ACTA ARITHMETICA
148.4 (2011)

Polynômes à valeurs entières ainsi que leurs dérivées en caractéristique p

par

David Adam (Tahiti)

1. Introduction. Soit D un anneau intègre de corps des fractions K et S un sous-ensemble de D. On note $\mathrm{Int}(S,D)$ (ou plus simplement $\mathrm{Int}(D)$ si $S = D$) le D-module des polynômes à valeurs entières sur S relativement à D :

$$\mathrm{Int}(S,D) = \{P \in K[X] \mid P(S) \subset D\}.$$

Il est bien connu (voir [3]) que les polynômes binomiaux

$$\binom{X}{n} = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$$

forment une base de $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$. De même, on note $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S,D)$ (ou plus simplement $\mathrm{Int}^{(\infty)}(D)$ si $S = D$) le D-module des polynômes à valeurs entières sur S relativement à D ainsi que toutes leurs dérivées :

$$\mathrm{Int}^{(\infty)}(S,D) = \{P \in K[X] \mid \forall \sigma \in \mathbb{N}\ P^{(\sigma)}(S) \subset D\}.$$

En 1951, Straus a décrit une base de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{Z})$:

Théorème 1.1 ([11]). *Les polynômes*

$$\prod_{p\ premier} p^{[n/p]}\binom{X}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

forment une base de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{Z})$.

En 1998, Laohakosol s'est intéressé au cas $D = \mathbb{F}_q[T]$. Dans la suite, on note $D^* = D \setminus \{0\}$. Soient $h \in D^*$ et $f \in K[X]$. On appelle *première différence finie de f par rapport à h* le polynôme

$$\Delta_h(f)(X) = \frac{f(X+h) - f(X)}{h}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 13F20.
Key words and phrases: integer-valued polynomials.

DOI: 10.4064/aa148-4-3 © Instytut Matematyczny PAN, 2011

Par récurrence, pour $h_1, \dots, h_k \in D^*$, on définit la *différence finie d'ordre k de f par rapport à $h_1, \dots, h_k$* :

$$\Delta_{h_1,\dots,h_k}(f)(X) = \Delta_{h_k}(\Delta_{h_{k-1},\dots,h_1}(f))(X).$$

L'ensemble des polynômes à valeurs entières sur D ainsi que toutes leurs différences finies est noté $\mathrm{Int}^{[\infty]}(D)$:

$$\mathrm{Int}^{[\infty]}(D) = \{P \in \mathrm{Int}(D) \mid \forall k \in \mathbb{N}^* \, \forall h_1, \dots, h_k \in D^* \ \Delta_{h_1,\dots,h_k}(P)(D) \subset D\}.$$

Dans [10, Theorem 5], Laohakosol formule l'égalité

$$\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T]) = \mathrm{Int}^{[\infty]}(\mathbb{F}_q[T]). \tag{1.1}$$

Connaissant une base de $\mathrm{Int}^{[\infty]}(\mathbb{F}_q[T])$ (voir [12] ou [1]), il en déduit une base de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$ [10, Corollary 4]. Cependant, l'égalité (1.1) est fausse. Dans la Section 2, on donnera l'exemple d'un polynôme appartenant à $\mathrm{Int}^{[\infty]}(\mathbb{F}_q[T])$ mais non à $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$. Plus fondamentalement, Chabert a caractérisé dans [6] les anneaux noethériens intègres D pour lesquels on a l'égalité $\mathrm{Int}^{[\infty]}(D) = \mathrm{Int}^{(\infty)}(D)$. En particulier, un tel anneau est de caractéristique 0. Par conséquent, une base de $\mathrm{Int}^{[\infty]}(\mathbb{F}_q[T])$ n'est pas une base de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$.

Définition 1.2.

(1) Soit B un anneau tel que $D[X] \subset B \subset K[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *n-ième idéal caractéristique de B* l'idéal

$$J_n(B) = \{0\} \cup \{\alpha \in K \mid \exists f \in B \text{ avec } f = \alpha X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots\}.$$

(2) Quand B est un D-module libre, une base $(P_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ de B est une *base régulière de B* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$.

Dorénavant, nous supposons que D est un anneau de Dedekind de caractéristique $p > 0$ à corps résiduel fini. Dans la Section 2, nous décrivons les idéaux caractéristiques de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$. Dans le cas où $\mathrm{Int}(S, D)$ admet une base régulière, nous construisons une base régulière de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$. Comme application, nous obtenons une base régulière de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$, corrigeant ainsi l'énoncé de [10, Corollary 4]. Dans la Section 3, nous supposons que D contient $\mathbb{F}_q[T]$ et nous considérons une autre sorte de dérivée : à chaque $a \in \mathbb{F}_q[T]$, on associe un opérateur "dérivée a-ième" δ_a sur $K[X]$. On note $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S, D)$ (ou plus simplement $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(D)$ si $S = D$) l'ensemble

$$\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S, D) = \{P \in K[X] \mid \forall a \in \mathbb{F}_q[T] \ (\delta_a(P))(S) \subset D\}.$$

Dans les cas où $S = \mathbb{F}_q$ ou $S = \mathbb{F}_q[T]$, une base régulière de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S, \mathbb{F}_q[T])$ est explicitée, donnant alors un résultat très analogue au théorème 1.1.

