ACTA ARITHMETICA
147.1 (2011)

Formules de trace et non-annulation de fonctions L automorphes au niveau $\mathfrak{p}^\nu$

par

D. Rouymi (Nancy)

1. Introduction. L'étude des propriétés analytiques des fonctions L automorphes est un problème central en théorie des formes modulaires. Presque tous les résultats obtenus actuellement sont restreints au cas où le niveau est un nombre premier ou un entier sans facteur carré. Pour compléter la description des propriétés, il semble intéressant de développer la théorie analytique des fonctions L de formes primitives de poids k fixé et de niveau $\mathfrak{p}^\nu$, où $\mathfrak{p}$ est un nombre premier fixé et $\nu \to \infty$. Dans cet article, nous choisissons le problème de non-annulation des fonctions L au point central comme exemple de notre étude.

Nous commençons par un rappel rapide de quelques notions. On appelle *forme parabolique de poids* $k \geq 2$ pair et *de niveau* q, toute fonction f holomorphe sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ telle que

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \tag{1}$$

pour tout élément

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : q \mid c \right\}$$

et que la fonction $z \mapsto (\operatorname{Im} z)^{k/2} f(z)$ est bornée sur $\mathbb{H}$. On désigne par $S_k(q)$ l'espace des formes paraboliques de poids k et de niveau q, que l'on munit du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_q := \int_F f(z)\overline{g}(z) y^k \,\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2},$$

où F désigne un domaine fondamental par l'action homographique de $\Gamma_0(q)$ sur $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Pour chaque $f \in S_k(m)$ avec $m \mid q$, $m < q$ et $l \mid (q/m)$, la

2010 *Mathematics Subject Classification*: 11F12, 11F33, 11F66, 11N25.
Key words and phrases: Fourier coefficients of modular forms, L functions.

DOI: 10.4064/aa147-1-1

fonction $z \mapsto f(lz)$ est une forme parabolique de $\Gamma_0(q)$. De telles formes s'appellent des *formes anciennes* de niveau q. L'orthogonal de l'espace engendré par ces formes est l'espace des *formes nouvelles*, noté par $S_k^*(q)$. Désignons par $\mathrm{H}_k^*(q)$ la base orthogonale de $S_k^*(q)$ constituée des formes primitives. Ses éléments sont des fonctions propres des opérateurs de Hecke (cf. [6, Paragraphes 2.7 et 3.3]).

Toute forme $f \in S_k(q)$ a un développement de Fourier en ∞ :

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_f(n) e(nz), \tag{2}$$

où $e(t) := e^{2\pi i t}$. On pose

$$\lambda_f(n) := a_f(n) n^{-(k-1)/2}. \tag{3}$$

Quand $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$, on a

$$\lambda_f(1) = 1, \tag{4}$$

$$\lambda_f(n) \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d \mid (m,n) \\ (d,q)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{6}$$

pour tous les entiers $m, n \geq 1$. En particulier, on utilisera dans la suite que si $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ avec m' entier ≥ 2 tel que $m' \mid q$ et si l'on a n et n' entiers ≥ 1 tels que $n \mid q^\infty$ ou $n' \mid q^\infty$ alors

$$\lambda_f(nn') = \lambda_f(n)\lambda_f(n')\,; \tag{7}$$

de plus les travaux de Deligne montrent que si $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ alors

$$\lambda_f(p)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } p^2 \mid m', \\ 1/p & \text{si } p \parallel m'. \end{cases} \tag{8}$$

La *fonction L automorphe* associée à $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ est définie par

$$L(s, f) := \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) n^{-s} \qquad (\operatorname{Re} s > 1). \tag{9}$$

Définissons la fonction L complète

$$\Lambda(s, f) := \hat{q}^s \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L(s, f), \tag{10}$$

où

$$\hat{q} := \sqrt{q}/(2\pi). \tag{11}$$

Alors cette fonction peut être prolongée analytiquement sur $\mathbb{C}$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s, f) = \varepsilon_f \Lambda(1 - s, f) \qquad (s \in \mathbb{C}) \tag{12}$$

où $\varepsilon_f = 1$ ou -1.

Les valeurs spéciales de $L(s,f)$ (par exemple, valeurs centrales et valeurs au bord de la bande critique) contiennent des informations intéressantes. En particulier, la non-annulation de $L(s,f)$ au point central $s = 1/2$ est une des questions centrales en théorie des fonctions L automorphes et a beaucoup d'applications dans divers problèmes. D'après Guo [5], nous savons que

$$L(1/2,f) \geq 0. \tag{13}$$

Un lien surprenant avec le zéro de Landau–Siegel a été decouvert par Iwaniec & Sarnak [9]. En désignant par $\varphi(q)$ la fonction d'Euler et par $\mathrm{H}_k^+(q)$ (resp. $\mathrm{H}_k^-(q)$) l'ensemble de $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ avec $\varepsilon_f = 1$ (resp. $\varepsilon_f = -1$), leur résultat s'énonce comme suit : si q est sans facteur carré assez grand tel que $\varphi(q) \gg q$ alors

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_k^+(q)|} \sum_{\substack{f\in\mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\geq(\log q)^{-2}}} 1 \geq \frac{1}{2}$$

et si l'on peut remplacer $1/2$ par une constante $c > 1/2$, alors il n'existe pas le zéro de Landau–Siegel pour les fonctions L de Dirichlet.

Le premier résultat concernant la non-annulation de $L(1/2,f)$ a été obtenu par Duke [3]. Il a démontré l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout nombre premier $q \geq 11$ et $q \neq 13$,

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f\in\mathrm{H}_2^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \geq \frac{C}{(\log q)^2}. \tag{14}$$

Cette minoration est obtenue avec la formule de Petersson [3, Lemma 1, p. 167]. Par la suite, Kowalski & Michel [10] obtiennent une proportion non nulle de non-annulation, à savoir : si q est un nombre premier assez grand alors

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f\in\mathrm{H}_2^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \geq \frac{1}{6} - \varepsilon. \tag{15}$$

Ce résultat est démontré avec la formule de trace de Petersson et le calcul des moments d'ordres 1 et 2 des fonctions L mollifiées ([1]). En même temps (indépendemment), Vanderkam [16] applique la formule de trace de Selberg [15, Proposition 4] aux deux premiers moments de la fonction L pour obtenir (15) avec une constante légèrement moins bonne $1/48$ à la place de $1/6$. Notons que ce résultat est obtenu également (sous une forme différente) par Kowalski, Michel & Vanderkam [11]. Enfin quand q est sans facteur carré,

---

([1]) C'est cette technique de mollification qui permet de supprimer le facteur log dans le résultat de Duke.

Iwaniec, Luo & Sarnak [8] montrent

$$\liminf_{q\to\infty} \frac{1}{|\mathrm{H}_k^+(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \geq \frac{9}{16}.$$

Dans le même article, ils établissent une formule de trace spécifique au cas où q est sans facteur carré.

D'autre part, l'étude des valeurs extrêmes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ (fonction L de la m-ème puissance symétrique associée à f) a reçu beaucoup d'attention (voir [1], [14] et [13]). En particulier, les résultats de Royer & Wu [14] montrent que les valeurs extrêmes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ dépendent, d'une manière surprenante, des propriétés arithmétiques du niveau. Donc il est naturel d'étudier l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non-annulation de $L(1/2, f)$. Dans cet article, nous proposons de minorer le quotient

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_k^*(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1$$

pour des entiers q de la forme p^ν, où p est un nombre premier et $\nu \geq 1$ est un entier. Le choix de cette forme de niveau a deux raisons : premièrement en prenant $\nu = 1$, nous retrouvons le cas classique qui a été étudié par Duke [3], Kowalski & Michel [10] et Vanderkam [16], mentionné ci-dessus ; deuxièmement, en fixant p et faisant $\nu \to \infty$, on obtient un cas de niveau vraiment friable (i.e. tous les facteurs premiers sont petits). Ce cas extrême arithmétiquement contraire au cas du niveau premier nous aidera à comprendre l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non-annulation.

On notera

$$\omega_q(f) := \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}\langle f, f\rangle_q}. \tag{16}$$

Pour une partie A de $S_k(q)$ on définit la somme harmonique

$$\sum_{f\in A}^{\mathrm{h}} \alpha_f := \sum_{f\in A} \alpha_f \omega_q(f).$$

Dans cet article, nous montrerons le résultat suivant.

Théorème 1. *Soient $k \geq 2$ un entier pair et $\mathfrak{p}$ un nombre premier. Alors il existe une constante $\nu_0(k, \mathfrak{p})$ telle que pour $\nu \geq \nu_0(k, \mathfrak{p})$ et $q = \mathfrak{p}^\nu$ on a*

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}}^{\mathrm{h}} 1 \gg \frac{1}{\log q},$$

où la constante impliquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

Pour ce faire, dans un premier temps, on établira une formule de trace sur les formes primitives de niveau $\mathfrak{p}^\nu$ qui prendra la forme suivante :

$$\Delta_q^*(m,n) := \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \frac{\varphi(q)}{q}\delta_{m,n} + R(m,n,k,q), \tag{17}$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker (voir le Théorème 2 ci-dessous). Cette formule de trace sera établie de la manière suivante :

- Nous commençons par une formule de trace concernant
$$\Delta_q(m,n) := \sum_{f\in B_k(q)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n), \tag{18}$$
où $B_k(q)$ est une base orthogonale quelconque de $S_k(q)$. Il est à noter que cette définition est indépendante du choix de la base orthogonale puisque $\Delta_q(m,n)$ est le coefficient de Fourier d'une série de Poincaré [2, Lemma 3.3]. À l'aide d'une décomposition permettant de passer des formes paraboliques aux formes primitives de niveaux inférieurs, on peut exprimer $\Delta_q(m,n)$ en fonction des nombres $\Delta_{q'}^*(m,n)$, où $q' \mid q$, tout en rendant négligeable la contribution des formes de niveau 1. Puis par inversion de Möbius on pourra exprimer $\Delta_q^*(m,n)$ en fonction des nombres $\Delta_{q'}(m,n)$.
- Après avoir établi une formule de trace dans $S_k(q)$ (de type [8, égalité (2.12)]) provenant de l'expression de $\Delta_q(m,n)$ comme des sommes de sommes de Kloosterman, on en déduit alors une formule de trace dans $\mathrm{H}_k^*(q)$.

