qquad T \leq 2^{10}c_1c_0^3\sqrt{\frac{d}{\log(1+d)}}(h+\log(1+d)),$$

$$D_1 \leq 2c_0^2\sqrt{\frac{d}{\log(1+d)}}(h+\log(1+d)), \qquad D_2 \leq 4c_1c_0^2\sqrt{d\log(1+d)},$$

on déduit facilement

$$D_1M^2 \leq 2c_0^4 t, \qquad D_2M^2 \leq 4c_1c_0^4 t, \qquad T \leq \frac{2^{10}}{\log 2}\, c_1c_0^3 t,$$

$$D_2\log T \leq 4c_1c_0^2\left(11.3 + \frac{\log(c_1c_0^3)}{\log 2}\right)t, \qquad dD_1 \leq \frac{2}{\log 2}\, c_0^2 t,$$

$$dT\log D_2 \leq 2^{10}c_1c_0^3\left(3 + \frac{\log(c_1c_0^2)}{\log 2}\right)t, \qquad dhD_2 \leq 4c_1c_0^2 t,$$

$$dD_2\log T \leq 4c_1c_0^2\left(11.3 + \frac{\log(c_1c_0^3)}{\log 2}\right)t,$$

$$dD_2\log M \leq 4c_1c_0^2\left(1 + \frac{\log c_0}{\log 2}\right)t,$$

et en imposant

$$c_0 \geq 30000, \tag{3}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} c_0\,\frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{T_0M^2} < {} & 4(c_{10}+2c_9)(2+4c_1) \\ & + 128(2+c_8)d(\underline{g})(4\cdot 10^{-9} + 1.2c_1 + 0.05c_1\log c_1) \\ & + 8c_9(0.05c_1 + 6.5\cdot 10^{-9}c_1\log c_1) = c_0'. \end{aligned}$$

Donnons donc à c_0 la valeur

$$c_0 = \max\left(30000, c_0', 44c_1 + \frac{132}{\max(|\omega_1|, |\omega_2|)}\right),$$

de sorte que l'on ait $\mathcal{A}+\mathcal{B} < T_0M^2$ et que les conditions (1)–(3) soient remplies. On a alors

$$-\log E - \mathcal{D}\varpi(2eR) > (a\Phi+\varrho+\Delta)\frac{L}{L-\operatorname{Card} S_1}.$$

Puisque le rang de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ est maximal, le théorème de P. Philippon (§1.4, théorème 1) nous apprend que la condition C_1 n'est pas satisfaite. On doit donc avoir

$$\widetilde{U} \le (a\Phi+\varrho+\Delta)\frac{L}{L-\operatorname{Card} S_1} \le \mathcal{A} \le \mathcal{A}+\mathcal{B} < T_0M^2 \le 2c_0^5 t,$$

et puisque $\widetilde{U} = U - c_{11}(T + D_2\log T + (D_1+D_2+T_0)M^2)$, on obtient finalement

$$U < At,$$

avec

$$A = 2c_0^5 + c_{11}\left(\frac{2^{10}c_1c_0^3}{\log 2} + 4c_1c_0^2\left(\frac{\log(c_1c_0^3)}{\log 2} + 11.3\right) + 2c_0^4(1+2c_1) + 2c_0^5\right),$$

ce qui termine la preuve du théorème A.

3. Démonstration de la proposition 3

3.1. *Valeurs absolues de* γ_{-1}. Pour $x+y+z=0$ la relation (due à Frobenius et Stickelberger [5])

$$(\zeta(x)+\zeta(y)+\zeta(z))^2 + \zeta'(x)+\zeta'(y)+\zeta'(z) = 0$$

se démontre en constatant que, l'une des variables x ou y étant fixée, l'on a affaire à une fonction elliptique sans pôles en l'autre variable y ou x.

Prenons $x=y=\omega/3$ pour obtenir, grâce aux propriétés élémentaires de ζ et $\wp$ (quasi-périodicité, parité, ...)

$$\gamma_{-1}^2 = (\zeta(\omega/3)-\eta/3)^2 = \tfrac{1}{3}\wp(\omega/3),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$|\gamma_{-1}|_v \le \|\mathcal{P}\|_v^{1/2}\cdot\begin{cases}\sqrt{3} & \text{si } v\,|\,3,\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Profitons-en pour donner une estimation qui nous sera utile au paragraphe suivant : la parité, la périodicité et la formule de duplication de la fonction $\wp$ entraînent

$$\wp(\omega/3) = \wp(2\omega/3) = -2\wp(\omega/3) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(\omega/3)}{\wp'(\omega/3)}\right)^2,$$

ce qui laisse (et on peut montrer que le signe est en fait négatif)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp''(\omega/3)}{\wp'(\omega/3)} = \pm\left(3\wp\left(\frac{\omega}{3}\right)\right)^{1/2},$$

et par suite

$$(*) \qquad \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp''(\omega/3)}{\wp'(\omega/3)}\right|_v \le \|\mathcal{P}\|_v^{1/2}\cdot\begin{cases}\sqrt{3} & \text{si } v\mid\infty,\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3.2. *Valeurs absolues des γ_i, $i \ge 1$.* Rappelons que pour $i \ge 0$,

$$\gamma_{i+1} = \sum_{j+2k+3l=i} \lambda_{j+k+l}\,\frac{(j+k+l)!}{j!k!l!}\,2^{j+2k+2l}3^k \times\left(\frac{\wp''(\omega/3)}{\wp'(\omega/3)}\right)^j \wp(\omega/3)^k\wp'(\omega/3)^l,$$

où $\lambda_n = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ est le n-ième coefficient du développement en série entière de $(1+z)^{-1/2}$. Ainsi

$$\gamma_{i+1} = \sum_{j+2k+3l=i} (-1)^{j+k+l}\,\frac{[2(j+k+l)]!}{j!k!l!(j+k+l)!}\,3^k \times\left(\frac{\wp''(\omega/3)}{2\wp'(\omega/3)}\right)^j \wp(\omega/3)^k\wp'(\omega/3)^l.$$

Si $v\nmid\infty$, il vient facilement avec l'estimation $(*)$

$$|\gamma_{i+1}|_v \le \max_{j+2k+3l=i}\|\mathcal{P}\|_v^{j/2+k+l} \le \|\mathcal{P}\|_v^{i/2},$$

et pour $v\mid\infty$,

$$\begin{aligned}|\gamma_{i+1}|_v &\le \sum_{j+2k+3l=i}\frac{[2(j+k+l)]!}{j!k!l!(j+k+l)!}\,3^k3^{j/2}\|\mathcal{P}\|_v^{(j+2k+2l)/2}\\ &\le \sum_{j+2k+3l=i}\frac{[2(j+k+l)]!}{j!k!l!(j+k+l)!}\,3^{(j+2k+3l)/2}\|\mathcal{P}\|_v^{(j+2k+2l)/2}\\ &\le (3\|\mathcal{P}\|_v)^{i/2}\sum_{\alpha=0}^{i}\sum_{j+k+l=\alpha}\frac{(2\alpha)!}{j!k!l!\alpha!} \le (3\|\mathcal{P}\|_v)^{i/2}\sum_{\alpha=0}^{i}4^{2\alpha},\end{aligned}$$