2. Bases de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$

NOTATIONS

(1) Rappelons que D est un anneau de Dedekind à corps résiduel fini de caractéristique $p > 0$, de corps de fractions K, et S est un sous-ensemble de D.
(2) Pour tout $i, j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note $[\![i, j]\!]$ (resp. $[\![i, j[\![$) l'ensemble des entiers compris entre i et j (resp. compris entre i et j et strictement plus petits que j).

REMARQUE 2.1. Soit $P \in K[X]$. Pour tout $\sigma \in [\![p, +\infty[\![$ on a $P^{(\sigma)} = 0$ et donc $P \in \mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$ si et seulement si pour tout $\sigma \in [\![0, p-1]\!]$ on a $P^{(\sigma)}(S) \subset D$. De plus, pour tout $(Q, \sigma) \in K[X] \times \mathbb{N}$, on a

$$(P^p Q)^{(\sigma)}(X) = P(X)^p Q^{(\sigma)}(X). \tag{2.1}$$

Par suite, si $P \in \mathrm{Int}(S, D)$ et $Q \in \mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$, alors $P^p Q \in \mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$.

NOTATIONS. Soit $L \in \mathbb{N}$. On pose

(1) $K_L[X] = \{f \in K[X] \mid \deg f < L\}$,
(2) $\mathrm{Int}_L(S, D) = \mathrm{Int}(S, D) \cap K_L[X]$,
(3) $\mathrm{Int}_L^{(\infty)}(S, D) = \mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D) \cap K_L[X]$.

2.1. Cas où D est un anneau de valuation discrète. Comme dans [3, Theorem IX.3.5], on montre que $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$ se comporte bien par localisation : pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$,

$$\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D_{\mathfrak{m}}).$$

On peut donc se restreindre au cas $D = V$, l'anneau d'une valuation discrète v. On note t un paramètre local de V. Pour décrire des bases régulières de $\mathrm{Int}(S, V)$, la notion de suite v-ordonnée introduite par Bhargava est très utile.

DÉFINITION 2.2 ([2]). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments distincts de S.

(1) Soit $L \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite v-ordonnée de S de longueur L* si

$$\forall j \in [\![0, L[\![\ \forall x \in V \quad v\Big(\prod_{k=0}^{j-1}(u_j - u_k)\Big) \le v\Big(\prod_{k=0}^{j-1}(x - u_k)\Big).$$

(2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite v-ordonnée de S* si elle est v-ordonnée de longueur L pour tout $L \in \mathbb{N}$.

REMARQUE 2.3. Si S est infini, il existe toujours des suites v-ordonnées de S. Si S est fini de cardinal s, il n'existe des suites v-ordonnées de S que de longueur au plus s.

PROPOSITION 2.4 ([2]). *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S et $L \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite v-ordonnée de longueur L de S si et seulement si les polynômes*

$$H_n(X) := \prod_{j=0}^{n-1} \frac{X - u_j}{u_n - u_j} \qquad (0 \le n < L)$$

forment une base régulière de $\mathrm{Int}_L(S, V)$.

On déduit de la proposition 2.4 que si $(u_n)_{0\le n<L}$ est une suite v-ordonnée de S de longueur L, alors pour tout $n \in [\![0, L[\![$, la quantité

$$v\Big(\prod_{j=0}^{n-1}(u_n - u_j)\Big)$$

ne dépend pas du choix de la suite v-ordonnée considérée.

DÉFINITION 2.5. Soit $(u_n)_{0\le n<L}$ une suite v-ordonnée de S de longueur L. On appelle *suite caractéristique* de S la suite $(w_S(n))_{0\le n<L}$ définie par

$$\forall n \in [\![0, L[\![\quad w_S(n) = v\Big(\prod_{j=0}^{n-1}(u_n - u_j)\Big).$$

Pour tout $n \in [\![0, L-1]\!]$ on a

$$J_n(\mathrm{Int}(S, V)) = t^{-w_S(n)}V.$$

THÉORÈME 2.6. *Soit $(u_n)_{0\le n<L}$ une suite v-ordonnée de S de longueur L. À chaque $n \in [\![0, p(L+1)]\!]$ écrit sous la forme $n = ps + r$ $(r, s \in \mathbb{N},\ r < p)$ on associe le polynôme*

$$P_n(X) = H_s(X)^p(X - u_s)^r \quad \text{où} \quad H_s(X) = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{X - u_j}{u_s - u_j}.$$

Alors, les P_n forment une base régulière de $\mathrm{Int}^{(\infty)}_{(L+1)p}(S, D)$.