Dans un second temps, on calculera au quatrième, cinquième et sixième paragraphe, les trois premiers moments au point critique et ce à l'aide de la formule de trace, pour obtenir

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{\varphi(q)}{q} + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-c}),\\
M_2 &= \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \log q + O_{k,\mathfrak{p}}(1),\\
M_3 &= \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4 (\log q)^3 + O_{k,\mathfrak{p}}((\log q)^2),
\end{aligned}$$

où

$$M_r := \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)}^{\mathrm{h}} L(1/2,f)^r. \tag{19}$$

Enfin une simple application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne le Théorème 1.

Le quatrième moment est lui plus dur à obtenir en particulier l'évaluation de son terme général. Ce moment a été calculé (au niveau premier) entre autres avec une inégalité du grand crible [4] appliquée dans la section 3.6 de [12] ; les auteurs évaluent ainsi le « off-diagonal term ».

Concernant la non-annulation des fonctions L au point critique, il est possible de supprimer le facteur $\log q$ de la proportion de non-annulation, ceci donne alors une proportion strictement positive. Les travaux seront publiés par ailleurs.

Notations. Dans ce texte, $\tau(n)$ (resp. $\omega(n)$) est le nombre des diviseurs de n (resp. le nombre de facteurs premiers distincts).

2. Formule de trace de Petersson au niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 2$. Le but de ce paragraphe est d'établir une formule de trace au niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 2$. Le Théorème 2 ci-dessous peut être considéré comme complémentaire au Corollaire 2.10 d'Iwaniec, Luo & Sarnak [8].

2.1. Énoncé du résultat

Théorème 2. *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 2$. Alors pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, on a*

$$\Delta_q^*(m,n) = \begin{cases} \phi(\nu,\mathfrak{p})\delta_{m,n} + O(\mathscr{R}) & \text{si } \mathfrak{p} \nmid mn \text{ et } \nu \geq 2, \\ 0 & \text{si } \mathfrak{p} \mid mn \text{ et } \nu \geq 2, \end{cases} \tag{20}$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker,

$$\phi(\nu,\mathfrak{p}) := \begin{cases} 1 - (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^{-1})^{-1} & \text{si } \nu = 2, \\ 1 - \mathfrak{p}^{-1} & \text{si } \nu \geq 3, \end{cases} \tag{21}$$

et

$$\mathscr{R} := \frac{\sqrt{mn\mathfrak{p}}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}}. \tag{22}$$

La constante impliquée dans le symbole O est absolue.

Remarque 1. Le cas où $q = \mathfrak{p}$ a été traité dans [8] : Si $m \geq 1$ et $n \geq 1$ sont des entiers tels que $(m,\mathfrak{p}) = 1$ et $(n,\mathfrak{p}^2) \mid \mathfrak{p}$ alors Iwaniec, Luo & Sarnak ont montré dans [8] que

$$\Delta_\mathfrak{p}^*(m,n) = \delta_{m,n} + O\left((mn)^{1/4}(n,\mathfrak{p})^{-1/2}\frac{\tau_3((m,n))}{\mathfrak{p}}\log(2mn\mathfrak{p})\right). \tag{23}$$

Le fait que nos restrictions sur m et n sont moins fortes que celles-ci est dû aux relations (7) et (8).

Corollaire 3. *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 3$. Alors pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, on a*

$$\Delta_q^*(m,n) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(q)}{q}\delta_{m,n} + O_{k,\mathfrak{p}}\Big(\dfrac{\sqrt{mn}\{\log(2(m,n))\}^2}{q^{3/2}}\Big) & \textit{si } \mathfrak{p}\nmid mn, \\ 0 & \textit{si } \mathfrak{p}\mid mn, \end{cases}$$

où la constante impliquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

2.2. Formule de trace pour $\Delta_q(m,n)$. Commençons par établir une formule de trace vraie dans tout l'espace des formes paraboliques de niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 0$ et de poids k.

Proposition 4. *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier, $m \geq 1, n \geq 1$ et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 0$. Alors*

$$\Delta_q(m,n) = \delta_{m,n} + O\Big(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}}\Big), \tag{24}$$

où la constante impliquée est absolue.

Démonstration. Selon [2, pages 248–249], on a

$$\Delta_q(m,n) = \delta_{m,n} + 2\pi i^k \sum_{c\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)} \frac{S(m,n;c)}{c} J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\Big),$$

où $S(m,n;c)$ est la somme de Kloosterman définie par

$$S(m,n;c) = \sum_{dd'\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, c)} \exp\Big(2\pi i\Big(\frac{dm+d'n}{c}\Big)\Big)$$

et J_{k-1} est la fonction de Bessel de première espèce. En utilisant les majorations classiques ([6, pages 60–61] et [2, page 245]) :

$$|S(m,n;c)| \leq 2^{\omega(c)}(m,n,c)^{1/2}c^{1/2}, \qquad J_{k-1}(x) \ll k^{-4/3}x,$$

on peut déduire

$$\Delta_q(m,n) = \delta_{m,n} + O\Big(\frac{\sqrt{mn}}{k^{4/3}q^{3/2}}\sum_{r\geq 1}\frac{2^{\omega(qr)}}{r^{3/2}}(m,n,qr)^{1/2}\Big).$$

Puisque $\omega(qr) \leq \omega(r)+1$ et $(m,n,qr) \mid (m,n,q)(m,n,r)$, il suit, en posant $d = (m,n,r)$ et $r = d\ell$, que

$$\begin{aligned} \Delta_q(m,n) &= \delta_{m,n} + O\Big(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}}{k^{4/3}q^{3/2}}\sum_{r\geq 1}\frac{2^{\omega(r)}(m,n,r)^{1/2}}{r^{3/2}}\Big) \\ &= \delta_{m,n} + O\Big(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}}{k^{4/3}q^{3/2}}\sum_{d\mid(m,n)}\frac{2^{\omega(d)}}{d}\sum_{\ell\geq 1}\frac{2^{\omega(\ell)}}{\ell^{3/2}}\Big) \\ &= \delta_{m,n} + O\Big(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}}{k^{4/3}q^{3/2}}\{\log(2(m,n))\}^2\Big), \end{aligned}$$

où l'on a déjà utilisé les estimations classiques (voir (74) du Lemme 14 ci-dessous)

$$\sum_{d|(m,n)} \frac{2^{\omega(d)}}{d} \leq \sum_{d\leq(m,n)} \frac{\tau(d)}{d} = \int_{1-}^{(m,n)} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}\sum_{d\leq t}\tau(d)$$
$$= \int_{1-}^{(m,n)} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}O(t\log t) \ll \{\log(2(m,n))\}^2.$$

Cela achève la démonstration. ■

2.3. Une base orthogonale de $S_k(q)$. Dans le but d'exprimer $\varDelta_q(m,n)$ en fonction de $\varDelta_q^*(m,n)$, on choisira une base orthogonal de $S_k(q)$ spécifique dans la définition (18). Considérons la décomposition orthogonale

$$S_k(q) = \bigoplus_{\ell m'=q}\ \bigoplus_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} S_k(\ell,f) \tag{25}$$

où (si $f\in\mathrm{H}_k^*(m')$) $S_k(\ell,f)$ est l'espace engendré par les formes

$$f_{|d}(z) := d^{k/2}f(dz) \qquad (d\,|\,\ell). \tag{26}$$

On introduit des fonctions de la forme

$$f_d = \sum_{c|\ell} x_d(c,f)f_{|c},$$

où $q=\ell m'$, d est un diviseur de ℓ, $f\in\mathrm{H}_k^*(m')$.

Si $m'>1$, notre choix est

$$x_d(c,f) := \begin{cases} \dfrac{\mu(r)\lambda_f(r)}{\sqrt{r\rho_{f,m'}(d)}} & \text{si } d=rc,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} \tag{27}$$

où

$$\rho_{f,m'}(d) := \sum_{n|d}\frac{\mu(n)\lambda_f(n)^2}{n}. \tag{28}$$

Si $m'=1$, on choisit

(29)
$$f_{\mathfrak{p}^r} := \begin{cases} f & (r=0),\\ \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_f}}\Big(f_{|\mathfrak{p}} - \dfrac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}f_{|1}\Big) & (r=1),\\ \dfrac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}}\Big(f_{|\mathfrak{p}^r} - \nu'(\mathfrak{p})\dfrac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}f_{|\mathfrak{p}^{r-1}} + \dfrac{1}{\mathfrak{p}}f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\Big) & (r\geq 2),\end{cases}$$

où

$$(30) \qquad P_1(X) := \frac{X}{\nu'(\mathfrak{p})}, \qquad \sigma_f := 1 - \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}, \qquad \nu'(\mathfrak{p}) := 1 + \frac{1}{\mathfrak{p}}.$$

Remarque 2. Dans le cas où $m' > 1$, en posant $d = \mathfrak{p}^\delta$, on a

$$\rho_{f,m'}(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta = 0 \text{ ou } \delta \geq 1 \text{ et } \mathfrak{p}^2 \mid m', \\ 1 - \mathfrak{p}^{-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le but de ce sous-paragraphe est de démontrer le résultat suivant, qui joue un rôle important dans la démonstration de la Proposition 9 ci-dessous.

Proposition 5. *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 1$.*

(i) *Soient la factorisation $q = \ell m'$ et $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$. Alors la famille*

$$E_\ell^f := \{f_d : d \mid \ell\}$$

est une base orthogonale de $S_k(\ell, f)$ vérifiant $\|f_d\|_q = \|f\|_q$ pour tout $d \mid \ell$.

(ii) *La famille*

$$\bigcup_{q=\ell m'} \bigcup_{f \in \mathrm{H}_k^*(m')} \{f_d : d \mid \ell\}$$

est une base orthogonale de $S_k(q)$.

Pour cela, nous avons besoin d'établir quelques lemmes auxiliaires.