ce qui laisse

$$|\gamma_{i+1}|_v \le \|\mathcal{P}\|_v^{i/2}\cdot\begin{cases}30^{i+1} & \text{si } v\mid\infty,\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3.3. *Hauteur et longueur des $Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}$.* Posons $a = 2i(a_1s_2 - a_2s_1)$ et définissons deux fonctions f et g par

$$f(u) = -\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i\,\frac{u^i}{i},$$

$$g(u) = -\sum_{i=1}^{\infty} g_i\,\frac{u^i}{i} \quad \text{où} \quad g_i = \gamma_i\wp(\omega/3) + \gamma_{i-1}\wp'(\omega/3),$$

de sorte que
$$\zeta - \frac{\eta}{\omega}\, z = \gamma_{-1} + f(u)\, \frac{\eta}{\omega} + g(u).$$
Rappelons que $\wp(z) = \wp(\omega/3) + \wp'(\omega/3)u$, d'où
$$\wp^{h_1} = \sum_{i=0}^{h_1} \wp_i u^i \quad \text{où} \quad \wp_i = \binom{h_1}{i} \wp(\omega/3)^{h_1-i} \wp'(\omega/3)^i.$$
On a alors
$$\begin{aligned}\wp^{h_1}\Big(\zeta - \frac{\eta}{\omega}\, z + a\, \frac{\pi}{\omega}\Big)^{h_2} &= \wp^{h_1}\Big(a\, \frac{\pi}{\omega} + f(u)\, \frac{\eta}{\omega} + \gamma_{-1} + g(u)\Big)^{h_2} \\ &= \sum_{i+j+k+l=h_2} a^i f(u)^j g(u)^k \gamma_{-1}^l \wp^{h_1}\, \frac{h_2!}{i!j!k!l!} \Big(\frac{\pi}{\omega}\Big)^i \Big(\frac{\eta}{\omega}\Big)^j,\end{aligned}$$
ce qui laisse
$$q_{\underline{h},(t,\underline{s})} = \sum_{i+j+k+l=h_2} \gamma_{-1}^l a^i\, \frac{h_2!}{i!j!k!l!} \cdot \frac{1}{t!} \frac{d^t}{du^t} (f(u)^j g(u)^k \wp^{h_1}) \Big|_{u=0} \Big(\frac{\pi}{\omega}\Big)^i \Big(\frac{\eta}{\omega}\Big)^j.$$
Il est alors clair que $q_{\underline{h},(t,\underline{s})} = Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}(\pi/\omega, \eta/\omega)$ où $Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}(X,Y)$ est un polynôme de degré inférieur à h_2, donc majoré par D_2 :
$$Q_{\underline{h},(t,\underline{s})} = \sum_{i+j\leq D_2} c_{i,j} X^i Y^j,$$
avec
$$c_{i,j} = a^i \sum_{k+l=h_2-(i+j)} \gamma_{-1}^l\, \frac{h_2!}{i!j!k!l!} \cdot \frac{1}{t!} \frac{d^t}{du^t} (f^j g^k \wp^{h_1}) \Big|_{u=0}.$$
Des développements de f, g et $\wp^{h_1}$ on déduit
$$f^j g^k \wp^{h_1} = (-1)^{j+k} \sum_{\substack{\lambda_1,\dots,\lambda_j\geq 1\\ \mu_1,\dots,\mu_k\geq 1\\ 0\leq\nu\leq h_1}} \frac{\gamma_{\lambda_1}\cdots\gamma_{\lambda_j} g_{\mu_1}\cdots g_{\mu_k}}{\lambda_1\dots\lambda_j \mu_1\dots\mu_k}\, \wp_\nu u^{\lambda_1+\dots+\lambda_j+\mu_1+\dots+\mu_k+\nu},$$
puis
$$c_{i,j} = (-1)^j a^i \sum_{\substack{k+l=h_2-(i+j)\\ \lambda_1,\dots,\lambda_j\geq 1\\ \mu_1,\dots,\mu_k\geq 1\\ 0\leq\nu\leq h_1\\ \lambda_1+\dots+\lambda_j+\mu_1+\dots+\mu_k+\nu=t}} (-1)^k \frac{h_2!}{i!j!k!l!} \cdot \frac{\gamma_{\lambda_1}\cdots\gamma_{\lambda_j} g_{\mu_1}\cdots g_{\mu_k}}{\lambda_1\dots\lambda_j \mu_1\dots\mu_k}\, \wp_\nu \gamma_{-1}^l,$$
et
$$c_{i,j} \in \mathbb{Q}(i, \wp(\omega/3), \wp'(\omega/3)) \subset K.$$

Posons $a_{i,j} = M_T(D_2)c_{i,j}$ où

$$M_T(n) = \mathrm{PPCM}\{k_1 \dots k_{n'} \mid n' \le n,\ k_i \in \mathbb{N}^*,\ k_1 + \dots + k_{n'} \le T\}.$$

Supposons que $v \mid 3$. Les paragraphes 3.1, 3.2 précédents nous apprennent que

$$|\gamma_{-1}^l|_v \le (\sqrt{3}\,\|\mathcal{P}\|_v^{1/2})^l |\wp_\nu|_v \le \|\mathcal{P}\|_v^{h_1},$$

$$|\gamma_{\lambda_1} \cdots \gamma_{\lambda_j}|_v \le \|\mathcal{P}\|_v^{(\lambda_1+\dots+\lambda_j)/2}, \qquad |g_{\mu_1} \cdots g_{\mu_k}|_v \le \|\mathcal{P}\|_v^{(\mu_1+\dots+\mu_k)/2}\|\mathcal{P}\|_v^k,$$

ce qui permet d'obtenir

$$|\gamma_{\lambda_1} \cdots \gamma_{\lambda_j} g_{\mu_1} \cdots g_{\mu_k} \wp_\nu \gamma_{-1}^l|_v \le 3^{l/2}\|\mathcal{P}\|_v^{(\lambda_1+\dots+\lambda_j+\mu_1+\dots+\mu_k)/2+k+h_1+l/2},$$

et finalement

$$|a_{i,j}|_v \le 3^{D_2/2}\|\mathcal{P}\|_v^{T/2+D_1+D_2}.$$

De même si $v \nmid 3, \infty$ on trouve

$$|a_{i,j}|_v \le \|\mathcal{P}\|_v^{T/2+D_1+D_2}.$$

Enfin, supposons $v \mid \infty$, et estimons cette fois $|c_{i,j}|_v$. On aura dans ce cas

$$|\gamma_{-1}^l|_v \le \|\mathcal{P}\|_v^{l/2}|\wp_\nu|_v \le 2^{D_1}\|\mathcal{P}\|_v^{D_1},$$

$$|\gamma_{\lambda_1} \cdots \gamma_{\lambda_j}|_v \le (30\|\mathcal{P}\|_v^{1/2})^{\lambda_1+\dots+\lambda_j},$$

$$|g_{\mu_1} \cdots g_{\mu_k}|_v \le (30\|\mathcal{P}\|_v^{1/2})^{\mu_1+\dots+\mu_k}(2\|\mathcal{P}\|_v)^k,$$

$$\left|\frac{h_2!}{i!j!k!l!}\right|_v \le 4^{D_2}, \qquad |a^i|_v \le (2Mc_1)^{D_2}, \qquad \left|\frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_j \mu_1 \dots \mu_k}\right|_v \le 1,$$

et le nombre de termes dans la somme donnant $c_{i,j}$ est majoré par la valeur $(D_1+1)(D_2+1)T^{D_2}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}|c_{i,j}|_v &\le (D_1+1)(D_2+1)T^{D_2}(2Mc_1)^{D_2}4^{D_2}(30\|\mathcal{P}\|_v^{1/2})^T 2^{D_2+D_1}\|\mathcal{P}\|_v^{D_1+D_2}\\ &\le 2^{D_1+D_2}T^{D_2}(16Mc_1)^{D_2}30^T 2^{D_1}\|\mathcal{P}\|_v^{T/2+D_2+D_1}\\ &\le 4^{D_1}(32Mc_1)^{D_2}T^{D_2}30^T\|\mathcal{P}\|_v^{T/2+D_1+D_2}.\end{aligned}$$

Cette estimation donne la majoration de la longueur de $Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}$ annoncée par la proposition 3.