Démonstration. Les polynômes $P_n(X)$ $(n \in [\![0, p(L+1)[\![)$ forment une base de $K_{p(L+1)}[X]$. D'après la remarque 2.1, ils sont dans $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, V)$. Soit $P \in \mathrm{Int}^{(\infty)}_{p(L+1)}(S, V)$, écrivons

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k P_k(X) \qquad \text{avec } a_k \in K \text{ pour tout } k \in [\![0, \deg P]\!].$$

On a $P(u_0) = a_0 \in V$. Montrons par récurrence que les $a_k \in V$. Soit $k \in [\![0, \deg P]\!]$ écrit sous la forme $k = ps + r$ $(r, s \in \mathbb{N},\ r < p)$. Alors

$$P^{(r)}(u_s) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j P_j^{(r)}(u_s) + r! a_k H_s(u_s)^p.$$

Comme $H_s(u_s) = 1$, $r!$ est inversible dans V et $\sum_{j=0}^{k-1} a_j P_j^{(r)}(u_s) \in V$, on en déduit que $a_k \in V$. ∎

COROLLAIRE 2.7. *Si* $\operatorname{Card} S \geq L$, *alors pour tout* $n < p(L+1)$, *on a*

$$J_n(\operatorname{Int}^{(\infty)}(S,V)) = t^{-w_S([n/p])}V.$$

PROPOSITION 2.8. *Supposons que* S *est de cardinal fini* s. *Alors*

$$\operatorname{Int}^{(\infty)}(S,V) = \operatorname{Int}_{ps}^{(\infty)}(S,V) \oplus H_s(X)^p K[X],$$

et pour tout $n \in [\![ps, +\infty[\![$,

$$J_n(\operatorname{Int}^{(\infty)}(S,V)) = K.$$

Démonstration. Soit $P \in K[X]$,

$$P(X) = H_s(X)^p Q(X) + R(X) \quad \text{avec } Q, R \in K[X] \text{ et } \deg R < ps.$$

Pour tout $(c,\sigma) \in S \times \mathbb{N}$ on a $(H_s^p)^{(\sigma)}(c) = 0$. Par conséquent, $P \in \operatorname{Int}^{(\infty)}(S,V)$ si et seulement si $R \in \operatorname{Int}^{(\infty)}(S,V)$. La deuxième partie de la proposition est une conséquence immédiate de la première. ∎

2.2. Globalisation. Maintenant, D est un anneau de Dedekind et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de D, on note $w_{S,\mathfrak{m}}$ la suite caractéristique de S considérée comme un sous-ensemble de l'anneau de valuation discrète $D_{\mathfrak{m}}$. On commence par le cas où S est fini, de cardinal s.

THÉORÈME 2.9. *Soit* D *un anneau de Dedekind de caractéristique* $p > 0$ *et* S *un sous-ensemble de* D *de cardinal* s.

(1) *On a*

$$\operatorname{Int}^{(\infty)}(S,D) = \operatorname{Int}_{ps}^{(\infty)}(S,D) \oplus \prod_{c\in S}(X-c)^p K[X].$$

(2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *le* n*-ième idéal caractéristique de* $\operatorname{Int}^{(\infty)}(S,D)$ *est*

$$J_n(\operatorname{Int}^{(\infty)}(S,D)) = \begin{cases} \prod_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Max}(D)} \mathfrak{m}^{w_{S,\mathfrak{m}}([n/p])} & \text{si } n < ps, \\ K & \text{si } n \geq ps. \end{cases}$$

(3) *Les polynômes*

$$V_{c,j}(X) = \left(\prod_{\substack{a\in S \\ a\neq c}} \frac{X-a}{c-a}\right)^p X^j, \qquad \text{où } c \in S \text{ et } j \in [\![0, p-1]\!],$$

forment une base de $\operatorname{Int}_{ps}^{(\infty)}(S,D)$.

Démonstration. Les deux premières assertions sont des conséquences immédiates du corollaire 2.7 et de la proposition 2.8. Montrons que les polynômes $V_{c,j}$ ($c \in S$, $j \in [\![0,p[\![$) forment une base de K_{ps}. Il suffit de

prouver que ces polynômes forment une famille libre. Soit $(a_{c,m})_{c\in S,\,0\le m<p}$ une famille d'éléments de K telle que

$$f(X) := \sum_{\substack{c\in S\\ 0\le m<p}} a_{c,m}V_{c,m}(X) = 0.$$

Pour tout $c \in S$ on a $f^{(p-1)}(c) = (p-1)!a_{c,p-1} = 0$. Donc, pour tout $c \in S$, on voit que $a_{c,p-1} = 0$. Par récurrence descendante sur m, on obtient $a_{c,m} = 0$ pour tout $c \in S$ et tout $m \in [\![0, p[\![$. Soient $P \in \mathrm{Int}^{(\infty)}_{ps}(S, D)$ et $(a_{c,m})_{c\in S,\,0\le m<p}$ une famille d'éléments de K telle que

$$P(X) = \sum_{\substack{c\in S\\ 0\le m<p}} a_{c,m}V_{c,m}(X).$$

Alors $P^{(p-1)}(c) = (p-1)!a_{c,p-1}$ pour tout $c \in S$. Donc, pour tout $c \in S$, on a $a_{c,p-1} \in D$. Par récurrence descendante sur m, on obtient $a_{c,m} \in D$ pour tout $c \in S$ et tout $m \in [\![0, p[\![$. ∎

On s'intéresse maintenant au cas où S est de cardinal infini. Le corollaire 2.7 donne immédiatement la

Proposition 2.10. *Si S est infini, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, le n-ième idéal caractéristique de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$ est*

$$J_n(\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)) = \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(D)} \mathfrak{m}^{w_{S,\mathfrak{m}}([n/p])}.$$

Théorème 2.11. *Si S est un sous-ensemble infini d'un anneau de Dedekind D tel que $\mathrm{Int}(S, D)$ admet une base régulière $(f_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$, alors les polynômes*

$$F_{n,j}(X) = f_n(X)^p X^j \quad (n \in \mathbb{N},\, j \in [\![0, p-1]\!])$$

forment une base régulière de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$.