Lemme 6. *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 1$. Soient $m' \mid q$, $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ et $r \geq 0$ un entier. Alors pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, on a*

$$(31) \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s} = Z_f(\mathfrak{p}^r, m', s) L(s, f \otimes f),$$

où

$$(32) \qquad L(s, f \otimes f) := \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s},$$

$$(33) \qquad Z_f(\mathfrak{p}^r, m', s) := \begin{cases} P_r(\lambda_f(\mathfrak{p}), s) & \textit{si } m' = 1, \\ \lambda_f(\mathfrak{p}^r) & \textit{si } m' > 1, \end{cases}$$

et

$$(34) \qquad \begin{cases} P_0(X, s) := 1, \\ P_1(X, s) := X/(1 + \mathfrak{p}^{-s}), \\ P_r(X, s) := X P_{r-1}(X, s) - P_{r-2}(X, s) \quad (r \geq 2). \end{cases}$$

Démonstration. Si $m' > 1$, on a ([2]), par multiplicité (7) des coefficients $\lambda_f(n)$,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s} = \lambda_f(\mathfrak{p}^r)L(s, f\otimes f). \tag{35}$$

Ensuite on considère le cas où $m' = 1$. Si on écrit chaque entier $n \geq 1$ de façon unique $n = n^{(\mathfrak{p})}n_{\mathfrak{p}}$ avec $n_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p}^\infty$ et $(n^{(\mathfrak{p})}, \mathfrak{p}) = 1$, alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s} = \sum_{n\mid\mathfrak{p}^\infty} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s} \sum_{(n,\mathfrak{p})=1} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}. \tag{36}$$

Notons R_r la première de ces deux sommes. (On n'a pas indiqué la dépendance en $f, \mathfrak{p}, s$ pour alléger la notation.) On va démontrer (31) par récurrence sur r.

Si $r = 0$, alors (31) est trivial.

Quand $r = 1$, on applique (6) sous la forme (avec $r = 1$)

$$\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r}) = \lambda_f(\mathfrak{p})\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-1}) - \lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-2}) \tag{37}$$

pour écrire

$$\begin{aligned}
R^*(\mathfrak{p}, s) = \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+1})}{\mathfrak{p}^{ks}} &= \lambda_f(\mathfrak{p}) + \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+1})}{\mathfrak{p}^{ks}} \\
&= \lambda_f(\mathfrak{p}) + \lambda_f(\mathfrak{p}) \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)^2}{\mathfrak{p}^{ks}} - \frac{1}{\mathfrak{p}^s} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+1})}{\mathfrak{p}^{ks}} \\
&= \frac{\lambda_f(\mathfrak{p})}{1+\mathfrak{p}^{-s}} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)^2}{\mathfrak{p}^{ks}}.
\end{aligned}$$

Avec l'égalité (36), on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p})}{n^s} = \frac{\lambda_f(\mathfrak{p})}{1+\mathfrak{p}^{-s}} L(s, f\otimes f). \tag{38}$$

Si $r \geq 2$, on utilise (37) pour écrire, pour tout $k \geq 0$,

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r})}{\mathfrak{p}^{ks}} = \lambda_f(\mathfrak{p}) \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-1})}{\mathfrak{p}^{ks}} - \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-2})}{\mathfrak{p}^{ks}}.$$

([2]) C'est ici qu'intervient la différence entre les cas $m' = 1$ et $m' > 1$ due à la multiplicité des coefficients $\lambda_f(n)$.

En reportant dans (36) et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$
\begin{aligned}
(39)\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s}
&= \lambda_f(\mathfrak{p})\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^{r-1})}{n^s}-\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^{r-2})}{n^s}\\
&= (\lambda_f(\mathfrak{p})Z_f(\mathfrak{p}^{r-1},1,s)-Z_f(\mathfrak{p}^{r-2},1,s))L(s,f\otimes f)\\
&= Z_f(\mathfrak{p}^r,1,s)L(s,f\otimes f). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lemme 7. *Soient $k\geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q=\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu\geq 1$. Soient la factorisation $q=\ell m'$, ℓ_1,ℓ_2 deux entiers tels que $\ell_1,\ell_2\,|\,\ell$ et $f\in \mathrm{H}_k^*(m')$. Alors*

$$
(40)\qquad \langle f_{|\ell_1}, f_{|\ell_2}\rangle_q=\begin{cases}\dfrac{\lambda_f(\bar\ell)}{\sqrt{\bar\ell}}\langle f,f\rangle_q & si\ m'>1,\\[2ex] \dfrac{P_j(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\bar\ell}}\langle f,f\rangle_q & si\ m'=1,\end{cases}
$$

avec $\bar\ell:=\ell_1\ell_2/(\ell_1,\ell_2)^2=\mathfrak{p}^j$ et

$$
(41)\qquad P_j(X)=P_j(X,1),
$$

où les $P_j(X,s)$ sont donnés en (34).

Remarque 3. Les entiers j et donc $\bar\ell$ ne dépendent que de la différence des exposants de ℓ_1 et ℓ_2 : si $\ell_i:=\mathfrak{p}^{\nu_i}$ $(i=1,2)$ alors $\bar\ell=\mathfrak{p}^{|\nu_1-\nu_2|}$.

Démonstration du Lemme 7. On note

$$
\Gamma_\infty:=\left\{\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}: b\in\mathbb{Z}\right\}
$$

et on considère

$$
G(s):=\langle E(z,s)f(\ell_1 z), f(\ell_2 z)\rangle_q,
$$

où la série d'Eisenstein

$$
(42)\qquad E(z,s):=\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(q)}(\operatorname{Im}\gamma z)^s
$$

est définie pour $z\in\mathbb{H}$ et se prolonge en une fonction holomorphe si $\operatorname{Re}s>1/2$ sauf en un pôle simple en 1 [2, Lemma 3.7].

En utilisant la méthode classique de déroulement exposée dans [8, pages 72–73], on obtient si $\ell':=\ell_1/(\ell_1,\ell_2)$, $\ell'':=\ell_2/(\ell_1,\ell_2)$ et $[\ell_1,\ell_2]=\ell_1\ell_2/(\ell_1,\ell_2)$,

$$
(43)\qquad G(s)=\frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}}\frac{(\ell_1\ell_2)^{-(k-1)/2}}{[\ell_1,\ell_2]^s}R_f(\ell'\ell'',s),
$$

où

$$R_f(\ell'\ell'', s) := \sum_n \frac{\lambda_f(\ell' n)\lambda_f(\ell'' n)}{n^s} = \sum_n \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(\ell'\ell'' n)}{n^s}, \tag{44}$$

car de $(\ell', \ell'') = 1$ on déduit que $\ell' = 1$ ou $\ell'' = 1$.

En appliquant (31) du Lemme 6, l'égalité (43) devient

$$G(s) = \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \frac{(\ell_1\ell_2)^{(1-k)/2}}{[\ell_1, \ell_2]^s} Z_f(\bar{\ell}, m', s) L(s, f \otimes f).$$

Cette égalité appliquée à $\ell_1 = \ell_2 = 1$ montre que $L(s, f \otimes f)$ a un pôle simple en $s = 1$. De plus (33) et (34) montrent que $Z_f(\bar{\ell}, m', s)$ est holomorphe en $s = 1$. Donc

$$\operatorname*{Res}_{s=1} G(s) = \frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k} \frac{(\ell_1\ell_2)^{(1-k)/2}}{[\ell_1, \ell_2]} Z_f(\bar{\ell}, m', 1) \operatorname*{Res}_{s=1} L(s, f \otimes f).$$

D'autre part, rappelons la formule classique (voir [2]) qui concerne les séries d'Eisenstein :

$$\operatorname*{Res}_{s=1} E(z, s) = \frac{3}{\pi\nu(q)},$$

où $\nu(q) = q(1 + \mathfrak{p}^{-1})$, qui montre que ce résidu est indépendant de z. On trouve donc

$$\operatorname*{Res}_{s=1} G(s) = \langle \operatorname*{Res}_{s=1} E(z, s) f(\ell_1 z), f(\ell_2 z)\rangle_q = \frac{3}{\pi\nu(q)} \langle f(\ell_1 z), f(\ell_2 z)\rangle_q.$$

En comparant les deux expressions de $\operatorname{Res}_{s=1} G(s)$, on peut déduire

$$\langle f(\ell_1 z), f(\ell_2 z)\rangle_q = \frac{\pi\nu(q)}{3} \frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k} \frac{(\ell_1\ell_2)^{(1-k)/2}}{[\ell_1, \ell_2]} Z_f(\bar{\ell}, m', 1) \operatorname*{Res}_{s=1} L(s, f \otimes f)$$

ce qui s'écrit encore à l'aide de (26) :

$$\langle f_{|\ell_1}, f_{|\ell_2}\rangle_q = \frac{\pi\nu(q)}{3} \frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k} \frac{(\ell_1\ell_2)^{1/2}}{[\ell_1, \ell_2]} Z_f(\bar{\ell}, m', 1) \operatorname*{Res}_{s=1} L(s, f \otimes f). \tag{45}$$

Le cas $\ell_1 = \ell_2 = 1$ donne

$$\langle f, f\rangle_q = \frac{\pi\nu(q)}{3} \frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k} \operatorname*{Res}_{s=1} L(s, f \otimes f). \tag{46}$$

Enfin les égalités (45) et (46) donnent

$$\langle f_{|\ell_1}, f_{|\ell_2}\rangle_q = \frac{Z_f(\bar{\ell}, m', 1)}{\sqrt{\bar{\ell}}} \langle f, f\rangle_q. \tag{47}$$

Ceci implique (40), grâce aux relations (33), (34) et (41). ∎

LEMME 8. *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 1$. Si $f \in \mathrm{H}_k^*(1)$, on a*

$$\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_1 \rangle_q = \langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}} \rangle_q = 0 \qquad (r \geq 1), \tag{48}$$

$$\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^2} \rangle_q = 0 \qquad (r \geq 2), \tag{49}$$

$$\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j} \rangle_q = \langle f_{\mathfrak{p}^r}, f_{\mathfrak{p}^{j-1}} \rangle_q \qquad (3 \leq j \leq r), \tag{50}$$

$$\langle f_{\mathfrak{p}^r}, f_{\mathfrak{p}^j} \rangle_q = 0 \qquad (0 \leq j < r). \tag{51}$$

Démonstration. Montrons (48). D'après (29), la quantité $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_1 \rangle_q$ vaut, à un facteur multiplicatif près,

$$\left\langle f_{|\mathfrak{p}^{r+1}} - \nu'(\mathfrak{p}) \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^r} + \frac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}, f_{|1} \right\rangle_q$$

qui vaut avec (40)

$$\frac{P_{r+1}(\lambda_f(\mathfrak{p})) - \nu'(\mathfrak{p}) P_1(\lambda_f(\mathfrak{p})) P_r(\lambda_f(\mathfrak{p})) + P_{r-1}(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}^{r+1}}}.$$

Puisque $\nu'(\mathfrak{p}) P_1(\lambda_f(\mathfrak{p})) = \lambda_f(\mathfrak{p})$, la dernière relation de (34) et (41) permettent de conclure que

$$\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_1 \rangle_q = 0.$$

Pour ce qui concerne $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}} \rangle_q$ et (49), les calculs sont similaires et la récurrence (41) permet d'établir qu'ils sont nuls.