Remarquons que pour $v \nmid \infty$,

$$\|(1, c_{i,j})\|_v = \left\|\left(1, \frac{a_{i,j}}{M_T(D_2)}\right)\right\|_v \le \frac{1}{|M_T(D_2)|_v}\|(1, a_{i,j})\|_v,$$

ce qui nous permet d'écrire, via la formule du produit,

$$\begin{aligned}H(Q_{\mathcal{D},(t,\underline{s})}) \le &\prod_{v\mid 3}\left(3^{D_2/2}\|\mathcal{P}\|_v^{T/2+D_1+D_2}\frac{1}{|M_T(D_2)|_v}\right)^{d_v}\\ &\times \prod_{v\nmid 3,\infty}\left(\|\mathcal{P}\|_v^{T/2+D_1+D_2}\frac{1}{|M_T(D_2)|_v}\right)^{d_v}\end{aligned}$$

$$\times \prod_{v|\infty} (4^{D_1}(32Mc_1)^{D_2} T^{D_2} 30^T \|\mathcal{P}\|_v^{T/2+D_1+D_2})^{d_v}$$
$$\leq H(\mathcal{P})^{T/2+D_1+D_2} M_T(D_2)^{[K:\mathbb{Q}]} (4^{D_1}(32\sqrt{3}\,Mc_1)^{D_2} T^{D_2} 30^T)^{[K:\mathbb{Q}]}.$$

Par conséquent, avec $d(K) = [K:\mathbb{Q}]$, et en supposant $M, D_2 \geq e$, on a

$$\begin{aligned}\log H(Q_{\mathcal{D},(t,\underline{s})}) \leq {} & \big(d(K)\log 30 + \tfrac{1}{2}\log H(\mathcal{P})\big)T \\ & + (d(K)\log 4 + \log H(\mathcal{P}))D_1 \\ & + (d(K)(1+\log c_1 + \log(32\sqrt{3})) + \log H(\mathcal{P}))D_2 \log M \\ & + d(K) D_2 \log T + d(K)\log M_T(D_2),\end{aligned}$$

ce qui laisse, par la proposition 1,

$$h(Q_{\mathcal{D},(t,\underline{s})}) \leq c_4(T + D_1 + T\log D_2 + D_2 \log(TM)),$$

où $c_4 = 6 + \log c_1 + h(\mathcal{P})$.

4. Démonstrations du théorème B

4.1. *Lemme de transfert.* Pour passer du théorème A au théorème B, on utilise un lemme de transfert. Il s'agit ici d'une version légèrement modifiée du théorème 4 de [13] :

Théorème 3 (lemme de transfert). *Soit* $\underline{x} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. *Si une forme* P *de* $\mathbb{Z}[X_0, X_1, X_2]$ *satisfait*

$$\log\left(\frac{|P(\underline{x})|}{\|\underline{x}\|^{d(P)}}\right) \leq -b^4(\log L(P) + d(P)\log(1+bd(P)))d(P)^2$$

avec $b \geq 2^{23}$, *alors il existe* $\underline{\alpha} \in \mathbb{P}_2(\overline{\mathbb{Q}})$ *tel que* $P(\underline{\alpha}) = 0$, $d(\underline{\alpha}) \leq (bd(P))^2$ *et*

$$\log \mathrm{Dist}(\underline{x}, \underline{\alpha}) \leq -2^{-163} b(h(\underline{\alpha}) + \log(1 + d(\underline{\alpha})))d(\underline{\alpha})^{3/2}.$$

Preuve. La preuve est exactement la même que celle du théorème 4 de [13] : on prend $H = [b^2 d(P)\log(1+bd(P))]$ au lieu de $H = [b^2 d(P)\log(bd(P))]$, il en résulte que $\log d(\underline{\alpha})$ est remplacé par $\log(1 + d(\underline{\alpha}))$.

L'inégalité $d(\underline{\alpha}) \leq (bd(P))^2$ est prouvée dans [13] lors de la démonstration du théorème 4.

4.2. *La mesure d'indépendance algébrique.* Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers relatifs, et supposons que

$$(*) \quad \log\left(\frac{|P(\underline{\theta})|}{\|\underline{\theta}\|}\right) \leq -\widetilde{B}^4(\log L(P) + d(P)\log(1 + \widetilde{B}d(P)\sqrt{\log(1+\widetilde{B}d(P))})) \times d(P)^2(\log(1+\widetilde{B}d(P)))^2,$$

où $\widetilde{B}$ est une constante qu'il reste à déterminer. Posons alors

$$b = \widetilde{B}\sqrt{\log(1 + \widetilde{B}d(P))},$$

de sorte que l'on ait

$$\log\left(\frac{|P(\underline{\theta})|}{\|\underline{\theta}\|}\right) \leq -b^4(\log L(P) + d(P)\log(1 + bd(P)))d(P)^2.$$

Quitte à prendre $\widetilde{B}$ assez grand, on peut supposer que $b \geq 2^{23}$ (la valeur que l'on va trouver pour $\widetilde{B}$ satisfait bien cette hypothèse), et ainsi appliquer le lemme de transfert : il existe $\underline{\alpha} \in \mathbb{P}_2(\overline{\mathbb{Q}})$ tel que $d(\underline{\alpha}) \leq (bd(P))^2$ et

$$-\log \mathrm{Dist}(\underline{\theta}, \underline{\alpha}) \geq 2^{-163}b(h(\underline{\alpha}) + \log(1 + d(\underline{\alpha})))d(\underline{\alpha})^{3/2}.$$

Or $d(\underline{\alpha}) \leq \widetilde{B}^2 d(P)^2 \log(1 + \widetilde{B}d(P))$ et par conséquent

$$1 + d(\underline{\alpha}) \leq (1 + \widetilde{B}d(P))^2 \log(1 + \widetilde{B}d(P)),$$

puis

$$\log(1 + d(\underline{\alpha})) \leq 3\log(1 + \widetilde{B}d(P)),$$

et donc

$$b \geq \frac{\widetilde{B}}{\sqrt{3}}\sqrt{\log(1 + d(\underline{\alpha}))},$$

laissant ainsi

$$-\log \mathrm{Dist}(\underline{\theta}, \underline{\alpha}) \geq \frac{2^{-163}\widetilde{B}}{\sqrt{3}}(h(\underline{\alpha}) + \log(1 + d(\underline{\alpha})))d(\underline{\alpha})^{3/2}\sqrt{\log(1 + d(\underline{\alpha}))}.$$

On prend donc

$$\widetilde{B} = 2^{163}\sqrt{3}\,A$$

et on obtient une contradiction avec le théorème A.