Rappelons que pour que $\mathrm{Int}(S, D)$ admette une base régulière, il faut et il suffit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n(\mathrm{Int}(S, D))$ soit principal (voir [3]).

Démonstration. Par la remarque 2.1, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0, p[\![$, on a $F_{n,j} \in \mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$, et par la proposition 2.10, le coefficient dominant de $F_{n,j}$ est un générateur de $J_{np+j}(\mathrm{Int}(S, D))$. Par [3, Proposition II.1.4], $F_{n,j}$ peut être pris comme le $np + j$-ième élément d'une base de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$. ∎

Exemple. Soit $r \in D^*$ qui n'est pas une racine de l'unité et $S = \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On sait (voir [2]) que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite ordonnée de S pour tout idéal maximal de D. Par conséquent, la famille des polynômes

$$F_{n,j}(X) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{X - r^k}{r^n - r^k}\right)^p X^j \quad (n \in \mathbb{N},\, j \in [\![0, p-1]\!])$$

est une base régulière de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(S, D)$.

2.3. Le module $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$**.** Soit $q = p^f$ $(f \in \mathbb{N}^*)$. Dans ce paragraphe, nous décrivons des bases régulières de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$.

Dans [4], Car définit une bijection $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{F}_q[T]$ de manière suivante :

Définition 2.12. On pose $\mathbb{F}_q = \{c_0 = 0, \dots, c_{q-1}\}$. À tout $n \in \mathbb{N}$ de développement q-adique $n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_s q^s$ on associe

$$c_n = c_{n_0} + c_{n_1} T + \cdots + c_{n_s} T^s.$$

Une telle suite est appelée *suite de Car*.

Une suite de Car est une suite ordonnée de $\mathbb{F}_q[T]$ pour tout idéal maximal de $\mathbb{F}_q[T]$ (voir [2], [13] ou [7]). On en déduit que la suite $\left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{X-c_j}{c_n-c_j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base régulière de $\mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])$. En conséquence, on a le

Théorème 2.13. *Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Car. L'ensemble des polynômes*

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{X-c_k}{c_n-c_k}\right)^p X^j \qquad (n \in \mathbb{N},\ j \in [\![0, p-1]\!])$$

est une base régulière de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$.

Dans [5], Carlitz décrit une autre base de $\mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\Psi_n(X) = \prod_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg h<n}} \frac{X-h}{T^n-h}. \tag{2.2}$$

À tout $n \in \mathbb{N}$ de développement q-adique $n = n_0+n_1q+\cdots+n_sq^s$ on associe le polynôme

$$G_n(X) = \prod_{i=0}^{s} \Psi_i(X)^{n_i}. \tag{2.3}$$

Proposition 2.14 ([5]). *Les polynômes $G_n(X)$ $(n \in \mathbb{N})$ forment une base régulière de* $\mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])$.

On a donc le

Théorème 2.15. *Les polynômes $G_n(X)^p X^j$ $(n \in \mathbb{N},\ j \in [\![0, p-1]\!])$ forment une base régulière de* $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$.

On peut donner une description explicite des idéaux caractéristiques de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_n = \prod_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg h<n}} (T^n + h).$$

PROPOSITION 2.16. *Soit $n \in \mathbb{N}$ de développement q-adique $n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_s q^s$. Alors*

$$J_n(\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])) = \prod_{j=0}^{s} C_j^{-m_j} \mathbb{F}_q[T],$$

où

$$C_j = \begin{cases} D_j & si\ n_j \geq p, \\ D_{j-1} & sinon, \end{cases} \qquad m_j = \begin{cases} [n_j/p] & si\ n_j \geq p, \\ n_j p^{f-1} & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. Par la proposition 2.14, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$J_n(\mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])) = \prod_{j=0}^{s} D_j^{-n_j} \mathbb{F}_q[T],$$

et par la proposition 2.10, on a

$$J_n(\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])) = J_{[n/p]}(\mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])). \ \blacksquare$$

Donnons maintenant un contre-exemple à [10, Theorem 5] :

$$\Psi_1(X) = \frac{X^q - X}{D_1}$$

est un polynôme $\mathbb{F}_q$-linéaire. Ainsi, $\Psi_1(X)^p$ est un polynôme linéaire. On a donc

$$\Delta_T(\Psi_1^p)(T) = \frac{\Psi_1^p(T)}{T} = \frac{1}{T} \notin \mathbb{F}_q[T].$$

Clairement, $\Psi_1^p \in \mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$, donc $\mathrm{Int}^{[\infty]}(\mathbb{F}_q[T]) \neq \mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$. On peut montrer (voir [3]) que $\mathrm{Int}^{[\infty]}(\mathbb{F}_q[T]) \subset \mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T])$. Donc :