Passons à (50) avec $3 \leq j \leq r$. On a

$$\begin{aligned} \langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j} \rangle_q = \Big\langle & f_{|\mathfrak{p}^{r+1}} - \nu'(\mathfrak{p}) \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^r} + \frac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}, \\ & f_{|\mathfrak{p}^j} - \nu'(\mathfrak{p}) \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{j-1}} + \frac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{j-2}} \Big\rangle_q . \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \langle f_{\mathfrak{p}^r}, f_{\mathfrak{p}^{j-1}} \rangle_q = \Big\langle & f_{|\mathfrak{p}^r} - \nu'(\mathfrak{p}) \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}} + \frac{f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}}{\mathfrak{p}}, \\ & f_{|\mathfrak{p}^{j-1}} - \nu'(\mathfrak{p}) \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{j-2}} + \frac{f_{|\mathfrak{p}^{j-3}}}{\mathfrak{p}} \Big\rangle_q . \end{aligned}$$

Avec (40) on peut développer ce produit scalaire et on retrouve le même résultat qu'avec $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j} \rangle_q$ car les indices r et j ont diminué de 1 mais leur différence reste la même (cf. Remarque 3).

Enfin montrons (51). Pour $r = 1$, (29) et la deuxième relation de (40) nous permettent d'écrire

$$\langle f_{\mathfrak{p}}, f_1 \rangle_q = \frac{1}{\sigma_f} \left(\langle f_{|\mathfrak{p}}, f_{|1} \rangle_q - \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} \| f_{|1} \| \right) = 0.$$

Quand $r \geq 2$, le résultat souhaité découle, par une simple récurrence sur r, de (48), (49) et (50). ■

Nous sommes maintenant prêts à démontrer la Proposition 5.

Preuve de la Proposition 5. Évidemment la deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première et la décomposition (25). Donc il suffit de démontrer l'assertion (i).

Dans un premier temps, supposons $m' > 1$ et justifions le choix fait en (27). Pour cela, on pose

$$\delta_f(d_1, d_2) := \frac{\langle f_{d_1}, f_{d_2}\rangle_q}{\langle f, f\rangle_q}$$

pour $d_1 \mid \ell$ et $d_2 \mid \ell$ (où l'on rappelle que $f_d = \sum_{c|\ell} x_d(c, f) f_{|c}$). Pour que E_ℓ^f soit une base orthogonale de $S_k(\ell, f)$ et $\|f_d\|_q = \|f\|_q$ pour tout $d \mid \ell$, il suffit de montrer que $\delta_f(d_1, d_2)$ soit le symbole de Kronecker.

Selon (40) on a

$$\delta_f(d_1, d_2) = \sum_{\ell_1, \ell_2 | \ell} x_{d_1}(\ell_1, f) x_{d_2}(\ell_2, f) \frac{\lambda_f(\bar{\ell})}{\sqrt{\bar{\ell}}}$$

avec la notation $\bar{\ell} := \ell_1\ell_2/(\ell_1, \ell_2)^2$. Écrivant $\ell_1 = a\ell'$ et $\ell_2 = a\ell''$ avec $a = (\ell_1, \ell_2)$, on a, à l'aide de (6) et (7),

$$\begin{aligned}
\delta_f(d_1, d_2) &= \sum_{a|\ell} \sum_{\substack{\ell', \ell'' | (\ell/a) \\ (\ell', \ell'')=1}} x_{d_1}(a\ell', f) x_{d_2}(a\ell'', f) \frac{\lambda_f(\ell')\lambda_f(\ell'')}{\sqrt{\ell'\ell''}} \\
&= \sum_{a|\ell} \sum_{b|(\ell/a)} \mu(b) \sum_{\ell', \ell'' | (\ell/(ab))} x_{d_1}(ab\ell', f) x_{d_2}(ab\ell'', f) \frac{\lambda_f(b\ell')\lambda_f(b\ell'')}{b\sqrt{\ell'\ell''}} \\
&= \sum_{a|\ell} \sum_{b|(\ell/a)} \frac{\mu(b)\lambda_f(b)^2}{b} \sum_{\ell' | (\ell/(ab))} x_{d_1}(ab\ell', f) \frac{\lambda_f(\ell')}{\sqrt{\ell'}} \sum_{\ell'' | (\ell/(ab))} x_{d_2}(ab\ell'', f) \frac{\lambda_f(\ell'')}{\sqrt{\ell''}}.
\end{aligned}$$

En posant $c = ab$, on trouve

$$\delta_f(d_1, d_2) = \sum_{c|\ell} \rho_{f,m'}(c) y_{d_1}(c, f) y_{d_2}(c, f), \tag{52}$$

où $\rho_{f,m'}(c)$ est définie en (28) et

$$y_d(c, f) := \sum_{r|(\ell/c)} x_d(rc, f) \frac{\lambda_f(r)}{\sqrt{r}}.$$

Avec le choix (27), un calcul simple montre que ([3])

([3]) Notons que $y_d(c, f)$ existe puisque $\rho_{f,m'}(c) = \prod_{p|c}(1 - \lambda_f(p)^2/p)$ implique que $\rho_{f,m'}(c) \in]0, 1]$, étant donné l'égalité (8).

$$y_d(c,f)=\begin{cases}1/\sqrt{\rho_{f,m'}(c)} & \text{si } d=c,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

En reportant dans (52), on a

$$\delta_f(d_1,d_2)=\begin{cases}1 & \text{si } d_1=d_2,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ceci termine la preuve de l'orthogonalité dans le cas $m'>1$.

Passons à la preuve de la base orthogonale de $S_k(q,f)$. On supposera désormais $m'=1$. La famille proposée en (29) est bien définie puisque

$$\sigma_f\geq 1/9. \tag{53}$$

D'après (51) du Lemme 8, la famille E_q^f est une base orthogonale. Il reste à démontrer que $\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q=\|f\|_q$. Pour f_1 c'est immédiat. Pour $f_{\mathfrak{p}}$, d'après (29), nous avons

$$\|f_{\mathfrak{p}}\|_q^2=\frac{1}{\sigma_f}\left(\|f_{|\mathfrak{p}}\|_q^2+\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}\|f_{|1}\|_q^2-2\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\langle f_{|\mathfrak{p}},f_{|1}\rangle_q\right).$$

Mais en utilisant la deuxième relation de (40), on a

$$\|f_{|\mathfrak{p}^r}\|_q^2=\|f\|_q^2\quad\text{et}\quad\langle f_{|\mathfrak{p}},f_{|1}\rangle_q=\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\|f\|_q^2.$$

En reportant dans la formule précédente et en utilisant (30), on trouve

$$\|f_{\mathfrak{p}}\|_q^2=\|f\|_q^2.$$

Il reste à traiter le cas de $f_{\mathfrak{p}^r}$ où $r\geq 2$. On notera ν' au lieu de $\nu'(\mathfrak{p})$ pour alléger. D'après (29), on a

$$\begin{aligned}\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q^2=\frac{1}{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}\Bigg(&\|f_{|\mathfrak{p}^r}\|_q^2+\frac{\nu'^2P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}\|f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}\|_q^2+\frac{\|f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\|_q^2}{\mathfrak{p}^2}\\&-2\nu'\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\langle f_{|\mathfrak{p}^r},f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}\rangle_q+\frac{2}{\mathfrak{p}}\langle f_{|\mathfrak{p}^r},f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\rangle_q\\&-2\nu'\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\mathfrak{p}^{3/2}}\langle f_{|\mathfrak{p}^{r-1}},f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\rangle_q\Bigg).\end{aligned}$$

En utilisant (40), on trouve que

$$\begin{aligned}\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q^2=&\frac{\|f\|_q^2}{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}\\&\times\left(1+\frac{\nu'(\nu'-2)P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}+\frac{1+2P_2(\lambda_f(\mathfrak{p}))-2\nu'P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}^2}\right).\end{aligned}$$

Utilisons la relation de récurrence (41) qui peut se réécrire (à l'aide de (30))

$$P_2=\nu'P_1^2-1$$

pour écrire

$$\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q^2 = \frac{1}{\sigma_f(1-\mathfrak{p}^{-2})}\left(1 - \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}\right)\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{p}^2}\right),$$

ce qui donne bien $\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q = \|f\|_q$ pour tout $r \geq 2$. ∎

2.4. Passage entre $\Delta_q(m,n)$ et $\Delta_q^*(m,n)$. On en vient au résultat liant $\Delta_q(m,n)$ et $\Delta_q^*(m,n)$.

Proposition 9. *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 1$. Alors pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$ tels que $\mathfrak{p} \nmid mn$, on a*

$$\Delta_q(m,n) = \sum_{\substack{q=\ell m' \\ m'>1}} \frac{1}{\ell}\left(1 - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)} \Delta_{m'}^*(m,n) + \frac{\mathfrak{p}^2 - \mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2 - 1}\frac{1}{q}\sum_{d \mid \mathfrak{p}^\infty} \frac{\Delta_1^*(d^2m,n)}{d} \tag{54}$$

et réciproquement

$$\Delta_q^*(m,n) = \sum_{\substack{q=\ell m' \\ m'>1}} \mu(\ell)\left(\mathfrak{p} - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}}\right)^{-\omega(\ell)} \Delta_{m'}(m,n) + \frac{\mu(q)}{q}\sum_{d \mid \mathfrak{p}^\infty} \frac{\Delta_1(d^2m,n)}{d}. \tag{55}$$

Pour prouver cette proposition, on a besoin encore d'établir quelques lemmes auxiliaires.

Lemme 10. *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 1$. Soient la factorisation $q = \ell m'$ et $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ alors*

$$\omega_q(f) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{m'}(f)}{\ell} & \text{si } m' > 1, \\ \dfrac{\omega_1(f)}{\nu(q)} & \text{si } m' = 1. \end{cases}$$

Démonstration. La preuve de ce lemme repose sur la définition (16) et la formule classique ([6, page 35] et [8, page 72])

$$\|f\|_q^2 = \frac{\nu(q)}{\nu(m')}\|f\|_{m'}^2.$$

Cela achève la démonstration. ∎

Lemme 11. *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 1$. Soient la factorisation $q = \ell m'$ et $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$. Alors les* *coefficients* $x_d(1,f)$ *(pour* $d\,|\,\ell$*) définis en* (27)–(30) *vérifient*

$$\sum_{d|\ell} x_d(1,f)^2 = \begin{cases} \left(1-\dfrac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)} & \text{si } m'>1,\\[2ex] \dfrac{\mathfrak{p}^2-\mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2-1}\,\dfrac{1}{\sigma_f} & \text{si } m'=1,\end{cases} \tag{56}$$

où σ_f *est défini en* (30).

