ACTA ARITHMETICA
XCIX.2 (2001)

Petits zéros de fonctions L de formes modulaires

par

Emmanuel Royer (Orsay)

Introduction. Récemment, Katz et Sarnak (dans [KS99]) ont étudié la répartition des zéros de certaines familles de fonctions L sur la droite critique. Ils ont tiré de cette étude une conjecture — appelée *conjecture de densité* — reliant la répartition de ces zéros à la répartition des valeurs propres de groupes de symétrie. Iwaniec, Luo et Sarnak [ILS00] ont éprouvé la robustesse de cette conjecture en montrant qu'elle est satisfaite (en admettant l'hypothèse de Riemann généralisée) pour les petits zéros des fonctions L des formes modulaires. On montre ici que la conjecture reste valable en considérant des sous-familles des familles considérées par Iwaniec, Luo et Sarnak caractérisées par les valeurs propres d'opérateurs d'Atkin–Lehner. Nos résultats sont donc un test supplémentaire renforçant la conjecture de densité.

Soit $F = (F(Q))$ un ensemble d'ensembles disjoints de formes modulaires indexé par un paramètre Q. À chaque forme f d'un ensemble $F(Q)$ est associé un réel c_Q appelé *conducteur* de f et ne dépendant que de la famille $F(Q)$ contenant f. Les zéros non triviaux de la fonction L d'une forme $f \in F(Q)$ sont notés $1/2 + i\gamma_f$. Puisqu'on admet l'hypothèse de Riemann généralisée, on a $\gamma_f \in \mathbb{R}$. On introduit un opérateur de comptage de ces zéros

$$D(f, \phi) = \sum_{\gamma_f} \phi\left(\frac{\gamma_f}{2\pi} \ln c_Q\right)$$

où ϕ est une fonction la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier à support compact. La conjecture de densité prédit, pour toute ensemble F raisonnable, l'existence d'une distribution $W(F)$ telle que

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{1}{\sharp F(Q)} \sum_{f\in F(Q)} D(f, \phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) W(F)(t)\, dt.$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11F, 11M41, 11L05, 11N45, 60B.

Key words and phrases: formes modulaires, séries L, petits zéros, conjecture de densité, répartition.

La conjecture affirme de plus que cette fonction $W(F)$ est la fonction de densité des valeurs propres (correctement normalisées) d'un groupe de symétrie.

Dans cet article on fixe un entier strictement positif ℓ et $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_\ell)$ un vecteur de $\{-1,1\}^\ell$. Pour tout entier sans facteur carré $N=p_1\dots p_\ell$ ayant ℓ facteurs premiers $p_1<\dots<p_\ell$ on introduit le sous-ensemble des formes primitives $H(N)$ de poids k et de niveau N défini par

$$H^\sigma(N)=\{f\in H(N):W_{p_i}f=\sigma_i f,\ 1\le i\le\ell\}$$

où W_{p_i} est l'opérateur d'Atkin–Lehner associé à p_i. L'opérateur de comptage associé à une forme $f\in H^\sigma(N)$ est ainsi

$$D(f,\phi)=\sum_{\gamma_f}\phi\biggl(\frac{\gamma_f}{2\pi}\ln(k^2N)\biggr)$$

où $1/2+i\gamma_f$ est zéro non trivial de $L(f,s)$ (voir §1.4). Pour établir le lien avec ce qui précède, on voit que Q décrit l'ensemble des entiers sans facteur carré ayant exactement ℓ facteurs premiers. Pour une fonction X de $H^\sigma(N)$ dans $\mathbb{C}$ on définit la moyenne harmonique de X par

$$M^\sigma(X)=\sum_{f\in H^\sigma(N)}\omega_N(f)X(f)$$

où $\omega_N(f)$ est le poids harmonique classique dans cette théorie. Il est défini au §1.1. On prouve alors le

Théorème 1. *Soient k et ℓ des entiers strictement positifs fixés avec k pair. Soit κ un réel vérifiant $0<\kappa\le 1/\ell$. L'hypothèse de Riemann est supposée vraie pour les fonctions L de Dirichlet et pour les fonctions L associées aux formes primitives de poids k. Soit $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_\ell)$ un vecteur de $\{-1,1\}^\ell$. Soit ϕ une fonction paire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier à support compact dans $]-2,2[$. On considère une suite d'entiers N sans facteur carré ayant exactement ℓ facteurs premiers $p_1,\dots,p_\ell$ tels que $N^\kappa\le p_1<\dots<p_\ell$. Alors on a*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{M^\sigma(D(\cdot,\phi))}{M^\sigma(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}W(x)\phi(x)\,dx$$

où W est définie par :

- *si $i^k\sigma_1\dots\sigma_\ell=1$ alors*

$$W(x)=1+\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x},$$

- *si $i^k\sigma_1\dots\sigma_\ell=-1$ alors*

$$W(x)=1-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}+\delta_0(x)$$

où δ_0 la distribution de Dirac en 0.

Remarque. La moyenne utilisée ici est la moyenne harmonique. Il est possible d'exprimer le théorème précédent en terme de moyenne naturelle, c'est-à-dire

$$M^{\mathrm{nat}}(X) = \frac{1}{\sharp H^\sigma(N)} \sum_{f \in H^\sigma(N)} X(f).$$

Pour cela, on peut suivre la méthode d'Iwaniec, Luo et Sarnak. Cependant, cette expression en moyenne naturelle n'apporte aucune information supplémentaire. On obtiendrait le même énoncé en remplaçant M^σ par M^{nat}.

Remarque. Si $f \in H^\sigma(N)$ alors $i^k \sigma_1 \ldots \sigma_\ell$ est le signe de l'équation fonctionnelle de $L(f,s)$. Selon que cette valeur vaut 1 ou -1 on dit que f est *paire* ou *impaire*. Le théorème 1 montre que la distribution des petits zéros n'est gouvernée que par le signe de l'équation fonctionnelle et non par les signes des différentes composantes d'Atkin–Lehner. Cela confirme — au moins dans le domaine $]-2,2[$ des petits zéros — la robustesse de la conjecture de densité.

Ce résultat généralise le résultat suivant dû à Iwaniec, Luo et Sarnak qui considéraient les espaces

$$H^+(N) = \{f \in H(N) : W_N f = i^k f\}$$

et

$$H^-(N) = \{f \in H(N) : W_N f = -i^k f\}$$

et obtenaient

Théorème 0 [ILS00, Theorem 1.1]. *Fixons $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier à support dans $]-2,2[$. Alors, lorsque N parcourt les entiers sans facteur carré*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sharp H^\pm(N)} \sum_{f \in H^\pm(N)} D(f,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W^\pm(x)\, dx$$

avec

$$W^+(x) = 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}, \qquad W^-(x) = 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} + \delta_0(x).$$

Notre méthode consiste à exprimer les sommes sur $H^\sigma(N)$ en sommes sur $H(N)$ grâce à l'introduction de facteurs s'annulant pour les formes n'ayant pas les valeurs propres d'Atkin–Lehner recherchées. Après avoir exprimé ces valeurs propres d'Atkin–Lehner en terme de valeurs propres de Hecke, on est ramené à évaluer des formules de trace sur les formes primitives. Pour cela on utilise une formule de trace sur les formes primitives (de type Petersson) due à Iwaniec, Luo et Sarnak (voir §2.4). On commence par montrer que la contribution des formes anciennes est négligeable si on suppose que le plus petit facteur premier du niveau croît assez vite. L'estimation de la contribution des formes nouvelles se fait par une évaluation de sommes de sommes de Kloosterman. C'est cette estimation qui requiert l'hypothèse de Riemann des séries L de Dirichlet.

Après avoir écrit ce dont on aura besoin de la théorie des formes modulaires, on rappellera quelques propriétés de sommes de Kloosterman et des fonctions de Bessel. Grâce à ces outils, on établira les formules de trace nécessaires. On calculera alors rapidement la contribution des formes anciennes puis, plus précisément celles des formes nouvelles. On pourra finalement établir un pas vers la conjecture de densité.

Remerciements. Je tiens à remercier chaleureusement les Professeurs Étienne Fouvry et Philippe Michel pour leurs conseils et encouragements toujours répétés. Merci également au Professeur Henryk Iwaniec pour l'intérêt qu'il a porté aux résultats exposés ici. Ce travail a été développé lors de deux séjours à l'Institute for Advanced Study à l'invitation des Professeurs Iwaniec et Michel. Qu'ils soient remerciés à hauteur de ce que ces séjours m'ont apportés !