PROPOSITION 2.17 ([3, Chapter IX] ou [6]). *On a l'inclusion stricte*

$$\mathrm{Int}^{[\infty]}(\mathbb{F}_q[T]) \subsetneq \mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{F}_q[T]).$$

3. Bases de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S, D)$

3.1. Dérivée a-ième. Rappelons que D est un anneau de Dedekind de caractéristique $p > 0$ et de corps des fractions K. On suppose de plus que $\mathbb{F}_q[T] \subset D$. Nous considérons ici une nouvelle sorte de dérivée et puisque toute suite de Car forme une bijection de N sur $\mathbb{F}_q[T]$, au lieu de la suite des dérivées n-ièmes, nous considérons la suite des dérivées a-ièmes, où a est un élément de $\mathbb{F}_q[T]$.

DÉFINITION 3.1. Soit $c := (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Car. Pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$, on appelle *factorielle a (par rapport à la suite c)* et on note $a!_c$ le polynôme de $\mathbb{F}_q[T]$ donné par

$$a!_c = \prod_{j=0}^{n_a - 1} (c_{n_a} - c_j),$$

où n_a dénote l'unique entier tel que $c_{n_a} = a$.

Dans tout ce qui suit, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera supposée fixée. On omettra donc toutes les références à cette suite. Rappelons la notion de dérivée de Hasse (voir [9]). Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ $(m > n)$, on pose $\binom{n}{m} = 0$.

DÉFINITION 3.2 ([9]). Soit $P \in K[X]$,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k X^k \quad (a_k \in K \text{ pour tout } k \in [\![0, \deg P]\!]).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *n-ième dérivée de Hasse de P* et on note $\mathcal{D}^n(P)$ le polynôme

$$\mathcal{D}^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k \binom{k}{n} X^{k-n}.$$

DÉFINITION 3.3. Soient $P \in K[X]$, $a \in \mathbb{F}_q[T]$ et n_a l'unique entier naturel tel que $a = c_{n_a}$. On appelle *a-ième dérivée de P* et on note $\delta_a(P)$ le polynôme

$$\delta_a(P) = a!\mathcal{D}^{n_a}(P).$$

REMARQUE 3.4. Dans le cas où $a_j = j$ pour tout $j \in [\![0, p[\![$ (condition qui sera toujours supposée), on obtient la dérivée k-ième classique pour $k < p$: $\delta_k(P) = P^{(k)}$.

NOTATION. Soient $a, b_1, \ldots, b_s \in \mathbb{F}_q[T]$ tels que $\sum_{j=1}^{s} n_{b_j} = n_a$. On pose

$$\binom{a}{b_1, \ldots, b_s} = \frac{a!}{b_1! \cdots b_s!}.$$

Par [2], on a $\binom{a}{b_1,\ldots,b_s} \in \mathbb{F}_q[T]$.

PROPOSITION 3.5. *Soient $P_1, \ldots, P_s \in K[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$, on a*

$$\delta_a\Big(\prod_{i=1}^{s} P_i\Big) = \sum_{\substack{b_1,\ldots,b_s \in \mathbb{F}_q[T] \\ n_{b_1}+\cdots+n_{b_s}=n_a}} \binom{a}{b_1, \ldots, b_s} \prod_{j=1}^{s} \delta_{b_j}(P_j). \tag{3.1}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'égalité (voir [9, Lemma 5.72]), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}^n(P_1 \cdots P_s) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \ldots, i_s \geq 0 \\ i_1+\cdots+i_s=n}} \mathcal{D}^{i_1}(P_1) \cdots \mathcal{D}^{i_s}(P_s). \quad \blacksquare$$

NOTATION. Rappellons que $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S, D)$ (ou plus simplement $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(D)$ si $S = D$) est l'ensemble des polynômes à valeurs entières sur S relativement à D ainsi que toutes leurs dérivées :

$$\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S, D) = \{P \in K[X] \mid \forall a \in \mathbb{F}_q[T]\ (\delta_a(P))(S) \subset D\}.$$

Clairement, $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S, D)$ est un D-module.

3.2. Cas local. Reprenant mots pour mots la preuve de [3, Proposition IX.1.5], on montre que $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S,D)$ se comporte bien par localisation : pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de D, on a

$$\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S,D)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S,D_{\mathfrak{m}}).$$

NOTATION. On suppose donc que $D = V$ est l'anneau d'une valuation discrète v contenant $\mathbb{F}_q[T]$ d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On note e l'indice de ramification de $\mathfrak{m}$ sur $\mathfrak{m}\cap\mathbb{F}_q[T]$ et r_0 le cardinal de $\mathbb{F}_q[T]/(\mathfrak{m}\cap\mathbb{F}_q[T])$.