Démonstration. Commençons par le cas $m'>1$. D'après (27), (28), (8) et le fait que $\ell\,|\,\mathfrak{p}^\infty$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{d|\ell} x_d(1,f)^2 &= \sum_{d|\ell}\frac{\mu(d)^2\lambda_f(d)^2}{d\rho_{f,m'}(d)} = \left(1+\frac{\lambda_f(\mathfrak{p})^2}{\mathfrak{p}\rho_{f,m'}(\mathfrak{p})}\right)^{\omega(\ell)}\\ &= \frac{1}{\rho_{f,m'}(\mathfrak{p})^{\omega(\ell)}} = \frac{1}{\rho_{f,m'}(\ell)} = \left(1-\frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)}.\end{aligned} \tag{57}$$

Passons au cas où $m'=1$. D'après (29) et (30), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{d|q} x_d(1,f)^2 &= 1+\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}\sigma_f}+\frac{1-\mu(q)^2}{(\mathfrak{p}^2-1)\sigma_f}\\ &= \frac{1}{\sigma_f}+\frac{1-\mu(q)^2}{(\mathfrak{p}^2-1)\sigma_f} = \frac{1}{\sigma_f}\,\frac{\mathfrak{p}^2-\mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2-1}. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Concernant le cas $m'=1$, on a le résultat suivant.

Lemme 12. *Soient* $k\ge 2$ *un entier pair et* $\mathfrak{p}$ *un nombre premier. Si* $f\in \mathrm{H}_k^*(1)$*, alors le coefficient* σ_f *défini en* (30) *vérifie*

$$\frac{1}{\sigma_f(1+\mathfrak{p}^{-1})} = \sum_{n|\mathfrak{p}^\infty}\frac{\lambda_f(n^2)}{n}. \tag{58}$$

Démonstration. Comme f est une forme primitive de niveau 1, il existe un nombre complexe $\alpha=\alpha_f(\mathfrak{p})$ vérifiant $|\alpha|=1$ tel que

$$\lambda_f(\mathfrak{p}^j) = \sum_{0\le i\le j}\alpha^{j-2i} \tag{59}$$

pour tout entier $j\ge 0$. Donc (30) et (59) avec $j=1$ nous donnent

$$\begin{aligned}\sigma_f &= 1-\frac{\mathfrak{p}^{-1}\lambda_f(\mathfrak{p})^2}{(1+\mathfrak{p}^{-1})^2} = 1-\frac{\mathfrak{p}^{-1}(\alpha+\alpha^{-1})^2}{(1+\mathfrak{p}^{-1})^2}\\ &= \frac{(1-\alpha^2/\mathfrak{p})(1-\alpha_f^{-2}/\mathfrak{p})}{(1+\mathfrak{p}^{-1})^2}.\end{aligned} \tag{60}$$

D'autre part, on a

$$2\sum_{n\mid\mathfrak{p}^\infty}\frac{\lambda_f(n^2)}{n}=2\sum_{j\geq 0}\frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^{2j})}{\mathfrak{p}^j}=\sum_{j\geq 0}\frac{1+(-1)^j}{\sqrt{\mathfrak{p}}^j}\sum_{0\leq i\leq j}\alpha^{j-2i}$$
$$=\sum_{i\geq 0}\alpha^{-2i}\Big(\frac{(\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}})^i}{1-\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}}}+\frac{(-\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}})^i}{1+\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}}}\Big)$$
$$=\frac{1}{(1-\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}})(1-\alpha^{-1}/\sqrt{\mathfrak{p}})}+\frac{1}{(1+\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}})(1+\alpha^{-1}/\sqrt{\mathfrak{p}})}.$$

Ceci implique que

$$\sum_{n\mid\mathfrak{p}^\infty}\frac{\lambda_f(n^2)}{n}=\frac{1+\mathfrak{p}^{-1}}{(1-\alpha^2/\mathfrak{p})(1-\alpha^{-2}/\mathfrak{p})},$$

ce qui avec (60) termine la preuve. ■

On est maintenant prêt à prouver la Proposition 9.

Démonstration de la Proposition 9. D'après la deuxième assertion de la Proposition 5, la famille

$$\bigcup_{q=\ell m'}\ \bigcup_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')}\{f_d : d\mid \ell\}$$

est une base orthogonale de $S_k(q)$. D'autre part, la définition (18) de $\Delta_q(m,n)$ est indépendante du choix de la base orthogonale [2, Lemma 3.3]. Donc on peut choisir cette base orthogonale dans la définition de $\Delta_q(m,n)$ pour écrire

$$\Delta_q(m,n)=\sum_{q=\ell m'}\ \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')}\ \sum_{d\mid\ell}\omega_q(f_d)\lambda_{f_d}(m)\lambda_{f_d}(n).$$

On a

$$\lambda_{f_d}(j)=\sum_{\substack{c\mid\ell\\ j=rc}}c^{k/2}x_d(c,f)\lambda_f(r).$$

En particulier si $\mathfrak{p}\nmid j$ alors

$$\lambda_{f_d}(j)=x_d(1,f)\lambda_f(j). \tag{61}$$

Le Lemme 5 et (16) conduisent à $\omega_q(f_d)=\omega_q(f)$. En reportant ceci et (61) dans la formule précédente, on a

$$\Delta_q(m,n)=\sum_{q=\ell m'}\ \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')}\omega_q(f)\sum_{d\mid\ell}\lambda_{f_d}(m)\lambda_{f_d}(n)$$
$$=\sum_{q=\ell m'}\ \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')}\omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n)\sum_{d\mid\ell}x_d(1,f)^2.$$

D'après le Lemme 11, on peut écrire

$$\Delta_q(m,n) = \sum_{\substack{q=\ell m'\\ m'>1}} (1-\mu(m')^2\mathfrak{p}^{-2})^{-\omega(\ell)} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) + \frac{\mathfrak{p}^2-\mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2-1} \sum_{f\in\mathrm{H}_k^*(1)} \frac{\omega_q(f)}{\sigma_f}\lambda_f(m)\lambda_f(n). \tag{62}$$

Afin de faire apparaître dans (62) les nombres $\Delta_{m'}^*$ exprimons $\omega_q(f)$ en fonction de $\omega_{m'}(f)$; on a alors recours au Lemme 10 pour avoir

$$\Delta_q(m,n) = \sum_{\substack{q=\ell m'\\ m'>1}} \ell^{-1}(1-\mu(m')^2\mathfrak{p}^{-2})^{-\omega(\ell)}\Delta_{m'}^*(m,n) + \frac{\mathfrak{p}^2-\mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2-1}\,\frac{1}{\nu(q)} \sum_{f\in\mathrm{H}_k^*(1)} \frac{\omega_1(f)}{\sigma_f}\lambda_f(m)\lambda_f(n). \tag{63}$$

À l'aide du Lemme 12, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu(q)}\sum_{f\in\mathrm{H}_k^*(1)}\frac{\omega_1(f)}{\sigma_f}\lambda_f(m)\lambda_f(n) &= \frac{1}{q}\sum_{d\mid\mathfrak{p}^\infty}\frac{1}{d}\sum_{f\in\mathrm{H}_k^*(1)}\omega_1(f)\lambda_f(d^2)\lambda_f(m)\lambda_f(n)\\ &= \frac{1}{q}\sum_{d\mid\mathfrak{p}^\infty}\frac{\Delta_1^*(d^2m,n)}{d},\end{aligned}$$

puisque notre hypothèse $\mathfrak{p}\nmid mn$ implique que $\lambda_f(d^2)\lambda_f(m)=\lambda_f(d^2m)$. En reportant dans (63), on obtient bien (54).

Par inversion de Möbius, il est rapide de vérifier (55). ∎

Remarque 4. La Proposition 9 appliquée à $q=\mathfrak{p}^\nu$ donne

$$\Delta_q^*(m,n) = \begin{cases} \Delta_q(m,n) - \dfrac{\Delta_{q/\mathfrak{p}}(m,n)}{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^{-1}} & \text{si } \nu=2,\\[2ex] \Delta_q(m,n) - \dfrac{\Delta_{q/\mathfrak{p}}(m,n)}{\mathfrak{p}} & \text{si } \nu\ge 3.\end{cases} \tag{64}$$

2.5. Fin de la preuve du Théorème 2. D'abord on traite le cas où $\mathfrak{p}\mid mn$ et $\nu\ge 2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathfrak{p}\mid m$. À l'aide de (7) et (8), on voit que

$$\lambda_f(m) = \lambda_f(\mathfrak{p})\lambda_f(m/\mathfrak{p}) = 0.$$

Ainsi par la définition de Δ_q^*, on a $\Delta_q^*(m,n)=0$.

Ensuite nou supposons que $\mathfrak{p}\nmid mn$ et $\nu\ge 2$. En reportant (24) de la Proposition 4 dans (55) et en remarquant que

$$\sum_{\substack{\ell m'=q\\ m'>1}} \mu(\ell)\biggl(\mathfrak{p}-\frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}}\biggr)^{-\omega(\ell)} = \phi(\nu,\mathfrak{p}),$$

on obtient

$$\Delta_q^*(m,n) = \phi(\mathfrak{p},\nu)\delta_{m,n} + \mathscr{R},$$

où

$$\begin{aligned}\mathscr{R} &\ll \frac{\sqrt{mn}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}} \sum_{\substack{\ell m'=q\\ m'>1}} \frac{|\mu(\ell)|}{m'^{3/2}}\biggl(\mathfrak{p}-\frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}}\biggr)^{-\omega(\ell)}\\ &\ll \frac{\sqrt{mn\mathfrak{p}}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}}.\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration.