1. Cadre

1.1. *Formes primitives.* Soit N un entier strictement positif et k un entier pair strictement positif. Le groupe modulaire $\mathit{\Gamma}_0(N)$ est défini par

$$\mathit{\Gamma}_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4,\ ad - bc = 1,\ c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Son indice dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est

$$\nu(N) = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Une *forme modulaire de poids k et de niveau N* est une fonction $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ holomorphe sur le demi plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et vérifiant

1. pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathit{\Gamma}_0(N)$ et tout $z \in \mathcal{H}$ on a

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)\,;$$

2. il existe deux réels strictement positifs c et d tels que

$$\mathrm{Im}(z) > c \ \Rightarrow\ |f(z)| < d\,;$$

3. pour tout rationnel r, il existe deux réels strictement positifs c et d tels que

$$|z - r - id| < d \ \Rightarrow\ |f(z)| < c|z - r|^{-k}.$$

Une forme modulaire admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) e(nz), \qquad z \in \mathcal{H},$$

où $e(z) = \exp(2i\pi z)$. Une *forme parabolique de poids k et de niveau N* est une forme modulaire de poids k et de niveau N telle que la fonction $z \mapsto (\mathrm{Im}(z))^{k/2}|f(z)|$ est bornée sur $\mathcal{H}$. Si f est parabolique, elle vérifie $a_f(0) = 0$. L'ensemble des formes paraboliques de poids k et de niveau N est un espace hermitien noté $S(N)$ muni du produit scalaire de Petersson

$$(f,g)_N = \int_{D_0(N)} f(z)\overline{g(z)} y^k \, \frac{dx\,dy}{y^2}, \qquad f, g \in S(N),$$

où $D_0(N)$ est n'importe quel domaine fondamental du quotient à gauche de $\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ par $\Gamma_0(N)$ pour l'action homographique [Iwa97, §§2.7 et 3.3].

Pour tout entier strictement positif n il existe un opérateur sur $S(N)$ appelé *n-ième opérateur de Hecke* [Iwa97, Ch. 6]

$$T_n : S(N) \to S(N), \qquad f \mapsto \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0 \\ (a,N)=1}} a^k \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Lorsque d et N' sont deux diviseurs de N tels que $N' < N$ et $d \mid \frac{N}{N'}$ et si f est une forme parabolique de poids k et de niveau N' alors $z \mapsto f(dz)$ est une forme parabolique de poids k et de niveau N. On note $S^\flat(N)$ le sous-espace de $S(N)$ engendré par toutes les formes obtenues ainsi à partir de tous les couples (d, N') possibles. Cet espace est stable par action des opérateurs de Hecke T_n, $(n,N) = 1$. On note $S^\sharp(N)$ l'orthogonal pour le produit scalaire de Petersson de $S^\flat(N)$ dans $S(N)$ [Miy89, §4.6]. Cet espace est lui aussi stable par action des opérateurs de Hecke T_n, $(n,N) = 1$. Ses éléments sont appelés *formes nouvelles de poids k et de niveau N*. Il existe une base orthogonale (unique à l'ordre près) $H(N)$ de $S^\sharp(N)$ telle que chacun de ses éléments f vérifie les deux propriétés

1. f est vecteur propre de tous les T_n, $(n,N) = 1$;
2. $a_f(1) = 1$.

Ses éléments sont appelés *formes primitives de poids k et de niveau N*. Il n'y a donc qu'un nombre fini de formes primitives de poids k et de niveau N. Ce nombre est la dimension de $S^\sharp(N)$. Si f est primitive de niveau N, alors pour tout entier n (même non premier à N) elle est vecteur propre de T_n avec $a_f(n)$ comme valeur propre. On notera $\lambda_f(n) = a_f(n) n^{(1-k)/2}$. Donc

$$T_n f = a_f(n) f = \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} f, \qquad f \in H(N),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

On a, pour f primitive, $a_f(n) \in \mathbb{R}$ et on a donc défini une application

$$\lambda(n) : H(N) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \lambda_f(n).$$

Ces fonctions sont reliées entre elles par la relation de multiplicativité, valable pour tous m et n :

$$\lambda(m)\lambda(n) = \sum_{\substack{d|(m,n)\\(d,N)=1}} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{1}$$

et vérifient la majoration de Deligne

$$|\lambda(m)| \leq \tau(m) \tag{2}$$

où τ est la fonction nombre de diviseurs

$$\tau(m) = \sum_{d>0,\, d|m} 1.$$

Enfin, on définit *le poids harmonique de* $f \in H(N)$ par

$$\omega_N(f) = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}(f,f)_N}.$$

Grâce aux résultats de Goldfeld, Hoffstein et Lieman [GHL94] on a pour toute $f \in H(N)$ non issue de $\mathrm{GL}(1)$ — c'est le cas lorsque N est sans facteur carré — la majoration

$$\omega_N(f) \ll_k \frac{\ln(kN)}{N} \tag{3}$$

avec une constante ne dépendant que de k.

1.2. *Opérateur d'Atkin–Lehner.* Soit N_1 un diviseur de N tel que $(N_1, N/N_1) = 1$. On définit sur $S(N)$ le N_1-ième *opérateur d'Atkin–Lehner* $W(N_1)$ par

$$f \mapsto z \mapsto N_1^{k/2}(Nz + N_1 d)^{-k} f\left(\frac{N_1 az + b}{Nz + N_1 d}\right)$$

où

$$(a,b,d) \in \mathbb{Z}^3, \qquad d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, N/N_1), \qquad N_1^2 ad - bN = N_1. \tag{4}$$

Un tel triplet existe et tous les triplets vérifiant (4) conduisent à la même définition de $W(N_1)$. Les formes primitives de poids k et de niveau N sont vecteurs propres de ces opérateurs avec valeurs propres associées 1 ou -1. Si $f \in H(N)$

$$W(N_1)f = \varepsilon_f(N_1)f$$

avec

$$\varepsilon_f(N_1) = \mu(N_1)a_f(N_1)N_1^{1-k/2} = \mu(N_1)\lambda_f(N_1)\sqrt{N_1} = \pm 1 \tag{5}$$

(voir par exemple [Kna92, §IX.7]). On a ainsi construit une application

$$\varepsilon(N_1) : H(N) \to \{-1, 1\}, \qquad f \mapsto \varepsilon_f(N_1).$$

Grâce à (5) et (1), pour tous entiers premiers entre eux m et n tels que $mn \mid N$, $(m, N/m) = 1$ et $(n, N/n) = 1$ on a

$$\varepsilon(m)\varepsilon(n) = \varepsilon(mn), \qquad (m, n) = 1.$$

1.3. *Moyenne harmonique signée.* Soit N un entier sans facteur carré. On considère la suite $p_1 < \ldots < p_\ell$ de ses diviseurs premiers. Après avoir fixé une signature $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell)$ dans $\{-1, 1\}^\ell$ on considère l'ensemble

$$H^\sigma(N) = \{f \in H(N) : (\varepsilon_f(p_1), \ldots, \varepsilon_f(p_\ell)) = \sigma\}.$$

Les éléments de cet ensemble seront appelés *formes primitives de poids k, de niveau N et de signature σ.*

Soit une application $X : H(N) \to \mathbb{C}$. On définit la *σ-moyenne harmonique* de X par

$$M^\sigma(X) = \sum_{f \in H^\sigma(N)} \omega_N(f) X(f).$$

On a immédiatement

$$M^\sigma(X) = \frac{1}{2^\ell} \sum_{f \in H(N)} \omega_N(f)(1 + \sigma_1 \varepsilon_f(p_1)) \ldots (1 + \sigma_\ell \varepsilon_f(p_\ell)) X(f).$$

Cette expression se développe grâce à (5) et (1) en

$$M^\sigma(X) = \frac{1}{2^\ell}\Big(M^{\mathrm{h}}(X) + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_i \le \ell} \sigma_{j_1} \ldots \sigma_{j_i} \times \mu(p_{j_1} \ldots p_{j_i}) \sqrt{p_{j_1} \ldots p_{j_i}}\, M^{\mathrm{h}}(\lambda(p_{j_1}) \ldots \lambda(p_{j_i}) X)\Big) \tag{6}$$

où M^{h} est la moyenne harmonique

$$M^{\mathrm{h}}(X) = \sum_{f \in H(N)} \omega_N(f) X(f).$$

1.4. *Séries L et leurs zéros.* À toute forme parabolique $f \in S(N)$ on peut associer une série L par transformation de Mellin

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) n^{(1-k)/2} n^{-s}, \qquad f \in S(N). \tag{7}$$

Cette série converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Puisque les $a_f(n)$ sont réels les zéros de L sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On complète cette série en la multipliant par un facteur à la place infinie

$$\Lambda(f, s) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)^{-s} \Gamma\Big(s - \frac{1}{2} + \frac{k}{2}\Big) L(f, s), \qquad f \in S(N).$$

Cette fonction Λ se prolonge en une fonction entière. Si f est une forme de $H(N)$ la fonction Λ vérifie l'équation fonctionnelle autoduale

$$\Lambda(f,s) = i^k \varepsilon_f(N)\Lambda(f,1-s), \qquad f \in H(N),\ s \in \mathbb{C}$$

[Iwa97, §7.2]. Si f est primitive L admet, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, le développement eulerien suivant :

$$L(f,s) = \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\(p,N)=1}} (1-\lambda_f(p)p^{-s}+p^{-2s})^{-1} \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\p\mid N}} (1-\lambda_f(p)p^{-s})^{-1}$$

[Miy89, §4.6]. Ce développement et l'équation fonctionnelle assurent que les zéros non triviaux (c'est-à-dire différents des zéros $(1-k)/2-n$, $n \in \mathbb{N}$) sont dans la bande critique $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$.