LEMME 3.6. *On suppose $e < r_0$. Pour tout $a, b \in \mathbb{F}_q[T]$, tels que les r_0-chiffres de n_b soient tous plus petits que les r_0-chiffres de n_a, on a*

$$v(a!) - v(b!) \le n_a - n_b.$$

Démonstration. Soient

$$n_a = n_{a,0} + n_{a,1}r_0 + \cdots + n_{a,g}r_0^g, \qquad n_b = n_{b,0} + n_{b,1}r_0 + \cdots + n_{b,g}r_0^g$$

les développements r_0-adiques de n_a et n_b. D'après [3, Chapter II], on a

$$v(a!) = e\frac{n_a - (n_{a,0} + \cdots + n_{a,g})}{r_0 - 1}, \qquad v(b!) = e\frac{n_b - (n_{b,0} + \cdots + n_{b,g})}{r_0 - 1}.$$

Par conséquent, puisque $e < r_0$, on obtient

$$v(a!) - v(b!) \le \frac{e}{r_0 - 1}(n_a - n_b) \le n_a - n_b. \ \blacksquare$$

Soit $\overline{S} = \{c_0, \ldots, c_{s-1}\}$ un système complet de représentants de $S/\mathfrak{m}$ inclus dans S. À tout $n \in \mathbb{N}$, écrit sous la forme $n = us+w$ avec $w \in [\![0, s-1]\!]$, on associe le polynôme

$$f_n(X) = \prod_{c\in\overline{S}} (X - c)^u \prod_{j=0}^{w-1} (X - c_j).$$

PROPOSITION 3.7. *On suppose* $\mathrm{Card}\, S = \mathrm{Card}\, \overline{S}$ *ou $e < r_0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\min_{\substack{x\in S\\ a\in\mathbb{F}_q[T]}} \{v(\delta_a(f_n)(x))\} = e\sum_{l\ge 1}\left[\frac{n}{sr_0^l}\right].$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($n = us + w$, $u, w \in \mathbb{N}$ et $w < s$), on a

$$f_n(X) = \prod_{k=0}^{w-1} (X - c_k)^{u+1} \prod_{k=w}^{s-1} (X - c_k)^u.$$

D'après la proposition 3.5, pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$,

$$\delta_a(f_n)(X) = \sum_{\substack{b_0,\dots,b_{s-1}\in\mathbb{F}_q[T]\\ n_{b_0}+\cdots+n_{b_{s-1}}=n_a}} \binom{a}{b_0,\dots,b_{s-1}} \times \delta_{b_0}((X-c_0)^{u+1})\cdots\delta_{b_{s-1}}((X-c_{s-1})^u).$$

Pour tout $d \in V$, tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $b \in \mathbb{F}_q[T]$, on a (voir [9] ou la proposition 3.5)

$$\delta_b((X-d)^j) = \binom{j}{n_b} b!(X-d)^{j-n_b}.$$

Soient $c \in \overline{S}$, k l'exposant de $X-c$ dans f_n et $x \in S$. On a

$$\delta_b(v((x-c)^k)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n_b > k \text{ ou } x = c \text{ ou } p \,\big|\, \binom{k}{n_b}, \\ (k-n_b)v(x-c) + v(b!) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x = c \bmod \mathfrak{m}$, par le lemme 3.6, on obtient

$$\delta_b(v((x-c)^k)) \geq v(a_k!).$$

Par conséquent, pour tout $(x,a) \in S \times \mathbb{F}_q[T]$,

$$v(\delta_a(f_n)(x)) \geq v(a_u!) = v(a_{[n/s]}!) = \sum_{l\geq 1} \left[\frac{n}{sr_0^l}\right].$$

De plus,

$$\delta_{a_u}(f_n)(c_w) = a_u! \prod_{k=0}^{w-1} (c_w - c_k)^{u+1} \prod_{k=w+1}^{s-1} (c_w - c_k)^u$$

et finalement

$$v(\delta_{a_u}(f_n)(c_w)) = v(a_u!) = e\sum_{l\geq 1}\left[\frac{n}{sr_0^l}\right]. \ \blacksquare$$

PROPOSITION 3.8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit*

$$w_S^{\langle\infty\rangle}(n) = e\sum_{l\geq 1}\left[\frac{n}{sr_0^l}\right].$$

Si $\operatorname{Card} S = \operatorname{Card}\overline{S}$ *ou* $e < r_0$, *alors les polynômes* $t^{-w_S^{\langle\infty\rangle}(n)} f_n(X)$ $(n \in \mathbb{N})$ *forment une base régulière de* $\operatorname{Int}^{[\infty]}(S,V)$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, les polynômes ci-dessus appartiennent à $\operatorname{Int}^{\langle\infty\rangle}(S,V)$. De plus, ils forment une base de $K[X]$. Soit $P \in \operatorname{Int}^{\langle\infty\rangle}(S,D)$,

$$P(X) = \sum_{j=0}^{\deg P} a_k t^{-w_S^{\langle\infty\rangle}(j)} f_j(X) \quad (\forall k \in [\![0, \deg P]\!]\ a_k \in K).$$

On a $P(c_0) = a_0 \in V$. Montrons par récurrence que les $a_k \in V$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k = us + w$ avec $u, w \in \mathbb{N}$ et $w < u$. On a, par la preuve de la proposition précédente,

$$\delta_{a_u}(P)(c_w) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^{-w_S^{\langle\infty\rangle}(j)} \delta_{a_u}(f_j)(c_w) + a_k \times \xi,$$

avec $\xi \in V^\times$. Puisque $\delta_{a_u}(P)(c_w)$ et $\sum_{j=0}^{k-1} a_j t^{-w_S^{\langle\infty\rangle}(j)} \delta_{a_u}(f_j)(c_w)$ appartiennent à V, on obtient $a_k \in V$. ∎

3.3. Cas $D = \mathbb{F}_q[T]$. Dans toute la suite, on note l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{F}_q[T]$ par $\mathbb{P}$. En globalisant, la proposition 3.8 donne la

PROPOSITION 3.9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$J_n(\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(S, \mathbb{F}_q[T])) = \prod_{P \in \mathbb{P}} P^{-\sum_{l \geq 1} [n/s_P q^{l \deg P}]} \mathbb{F}_q[T],$$

où $s_P = \mathrm{Card}(S/P\mathbb{F}_q[T])$.