Cela signifie que nécessairement $(*)$ est fausse. On en déduit alors aisément que

$$\begin{aligned}
&\log|P(\underline{\theta})| \\
&\qquad > -\widetilde{B}^4\big(\log L(P) + \tfrac{3}{2}d(P)\log(1 + \widetilde{B}d(P))\big)d(P)^2(\log(1 + \widetilde{B}d(P)))^2 \\
&\qquad \geq -\widetilde{B}^4\big(\log H(P) + \tfrac{7}{2}d(P)\log(1 + \widetilde{B}d(P))\big)d(P)^2(\log(1 + \widetilde{B}d(P)))^2,
\end{aligned}$$

et puisque

$$\log(1 + \widetilde{B}d(P)) \leq \log\widetilde{B} + \log(1 + d(P)) \leq \left(\frac{\log\widetilde{B}}{\log 2} + 1\right)\log(1 + d(P))$$

on trouve finalement

$$\log|P(\underline{\theta})| > -B(\log H + d(P)\log(1 + d(P)))d(P)^2(\log(1 + d(P)))^2,$$

avec

$$B = 4\widetilde{B}^4\left(\frac{\log \widetilde{B}}{\log 2} + 1\right)^3;$$

ce qui termine la preuve du théorème B.

4.3. *Tableau des constantes.* Le tableau 1 est un récapitulatif des constantes intervenant dans le calcul de A et B.

Pour estimer les quantités $|\wp(\omega/3)|$, $|\wp'(\omega/3)|$ et $h(\mathcal{P})$ intervenant dans les constantes $A_1(\Omega)$, c_4, c_6, c_{13}, c_{14} et c_9, on utilisera le fait que $\wp(\omega/3)$ est racine du polynôme

$$X^4 - \tfrac{1}{2}g_2X^2 - g_3X - \tfrac{1}{48}g_2^2,$$

et la relation

$$\wp'(\omega/3)^2 = 4\wp(\omega/3)^3 - g_2\wp(\omega/3) - g_3.$$

La valeur de $|\sigma(\omega/3)|$ (constantes $A_1(\Omega)$ et c_{14}) est déterminée par :

LEMME 2.

$$\sigma(\omega/3)^9 = \pm\frac{e^{\eta\omega/2}}{\wp'(\omega/3)^3}.$$

Preuve. La formule ([19, example 24, p. 459])

$$\frac{\sigma(3z)}{\sigma^9(z)} = 3\wp(z)\wp'(z)^2 - \frac{1}{4}\wp''(z)^2$$

conduit à

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(3z)}{\sigma^9(z)} &= 3\wp(z)(4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3) - \tfrac{1}{4}\big(6\wp(z)^2 - \tfrac{1}{2}g_2\big)^2\\ &= 3\big(\wp(z)^4 - \tfrac{1}{2}g_2\wp(z)^2 - g_3\wp(z) - \tfrac{1}{48}g_2^2\big).\end{aligned}$$

Appliquons cela à $z = \omega/3 + u$:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(\omega+3u)}{\sigma^9(\omega/3+u)} &= 3\big(\wp(\omega/3)^4 - \tfrac{1}{2}g_2\wp(\omega/3)^2 - g_3\wp(\omega/3) - \tfrac{1}{48}g_2^2\big)\\ &\qquad + 3\wp'(\omega/3)(4\wp(\omega/3)^3 - g_2\wp(\omega/3) - g_3)u + o(u)\\ &= 3\wp'(\omega/3)^3u + o(u).\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'équation fonctionnelle de σ s'écrit ([7, Theorem 1, p. 241])

$$\sigma(3u+\omega) = \pm e^{\eta(3u+\omega/2)}\sigma(3u),$$

ce qui laisse (puisque $\sigma'(0) = 1$ et $\sigma(0) = 0$)

$$\frac{\sigma(\omega+3u)}{\sigma^9(\omega/3+u)} = \pm\frac{3e^{\eta\omega/2}}{\sigma^9(\omega/3)}\,u + o(u),$$

et donne le résultat voulu. (Remarquons qu'on retrouve le fait que $\wp(\omega/3)$ soit une racine du polynôme $X^4 - \frac{1}{2}g_2X^2 - g_3X - \frac{1}{48}g_2^2$.)

5. Applications des théorèmes A et B

5.1. *Deux exemples intéressants.* On calcule ici les constantes dans deux cas intéressants. Par exemple, il est bien connu que pour la courbe elliptique $y^2 = 4x^3 - 4x$, un réseau associé est

$$\varOmega = \mathbb{Z}\omega_1 + i\mathbb{Z}\omega_1 \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \varGamma(1/4)^2/\sqrt{8\pi},$$

et que l'on a alors

$$\omega_2 = i\omega_1, \qquad \eta_2 = -i\eta_1, \qquad \eta_1 = \pi/\omega_1 = (2\pi)^{3/2}/\varGamma(1/4)^2.$$

On prend comme période $\omega = \omega_1$, de sorte que $\eta = \eta_1$ et

$$\theta_1 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\varGamma(1/4)^2}, \qquad \theta_2 = \frac{\eta}{\omega} = \frac{8\pi^2}{\varGamma(1/4)^4} = \frac{\pi}{\omega^2} = \frac{\pi}{\mathrm{Vol}(\varOmega)}.$$

$\wp(\omega/3)$ est ici racine du polynôme $X^4 - 2X^2 - \frac{1}{3}$, et puisque $\wp(\omega/3)$, $\wp'(\omega/3) \in \mathbb{R}$ (car $\overline{\mathbb{Z}[i]} = \mathbb{Z}[i]$), cela laisse

$$\wp(\omega/3) = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}, \quad \text{puis} \quad \wp'(\omega/3)^2 = \frac{8}{3}\sqrt{3+2\sqrt{3}}.$$

De là on calcule que

$$\|\mathcal{P}\|_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \nmid 3, \infty, \\ \sqrt[8]{27} & \text{si } v \mid 3, \\ \sqrt{\frac{8}{3}\sqrt{3+2\sqrt{3}}} & \text{si } v \mid \infty, \end{cases}$$

puis que

$$h(\mathcal{P}) = \log\left(\sqrt[8]{27}\sqrt{\frac{8}{3}\sqrt{3+2\sqrt{3}}}\right) \leq 1.4.$$

De même pour la courbe elliptique $y^2 = 4x^3 - 4$, un réseau associé est $\varOmega = \omega_1\mathbb{Z} + \varrho\omega_1\mathbb{Z}$, où $\varrho = e^{2i\pi/3}$ et $\omega_1 = \varGamma(1/3)^3/(\pi\sqrt[3]{16})$. On a alors

$$\eta_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega_1}, \qquad \eta_2 = \varrho^2\eta_1,$$

laissant ainsi

$$\theta_1 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi^2\sqrt[3]{16}}{\varGamma(1/3)^3}, \qquad \theta_2 = \frac{\eta}{\omega} = \frac{\pi^3 2^{11/3}}{\sqrt{3}\,\varGamma(1/3)^6}\,;$$

les calculs s'effectuent alors sans problèmes.