Si f est une forme de $H(N)$, l'hypothèse de Riemann affirme que tous les zéros non triviaux de sa série L sont sur la droite critique.

Hypothèse de Riemann pour les formes primitives. *Soient N et k deux entiers strictement positifs et $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)e(nz)$ une forme primitive de poids k et de niveau N. Les zéros non triviaux de la série $L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)n^{(1-k)/2}n^{-s}$ sont de partie réelle* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Les méthodes d'analyse complexe utilisées pour l'étude de la fonction ζ de Riemann (voir par exemple [Ten95]) permettent, en admettant l'hypothèse de Riemann, de prouver que si $|\ln Q| < A\ln(kN)$ pour un réel A fixé et si $f \in H(N)$ alors pour tout réel strictement positif ε,

$$\sum_{\substack{p\le Q\\(p,N)=1}} \frac{\lambda_f(p)\ln p}{\sqrt{p}} \ll_{k,\varepsilon,A} N^{\varepsilon}. \tag{8}$$

Soit ϕ une fonction paire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier

$$\widehat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)e(-x\xi)\,dx$$

à support compact. On note γ_f la suite des parties imaginaires des zéros non triviaux de $L(f,s)$ répétées avec multiplicité et on introduit l'opérateur de comptage

$$D(f,\phi) = \sum_{\gamma_f} \phi\left(\frac{\gamma_f}{2\pi}\ln(k^2N)\right).$$

Cette série converge absolument, en effet pour tous réels strictement positifs ν et ε,

$$D(f,\phi) \ll_{N,\nu} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-\nu}\sharp\{\gamma_f \in [n,n+1[\} \ll_{k,N,\nu} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-\nu+\varepsilon}.$$

On définit ainsi une application

$$D(\phi) : H(N) \to \mathbb{C}, \qquad f \mapsto D(f,\phi).$$

L'évaluation de cette fonction de comptage se fait grâce à la formule de Riemann. Cette formule résulte essentiellement de l'équation fonctionnelle de Λ, du théorème des résidus et du développement eulerien de L. Elle est prouvée en toute généralité dans [ILS00, Lemma 4.1] et [RS96, §2.3].

Lemme 1.1. *Soit ϕ une fonction paire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact. Pour toute forme primitive f de poids k et de niveau N on a*

$$\begin{aligned} D(f,\phi) = \widehat{\phi}(0)\frac{\ln(k^2N)}{\ln R} &+ \frac{1}{2}\phi(0) \\ &- \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}\\(p,N)=1}} \lambda_f(p)\widehat{\phi}\left(\frac{\ln p}{\ln R}\right)\frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln R} \\ &- \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}\\(p,N)=1}} \lambda_f(p^2)\widehat{\phi}\left(\frac{2\ln p}{\ln R}\right)\frac{2\ln p}{p\ln R} + O\left(\frac{\ln\ln(3N)}{\ln R}\right) \end{aligned}$$

avec $R = k^2N$. La constante impliquée ne dépend que de ϕ.

2. Lemmes préliminaires

2.1. *Arithmétique générale.* On donne dans cette partie quelques estimations sur des fonctions arithmétiques usuelles. Soient A et B des fonctions de variables $x_1,\dots,x_n$. La notation $A \ll_{x_1,\dots,x_n} B$ signifie qu'il existe une constante C, dépendant de $x_1,\dots,x_n$, telle que $|A| \le C|B|$.

La fonction τ_3 est définie par

$$\tau_3(n) = \sharp\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : abc = n\}.$$

La fonction ω est le nombre de facteurs premiers distincts :

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1.$$

La fonction φ est la fonction d'Euler :

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Le lemme suivant se déduit des propriétés des ordres maximaux de ces fonctions (voir par exemple [Ten95]).

Lemme 2.1. *Soit N un entier. On a les inégalités*

$$\frac{N}{\tau(N)} \leq \frac{N}{2^{\omega(N)}} \leq \varphi(N) \leq N.$$

Les sommes de Gauss sont définies, pour tout entier m et tout caractère modulo c, par

$$G_\chi(m) = \sum_{\substack{a \pmod c \\ (a,c)=1}} \chi(a) e\left(\frac{ma}{c}\right)$$

et si $m = 1$ on note $G_\chi(1) = G_\chi$. On a le lemme

Lemme 2.2. *Pour tous entiers m, n, t on a*

$$\sum_{\chi \pmod t} |G_\chi(m) G_\chi(n)| \leq \varphi(t)^2.$$

Preuve. Grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz, il est suffisant de prouver l'égalité

$$\sum_{\chi \pmod t} |G_\chi(q)|^2 = \varphi(t)^2$$

pour tout entier q. Or

$$\sum_{\chi \pmod t} |G_\chi(q)|^2 = \sum_{\substack{a \pmod t \\ (a,t)=1}} \sum_{\substack{b \pmod t \\ (b,t)=1}} e\left(\frac{q(a-b)}{t}\right) \sum_{\chi \pmod t} \chi(a\bar{b}).$$

On déduit de l'orthogonalité des caractères modulo t que cette somme vaut $\varphi(t)^2$. ∎

Enfin, on utilisera la conséquence suivante de l'hypothèse de Riemann sur les séries L de Dirichlet :

Lemme 2.3. *Supposons vraie l'hypothèse de Riemann sur les séries L de Dirichlet. Soient t un entier et χ un caractère modulo t. Soit x un réel strictement positif. Alors*

$$\sum_{p \leq x} \chi(p) \frac{\ln p}{\sqrt{p}} = 2\delta_\chi \sqrt{x} + O(\ln^3(tx))$$

où δ_χ vaut 1 si $\chi = \chi_0$ est le caractère principal et 0 sinon.

2.2. *Sommes de Kloosterman.* Soient m, n des entiers et c un entier non nul, on définit la somme de Kloosterman $S(m, n; c)$ par

$$S(m,n;c) = \sum_{\substack{x \pmod c \\ (x,c)=1}} e\left(\frac{mx + n\bar{x}}{c}\right)$$

avec $x\overline{x} \equiv 1 \pmod c$. Cette somme ne dépend que des classes modulo c de m et n. On en donne quelques propriétés individuelles. Si $m = 0$ on obtient les sommes de Ramanujan :

LEMME 2.4 (Sommes de Ramanujan). *Soient n un entier et c un entier non nul, alors on a*

$$S(0, n; c) = \sum_{d|(n,c)} \mu\left(\frac{c}{d}\right) d = \varphi(c) \frac{\mu\left(\frac{c}{(n,c)}\right)}{\varphi\left(\frac{c}{(n,c)}\right)}.$$

Le lemme suivant permet de simplifier l'écriture des sommes de Kloosterman et est souvent un premier pas vers leur évaluation. C'est un cas particulier de la formule de Selberg [Iwa97, §4.3].

LEMME 2.5 (Relation de Selberg). *Si m, n, c sont des entiers de plus grand diviseur commun $(m, n, c) = 1$, alors on a*

$$S(m, n; c) = S(mn, 1; c).$$

Les sommes de Kloosterman satisfont à une formule de multiplicativité qui permet de ramener l'évaluation des sommes de Kloosterman au cas où le dernier argument est puissance d'un nombre premier. Cette formule est donnée par le

LEMME 2.6 (Multiplicativité croisée). *Si m, n, q, r sont des entiers tels que q et r sont premiers entre eux, alors on a*

$$S(m, n; qr) = S(m\overline{q}, n\overline{q}; r) S(m\overline{r}, n\overline{r}; q)$$

où $q\overline{q} \equiv 1 \pmod r$ et $r\overline{r} \equiv 1 \pmod q$.

On note que si $(m, n, qr) = 1$ l'application des lemmes 2.6 et 2.5 donne le

LEMME 2.7. *Soient m, n, q, r des entiers. On suppose que $(q, r) = (m, n, qr) = 1$. On a alors*

$$S(m, n; qr) = S(mn\overline{q}^2, 1; r) S(mn\overline{r}^2, 1; q).$$

Le lemme suivant permet de traiter de nombreux cas d'annulation des sommes de Kloosterman ([Mic98, Lemme 2.3] et utilisation du lemme 2.4).