THÉORÈME 3.10. *Les polynômes*

$$\prod_{P \in \mathbb{P}} P^{-\sum_{l \geq 1} [n/q^{1+l \deg P}]} (X^q - X)^{[n/q]} \prod_{j=0}^{n-[n/q]q} (X - a_j) \quad (n \in \mathbb{N})$$

forment une base régulière de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_q[T])$.

Démonstration. Pour tout $P \in \mathbb{P}$, $\mathbb{F}_q$ est un système complet de représentants de $\mathbb{F}_q/P\mathbb{F}_q[T]$. On applique la proposition 3.8 en remarquant que $\prod_{j=0}^{q-1}(X - a_j) = X^q - X$. ∎

On détermine maintenant des bases régulières de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, G_n est le n-ième polynôme de Carlitz défini dans (2.3) et que toutes les dérivées sont prises par rapport à la suite de Car $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

THÉORÈME 3.11. *Les polynômes*

$$B_n(X) := \prod_{P \in \mathbb{P}} P^{[n/q^{\deg P}]} G_n(X) \quad (n \in \mathbb{N})$$

forment une base régulière de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ de développement q-adique

$$n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_l q^l,$$

le n-ième idéal caractéristique de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$ est

$$\begin{aligned}
&J_n(\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])) \\
&\quad= \prod_{P\in\mathbb{P}} P^{-\sum_{l\geq 1}[n/q^{(l+1)\deg P}]}\mathbb{F}_q[T] \quad \text{(par la proposition 3.9)} \\
&\quad= \prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[n/q^{\deg P}]} \prod_{P\in\mathbb{P}} P^{-\sum_{l\geq 1}[n/q^{l\deg P}]}\mathbb{F}_q[T] \\
&\quad= \prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[n/q^{\deg P}]} J_n(\mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])) \quad \text{(par [3, Chapter II])} \\
&\quad= \prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[n/q^{\deg P}]} \Big(\prod_{j=0}^{s} D_j^{n_j}\Big)^{-1}\mathbb{F}_q[T] \quad \text{(par le théorème 2.15).}
\end{aligned}$$

Par conséquent, le coefficient dominant de B_n engendre $J_n(\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T]))$. Montrons que $B_n \in \mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$. Comme on a

$$B_n(X) = \prod_{j=0}^{l}\Big(\prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[q^j/q^{\deg P}]}G_{q^j}\Big)^{n_j},$$

d'après la formule (3.1), il suffit de montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[q^j/q^{\deg P}]}G_{q^j} \in \mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T]).$$

On a (voir [8, Chapter 3]), pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$G_{q^j}(X) = \Psi_j(X) = \sum_{l=0}^{j} \frac{1}{D_l L_{j-l}^{q^l}} X^{q^l}, \quad \text{où} \quad L_{j-l} = \operatorname*{PPCM}_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T]\text{ unitaire}\\ \deg h = j-l}} h.$$

Par conséquent, pour tout $n \notin \{1,\dots,q^j\}$,

$$\delta_{c_n}(\Psi_j)(X) = \sum_{l=0}^{j} \frac{1}{D_l L_{j-l}^{q^l}} \binom{q^l}{n} X^{q^l-n} = 0,$$

par le théorème de Lucas. Pour tout $l \in [\![0, j]\!]$,

$$\delta_{c_{q^l}}(\Psi_j)(X) = c_{q^l}! \frac{1}{D_l L_{j-l}^{q^l}} = \frac{1}{L_{j-l}^{q^l}}.$$

On en déduit que pour tout $l \in [\![0, j]\!]$,

$$\delta_{c^{q^l}}\Big(\prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[q^j/q^{\deg P}]}\Psi_j(X)\Big) = \prod_{\substack{P\in\mathbb{P}\\ \deg P\leq j}} P^{[q^j/q^{\deg P}]} \frac{1}{L_{j-l}^{q^l}}.$$

Comme $L_{j-l} = \prod_{P\in\mathbb{P},\,\deg P\leq j-l} P^{[(j-l)/\deg P]}$, on obtient

$$\delta_{c_{q^l}}\Big(\prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[q^j/q^{\deg P}]}\Psi_j(X)\Big) = \prod_{\substack{P\in\mathbb{P}\\ \deg P\le j}} P^{q^{j-\deg P}} \prod_{\substack{P\in\mathbb{P}\\ \deg P\le j-l}} P^{-q^l[(j-l)/\deg P]}.$$