On obtient de cette manière, pour les deux cas particuliers considérés, le tableau 2.

Ce tableau, ainsi que celui donné au §4.3, permet de calculer effectivement les constantes A et B ; le résultat de ces calculs sont présentés dans le tableau 3.

5.2. *Les mesures d'approximation simultanée.* Nous démontrons ici la mesure d'approximation simultanée de $\Gamma(1/4)$ et π, celle concernant $\Gamma(1/3)$ se prouvant de la même manière. Nous utilisons donc les résultats du §5.1 relatifs à la courbe elliptique donnée par $y^2 = 4x^3 - 4x$.

Posons $\widetilde{\theta}_1 = \Gamma(1/4)$ et $\widetilde{\theta}_2 = \pi$. Donnons nous $\underline{\widetilde{\alpha}} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$. On peut supposer sans perte de généralité que

$$|\widetilde{\theta}_1 - \widetilde{\alpha}_1| + |\widetilde{\theta}_2 - \widetilde{\alpha}_2| \le 1,$$

ce qui permet d'écrire

$$\widetilde{\theta}_1 - 1 \le |\widetilde{\alpha}_1| \le \widetilde{\theta}_1 + 1 \quad \text{et} \quad \widetilde{\theta}_2 - 1 \le |\widetilde{\alpha}_2| \le \widetilde{\theta}_2 + 1.$$

Notant toujours $\theta_1 = \pi/\omega$ et $\theta_2 = \eta/\omega$, on a

$$\theta_1 = \sqrt{8}\,\widetilde{\theta}_1^{-2}\widetilde{\theta}_2^{3/2}, \quad \theta_2 = 8\widetilde{\theta}_1^{-4}\widetilde{\theta}_2^{2}.$$

On pose alors

$$\alpha_1 = \sqrt{8}\,\widetilde{\alpha}_1^{-2}\widetilde{\alpha}_2^{3/2}, \qquad \alpha_2 = 8\widetilde{\alpha}_1^{-4}\widetilde{\alpha}_2^{2}, \qquad \Lambda = |\theta_1 - \alpha_1| + |\theta_2 - \alpha_2|,$$

obtenant ensuite

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \sqrt{8}\,|\widetilde{\theta}_1^{-2}\widetilde{\theta}_2^{3/2} - \widetilde{\alpha}_1^{-2}\widetilde{\alpha}_2^{3/2}| + 8|\widetilde{\theta}_1^{-4}\widetilde{\theta}_2^{2} - \widetilde{\alpha}_1^{-4}\widetilde{\alpha}_2^{2}| \\
&\le \sqrt{8}\,(|\widetilde{\theta}_1^{-2} - \widetilde{\alpha}_1^{-2}| \cdot |\widetilde{\theta}_2|^{3/2} + |\widetilde{\alpha}_1|^{-2}|\widetilde{\theta}_2^{3/2} - \widetilde{\alpha}_2^{3/2}|) \\
&\quad + 8(|\widetilde{\theta}_1^{-4} - \widetilde{\alpha}_1^{-4}| \cdot |\widetilde{\theta}_2|^{2} + |\widetilde{\alpha}_1|^{-4}|\widetilde{\theta}_2^{2} - \widetilde{\alpha}_2^{2}|) \\
&\le \left(\sqrt{8}\,\frac{2|\widetilde{\theta}_2|^{3/2}}{|\widetilde{\theta}_1 - 1|^3} + 8|\widetilde{\theta}_2|^2\,\frac{4}{|\widetilde{\theta}_1 - 1|^5}\right)|\widetilde{\theta}_1 - \widetilde{\alpha}_1| \\
&\quad + \left(\sqrt{8}\,|1 + \widetilde{\theta}_2|^{1/2}\frac{1}{|\widetilde{\theta}_1 - 1|^2} \cdot \frac{3}{2} + 8\,\frac{2|\widetilde{\theta}_2 + 1|}{|\widetilde{\theta}_1 - 1|^4}\right)|\widetilde{\theta}_2 - \widetilde{\alpha}_2| \\
&\le 5(|\widetilde{\theta}_1 - \widetilde{\alpha}_1| + |\widetilde{\theta}_2 - \widetilde{\alpha}_2|).
\end{aligned}$$

Lemme 3.

$$\mathrm{Dist}(\underline{\theta}, \underline{\alpha}) \le \frac{|\theta_1 - \alpha_1| + |\theta_2 - \alpha_2|}{\|\underline{\theta}\|}.$$

Preuve. Il s'agit juste d'une application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\mathrm{Dist}(\underline{\theta}, \underline{\alpha})^2 = \frac{|\theta_1\alpha_2 - \theta_2\alpha_1|^2 + |\theta_1 - \alpha_1|^2 + |\theta_2 - \alpha_2|^2}{\|\underline{\theta}\|^2\,\|\underline{\alpha}\|^2},$$

et

$$\begin{aligned}
|\theta_1\alpha_2 - \theta_2\alpha_1|^2 &= |(\theta_1 - \alpha_1)\alpha_2 + \alpha_1(\alpha_2 - \theta_2)|^2 \\
&\le (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)(|\theta_1 - \alpha_1|^2 + |\theta_2 - \alpha_2|^2),
\end{aligned}$$

ce qui laisse

$$\mathrm{Dist}(\underline{\theta},\underline{\alpha})^2 \le \frac{|\theta_1-\alpha_1|^2+|\theta_2-\alpha_2|^2}{\|\underline{\theta}\|^2} \le \left(\frac{|\theta_1-\alpha_1|+|\theta_2-\alpha_2|}{\|\underline{\theta}\|}\right)^2.$$

Ainsi on a $\Lambda \ge \|\underline{\theta}\|\,\mathrm{Dist}(\underline{\theta},\underline{\alpha})$.

Plaçons nous dans le corps $K=\mathbb{Q}(\widetilde{\alpha}_1,\sqrt{2\widetilde{\alpha}_2})$. On voit facilement que pour toute place v non archimédienne

$$\|\underline{\alpha}\|_v \le \min(1,|\widetilde{\alpha}_1|_v)^{-4}\|\underline{\widetilde{\alpha}}\|_v^2,$$

tandis que si v est archimédienne

$$\|\underline{\alpha}\|_v \le 8\min(1,|\widetilde{\alpha}_1|_v)^{-4}\|\underline{\widetilde{\alpha}}\|_v^2.$$

On trouve alors

$$h(\underline{\alpha})=\frac{\log H_K(\underline{\alpha})}{\log d(K)} \le \log 8+2h(\underline{\widetilde{\alpha}})+4h(\widetilde{\alpha}_1) \le \log 8+6h(\underline{\widetilde{\alpha}}),$$

et par ailleurs il est clair que $d(\underline{\alpha}) \le 2d(\underline{\widetilde{\alpha}})$.