LEMME 2.8. *Si p est un nombre premier, si m est un entier divisible par p et si a est un entier positif ou nul alors on a*

$$S(m, 1; p^a) = \mu(p^a).$$

On déduit les deux lemmes suivants :

LEMME 2.9. *Soient q un entier et m un entier divisible par le noyau de q, $N(q) = \prod_{p|q} p$. Alors on a*

$$S(m, 1; q) = \mu(q).$$

Lemme 2.10. *Si m, q, r sont des entiers tels que $(m,q,r)>1$ alors on a*

$$S(m,1;qr)=0.$$

Preuve. Soit p un diviseur premier de (m,q,r). On écrit $m=m'p^a$, $q=q'p^b$ et $r=r'p^c$ avec $(m',p)=(q',p)=(r',p)=1$ et $a\geq 1$, $b\geq 1$, $c\geq 1$. Alors, grâce à la relation de multiplicativité croisée (lemme 2.6), $S(m,1;qr)$ est nulle si $S(m'\overline{q'r'}^2p^a,1;p^{b+c})$ est nulle. Mais, puisque $b+c\geq 2$ et $a\geq 1$, cette dernière somme est nulle d'après le lemme 2.8. ■

On déduit aussi des lemmes 2.6 et 2.8 le

Lemme 2.11. *Pour tous entiers m, q et r, on a*

$$S(mq,1;rq)=\begin{cases}0 & si\ (r,q)>1,\\ \mu(q)S(m\overline{q},1;r) & si\ (r,q)=1.\end{cases}$$

On a la majoration due essentiellement à Weil :

Lemme 2.12. *Si m, n, c sont trois entiers, on a*

$$|S(m,n;c)|\leq\sqrt{(m,n,c)}\,\tau(c)\sqrt{c}.$$

On donne ensuite deux propriétés de sommes de sommes de Kloosterman. On obtient d'importantes éliminations lorsqu'on tord les sommes de Kloostermann par des caractères de Dirichlet grâce à l'apparition de sommes de Gauss.

Lemme 2.13. *Si m, n, c sont des entiers et si χ est un caractère modulo c, alors*

$$\sum_{\substack{a\,(\mathrm{mod}\,c)\\(a,c)=1}}\chi(a)S(m,na;c)=G_\chi(m)G_\chi(n).$$

En particulier, si $(n,c)=1$ on a

$$\sum_{\substack{a\,(\mathrm{mod}\,c)\\(a,c)=1}}\chi(a)S(m,na;c)=\overline{\chi}(n)G_\chi(m)G_\chi.$$

Enfin, la somme suivante nous sera utile lors de l'évaluation de la contribution des formes nouvelles.

Lemme 2.14. *On suppose vraie l'hypothèse de Riemann pour les séries L de Dirichlet. Soient ℓ, t, N des entiers et x un réel strictement positif. Alors on a*

$$\sum_{\substack{p\leq x\\(p,N)=1}}S(p\ell,1;t)\frac{\ln p}{\sqrt{p}}=2\mu(t)\frac{\mu\left(\frac{t}{(\ell,t)}\right)}{\varphi\left(\frac{t}{(\ell,t)}\right)}\sqrt{x}+O(\varphi(t)\ln^3(tx)+\sqrt{t}\,\tau(t)\ln N).$$

Preuve. On note $\Sigma_N(x;\ell;t)$ la somme de gauche du lemme. La contribution à cette somme des p divisant t est négligeable. On pose $t = pt'$. Si $(p,t') = 1$, grâce aux lemmes 2.11 et 2.12 on a

$$|S(p\ell, 1; pt')| \le |S(\overline{p}\ell, 1; t')| \ll \frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{t}\,\tau(t).$$

Cette inégalité reste vraie si $(p,t') > 1$ grâce au lemme 2.11. On en déduit

$$\sum_{\substack{p\le x\\(p,N)=1,\, p\mid t}} S(p\ell,1;t)\frac{\ln p}{\sqrt{p}} \ll \sqrt{t}\,\tau(t)\ln\ln(3t).$$

Ainsi

$$\Sigma_N(x;\ell;t) = \sum_{\substack{p\le x\\(p,N)=(p,t)=1}} S(p\ell,1;t)\frac{\ln p}{\sqrt{p}} + O(\sqrt{t}\,\tau(t)\ln\ln(3t)).$$

On efface la condition $(p,N) = 1$ grâce à la majoration

$$\sum_{p\mid N} S(p\ell,1;t)\frac{\ln p}{\sqrt{p}} \ll \sqrt{t}\,\tau(t)\sum_{p\mid N}\frac{\ln p}{\sqrt{p}} \le \sqrt{t}\,\tau(t)\ln N.$$

Puisque les p appartiennent maintenant a des classes a premières à t, on écrit l'égalité

$$\begin{aligned}\Sigma_N(x;\ell;t) = &\sum_{\substack{a \,(\mathrm{mod}\, t)\\(a,t)=1}} S(a\ell,1;t) \sum_{\substack{p\le x\\p\equiv a\,(\mathrm{mod}\, t)}}\frac{\ln p}{\sqrt{p}}\\ &+ O(\sqrt{t}\,\tau(t)\ln\ln(3t) + \sqrt{t}\,\tau(t)\ln N).\end{aligned}$$

Par utilisation de l'orthogonalité des caractères modulo t on a ensuite

$$\Sigma_N(x;\ell;t) = \frac{1}{\varphi(t)}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\, t)}\ \sum_{a\,(\mathrm{mod}\, t)}\chi(a)S(a\ell,1;t)\sum_{p\le x}\overline{\chi}(p)\frac{\ln p}{\sqrt{p}}.$$

Grâce aux lemmes 2.13 et 2.3 on en déduit

$$\begin{aligned}\Sigma_N(x;\ell;t) = &\frac{1}{\varphi(t)}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\, t)} G_\chi G_\chi(\ell)(2\delta_\chi\sqrt{x} + O(\ln^3(tx)))\\ &+ O(\sqrt{t}\,\tau(t)\ln\ln(3t) + \sqrt{t}\,\tau(t)\ln N).\end{aligned}$$

On peut alors conclure, grâce au lemme 2.2 par l'égalité

$$\Sigma_N(x;\ell;t) = 2\mu(t)\frac{\mu\big(\frac{t}{(\ell,t)}\big)}{\varphi\big(\frac{t}{(\ell,t)}\big)}\sqrt{x} + O(\varphi(t)\ln^3(tx) + \sqrt{t}\,\tau(t)\ln N). \ \blacksquare$$

2.3. *Fonctions J de Bessel.* On récapitule dans cette partie les propriétés des fonctions J de Bessel dont on aura besoin. Si k est un entier positif ou nul, la fonction de Bessel d'ordre k est définie par

$$J_k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(k+r)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{k+2r}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Pour $k \geq 1$ on a

$$J_k(z) \ll_k z. \tag{9}$$

D'autre part, pour tout $k \geq 0$ on a

$$J_k(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\theta - z\sin\theta)\,d\theta$$

d'où on déduit, pour tout $k \geq 0$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|J_k(z)| \leq 1. \tag{10}$$

D'autre part, on a les relations de récurrence suivantes :

$$2\frac{k}{x}J_k(x) = J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x) \quad (x \neq 0,\ k \geq 1) \tag{11}$$

et

$$2J'_{k-1}(x) = J_{k-2}(x) - J_k(x) \quad (k \geq 2). \tag{12}$$

Enfin, la transformée de Mellin de J_{k-1} est donnée par

$$\int_0^{\infty} J_{k-1}(x)x^s\,dx = 2^s\frac{\Gamma((k+s)/2)}{\Gamma((k-s)/2)} \tag{13}$$

cette égalité étant valable pour $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ et $\mathrm{Re}(s+k) > 0$. On obtient un développement asymptotique de cette transformée de Mellin en considérant le développement en produit de Gauss de la fonction Γ,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z}\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{z+k},$$

valable pour $\mathrm{Re}(z) > 0$. On en déduit, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, la majoration

$$\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a-s)} = a^{2s}\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{s}{a}\right)\right) \tag{14}$$

uniforme en $a > 1$ et $|s| \leq 1-\varepsilon$.

2.4. *Traces harmoniques.* Pour tous entiers strictement positifs a et b on définit

$$\Delta_N(a,b) = \delta(a,b) + 2\pi i^k \sum_{\substack{c=0 \\ c\equiv 0 \pmod N}}^{\infty} \frac{S(a,b;c)}{c}J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{ab}}{c}\right). \tag{15}$$

Cette somme est en fait une formule de trace sur une base orthonormale de l'espace de toutes les formes modulaires de niveau N. Pour $f \in H(M)$ et $L \geq 1$ on définit

$$\varrho_f(L) = \prod_{p \mid L} \left(1 - p\frac{\lambda_f(p)^2}{(p+1)^2}\right).$$

Grâce à la majoration de Deligne, on a $\varrho_f(L) \geq 9^{-\omega(L)} \gg L^{-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ avec une constante dépendant de ε. Les travaux d'Iwaniec, Luo et Sarnak permettent d'exprimer la somme (15) en fonction de bases orthonormales de formes nouvelles.