3. Lemmes auxiliaires. Soient $\zeta(s)$ la fonction de Riemann et

$$\zeta^{(q)}(s) := \zeta(s)\prod_{p\mid q}(1-p^{-s}). \tag{65}$$

3.1. Fonctions $U(y)$ et $T(y)$. Soit G est un polynôme pair de degré ≥ 2 tel que

$$G(0)=1 \quad\text{et}\quad G(-1)=G(-2)=0. \tag{66}$$

Pour $y>0$, on définit

$$T(y) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{(2)} \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\,\frac{G(s)}{s}y^{-s}\,\mathrm{d}s, \tag{67}$$

$$U(y) := \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{(2)} \zeta^{(q)}(1+2s)\frac{\Gamma(s+k/2)^2}{\Gamma(k/2)^2}\,\frac{G(s)^2}{s}y^{-s}\,\mathrm{d}s. \tag{68}$$

Lemme 13. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\begin{cases} T(y) = 1 + O_k(y) & \textit{si } y\to 0,\\ T(y) \ll_{j,k} y^{-j} & \textit{si } y\to\infty,\end{cases} \tag{69}$$

et

$$\begin{cases} U(y) = \dfrac{\varphi(q)}{q}\biggl\{\log\dfrac{1}{y} + g_k(\mathfrak{p}) + O_{k,\mathfrak{p}}(y)\biggr\} & \textit{si } y\to 0,\\ U(y) \ll_{j,k} y^{-j} & \textit{si } y\to\infty,\end{cases} \tag{70}$$

pour tout j réel >0, où

$$g_k(\mathfrak{p}) := 2\biggl(\frac{\log\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2) + \gamma\biggr) \tag{71}$$

et γ est la constante d'Euler.

Démonstration. On ne va démontrer que la formule asymptotique pour $U(y)$ quand $y \to 0$. Les autres peuvent être trouvées dans [10, Paragraphe 2.4]. On a

$$\zeta(1+s) = \frac{1}{s} + \sum_{0\le i\le 2} \frac{(-1)^i}{i!}\gamma_i s^i + O(s^3), \tag{72}$$

où γ_i désignent les constantes de Stieltjes (4). D'autre part, on peut écrire

$$1-\mathfrak{p}^{-(1+s)} = \frac{\varphi(q)}{q}\bigg\{1 + \sum_{1\le j\le 3} \frac{(-1)^{j+1}}{j!}\,\frac{(\log \mathfrak{p})^j}{\mathfrak{p}-1}s^j + O(s^4)\bigg\}. \tag{73}$$

Donc

$$\begin{aligned}\zeta^{(q)}(1+2s) &= (1-\mathfrak{p}^{-(1+2s)})\zeta(1+2s)\\ &= \frac{\varphi(q)}{q}\bigg(\frac{1}{2s} + \frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + \gamma + O(s)\bigg).\end{aligned}$$

Ceci implique la formule annoncée. ■

3.2. Lemme intermédiaire. Nous aurons besoin des estimations suivantes dans le calcul du troisième moment.

LEMME 14. *Soient $i, j \in \mathbb{N}$ et $\theta > 1$. On a*

$$\sum_{n\le x} \tau(n)^i (\log n)^j = C_i x(\log x)^{2^i+j-1} + O(x(\log x)^{2^i+j-2}), \tag{74}$$

$$\sum_{n\le x} \frac{\tau(n)^i (\log n)^j}{\sqrt{n}} = 2C_i \sqrt{x}(\log x)^{2^i+j-1} + O(\sqrt{x}(\log x)^{2^i+j-2}), \tag{75}$$

$$\sum_{n> x} \frac{\tau(n)^i (\log n)^j}{n^\theta} \ll \frac{(\log x)^{2^i+j-1}}{x^{\theta-1}} \tag{76}$$

uniformément pour $x \ge 3$, où C_i est une constante absolue.

Démonstration. On déduit le résultat par intégration par parties de la formule asymptotique classique

$$\sum_{n\le t} \tau(n)^i = C_i t(\log t)^{2^i-1} + O(t(\log t)^{2^i-2}). \ ■$$

---

(4) Ces nombres sont définis par

$$\gamma_i := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \bigg(\frac{(\log k)^i}{k} - \frac{(\log n)^{i+1}}{i+1}\bigg).$$

En particulier $\gamma_0 = \gamma$.

4. Calcul du premier moment des fonctions L. On commence par une expression de la valeur critique de la fonction L appelée « équation fonctionnelle approchée ».

Lemme 15. *Soient $k \geq 2$ un entier pair et $q \geq 1$ un entier. Pour toute forme $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ et tout réel $X > 0$ on a*

$$L(1/2, f) = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}} \left\{ H\left(\frac{n}{X\hat{q}}\right) + \varepsilon_f H\left(\frac{nX}{\hat{q}}\right) \right\}, \tag{77}$$

où

$$H(y) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \frac{\Gamma(s + k/2)}{\Gamma(k/2)} \frac{y^{-s}}{s} \, \mathrm{d}s. \tag{78}$$

Démonstration. Voir le Théorème 5.3 de [7]. ∎

On définit le premier moment harmonique « tordu »

$$M_{1,m} := \sum_{f \in \mathrm{H}_k^+(q)}^{\mathrm{h}} \lambda_f(m) L(1/2, f). \tag{79}$$

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 16. *Soient $0 < \eta < 1$, $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 3$. Pour tout $1 \leq m \leq q^\eta$ et $\mathfrak{p} \nmid m$, on a*

$$M_{1,m} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q} + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-c}),$$

où $0 < c = c(\eta) < 1/2$. En particulier

$$M_1 = \frac{\varphi(q)}{q} + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-c}).$$

Démonstration. Étant donné (77), on a

$$M_{1,m} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ H\left(\frac{n}{X\hat{q}}\right) \Delta_q^*(m, n) + H\left(\frac{nX}{\hat{q}}\right) \sum_{f \in \mathrm{H}_k^*(q)}^{\mathrm{h}} \varepsilon_f \lambda_f(m) \lambda_f(n) \right\}. \tag{80}$$

On majore en valeur absolue la deuxième somme ; puisque $\varepsilon_f = \pm 1$, $|\lambda_f(n)| \leq \tau(n)$, on a

$$\Big| \sum_{f \in \mathrm{H}_k^*(q)}^{\mathrm{h}} \varepsilon_f \lambda_f(m) \lambda_f(n) \Big| \leq \tau(m)\tau(n) \sum_{f \in \mathrm{H}_k^*(q)}^{\mathrm{h}} 1.$$

La formule de trace montre que cette dernière somme est bornée :

$$\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)}^{\mathrm{h}} 1 \ll_{k,\mathfrak{p}} 1.$$

Ainsi on obtient (désormais les majorations dépendent de k et $\mathfrak{p}$)

$$M_{1,m} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} H\left(\frac{n}{X\hat{q}}\right) \Delta_q^*(m,n) + O\left(\tau(m) \sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \left| H\left(\frac{nX}{\hat{q}}\right)\right|\right).$$

La formule de trace s'applique au premier terme pour donner

$$\begin{aligned} M_{1,m} = {} & \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q} H\left(\frac{m}{X\hat{q}}\right) + O\left(\frac{\sqrt{m}}{q^{3/2}} \sum_{n\geq 1} \left| H\left(\frac{n}{X\hat{q}}\right)\right| \{\log(2(m,n))\}^2\right) \\ & + O\left(\tau(m) \sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \left| H\left(\frac{nX}{\hat{q}}\right)\right|\right). \end{aligned}$$

Il est facile de prouver l'expression suivante de H :

$$H(y) = \exp(-y) \sum_{n=0}^{k/2-1} \frac{y^n}{n!}.$$

Celle-ci montre en particulier les estimations suivantes de H (j est un réel strictement positif)

$$\begin{cases} H(y) = 1 + O_k(y) & \text{si } y \to 0, \\ H(y) \ll_{j,k} y^{-j} & \text{si } y \to \infty. \end{cases} \tag{81}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M_{1,m} = {} & \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q} \\ & + O\left(\frac{\sqrt{m}}{X\hat{q}} + \frac{\sqrt{m}}{q^{3/2}}\Big(\sum_{n\leq X\hat{q}} + \sum_{n\geq X\hat{q}}\Big) \left| H\left(\frac{n}{X\hat{q}}\right)\right| \{\log(2(m,n))\}^2\right) \\ & + O\left(\tau(m) \sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \left| H\left(\frac{nX}{\hat{q}}\right)\right|\right). \end{aligned}$$

Ce qui donne pour le choix $X = q^{1-\eta'/2}$ avec $\eta < \eta' < 1$ (où η désigne le nombre strictement positif de l'énoncé de la proposition tel que $m \leq q^\eta$) :

$$M_{1,m} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q} + O\left(\frac{\sqrt{m}}{q^{(3-\eta')/2}} + \frac{\sqrt{m}}{q^{\eta'/2}} \{\log(2m)\}^2 + \frac{\tau(m)}{q^{(1-\eta')/2}}\right).$$

De plus le deuxième terme est négligeable puisque $1 \leq m \leq q^\eta$:

$$M_{1,m} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q} + O(q^{-(\eta'-\eta)/2+\varepsilon} + q^{-(1-\eta')/2+\varepsilon}).$$

En posant $c(\eta) = \min\left((\eta' - \eta)/2 - \varepsilon, (1-\eta')/2 - \varepsilon\right)$ pour un choix convenable de η' on a $0 < c(\eta) < 1/2$. ■

5. Calcul du deuxième moment. Le but de ce paragraphe est de calculer le deuxième moment M_2, défini en (19). Notre résultat est un peu plus général. En posant

$$M_{r,m} = \sum_{f \in \mathrm{H}_k^*(q)}^{\mathrm{h}} \lambda_f(m) L(1/2, f)^r, \tag{82}$$

nous avons le résultat suivant.