Le théorème A donne alors, en notant $d=d(\underline{\widetilde{\alpha}})$ et $h=h(\underline{\widetilde{\alpha}})$,

$$\log\Lambda > \log\|\underline{\theta}\| - A(\log 8+6h+\log(1+2d))2^{3/2}d^{3/2}\sqrt{\log(1+2d)},$$

ce qui, joint à la majoration de Λ et aux valeurs trouvées au §5.1, donne le résultat voulu.

5.3. *Les mesures d'indépendance algébrique.* Nous démontrons ici la mesure d'indépendance algébrique de π et $\Gamma(1/4)$ donnée par le théorème B′, celle concernant π et $\Gamma(1/3)$ se prouvant de la même manière.

Notons pour simplifier

$$\gamma=\Gamma(1/4),\qquad \theta_1=\pi/\omega,\qquad \theta_2=\eta/\omega,$$

et remarquons que l'on a

$$\gamma^4=8\theta_2^{-3}\theta_1^4 \quad\text{et}\quad \pi=\theta_1^2\theta_2^{-1}.$$

Soit $Q\in\mathbb{Z}[X,Y]$ un polynôme non constant de degré d et de hauteur H. Il vient

$$Q(\pi,\gamma^4)=Q(\theta_1^2\theta_2^{-1},8\theta_2^{-3}\theta_1^4)=\frac{\widetilde{Q}(\theta_1,\theta_2)}{\theta_2^{3d}},$$

où $\widetilde{Q}(X,Y)=Y^{3d}Q(X^2Y^{-1},8Y^{-3}X^4)\in\mathbb{Z}[X,Y]$ est un polynôme de degré $4d$ et de hauteur $H(\widetilde{Q})\le 8^dH$. On applique alors le théorème B, ce qui donne (en remarquant que $|\theta_2|<1$),

$$\begin{aligned}\log|Q(\pi,\gamma^4)| &\ge -B(d\log 8+\log H+4d\log(1+4d))16d^2(\log(1+4d))^2\\ &\ge -2160B(\log H+d\log(1+d))d^2(\log(1+d))^2.\end{aligned}$$

On vient ainsi de donner une mesure d'indépendance algébrique de γ^4 et π.

Pour passer à π et $\Gamma(1/4)$ on utilise le lemme suivant :

Lemme 4. *Soit $\mathbb{A}$ un anneau intégralement clos, de corps des fractions $\mathbb{K}$. On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Soient $P \in \mathbb{A}[Y]$ un polynôme, $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $\xi \in \overline{\mathbb{K}}$ une racine primitive n-ième de l'unité. Alors il existe $Q \in \mathbb{A}[Y]$ tel que*

$$Q(Y^n) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\xi^k Y).$$

Preuve. Écrivons (dans $\overline{\mathbb{K}}$) $P = \lambda \prod (Y - \alpha)$, et définissons $Q = \lambda^n \prod (Y - \alpha^n)$. Les coefficients de Q sont alors (au facteur λ^n et au signe près) les fonctions symétriques élémentaires en les α^n ; par conséquent ces coefficients sont dans $\mathbb{K}$ et sont entiers sur $\mathbb{A}$. On en déduit que $Q \in \mathbb{A}[X]$. Par ailleurs il est clair que Q satisfait l'égalité souhaitée.

Soit à présent $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$ un polynôme de degré d et de hauteur H. Par le lemme précédent ($\mathbb{Z}[X]$ étant intégralement clos),

$$Q(X, Y^4) = P(X, Y)P(X, -Y)P(X, iY)P(X, -iY)$$

définit un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X, Y]$ de degré $4d$. De plus, en notant M la mesure de Mahler et en utilisant ses propriétés classiques, on a

$$H(Q) \leq L(Q) \leq 2^{4d} M(Q) = 2^{4d} M(Q(X, Y^4)) \leq 2^{4d}((d + 1)H)^4.$$

En outre

$$|P(\pi, \gamma)| = \frac{|Q(\pi, \gamma^4)|}{|P(\pi, -\gamma)| \cdot |P(\pi, i\gamma)| \cdot |P(\pi, -i\gamma)|},$$

et par ailleurs

$$|P(\pi, \pm i\gamma)|, |P(\pi, -\gamma)| \leq \frac{(d + 1)(d + 2)}{2} H \max(\pi, \gamma, 1)^d;$$

on applique alors le résultat précédent :

$$\begin{aligned} \log |P(\pi, \gamma)| \geq & -2160B(4d \log 2 + 4 \log(1 + d) + 4 \log H \\ & + 4d \log(1 + 4d))16d^2(\log(1 + 4d))^2 \\ & - 6 \log(1 + d) - 3 \log H - 3d \log \max(\pi, \gamma, 1) \\ \geq & -10^{326}(\log H + d \log(1 + d))d^2(\log(1 + d))^2 \end{aligned}$$

grâce à la valeur de B donnée au §5.1.

5.4. *Les mesures d'irrationalité.* Démontrons à présent le corollaire. Pour cela nous noterons

$$\Gamma = \Gamma(1/4) \quad \text{ou} \quad \Gamma = \Gamma(1/3).$$

Nous utiliserons les deux résultats suivant :

Proposition 5. *Soient $\theta \in \mathbb{C}$, $D \in \mathbb{N}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ satisfaisant*

$$D \geq 4 \quad et \quad \mu \geq \max(600, |\theta|, D).$$

Alors il existe un polynôme non nul $Q \in \mathbb{Z}[X]$, puissance d'un polynôme irréductible, tel que

$$\deg(Q) \le D, \quad \log M(Q) \le \mu, \quad |Q(\theta)| \le e^{-D\mu/48}.$$

Preuve. Voir [18] ; il s'agit d'une version explicite de la proposition 3.9 de [16].

Proposition 6. *Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{Z}[X]$, à racines simples et de degré $d \ge 1$. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $|P(\theta)| \le 1$. Alors pour tout entier $s \ge 1$, il existe une racine γ de P telle que*

$$|\theta - \gamma|^{s(s+1)/2} \le |P(\theta)|^s 2^{ds} d^{d/2} M(P)^d.$$

Preuve. C'est le lemme 3 de [4].

On va appliquer ces résultats à $\theta = \pi$. On prend (pour l'instant) $D \ge 600$ et $\mu \ge D$. D'après la proposition 5 il existe un polynôme irréductible $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un entier T tel que $1 \le T \le D$ satisfaisant

$$d = \deg(P) \le D/T, \quad M(P) \le e^{\mu/T}, \quad |P(\theta)| \le e^{-(D\mu)/(48T)}.$$

Remarquons que puisque $|P(\theta)| < 1$, le polynôme P n'est pas constant. La proposition 6, appliquée avec $s = 49$, nous assure alors de l'existence de $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}$ racine de P satisfaisant

$$|\theta - \gamma|^{25\cdot 49} \le 2^{49d} d^{d/2} M(P)^d |P(\theta)|^{49}.$$

Ainsi il existe $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}$ et un entier T $(1 \le T \le D)$ tels que $d = d(\gamma) \le D/T$, $M(\gamma) \le e^{\mu/T}$ et

$$|\theta - \gamma| \le \left(2^{49}\sqrt{\frac{D}{T}}\right)^{\frac{D}{25\cdot 49\cdot T}} e^{-\frac{D\mu}{25\cdot 48\cdot 49T}}.$$

Soit alors p/q un rationnel tel que $q \ge 2$ (si $q = 1$, le résultat est trivial). On peut supposer sans perte de généralité que $|\Gamma - p/q| \le 1$, ce qui nous donne $h(p/q) \le 10 \log q$.