Lemme 2.15 [ILS00, Lemma 2.7]. *Soient N un entier sans facteur carré et m et n deux entiers strictement positifs tels que $(m, n, N) = 1$ et $(mn, N^2) \mid N$. Alors*

$$\Delta_N(m,n) = \sum_{LM=N} \sum_{f \in H(M)} \frac{\omega_M(f)}{\nu(L)\varrho_f(L)} \cdot \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{\nu((mn,L))}.$$

Par inversion de Möbius, ils donnent ensuite une formule de trace pour les formes primitives de niveau N.

Lemme 2.16 [ILS00, Proposition 2.8]. *Soient N un entier sans facteur carré et m et n deux entiers strictement positifs tels que $(m, N) = 1$ et $(n, N^2) \mid N$. Alors*

$$M^{\mathrm{h}}(\lambda_f(m)\lambda_f(n)) = \frac{1}{N} \sum_{LM=N} \frac{\mu(L)M}{\nu((n,L))} \sum_{\ell \mid L^\infty} \frac{1}{\ell} \Delta_M(m\ell^2, n).$$

Ils en déduisent le corollaire suivant, qui résulte essentiellement de la majoration de Weil.

Lemme 2.17 [ILS00, Corollary 2.10]. *Soient N un entier sans facteur carré et m et n deux entiers strictement positifs tels que $(m, N) = 1$ et $(n, N^2) \mid N$. Alors*

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{h}}(\lambda_f(m)\lambda_f(n)) = {} & \frac{\varphi(N)}{N}\delta(m,n) \\ & + O(k^{-5/6}(mn)^{1/4}N^{-1}(n,N)^{-1/2}\tau(N)^2\tau_3((m,n))\ln(2mnN)). \end{aligned}$$

3. Formules de trace signée. On déduit des lemmes précédents l'estimation suivante des moyennes harmoniques signées des coefficients de Fourier de formes primitives.

Proposition 3.1. *Soit N un entier sans facteur carré. On considère la suite $p_1 < \ldots < p_\ell$ de ses diviseurs premiers, σ un vecteur de $\{-1, 1\}^\ell$*

et k un entier strictement positif. Alors pour tout entier $m \geq 2$ vérifiant $(m, N) = 1$ on a

$$M^\sigma(\lambda(m)) \ll_k \tau(N)^2 N^{-3/4} \ln(2N^2 m) m^{1/4},$$

la constante impliquée ne dépendant que de k.

Preuve. Pour un entier i tel que $0 \leq i \leq \ell$ et une suite $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_\ell)$ telle que $0 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq \ell$ on définit $N_{\boldsymbol{j}} = 1$ si $i = 0$ et $N_{\boldsymbol{j}} = p_{j_1} \ldots p_{j_i}$ sinon. On a $N_{\boldsymbol{j}} \mid N$ et $(N_{\boldsymbol{j}}, m) = 1$. On utilise alors (6) et la formule suivante, conséquence du lemme 2.17 pour conclure :

$$M^{\mathrm{h}}(\lambda(N_{\boldsymbol{j}} m)) \ll_k \tau(N)^2 N^{-1} N_{\boldsymbol{j}}^{-1/4} \ln(2N_{\boldsymbol{j}} N m) m^{1/4}. \ \blacksquare$$

La taille harmonique des ensembles de formes de poids N et de signature σ est quant-à-elle donnée par le

LEMME 3.2. *Soit N un entier sans facteur carré ayant ℓ facteurs premiers distincts. On considère σ un vecteur de $\{-1, 1\}^\ell$ et k un entier strictement positif. Alors*

$$M^\sigma(1) = \frac{1}{2^\ell} \cdot \frac{\varphi(N)}{N} + O_k\biggl(\frac{\tau(N)^2 \ln N}{N}\biggr)$$

où la constante ne dépend que de k.

Preuve. Cela résulte de (6) avec $X = 1$ à qui on applique le lemme 2.17 pour d'une part $m = n = 1$ et d'autre part $m = 1$ et $n = p_{j_1} \ldots p_{j_i}$ où $p_1, \ldots, p_\ell$ sont les diviseurs premiers de N. ■

4. Densité de répartition signée. Dans toute la suite on supposera que les hypothèses de Riemann pour les fonctions L de Dirichlet et des formes primitives sont vraies. Soient k et ℓ des entiers strictement positifs fixés avec k pair. Soit $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell)$ un vecteur de $\{-1, 1\}^\ell$. Soit ϕ une fonction paire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier à support compact dans $]-2, 2[$. On considère une suite d'entiers N sans facteur carré de facteurs premiers $p_1 < \ldots < p_\ell$. On rappelle qu'il existe un réel strictement positif κ tel que $p_1 \geq N^\kappa$.

On va estimer $M^\sigma(D(\phi))$. Grâce à la formule de Riemann (lemme 1.1) avec $R = k^2 N$, on écrit cette moyenne signée sous la forme

$$M^\sigma(D(\phi)) = M_1 + M_2 + M_3 + O_k\biggl(\frac{\ln \ln(3N)}{\ln N}\biggr)$$

où

$$M_1 = M^\sigma(1)\Bigl(\widehat{\phi}(0) + \frac{1}{2}\phi(0)\Bigr),$$

$$M_2 = -\sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\left(\frac{2\ln p}{\ln(k^2N)}\right)\frac{2\ln p}{p\ln(k^2N)}M^\sigma(\lambda(p^2)),$$

$$M_3 = -\sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\left(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\right)\frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)}M^\sigma(\lambda(p)).$$

Le lemme suivant permet d'estimer M_2.

Lemme 4.1. *Soient ℓ et k deux entiers strictement positifs, k pair. Soient N un entier sans facteur carré ayant ℓ facteurs premiers $p_1 < \ldots < p_\ell$, σ un vecteur de $\{-1,1\}^\ell$ et k un entier strictement positif. Alors, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à support compact $[-2+\delta_0, 2-\delta_0]$ tel que $0<\delta_0<2$,*

$$\sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\left(\frac{2\ln p}{\ln(k^2N)}\right)\frac{2\ln p}{p\ln(k^2N)}M^\sigma(\lambda(p^2)) \ll N^{-1/4-\delta_0/5}$$

où la constante impliquée ne dépend que de δ_0, ℓ et k.

Preuve. Par utilisation du théorème des nombres premiers et intégration par partie on a, dès que $a>1$ et $x\geq 2$,

$$\sum_{p\leq x}\frac{\ln p\ln(ap^2)}{\sqrt{p}} \ll \ln(ax)\sqrt{x} \tag{16}$$

où la constante est absolue. En remarquant que $\widehat{\phi}(2\ln p/\ln(k^2N)) = 0$ pour tout premier $p > (k^2N)^{1-\delta_0/2}$ et en utilisant (16) on obtient le résultat énoncé par utilisation de la proposition 3.1. ■

La proposition suivante permet d'estimer le terme M_3.

Proposition 4.2. *L'hypothèse de Riemann sur les fonctions L de formes primitives est supposée vraie. Soient k et ℓ des entiers strictement positifs fixés. Soit κ un réel vérifiant $0<\kappa\leq 1/\ell$. Soit $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_\ell)$ un vecteur de $\{-1,1\}^\ell$. Soit ϕ une fonction paire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier à support compact dans $]-2,2[$. On considère un entier N sans facteur carré ayant ℓ facteurs premiers $p_1,\ldots,p_\ell$ tels que $N^\kappa \leq p_1 < \ldots < p_\ell$. Alors*

$$\sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\left(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\right)\frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)}M^\sigma(\lambda(p))$$

$$= \frac{1}{2^\ell}\cdot\frac{\varphi(N)}{N} i^k\sigma_1\ldots\sigma_\ell\left(\frac{\phi(0)}{2} - \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}\,dx\right) + O_{k,\kappa,\ell}\left(\frac{\ln\ln(3N)}{\ln N}\right).$$

Preuve. Grâce à (6) on écrit

$$2^\ell M_3 = M_3(\emptyset) + \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq\ell}\sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_i}\mu(p_{j_1}\ldots p_{j_i})M_3(\boldsymbol{j}).$$

Pour $0 \le i \le \ell$ et toute suite $\boldsymbol{j}$ de i éléments tels que $1 \le j_1 < \ldots < j_i \le \ell$ on a posé

$$M_3(\boldsymbol{j}) = -\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}} \sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\left(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\right) \frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)} M^{\mathrm{h}}(\lambda(N_{\boldsymbol{j}})\lambda(p))$$

avec $N_{\boldsymbol{j}} = p_{j_1} \ldots p_{j_i}$. Pour $\boldsymbol{j} = \emptyset$ (c'est-à-dire $i = 0$) il faut prendre $N_\emptyset = 1$ dans ces formules. Le lemme 2.16 permet d'écrire

$$M_3(\boldsymbol{j}) := M_3^p(\boldsymbol{j}) + M_3^e(\boldsymbol{j}) \tag{17}$$

avec

$$M_3^p(\boldsymbol{j}) = -\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}} \sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\left(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\right) \frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)} \varDelta_N(p, N_{\boldsymbol{j}})$$

et

$$M_3^e(\boldsymbol{j}) = -\frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{N} \sum_{\substack{LM=N\\ L\neq 1}} \frac{\mu(L)M}{\nu((N_{\boldsymbol{j}}, L))} \sum_{l\mid L^\infty} \frac{1}{l}$$
$$\times \sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\left(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\right) \frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)} \varDelta_M(pl^2, N_{\boldsymbol{j}}).$$