Soient $P\in\mathbb{P}$ tel que $\deg P\le j$ et ν la valuation de P dans l'anneau $\delta_{c^{q^l}}(\prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[q^j/q^{\deg P}]}\Psi_j(X))$. Clairement, si $\deg P > j-l$, on a $\nu\ge 0$. Sinon,

$$\nu = q^{j-\deg P} - q^l\left[\frac{j-l}{\deg P}\right].$$

Comme la fonction $u\to q^u/u$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$q^{j-\deg P}\deg P - q^l(j-l)\ge 0,$$

et donc $\nu\ge 0$. Par conséquent, $\delta_{c^{q^l}}(\prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[q^j/q^{\deg P}]}\Psi_j(X))\in \mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])$ et ainsi $\prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[q^j/q^{\deg P}]}\Psi_j\in \mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$. ∎

On en déduit le

THÉORÈME 3.12. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base régulière de $\mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])$. Alors, les polynômes*

$$C_n(X) = \prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[n/q^{\deg P}]} f_n(X) \quad (n\in\mathbb{N})$$

forment une base régulière de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$.

Démonstration. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $e_n = \prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[n/q^{\deg P}]}$. Clairement, pour tout $m\in[\![0,n]\!]$, e_m divise e_n dans $\mathbb{F}_q[T]$, et ainsi, il existe $m_j\in\mathbb{F}_q[T]$ tel que $e_n = m_j e_j$. Le coefficient dominant de C_n est, à un élément de $\mathbb{F}_q^*$ près, celui de B_n. Par conséquent, il engendre $J_n(\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T]))$. Il reste à montrer que $e_n f_n\in\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$. Comme la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])$ et que $f_n\in\mathrm{Int}(\mathbb{F}_q[T])$, on peut écrire

$$f_n(X) = \sum_{j=0}^{n} l_j G_j(X) \quad \text{avec } l_j\in\mathbb{F}_q[T] \text{ pour tout } j\in[\![0,n]\!],$$

c'est-à-dire

$$e_n f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j m_j e_j G_j(X).$$

La famille $(e_n G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formant une base de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$, on en déduit que $e_n f_n\in\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$. ∎

COROLLAIRE 3.13. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Car. Les polynômes*

$$\prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[n/q^{\deg P}]} \prod_{j=0}^{n-1}\frac{X-a_j}{a_n-a_j} \quad (n\in\mathbb{N})$$

forment une base régulière de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$.

REMARQUE 3.14. L'analogie entre $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$ peut être renforcée si on remarque que la base régulière de Straus de $\mathrm{Int}^{(\infty)}(\mathbb{Z})$ peut s'écrire sous la forme

$$\prod_{p\,\text{premier}} p^{[n/\mathrm{Norme}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})]} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{X-j}{n-j} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

et celle de $\mathrm{Int}^{\langle\infty\rangle}(\mathbb{F}_q[T])$ sous la forme

$$\prod_{P\in\mathbb{P}} P^{[n/\mathrm{Norme}(\mathbb{F}_q[T]/P\mathbb{F}_q[T])]} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{X-a_j}{a_n-a_j} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Références

[1] D. Adam, *Finite differences in finite characteristic*, J. Algebra 296 (2006), 285–300.

[2] M. Bhargava, *P-orderings and polynomial functions on arbitrary subsets of Dedekind rings*, J. Reine Angew. Math. 490 (1997), 101–127.

[3] P.-J. Cahen and J.-L. Chabert, *Integer-Valued Polynomials*, Math. Surveys Monogr. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[4] M. Car, *Répartition modulo* 1 *dans un corps de séries formelles sur un corps fini*, Acta Arith. 69 (1995), 229–242.

[5] L. Carlitz, *A set of polynomials*, Duke Math. J. 6 (1940), 486–504.

[6] J.-L. Chabert, *Dérivées et différences divisées à valeurs entières*, Acta Arith. 63 (1993), 143–156.

[7] S. Evrard and Y. Fares, *p-adic subsets whose factorials satisfy a generalized Legendre formula*, Bull. London Math. Soc. 40 (2008), 37–50.

[8] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 35, Springer, Berlin, 1996.

[9] J. W. P. Hirschfeld, G. Korchmáros and F. Torres, *Algebraic Curves over a Finite Field*, Princeton Ser. Appl. Math., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2008.

[10] V. Laohakosol, *Bases for integer-valued polynomials in a Galois field*, Acta Arith. 87 (1998), 13–26.

[11] E. G. Straus, *On the polynomials whose derivatives have integral values at the integers*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 24–27.

[12] C. G. Wagner, *Polynomials over* $\mathrm{GF}(q,x)$ *with integer-valued differences*, Arch. Math. (Basel) 27 (1976), 495–501.

[13] J. Yeramian, *Anneaux de Bhargava*, Comm. Algebra 32 (2004), 3043–3069.

David Adam
Géométrie Algébrique et Applications à la Théorie de l'Information
Université de la Polynésie Française
BP 6570
98702 Faa'a, Tahiti, Polynésie Française
E-mail: david.adam@upf.pf

Reçu le 5.2.2010
et révisé le 22.10.2010 (6281)