On pose $\underline{\alpha} = (p/q, \gamma) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$, et on a

$$h(\underline{\alpha}) \le h(p/q) + h(\gamma) \quad \text{et} \quad d(\underline{\alpha}) = d(\gamma).$$

On prend de plus

$$\mu = \frac{h(p/q)}{\log 2} D,$$

de sorte que $\mu \ge D$ (si $\max(|p|, |q|) = 1$, le résultat est trivial).

Rappelons que

$$h(\gamma) = \frac{\log M(\gamma)}{d(\gamma)}.$$

Le théorème A$'$ laisse alors

$$\begin{aligned}
\log\left(\left|\Gamma-\frac{p}{q}\right|+|\pi-\gamma|\right)& \\
&> -A'\left(h\left(\frac{p}{q}\right)+h(\gamma)+\log(1+d)\right)d^{3/2}\sqrt{\log(1+d)}\\
&\geq -A'\left(dh\left(\frac{p}{q}\right)+\log M(\gamma)+d\log(1+d)\right)\sqrt{d\log(1+d)}\\
&\geq -A'\left(\frac{D}{T}h\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{\mu}{T}+\frac{D}{T}\log\left(1+\frac{D}{T}\right)\right)\sqrt{\frac{D}{T}\log\left(1+\frac{D}{T}\right)}\\
&\geq -\Lambda,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\Lambda = A'\left((1+\log 2)\frac{\mu}{T}+D\log(1+D)\right)\sqrt{D\log(1+D)},$$

et

$$A'=10^{30} \quad \text{si } \Gamma=\Gamma(1/4), \qquad A'=10^{32} \quad \text{si } \Gamma=\Gamma(1/3).$$

On va imposer

$$|\pi-\gamma|\leq \tfrac12 e^{-\Lambda}, \quad \text{de sorte qu'alors} \quad |\Gamma-p/q|>\tfrac12 e^{-\Lambda}.$$

Or par construction

$$\begin{aligned}
\log|\pi-\gamma| &\leq \frac{D}{25T}\log 2+\frac{D}{50\cdot 49T}\log\frac{D}{T}-\frac{D\mu}{25\cdot 48\cdot 49T}\\
&\leq -D\,\frac{\mu}{25\cdot 48\cdot 49T}+\frac{\log 2}{25}D+\frac{D}{50\cdot 49}\log D.
\end{aligned}$$

Ainsi pour avoir $\log|\pi-\gamma|\leq -\log 2-\Lambda$, il suffit d'avoir

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{25\cdot 48\cdot 49}-A'(1+\log 2)\sqrt{\frac{\log(1+D)}{D}}\right)\frac{\mu}{T}\\
&\qquad\qquad \geq \frac{\log 2}{25}+\frac{\log 2}{D}+\frac{\log D}{49\cdot 50}+A'\sqrt{D}(\log(1+D))^{3/2}.
\end{aligned}$$

Pour cela, on prend

$$D=10^{73} \quad \text{si } \Gamma=\Gamma(1/4), \qquad D=10^{77} \quad \text{si } \Gamma=\Gamma(1/3);$$

et cette condition s'écrit alors

$$\mu/T\geq 10^{75} \quad \text{si } \Gamma=\Gamma(1/4), \qquad \mu/T\geq 10^{79} \quad \text{si } \Gamma=\Gamma(1/3).$$

Avec ces valeurs de D on obtient

$$\begin{aligned}
\log 2+\Lambda &\leq 10^{142}h(p/q)+10^{143}\leq 10^{143}\log(qe) \quad \text{si } \Gamma=\Gamma(1/4),\\
\log 2+\Lambda &\leq 10^{150}h(p/q)+10^{151}\leq 10^{151}\log(qe) \quad \text{si } \Gamma=\Gamma(1/3).
\end{aligned}$$

Puisque $\mu/T\geq h(p/q)$, on a bien démontré le corollaire.

Tableau 1

Proposition 2	
$A(\Omega)$	$0.973 + \frac{1}{8}\log^+ \lvert j\rvert - \frac{1}{12}\log\lvert\Delta\rvert$
$B(\Omega)$	$\frac{1}{2}(\lvert\eta_1/\omega_1\rvert + 2\pi/\mathrm{Vol}(\Omega))$
$A_1(\Omega)$	$2A(\Omega) + 2B(\Omega)\lvert\omega/3\rvert^2 + \log\left(\lvert\wp(\omega/3)\rvert + \frac{1}{\lvert\sigma(\omega/3)\rvert^2}\right)$
$A_2(\Omega)$	$A(\Omega) + \log(1 + \lvert\eta/\omega\rvert) + 2B(\Omega)$
$a(\Omega)$	$\max(A_1(\Omega), A_2(\Omega))$
$b(\Omega)$	$2B(\Omega) + \frac{1}{2}$
c_1	$\lvert a_1\rvert + \lvert a_2\rvert$
Proposition 3	
c_4	$6 + \log c_1 + h(\mathcal{P})$
Proposition 4	
c_5	$2(A(\Omega) + B(\Omega)(\lvert\omega\rvert/3 + \lvert\omega_1\rvert + \lvert\omega_2\rvert + 1)^2)$
c_6	$\log\left(\frac{2}{d(\omega/3,\Omega)}\max\left(\frac{24}{\lvert\wp'(\omega/3)\rvert d(\omega/3,\Omega)^2}, 1\right)\right)$
c_7	$\max(c_5, c_6 + \log 2)$
Contrainte C_R	
c_{10}	$2(a(\Omega) + 4b(\Omega)e^2(2\max(\lvert\omega_1\rvert, \lvert\omega_2\rvert)(1 + c_1/3) + 1)^2)$
Contrainte $\mathrm{C}_{\widetilde{U}}$	
c_{12}	$\log^+\left(133\frac{\max(\lvert\omega_1\rvert,\lvert\omega_2\rvert)}{\min_{\omega'\in\Omega\setminus\{0\}}(1,\lvert\omega'\rvert)}\right)$
c_{13}	$3 + \log(192c_1\lVert\underline{\theta}\rVert^2\lVert\mathcal{P}\rVert_\infty)$
c_{11}	$\max(c_{12}, c_7 + c_{13})$
Contrainte C_Φ	
c_8	$c_4 + 1$
Contrainte C_ϱ	
c_{14}	$(\lvert\eta_1\rvert + \lvert\eta_2\rvert)\left(\frac{\lvert\omega\rvert}{3} + \frac{\lvert\omega_1\rvert+\lvert\omega_2\rvert}{2}\right) + \log^+\frac{1}{\lvert\sigma(\omega/3)\rvert}$
c_9	$\max(3 + \log(64c_1\lVert\underline{\theta}\rVert\cdot\lVert\mathcal{P}\rVert_\infty), 2c_{14})$
Condition C_1	
c_0'	$128(2 + c_8)d(\underline{g})(4\cdot 10^{-9} + 1.2c_1 + 0.05c_1\log c_1)$ $+ 4(c_{10} + 2c_9)(2 + 4c_1) + 8c_9(0.05c_1 + 6.5\cdot 10^{-9}c_1\log c_1)$
c_0	$\max(30000, c_0', 44c_1 + 132/\max(\lvert\omega_1\rvert, \lvert\omega_2\rvert))$