On montre que $M_3^e(\boldsymbol{j})$ est négligeable dans le

Lemme 4.3. *Les hypothèses de Riemann sur les fonctions L de Dirichlet et des formes primitives sont supposées vraies. Soient N un entier sans facteur carré de plus petit diviseur premier p_1, i un entier, $0 \le i \le \ell$ et $\boldsymbol{j}$ une suite $1 \le j_1 < \ldots < j_i \le \ell$. Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \delta_0/2$,*

$$M_3^e(\boldsymbol{j}) = O_{k,\varepsilon}\left(\frac{N^\varepsilon}{p_1}\right)\cdot$$

Preuve. Grâce au lemme 2.15 et puisque $(l, p) = 1$ on a

$$\varDelta_M(pl^2, N_{\boldsymbol{j}}) = \sum_{L_1M_1=M} \sum_{f\in H(M_1)} \frac{\omega_{M_1}(f)}{\nu(L_1)\varrho_f(L_1)} \cdot \frac{\lambda_f(l^2)\lambda_f(p)\lambda_f(N_{\boldsymbol{j}})}{\nu((l^2N_{\boldsymbol{j}}p, L_1))}.$$

Le report de cette expression dans la définition de $M_3^e(\boldsymbol{j})$ donne

$$|M_3^e(\boldsymbol{j})| \le \frac{\sqrt{N_j}}{N} \sum_{\substack{LL_1M_1=N\\ L\neq 1}} \frac{L_1M_1}{\nu((N_{\boldsymbol{j}}, L))} \sum_{f\in H(M_1)} \frac{\omega_{M_1}(f)}{\nu(L_1)\varrho_f(L_1)} |\lambda_f(N_{\boldsymbol{j}})|$$
$$\times \sum_{l\mid L^\infty} \frac{|\lambda_f(l^2)|}{l}$$
$$\times \left| \sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\left(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\right) \frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)} \cdot \frac{\lambda_f(p)}{\nu((l^2N_jp, L_1))} \right|.$$

La majoration de Deligne (2) donne

$$\sum_{l\mid L^\infty} \frac{|\lambda_f(l^2)|}{l} \ll_\varepsilon L^\varepsilon \le N^\varepsilon.$$

Puisque $(p,N)=1$ et $(L,L_1)=1$ alors $\nu((l^2N_{\boldsymbol{j}}p,L_1))=\nu((N_{\boldsymbol{j}},L_1))$ puis

$$\nu((N_{\boldsymbol{j}},L_1))\nu((N_{\boldsymbol{j}},L))=\nu((N_{\boldsymbol{j}},LL_1)).$$

Enfin la majoration (3) donne

$$\frac{\omega_{M_1}(f)}{\nu(L_1)\varrho_f(L_1)} \ll_\varepsilon \frac{N^\varepsilon}{L_1M_1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} M_3^e(\boldsymbol{j}) \ll_{k,\varepsilon} N^{-1+\varepsilon} & \sum_{\substack{LL_1M_1=N\\ L\neq 1}} \frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{\nu((N_{\boldsymbol{j}},LL_1))} \\ & \times \sum_{f\in H(M_1)} |\lambda_f(N_{\boldsymbol{j}})| \Bigg| \sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\Big(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\Big)\frac{\lambda_f(p)\ln p}{\sqrt{p}}\Bigg|. \end{aligned}$$

Grâce à (8), on a

$$\begin{aligned} \sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\Big(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\Big)\frac{\lambda_f(p)\ln p}{\sqrt{p}} &= -\int_{R^{-1}}^{R} \frac{1}{\ln(k^2N)} \sum_{\substack{p\le t\\ (p,N)=1}} \frac{\lambda_f(p)\ln p}{\sqrt{p}}\widehat{\phi}'(t)\,\frac{dt}{t} \\ &\ll_{k,\varepsilon} N^\varepsilon, \end{aligned}$$

R valant maintenant $(k^2N)^{2-\delta_0}$, et donc

$$M_3^e(\boldsymbol{j}) \ll_{k,\varepsilon} N^{-1+\varepsilon} \sum_{\substack{LL_1M_1=N\\ L\neq 1}} \frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{\nu((N_{\boldsymbol{j}},LL_1))} \sum_{f\in H(M_1)} |\lambda_f(N_{\boldsymbol{j}})|.$$

On écrit $N_{\boldsymbol{j}}=AB$ avec $A\mid M_1$ et $(B,M_1)=1$. Alors, grâce à (5), $\lambda_f(N_{\boldsymbol{j}}) \ll \tau(B)/\sqrt{A}$ et $(N_{\boldsymbol{j}},LL_1)=(B,LL_1)=B$, donc

$$M_3^e(\boldsymbol{j}) \ll_{k,\varepsilon} N^\varepsilon \sum_{\substack{LL_1\mid N\\ L\neq 1}} \frac{1}{\sqrt{B}LL_1} \ll_{k,\varepsilon} \frac{N^\varepsilon}{p_1},$$

ce qui termine la preuve. ∎

Remarque. C'est ici le *seul* endroit où l'on utilise l'hypothèse de Riemann pour les fonctions L de formes primitives. Elle est utilisée afin d'estimer «trivialement» la contribution des formes anciennes. En particulier, elle est inutile en poids $k\le 10$, $k=14$ ou en niveau premier.

On estime maintenant le premier membre de $M_3(\boldsymbol{j})$ (voir (17)). On a donc l'égalité

$$M_3^p(\boldsymbol{j}) = -\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}} \sum_{(p,N)=1} \widehat{\phi}\Big(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\Big) \frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)} \Delta_N(p, N_{\boldsymbol{j}}).$$

On écrit, puisque $(p, N_{\boldsymbol{j}}) = 1$ et grâce au lemme 2.5 et à la définition (15),

$$M_3^p(\boldsymbol{j}) = -\frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{N} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r} 2\pi i^k \sum_{(p,N)=1} S(pN_{\boldsymbol{j}}, 1; rN) J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{pN_{\boldsymbol{j}}}}{rN}\Big) \times \widehat{\phi}\Big(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\Big) \frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)}. \tag{18}$$

On appelle $L_{\boldsymbol{j}}$ le complémentaire de $N_{\boldsymbol{j}}$ dans N, $N = N_{\boldsymbol{j}} L_{\boldsymbol{j}}$. On a $(N_{\boldsymbol{j}}, L_{\boldsymbol{j}}) = 1$. De même, dans le but de simplifier les sommes de Kloosterman on décompose r en partie ayant mêmes diviseurs que $N_{\boldsymbol{j}}$ et partie première à $N_{\boldsymbol{j}}$,

$$r = vw, \qquad v \mid N_{\boldsymbol{j}}^{\infty}, \qquad (w, N_{\boldsymbol{j}}) = 1.$$

On peut alors utiliser le lemme 2.6 pour écrire

$$S(pN_{\boldsymbol{j}}, 1; vN_{\boldsymbol{j}}wL_{\boldsymbol{j}}) = S(pN_{\boldsymbol{j}}\overline{wL_{\boldsymbol{j}}}^2, 1; vN_{\boldsymbol{j}}) S(p\overline{v}^2\overline{N}_{\boldsymbol{j}}, 1; wL_{\boldsymbol{j}}).$$

Si $(v, N_{\boldsymbol{j}}) > 1$ alors $(pN_{\boldsymbol{j}}\overline{wL_{\boldsymbol{j}}}^2, v, N_{\boldsymbol{j}}) > 1$ et, d'après le lemme 2.10,

$$S(pN_{\boldsymbol{j}}\overline{wL_{\boldsymbol{j}}}^2, 1; vN_{\boldsymbol{j}}) = 0,$$

on peut donc supposer $(v, N_{\boldsymbol{j}}) = 1$. Comme $v \mid N_{\boldsymbol{j}}^{\infty}$, on peut supposer $v = 1$. On peut alors récrire (18)

$$M_3^p(\boldsymbol{j}) = -\frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{N} \sum_{(w,N_j)=1} \frac{2\pi i^k}{w} \sum_{(p,N)=1} S(pN_{\boldsymbol{j}}, 1; wN_{\boldsymbol{j}}L_{\boldsymbol{j}}) \times J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{pN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\Big) \widehat{\phi}\Big(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\Big) \frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)}. \tag{19}$$

Le lemme 2.11 donne

$$M_3^p(\boldsymbol{j}) = -\frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{N} \mu(N_{\boldsymbol{j}}) \sum_{(w,N_j)=1} \frac{1}{w} 2\pi i^k \sum_{(p,N)=1} S(p\overline{N}_{\boldsymbol{j}}, 1; wL_{\boldsymbol{j}}) \times J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{pN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\Big) \widehat{\phi}\Big(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\Big) \frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)}.$$

Par les majorations du lemme 2.12 et (9) on a la majoration

$$\frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{N}\sum_{\substack{w\geq 12k\pi N_{\boldsymbol{j}}^2L_{\boldsymbol{j}}\\(w,N_{\boldsymbol{j}})=1}}\frac{1}{w}2\pi i^k\sum_{(p,N)=1}S(p\overline{N}_{\boldsymbol{j}},1;wL_{\boldsymbol{j}})$$
$$\times J_{k-1}\bigg(\frac{4\pi\sqrt{pN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\bigg)\widehat{\phi}\bigg(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\bigg)\frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)}\ll_k N^{-\delta_0/2}.$$

Remarque. Si $k\geq 4$, cette troncature des grandes valeurs de w n'est pas nécessaire. En (21) on peut en effet utiliser (9) au lieu de (10).