Proposition 17. *Soient $0 < \eta < 1$, $k \geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geq 3$. Pour tout $1 \leq m \leq q^\eta$ et $\mathfrak{p} \nmid m$, on a*

$$M_{2,m} = \frac{\tau(m)}{\sqrt{m}} \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \left\{\log\left(\frac{\hat{q}^2}{m}\right) + g_k(\mathfrak{p})\right\} + O_{k,\mathfrak{p},\eta}\left(\sqrt{m}\, \frac{(\log q)^4}{\sqrt{q}}\right),$$

où $g_k(\mathfrak{p})$ est définie en (71)*. En particulier*

$$M_2 = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \{\log(\hat{q}^2) + g_k(\mathfrak{p})\} + O_{k,\mathfrak{p}}\left(\frac{(\log q)^4}{\sqrt{q}}\right).$$

Démonstration. Considérons

$$J := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \Lambda(s + 1/2, f)^2 G(s)^2 \, \frac{\mathrm{d}s}{s},$$

où G est un polynôme de degré ≥ 2 vérifiant (66). Par le théorème des résidus, l'équation fonctionnelle (12) et le fait que ([5]) $\varepsilon_f^2 = 1$, on a

$$2J = \operatorname*{Res}_{s=0}\left(\Lambda(s+1/2, f)^2 \frac{G(s)^2}{s}\right) = \hat{q}\,\Gamma(k/2)^2 L(1/2, f)^2.$$

D'autre part, la formule (6) nous permet d'écrire

$$L(s+1/2, f)^2 = \zeta^{(q)}(1+2s) \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)\lambda_f(n)}{n^{s+1/2}} \qquad (\operatorname{Re} s > 1/2).$$

Ceci implique que

$$2J = \hat{q} \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)\lambda_f(n)}{\sqrt{n}} \, \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \zeta^{(q)}(1+2s) \Gamma(s + k/2)^2 \frac{G(s)^2}{s} \left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right)^{-s} \mathrm{d}s.$$

Les deux égalités précédentes donnent donc

$$L(1/2, f)^2 = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) \lambda_f(n), \tag{83}$$

([5]) C'est cette relation qui permet d'éviter le recours à une forme explicite de ε_f que l'on n'a pas au niveau q avec des facteurs carrés.

où $U(y)$ est définie en (68). En reportant cette expression dans (82) et en utilisant le Corollaire 3, il suit

$$M_{2,m} = \frac{\varphi(q)}{q}\,\frac{\tau(m)}{\sqrt{m}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right) + O_{k,\mathfrak{p}}(\mathscr{R}_1), \tag{84}$$

où

$$\mathscr{R}_1 := \sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)}{\sqrt{n}}\left|U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right)\right|\left(\frac{\sqrt{mn}\{\log(2(m,n))\}^2}{q^{3/2}}\right).$$

À l'aide de (70), il est facile de majorer ce reste :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_1 &\ll \frac{\sqrt{m}(\log q)^3}{q^{3/2}}\sum_{n\leq q}\tau(n) + \sqrt{mq}(\log q)^2\sum_{n>q}\frac{\tau(n)}{n^2}\\ &\ll \frac{\sqrt{m}(\log q)^4}{q^{1/2}}.\end{aligned}$$

En reportant dans (84) et en utilisant la première relation de (70), on obtient le résultat souhaité. ∎

6. Calcul du troisième moment. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 18. *Soient $k\geq 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q=\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu\geq 3$. On a*

$$M_3 = 4\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4\left\{\frac{1}{3}(\log\hat{q})^3+\left(2\frac{\log\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)+2\gamma\right)(\log\hat{q})^2+O_{k,\mathfrak{p}}(\log q)\right\},$$

où la constante impliquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

6.1. Début de la démonstration de la Proposition 18

Lemme 19. *Soient $k\geq 2$ un entier pair et $q\geq 1$ un entier positif. Alors*

$$M_3 = 2\sum_{m,n\geq 1}\frac{\tau(m)}{\sqrt{mn}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\Delta_q^*(m,n). \tag{85}$$

Démonstration. On considère l'intégrale

$$I := \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)}\Lambda(s+1/2,f)\frac{G(s)}{s}\,\mathrm{d}s.$$

À l'aide de l'équation fonctionnelle (12), le théorème des résidus nous permet d'écrire

$$(1+\varepsilon_f)I = \operatorname*{Res}_{s=0}\left(\Lambda(s+1/2,f)\frac{G(s)}{s}\right) = \sqrt{\hat{q}}\,L(1/2,f)\Gamma(k/2).$$

Cette égalité et la série de Dirichlet (9) donnent alors

$$L(1/2,f)=(1+\varepsilon_f)\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right). \tag{86}$$

Les égalités ([6]) (86) et (83) impliquent que

$$L(1/2,f)^3=(1+\varepsilon_f)\sum_{m\geq 1}\tau(m)\frac{\lambda_f(m)}{\sqrt{m}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right).$$

Si $\varepsilon_f=1$ alors

$$L(1/2,f)^3=2\sum_{m\geq 1}\tau(m)\frac{\lambda_f(m)}{\sqrt{m}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right).$$

Mais ceci reste également vrai si $\varepsilon_f=-1$: dans ce cas le membre de gauche est nul en vertu de l'équation fonctionnelle (12) qui impose alors $L(1/2,f)=0$; le membre de droite aussi est nul : en effet, de $L(1/2,f)=0$ on déduit $L(1/2,f)^2=0$ et donc

$$\sum_{m\geq 1}\tau(m)\frac{\lambda_f(m)}{\sqrt{m}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)=0$$

grâce à (83).

Finalement, on a, pour toute forme primitive de niveau q,

$$L(1/2,f)^3=2\sum_{m,n\geq 1}\frac{\tau(m)}{\sqrt{mn}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\lambda_f(m)\lambda_f(n), \tag{87}$$

ce qui implique le résultat désiré. ∎

6.2. Application de la formule de trace. En appliquant la formule de trace du Corollaire 3 à l'égalité (85), on peut écrire

$$M_3=2\frac{\varphi(q)}{q}\sideset{}{^*}\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)}{n}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right)+O_{k,\mathfrak{p}}(\mathscr{R}_2) \tag{88}$$

avec

$$\mathscr{R}_2:=\sum_{m,n\geq 1}\frac{\tau(m)\{\log(2(m,n))\}^2}{q^{3/2}}\left|T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)\right|,$$

où $\sum_{n\geq 1}^*$ désigne la somme portant sur les entiers n tels que $(n,q)=1$.

([6]) C'est la différence entre les égalités (86) et (83) qui empêche de déterminer l'ordre exact du premier moment des fonctions L automorphes sans recours à « l'équation fonctionnelle approchée ».

6.3. Évaluation du terme principal. Afin de calculer le premier terme de droite de (88), écrivons

$$\sum_{n\geq 1}{}^{*}\frac{\tau(n)}{n}T\Big(\frac{n}{\hat q}\Big)U\Big(\frac{n}{\hat q^2}\Big)=\Big(\sum_{n\leq q}{}^{*}+\sum_{n>q}{}^{*}\Big)\frac{\tau(n)}{n}T\Big(\frac{n}{\hat q}\Big)U\Big(\frac{n}{\hat q^2}\Big). \tag{89}$$

En faisant appel à (69)–(70) avec $j=1$ et (76), on a

$$\sum_{n>q}{}^{*}\frac{\tau(n)}{n}T\Big(\frac{n}{\hat q}\Big)U\Big(\frac{n}{\hat q^2}\Big)\ll q^{3/2}\sum_{n>q}\frac{\tau(n)}{n^3}\ll q^{-1/2}\log q. \tag{90}$$

En utilisant la première relation de (70), on peut écrire

$$\sum_{n\leq q}{}^{*}\frac{\tau(n)}{n}T\Big(\frac{n}{\hat q}\Big)U\Big(\frac{n}{\hat q^2}\Big)=\mathscr{T}+O(\mathscr{R}_3), \tag{91}$$

où

$$\mathscr{T}:=\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{n\leq q}{}^{*}\frac{\tau(n)}{n}T\Big(\frac{n}{\hat q}\Big)\Big\{\log\Big(\frac{\hat q^2}{n}\Big)+g_k(\mathfrak{p})\Big\}$$

et

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_3:=\frac{1}{\hat q^2}\sum_{n\leq q}{}^{*}\tau(n)\Big|T\Big(\frac{n}{\hat q}\Big)\Big|&\ll\frac{1}{\hat q^2}\Big(\sum_{n\leq\hat q}\tau(n)+\hat q^2\sum_{\hat q<n\leq q}{}^{*}\frac{\tau(n)}{n^2}\Big)\\&\ll q^{-1/2}\log q\end{aligned} \tag{92}$$

grâce à (69), (74) et (76).

Pour évaluer le terme principal $\mathscr{T}$, on écrit, à l'aide de (67),

$$\mathscr{T}=\frac{\varphi(q)}{q}(\mathscr{T}_0-\mathscr{R}_4),$$

où

$$\mathscr{T}_0:=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{(2)}\frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\sum_{n\geq 1}{}^{*}\frac{\tau(n)}{n^{s+1}}\Big\{\log\Big(\frac{\hat q^2}{n}\Big)+g_k(\mathfrak{p})\Big\}\hat q^s\frac{G(s)}{s}\,\mathrm{d}s,$$

$$\mathscr{R}_4:=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{(2)}\frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\sum_{n>q}{}^{*}\frac{\tau(n)}{n^{s+1}}\Big\{\log\Big(\frac{\hat q^2}{n}\Big)+g_k(\mathfrak{p})\Big\}\hat q^s\frac{G(s)}{s}\,\mathrm{d}s.$$

En utilisant l'estimation (76) du Lemme 14 pour majorer la somme dans $\mathscr{R}_4$ et la formule de Stirling

$$|\Gamma(s)|=\sqrt{2\pi}\,e^{-(\pi/2)|\tau|}|\tau|^{\sigma-1/2}\{1+O_\sigma(|\tau|^{-1})\} \tag{93}$$

valable uniformément pour $|\tau|\geq 1$, on peut déduire que

$$\mathscr{R}_4\ll_k q^{-1}(\log q)^2. \tag{94}$$

Pour évaluer $\mathscr{T}_0$, on écrit d'abord

$$\mathscr{T}_0 = (\log(\hat{q}^2) + g_k(\mathfrak{p}))\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{(2)} \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\zeta^{(q)}(s+1)^2\hat{q}^s\frac{G(s)}{s}\,\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{(2)} \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1)\hat{q}^s\frac{G(s)}{s}\,\mathrm{d}s.$$

Ensuite on utilise le théorème des résidus autour du pôle $s=0$; les intégrales résultantes en $\sigma=-1/2$ sont en $O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q)$ de sorte que

$$\mathscr{T}_0 = (2\log\hat{q} + g_k(\mathfrak{p}))\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)^2\frac{F(s)}{s}\right)$$
$$+ 2\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1)\frac{F(s)}{s}\right) + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q), \tag{95}$$

où

$$F(s) := \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\hat{q}^s G(s).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$F^{(j)}(0) = \sum_{0\le i\le j}\xi_{j,i}(\log\hat{q})^{j-i}, \tag{96}$$

où

$$\xi_{j,i} = \binom{j}{i}\sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}\frac{\Gamma^{(l)}(k/2)}{\Gamma(k/2)}G^{(i-l)}(0) \qquad \text{pour } 0\le i\le j\le 3.$$