Tableau 1 (suite)

Théorème A	
A	$2c_0^5 + c_{11}\Big(\frac{2^{10}c_1c_0^3}{\log 2} + 4c_1c_0^2\Big(\frac{\log(c_1c_0^3)}{\log 2} + 11.3\Big) + 2c_0^4(1+2c_1) + 2c_0^5\Big)$

Théorème B	
$\widetilde{B}$	$2^{163}\sqrt{3}A$
B	$4\widetilde{B}^4(\log\widetilde{B}/\log 2 + 1)^3$

Tableau 2

	$y^2 = 4x^3 - 4x$	$y^2 = 4x^3 - 4$
g_2	4	0
g_3	0	4
Δ	64	-432
j	1728	0
ω_1	$\Gamma(1/4)^2/\sqrt{8\pi} \approx 2.622$	$\Gamma(1/3)^3/(\pi\sqrt[3]{16}) \approx 2.428$
ω_2	$i\omega_1$	$\varrho\omega_1$
η_1	$\pi/\omega_1 = (2\pi)^{3/2}/\Gamma(1/4)^2 \approx 1.198$	$2^{7/3}\pi^2/(\sqrt{3}\Gamma(1/3)^3) \approx 1.493$
η_2	$-i\eta_1$	$\varrho^2\eta_1$
$\mathrm{Vol}(\Omega)$	$\|\omega_1\|^2 \approx 6.875$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\|\omega_1\|^2 \approx 5.108$
ω	ω_1	ω_1
η	η_1	η_1
$\theta_1 = \pi/\omega$	$(2\pi)^{3/2}/\Gamma(1/4)^2 \approx 1.198$	$\pi^2\sqrt[3]{16}/\Gamma(1/3)^3 \approx 1.293$
$\theta_2 = \eta/\omega$	$8\pi^2/\Gamma(1/4)^4 \approx 0.456$	$\pi^3 2^{11/3}/(\sqrt{3}\Gamma(1/3)^6) \approx 0.615$
$\\|\underline{\theta}\\|$	≈ 1.626	≈ 1.746
a_1	1	1
a_2	0	0
$\|\wp(\omega/3)\|$	$\frac{1}{3}\sqrt{9+6\sqrt{3}} \approx 1.467$	$\sqrt[3]{4} \approx 1.587$
$\|\wp'(\omega/3)\|$	$\sqrt{\frac{8}{3}\sqrt{3+2\sqrt{3}}} \approx 2.603$	$2\sqrt{3} \approx 3.464$
$\\|\mathcal{P}\\|_\infty$	≈ 2.603	≈ 3.464
$\|\sigma(\omega/3)\|$	≈ 0.865	≈ 0.808
$h(\mathcal{P})$	$\log(\sqrt[8]{27}\sqrt{\frac{8}{3}\sqrt{3+2\sqrt{3}}}) \approx 1.368$	$\log(2\sqrt{3}) \approx 1.242$

Tableau 3

	$y^2 = 4x^3 - 4x$	$y^2 = 4x^3 - 4$
Proposition 2		
$A(\Omega)$	≈ 1.558	≈ 0.467
$B(\Omega)$	≈ 0.685	≈ 0.922
$A_1(\Omega)$	≈ 5.194	≈ 3.280
$A_2(\Omega)$	≈ 3.305	≈ 2.791
$a(\Omega)$	≈ 5.194	≈ 3.280
$b(\Omega)$	≈ 1.870	≈ 2.345
c_1	1	1
Proposition 3		
c_4	≈ 7.368	≈ 7.242
Proposition 4		
c_5	≈ 72.5	≈ 82.94
c_6	≈ 3.318	≈ 3.262
c_7	≈ 72.5	≈ 82.94
Contrainte C_R		
c_{10}	≈ 7074	≈ 7755
Contrainte $\mathrm{C}_{\widetilde{U}}$		
c_{12}	≈ 5.854	≈ 5.777
c_{13}	≈ 10.18	≈ 10.61
c_{11}	≈ 82.76	≈ 93.55
Contrainte C_Φ		
c_8	≈ 8.368	≈ 8.242
Contrainte C_ϱ		
c_{14}	≈ 8.522	≈ 9.886
c_9	≈ 17.04	≈ 19.77
Condition C_1		
c_0'	≈ 172200	≈ 188700
c_0	≈ 172200	≈ 188700

Tableau 3 (suite)

Théorème A		
A	$\approx 0.254 \cdot 10^{29}$	$0.452 \cdot 10^{29}$

Théorème B		
$\widetilde{B}$	$\approx 0.514 \cdot 10^{78}$	$\approx 0.916 \cdot 10^{78}$
B	$\approx 0.485 \cdot 10^{319}$	$\approx 0.493 \cdot 10^{320}$

Références

[1] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, Hermann, 1949, ch. I-3, exercice 7.

[2] G. V. Chudnovsky, *Algebraic independence of constants connected with exponential and elliptic functions*, Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A 1976, 698–701.

[3] —, *Contributions to the Theory od Transcendental Numbers*, Math. Surveys Monographs 19, Amer. Math. Soc., 1984.

[4] G. Diaz, *Une nouvelle propriété d'approximation diophantienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 324 (1997), 969–972.

[5] F. G. Frobenius und L. Stickelberger, *Ueber die Addition und Multiplication der elliptischen Funktionen*, J. Reine Angew. Math. 88 (1879), 146–184.

[6] E. M. Jabbouri, *Sur un critère pour l'independance algébrique de P. Philippon*, dans : Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1990), de Gruyter, 1992, 195–202.

[7] S. Lang, *Elliptic Functions*, Addison-Wesley, 1973.

[8] D. W. Masser, *Sharp bounds for Weierstrass functions*, exposé au trimestre diophantien, IHP, 1999, à paraître.

[9] G. Philibert, *Une mesure d'indépendance algébrique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (1988), no. 3, 85–103.

[10] P. Philippon, *Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Rocky Mountain J. Math. 26 (1996), 1069–1088.

[11] —, *Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques*, J. Number Theory 64 (1997), 291–338.

[12] —, *Mesures d'approximation de valeurs de fonctions analytiques*, Acta Arith. 88 (1999), 113–127.

[13] —, *Approximations algébriques des points dans les espaces projectifs*, J. Number Theory 81 (2000), 234–253.

[14] E. Reyssat, *Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielles*, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 47–79.

[15] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. 6 (1962), 64–94.

[16] D. Roy et M. Waldschmidt, *Approximation diophantienne et indépendance algébrique de logarithmes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 30 (1997), 753–796.

[17] J. H. Silverman, *The difference between the Weil height and the canonical height on elliptic curves*, Math. Comp. 55 (1990), 723–743.

[18] M. Waldschmidt, *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups. Transcendence of the Exponential Function in Several Variables*, Grundlehren Math. Wiss. 326, Springer, Berlin, 2000.

[19] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1965.

2 Square Grange
75013 Paris, France
E-mail: bruiltet@mac.com

Reçu le 8.10.2000
et révisé le 28.9.2001 (3909)