On transforme alors (19) en

$$M_3^p(\boldsymbol{j})=-\frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{N}\mu(N_{\boldsymbol{j}})\sum_{\substack{w\leq 12k\pi N_{\boldsymbol{j}}^2L_{\boldsymbol{j}}\\(w,N_{\boldsymbol{j}})=1}}\frac{1}{w}2\pi i^k\sum_{(p,N)=1}S(p\overline{N}_{\boldsymbol{j}},1;wL_{\boldsymbol{j}})$$
$$\times J_{k-1}\bigg(\frac{4\pi\sqrt{pN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\bigg)\widehat{\phi}\bigg(\frac{\ln p}{\ln(k^2N)}\bigg)\frac{2\ln p}{\sqrt{p}\ln(k^2N)}+O(N^{-\delta_0/2}).$$

Par intégration de Stieltjes par parties et utilisation du lemme 2.14 on écrit

$$M_3^p(\boldsymbol{j})=\frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{N}\mu(N_{\boldsymbol{j}})\sum_{\substack{w\leq 12k\pi N_{\boldsymbol{j}}^2L_{\boldsymbol{j}}\\(w,N_{\boldsymbol{j}})=1}}\frac{1}{w}$$
$$\times\frac{4\pi i^k}{\ln(k^2N)}\int_0^\infty\bigg(2\mu(wL_{\boldsymbol{j}})\frac{\mu(wL_{\boldsymbol{j}})}{\varphi(wL_{\boldsymbol{j}})}\sqrt{x}+O(\varphi(wL_{\boldsymbol{j}})\ln^3(wN))\bigg)$$
$$d\bigg(J_{k-1}\bigg(\frac{4\pi\sqrt{xN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\bigg)\widehat{\phi}\bigg(\frac{\ln x}{\ln(k^2N)}\bigg)\bigg)+O(N^{-\delta_0/2}).$$

Il résulte de la condition sur le support de $\widehat{\phi}$ qu'on peut restreindre les variations de la variable d'intégration à $N^{-2+\delta_0}\ll_k x\ll_k N^{2-\delta_0}$. On a utilisé ce fait pour simplifier le terme d'erreur. On définit

$$Q^e=\frac{4\pi i^k}{\ln(k^2N)}\int_0^\infty O(\varphi(wL_{\boldsymbol{j}})\ln^3(wN))\,d\bigg(J_{k-1}\bigg(\frac{4\pi\sqrt{xN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\bigg)\widehat{\phi}\bigg(\frac{\ln x}{\ln(k^2N)}\bigg)\bigg).$$

Par calcul de l'élément différentiel, on obtient

$$Q^e=\frac{4\pi i^k}{\ln(k^2N)}O(\varphi(wL_{\boldsymbol{j}})\ln^3(wN))$$
$$\times\int_0^\infty\bigg(\frac{2\pi\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{wN\sqrt{x}}J'_{k-1}\bigg(\frac{4\pi\sqrt{xN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\bigg)\widehat{\phi}\bigg(\frac{\ln x}{\ln(k^2N)}\bigg)$$
$$+\frac{1}{x\ln(k^2N)}J_{k-1}\bigg(\frac{4\pi\sqrt{xN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\bigg)\widehat{\phi}'\bigg(\frac{\ln x}{\ln(k^2N)}\bigg)\bigg)\,dx.$$

Le support de $\widehat{\phi}$ étant $[-2+\delta_0, 2-\delta_0]$, on a la majoration

$$\begin{aligned}Q^e \ll\ & \varphi(wL_{\boldsymbol{j}})\ln^3(wN) \\ & \times \int_{R^{-1}}^{R}\left\{\left|J'_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{xN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\right)\right| + \frac{wN}{2\pi\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}x}}\left|J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{xN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\right)\right|\right\} \\ & \times \frac{2\pi\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{wN\sqrt{x}}\,dx\end{aligned}$$

où $R = (k^2N)^{2-\delta_0}$. On effectue alors le changement de variable $y = (4\pi\sqrt{xN_{\boldsymbol{j}}})/(wN)$ pour obtenir

$$Q^e \ll \varphi(wL_{\boldsymbol{j}})\ln^3(wN)\int_z^Z |J'_{k-1}(y)| + \frac{1}{y}|J_{k-1}(y)|\,dy$$

où

$$Z = \frac{4\pi k^{2-\delta_0}}{w}\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}N^{-\delta_0/2} \tag{20a}$$

et

$$z = \frac{4\pi k^{-2+\delta_0}}{wN^{2-\delta_0/2}}\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}. \tag{20b}$$

Grâce à (11) et (12) on exprime l'intégrale en combinaison de fonctions J de Bessel

$$Q^e \ll \varphi(wL_{\boldsymbol{j}})\ln^3(wN)\int_z^Z (|J_{k-2}(y)| + |J_{k-1}(y)| + |J_k(y)|)\,dy. \tag{21}$$

Grâce à (10) on obtient alors

$$Q^e \ll_k \varphi(wL_{\boldsymbol{j}})\ln^3(wN)\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}w^{-1}N^{-\delta_0/2} \ll L_{\boldsymbol{j}}\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}N^{-\delta_0/3}$$

puis

$$\frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{N}\sum_{\substack{w\le 12k\pi N_j^2L_j\\(w,N_j)=1}}\frac{1}{w}Q^e \ll_k N^{-\delta_0/4}.$$

On a alors

$$M_3^p(\boldsymbol{j}) = \frac{\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}{N}\mu(N_{\boldsymbol{j}})\sum_{\substack{w\le 12k\pi N_j^2L_j\\(w,N_j)=1}}\frac{1}{w}Q^p + O(N^{-\delta_0/4})$$

avec

$$Q^p = \frac{4\pi i^k}{\ln(k^2N)}\int_0^\infty 2\mu(wL_{\boldsymbol{j}})\frac{\mu(wL_{\boldsymbol{j}})}{\varphi(wL_{\boldsymbol{j}})}\sqrt{x}\,d\left(J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{xN_{\boldsymbol{j}}}}{wN}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\ln x}{\ln(k^2N)}\right)\right).$$

On effectue une nouvelle intégration par parties sur l'intégrale de Q^p et le changement de variable $y = (4\pi\sqrt{xN_j})/(wN)$ pour obtenir

$$Q^p = -2i^k w \frac{N}{\sqrt{N_j}} \cdot \frac{\mu(wL_j)^2}{\varphi(wL_j)} \int_0^\infty \widehat{\phi}\left(\frac{2\ln\left(\frac{wN}{4\pi\sqrt{N_j}}y\right)}{\ln(k^2N)}\right) J_{k-1}(y) \frac{dy}{\ln(k^2N)}.$$

Grâce à (10), on a

$$Q^p \ll_k w \frac{N}{\sqrt{N_j}} \cdot \frac{1}{\varphi(wL_j)} \int_z^Z |J_{k-1}(y)|\, dy \ll_k \frac{N\tau(L_j)}{L_j} \cdot \frac{\tau(w)}{w} N^{-\delta_0/2}$$

avec Z et z comme en (20). Ainsi,

$$\frac{\sqrt{N_j}}{N} \sum_{w \geq 12k\pi N_j^2 L_j} \frac{1}{w} Q^p \ll_k \frac{1}{NL_j\sqrt{N_j}}$$

et on peut réintégrer les grandes valeurs de w :

$$M_3^p(\boldsymbol{j}) = \frac{\sqrt{N_j}}{N} \mu(N_j) \sum_{(w,N_j)=1} \frac{1}{w} Q^p + O(N^{-\delta_0/3}).$$

On transforme ensuite l'intégrale intervenant dans l'expression précédente. Pour cela, on remplace $\widehat{\phi}$ par son expression en ϕ pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty J_{k-1}(y)\widehat{\phi}\left(\frac{2\ln\frac{wNy}{4\pi\sqrt{N_j}}}{\ln(k^2N)}\right)\frac{dy}{\ln(k^2N)}\\ &\quad= \int_{t=-\infty}^{\infty} \phi(t)\left(\frac{wN}{4\pi\sqrt{N_j}}\right)^{-4i\pi t/\ln(k^2N)} \int_{y=0}^{\infty} J_{k-1}(y) y^{-4i\pi t/\ln(k^2N)}\, dy \frac{dt}{\ln(k^2N)}.\end{aligned}$$