En utilisant les relations (72) et (73), on trouve

$$\zeta^{(q)}(s+1)^2 = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left\{\frac{a_{-2}}{s^2}+\frac{a_{-1}}{s}+a_0+O(s)\right\}, \tag{97}$$

$$\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left\{\frac{b_{-3}}{s^3}+\frac{b_{-2}}{s^2}+b_0+O(s)\right\}, \tag{98}$$

où

$$a_{-2} := 1,$$
$$a_{-1} := 2\frac{\log\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + 2\gamma_0,$$
$$a_0 := \left(\frac{\log\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}\right)^2 - \frac{(\log\mathfrak{p})^2 - 4\gamma_0\log\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + \gamma_0^2 - 2\gamma_1,$$

$$
\begin{aligned}
b_{-3} &:= -1,\\
b_{-2} &:= -\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} - \gamma_0,\\
b_0 &:= -\frac{(\log \mathfrak{p})^3 - 2\gamma_0(\log \mathfrak{p})^2}{2(\mathfrak{p}-1)^2} + \frac{(\log \mathfrak{p})^3 - 6\gamma_0(\log \mathfrak{p})^2 + 6(\gamma_0^2 - 2\gamma_1)\log \mathfrak{p}}{6(\mathfrak{p}-1)}\\
&\qquad - \gamma_0\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2}.
\end{aligned}
$$

Donc on a les résidus suivants :

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)^2\frac{F(s)}{s}\right) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left(\frac{a_{-2}}{2}F''(0) + a_{-1}F'(0) + a_0F(0)\right),\\
&\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1)\frac{F(s)}{s}\right)\\
&\qquad\qquad = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left(\frac{b_{-3}}{6}F'''(0) + \frac{b_{-2}}{2}F''(0) + b_0F(0)\right).
\end{aligned}
$$

En reportant dans (95) et en utilisant (96), on obtient

$$
\mathscr{T}_0 = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 Q(\log \hat{q}) + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q), \tag{99}
$$

où

$$
Q(X) := A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0, \tag{100}
$$

et les constantes $A_j = A_j(k,\mathfrak{p})$ sont données par

$$
\begin{aligned}
A_3 &:= a_{-2}\xi_{2,0} + \tfrac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,0},\\
A_2 &:= a_{-2}\xi_{2,1} + 2a_{-1}\xi_{1,0} + \tfrac{1}{2}a_{-2}\xi_{2,0}g_k(\mathfrak{p}) + \tfrac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,1} + b_{-2}\xi_{2,0},\\
A_1 &:= a_{-2}\xi_{2,2} + 2a_{-1}\xi_{1,1} + 2a_0\xi_{0,0}\\
&\qquad + \left(\tfrac{1}{2}a_{-2}\xi_{2,1} + a_{-1}\xi_{1,0}\right)g_k(\mathfrak{p}) + \tfrac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,2} + b_{-2}\xi_{2,1},\\
A_0 &:= \left(\tfrac{1}{2}a_{-2}\xi_{2,2} + a_{-1}\xi_{1,1} + a_0\xi_{0,0}\right)g_k(\mathfrak{p}) + \tfrac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,3} + b_{-2}\xi_{2,2} + 2b_0\xi_{0,0}.
\end{aligned}
$$

En combinant (99), (92), (94), (91), (90) avec (89), on trouve

$$
\sum_{n\geq 1}{}^{*}\,\frac{\tau(n)}{n}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^3 Q(\log \hat{q}) + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q). \tag{101}
$$

6.4. Estimation du terme d'erreur $\mathscr{R}_2$. Écrivons

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_2 &= \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{a\geq 1} \{\log(2a)\}^2 \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ (m,n)=a}} \tau(m) \Big| T\Big(\frac{n}{\hat q}\Big) U\Big(\frac{m}{\hat q^2}\Big)\Big| \\
&= \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{a\geq 1} \{\log(2a)\}^2 \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ (m,n)=1}} \tau(am) \Big| T\Big(\frac{an}{\hat q}\Big) U\Big(\frac{am}{\hat q^2}\Big)\Big| \\
&\ll \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{a\geq 1} \{\log(2a)\}^2 \sum_{b\geq 1} |\mu(b)| \sum_{m,n\geq 1} \tau(abm) \Big| T\Big(\frac{abn}{\hat q}\Big) U\Big(\frac{abm}{\hat q^2}\Big)\Big| \\
&\ll \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{d\geq 1} h(d)\tau(d) \sum_{n\geq 1} \Big| T\Big(\frac{dn}{\hat q}\Big)\Big| \sum_{m\geq 1} \tau(m) \Big| U\Big(\frac{dm}{\hat q^2}\Big)\Big|,
\end{aligned}$$

où

$$h(d) := \sum_{ab=d} \{\log(2a)\}^2 |\mu(b)|.$$

En utilisant (69), on a

$$\sum_{n\geq 1} \Big| T\Big(\frac{dn}{\hat q}\Big)\Big| \ll \sum_{n\leq \hat q/d} 1 + \sum_{n>\max\{\hat q/d,1\}} \Big(\frac{\hat q}{dn}\Big)^2 \ll \frac{\hat q}{d}.$$

De façon similaire, les estimations (70) avec $j=2$, (74) et (76) nous permettent de déduire

$$\begin{aligned}
\sum_{m\geq 1} \tau(m) \Big| U\Big(\frac{dm}{\hat q^2}\Big)\Big| &\ll \sum_{m\leq \hat q^2/d} \tau(m) \log\Big(\frac{\hat q^2}{dm}\Big) + \sum_{m>\max\{\hat q^2/d,1\}} \tau(m) \Big(\frac{\hat q^2}{dm}\Big)^2 \\
&\ll \frac{\hat q^2 \log q}{d}.
\end{aligned}$$

En combinant ces estimations, on obtient

$$\mathscr{R}_2 \ll (\log q) \sum_{d\geq 1} \frac{h(d)\tau(d)}{d^2} \ll \log q. \tag{102}$$

6.5. Fin de la démonstration de la Proposition 18. En reportant (101) et (102) dans (88), on obtient

$$M_3 = 2\Big(\frac{\varphi(q)}{q}\Big)^4 Q(\log \hat q) + O_{k,\mathfrak p}(\log q).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$A_3 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad A_2 = 2\Big(2\frac{\log \mathfrak p}{\mathfrak p - 1} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2) + 2\gamma\Big).$$

Ceci implique le résultat annoncé.

7. Démonstration du Théorème 1. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on peut écrire

$$M_1 = \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} L(1/2,f) \leq \Big(\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1\Big)^{1/2}\Big(\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^+(q)} L(1/2,f)^2\Big)^{1/2}.$$

D'où

$$\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \geq (M_1)^2/M_2. \tag{103}$$

Puisqu'on a montré que

$$M_1 = \frac{\varphi(q)}{q} + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-c}), \qquad M_2 = \Big(\frac{\varphi(q)}{q}\Big)^2 \log(\hat{q}^2) + O(1),$$

alors

$$\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \gg \frac{1}{\log q}\cdot$$

Cela achève la démonstration du Théorème 1.

Remarque 5. Si l'on utilise l'inégalité de Hölder avec les moments d'ordre 1 et 3 des fonctions L on obtient, cette fois, la minoration moins forte suivante :

$$\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \gg \frac{1}{(\log q)^{3/2}}\cdot$$

Remarque 6. Si l'on applique la méthode de « l'équation fonctionnelle approchée » au deuxième moment on obtient le même résultat qu'avec une somme « courte ». Quant au troisième moment, cette méthode ne permet pas de le calculer étant donné le reste de la formule de trace.

Remerciements. L'auteur tient à remercier ses directeurs de thèse Jie Wu (Nancy) et Emmanuel Royer (Clermont-Ferrand) pour toute leur patience et leurs encouragements réguliers durant l'élaboration de ce travail. Il remercie également le rapporteur de cet article pour tous ses conseils avisés.

Références

[1] J. Cogdell and P. Michel, *On the complex moments of symmetric power L-functions at $s = 1$*, Int. Math. Res. Notices 2004, no. 31, 1561–1618.

[2] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 70 (1982/83), 219–288.

[3] W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level*, ibid. 119 (1995), 165–174.

[4] W. Duke, J. Friedlander and H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions. II*, ibid. 115 (1994), 209–217.

[5] J.-D. Guo, *On the positivity of the central critical values of automorphic L-functions for* GL(2), Duke Math. J. 83 (1996), 157–190.

[6] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Grad. Stud. in Math. 17, Amer. Math. Soc., 1997.

[7] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 53, Amer. Math. Soc., 2004.

[8] H. Iwaniec, W. Luo and P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L-functions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 91 (2001), 55–131.

[9] H. Iwaniec and P. Sarnak, *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau–Siegel zeros*, Israel J. Math. 120 (2000), Part A, 155–177.

[10] E. Kowalski and P. Michel, *A lower bound for the rank of* $J_0(q)$, Acta Arith. 94 (2000), 303–343.

[11] E. Kowalski, P. Michel and J. Vanderkam, *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip*, J. Reine Angew. Math. 526 (2000), 1–34.

[12] —, —, —, *Mollification of the fourth moment of automorphic L-functions and arithmetic applications*, Invent. Math. 142 (2000), 95–151.

[13] Y.-K. Lau and J. Wu, *A large sieve inequality of Elliott–Montgomery–Vaughan type and two applications*, Int. Math. Res. Notices 2008, no. 5, ID rnm 162, 35 pp.

[14] E. Royer and J. Wu, *Taille des valeurs de fonctions L de carrés symétriques au bord de la bande critique*, Rev. Mat. Iberoamer. 21 (2005), 263–312.

[15] J.-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke* T_p, J. Amer. Math. Soc. 101 (1997), 75–102.

[16] J. M. Vanderkam, *The rank of quotients of* $J_0(N)$, Duke Math. J. 97 (1999), 545–577.

D. Rouymi
Institut Elie Cartan Nancy, CNRS
Nancy-Université, INRIA
Boulevard des Aiguillettes, B.P. 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France
E-mail: rouymi@yahoo.fr

Reçu le 5.1.2009
et révisé le 29.9.2009 (5903)