Enfin, grâce à (13) on obtient, après avoir posé $x = t/\ln(k^2N)$,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty J_{k-1}(y)\widehat{\phi}\left(\frac{2\ln\frac{wNy}{4\pi\sqrt{N_j}}}{\ln(k^2N)}\right)\frac{dy}{\ln(k^2N)}\\ &\qquad= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x\ln(k^2N))\left(\frac{2\pi\sqrt{N_j}}{wN}\right)^{4i\pi x} \frac{\Gamma(k/2 - 2i\pi x)}{\Gamma(k/2 + 2i\pi x)}\, dx.\end{aligned}$$

Si w et L_j ne sont pas premiers entre eux, alors $\mu(wL_j)^2 = 0$, donc on peut supposer $(w, L_j) = 1$, qui conduit à $(w, N) = 1$, $\mu(wL_j)^2 = \mu(w)^2$ et

$\varphi(wL_{\boldsymbol{j}}) = \varphi(L_{\boldsymbol{j}})\varphi(w)$. Ainsi, on obtient

$$M_3^p(\boldsymbol{j}) = -2i^k \frac{\mu(N_{\boldsymbol{j}})}{\varphi(L_{\boldsymbol{j}})} \sum_{(w,N)=1} \frac{\mu(w)^2}{\varphi(w)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x\ln(k^2N)) \left(\frac{2\pi}{wL_{\boldsymbol{j}}\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}\right)^{4i\pi x} \frac{\Gamma(k/2-2i\pi x)}{\Gamma(k/2+2i\pi x)}\,dx + O(N^{-\delta_0/3}).$$

On pose

$$\gamma(s) = \sum_{(r,N)=1} \frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)} r^{-s}.$$

Cette série converge pour $\mathrm{Re}(s) > 0$. On a alors

$$M_3^p(\boldsymbol{j}) = -2i^k \frac{\mu(N_{\boldsymbol{j}})}{\varphi(L_{\boldsymbol{j}})} \times \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x\ln(k^2N)) \left(\frac{2\pi}{L_{\boldsymbol{j}}\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}\right)^{4i\pi x} \times \frac{\Gamma(k/2-2i\pi x)}{\Gamma(k/2+2i\pi x)} \gamma(4i\pi x+\varepsilon)\,dx + O(N^{-\delta_0/4}). \tag{22}$$

Or

$$\gamma(s) = \prod_{(p,N)=1} \left(1 + \frac{p^{-s}}{p-1}\right) = \beta(s)\zeta(s+1)\alpha(s)$$

avec

$$\beta(s) = \prod_{p|N} \left(1 + \frac{p^{-s}}{p-1}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad \alpha(s) = \prod_{p} \left(1 + \frac{p^{-s}-p^{-2s}}{p(p-1)}\right).$$

Or,

$$\frac{\alpha'(0)}{\alpha(0)} = \sum_p \frac{\ln p}{p(p-1)} = O(1),$$

donc

$$\alpha(s) = 1 + O(s)$$

uniformément pour $|s| \le 1/2 - \varepsilon$. De même

$$\frac{\beta'(0)}{\beta(0)} = \sum_{p|N} \frac{\ln p}{p} = O(\ln\ln(3N))$$

et $\beta(0) = \varphi(N)/N$, donc

$$\beta(s) = \frac{\varphi(N)}{N}(1 + O(s\ln\ln(3N)))$$

uniformément pour $|s| \le 1$. On a alors

$$\gamma(s)=\frac{\varphi(N)}{sN}+O\biggl(\frac{\varphi(N)\ln\ln(3N)}{N}\biggr) \tag{23}$$

uniformément pour $|s|\le 1/2-\varepsilon$. D'autre part, d'après (14),

$$\frac{\Gamma(k/2-2i\pi x)}{\Gamma(k/2+2i\pi x)}=\biggl(\frac{k}{2}\biggr)^{-4i\pi x}(1+O_k(x))$$

uniformément pour $|x|\le 1/(2\pi)-\varepsilon=A$. Après changement de x en $-x$ et par parité de ϕ on obtient enfin

$$\begin{aligned} M_3^p(\boldsymbol{j}) = {} & -2i^k\frac{\varphi(N)}{N}\cdot\frac{\mu(N_{\boldsymbol{j}})}{\varphi(L_{\boldsymbol{j}})}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x\ln(k^2N)) \\ & \times\biggl(\frac{4\pi}{kL_{\boldsymbol{j}}\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}\biggr)^{-4i\pi x}\frac{dx}{\varepsilon-4i\pi x}+O_k\biggl(\frac{\ln\ln(3N)}{\varphi(L_{\boldsymbol{j}})\ln(k^2N)}\biggr). \end{aligned} \tag{24}$$

Remarque. En toute rigueur, pour appliquer (23) il faut couper l'intégrale de (22) en

$$\int\limits_{|x|\le(4\pi)^{-1}A}+\int\limits_{|x|>(4\pi)^{-1}A}.$$

Mais la seconde intégrale est aussi petite que voulue lorsque $N\to\infty$ puisque $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On peut donc sans souci la soustraire de (22) pour la rajouter à (24).

On pose $\Omega=(kN/(4\pi\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}))^2$. Alors

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x\ln(k^2N))\biggl(\frac{4\pi}{kL_{\boldsymbol{j}}\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}\biggr)^{-4i\pi x}\frac{dx}{\varepsilon-4i\pi x} \\ &\qquad = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(y\varepsilon\ln(k^2N))\cos(2\pi y\varepsilon\ln\Omega)\,\frac{dy}{1+(4\pi y)^2} \\ &\qquad\quad - i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x\ln(k^2N))\sin(2\pi x\ln\Omega)\,\frac{dx}{-\varepsilon+4i\pi x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x\ln(k^2N))\biggl(\frac{4\pi}{kL_{\boldsymbol{j}}\sqrt{N_{\boldsymbol{j}}}}\biggr)^{-4i\pi x}\frac{dx}{\varepsilon-4i\pi x} \\ &\qquad = \frac{\phi(0)}{4}-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\sin\biggl(2\pi x\frac{\ln\Omega}{\ln(k^2N)}\biggr)\,\frac{dx}{2\pi x}. \end{aligned}$$

Si $N\ne N_{\boldsymbol{j}}$, on remarque que $|\ln\Omega/\ln(k^2N)|\le 2$ pour majorer l'intégrale de droite de l'égalité précédente :

$$\left|\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\sin\left(2\pi x\frac{\ln\Omega}{\ln(k^2N)}\right)\frac{dx}{2\pi x}\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(x)|\,dx.$$

On déduit alors de (24) que si $\boldsymbol{j}\neq(1,\ldots,\ell)$ alors

$$M_3^p(\boldsymbol{j})\ll\frac{1}{p_1}+\frac{\ln\ln(3N)}{\ln(k^2N)},\qquad \boldsymbol{j}\neq(1,\ldots,\ell).$$

On conclut si $N=N_{\boldsymbol{j}}$ en utilisant

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\sin\left(2\pi x\frac{\ln\Omega}{\ln(k^2N)}\right)\frac{dx}{2\pi x}=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\sin(2\pi x)\,\frac{dx}{2\pi x}+O\left(\frac{1}{\ln(k^2N)}\right)$$

qui se voit en calculant la différence des deux intégrales. ∎

On déduit le théorème 1 du lemme 3.2 et de la proposition 4.2.

Références

[GHL94] D. Goldfeld, J. Hoffstein and D. Lieman, *An effective zero-free region*, Ann. of Math. 140 (1994), 177–181. Appendice de [HL94].

[HL94] J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, ibid., 161–181.

[Iwa97] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Grad. Stud. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[ILS00] H. Iwaniec, W. Luo and P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L-functions*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., à paraître.

[KS99] N. M. Katz and P. Sarnak, *Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy*, Colloq. Publ. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Kna92] A. W. Knapp, *Elliptic Curves*, Math. Notes 40, Princeton Univ. Press, Princeton, 1992.

[Mic98] P. Michel, *Autour de la conjecture de Sato–Tate pour les sommes de Kloosterman, II*, Duke Math. J. 92 (1998), 221–254.

[Miy89] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer, Berlin, 1989.

[RS96] Z. Rudnick and P. Sarnak, *Zeros of principal L-functions and random matrix theory*, Duke Math. J. 81 (1996), 269–322.

[Ten95] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Vol. 1 de Cours spécialisés, Soc. Math. de France, Paris, 1995.

Université Paris-Sud
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex, France
E-mail: Emmanuel.Royer@math.u-psud.fr
emmanuel.royer@polytechnique.org

Reçu le 30.6.2000
et révisé le 16.10.2000 (3844)